

MATEMÁTICA DISCRETA II (MI) TRABAJOS EN GRUPO

PROBLEMAS EXTREMALES EN GRAFOS

Los problemas **extremales** preguntan cuál es el mayor (o menor) grafo con una propiedad específica. El tamaño de un grafo se mide por su número de aristas. Si para una clase de grafos un parámetro toma a lo más el valor k , todos los grafos que alcanzan ese valor son los grafos **extremales**. Por ejemplo, si la propiedad es “no poseer ciclos” el tamaño máximo es $n - 1$, pues todo grafo sin ciclos tiene a lo más $n - 1$ aristas y los grafos extremales son los árboles.

El primer resultado conocido es el siguiente teorema sobre grafos sin triángulos (3-ciclos)

Teorema de Mantel

El máximo número de aristas en un grafo de orden n sin triángulos (3-ciclos) es $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

¿Cuáles son los grafos extremales para esta propiedad de no tener triángulos?

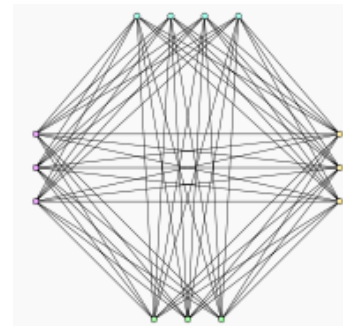
La generalización de este resultado a grafos completos se debe a Turán.

Teorema de Turán

El máximo número de aristas en un grafo de orden n sin k -clanes (grafos completos) de k vértices es $\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$

Los grafos extremales correspondientes son los grafos de Turán,

$K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$ con $|n_i - n_j| \leq 1$



El grafo de Turán
 $T(13,4) = K_{4,3,3,3}$

En el trabajo se presentarán varias demostraciones de estos resultados y se describirán otros del mismo tipo.

Otro tipo de grafos que también son extremales en cierto sentido son las jaulas (“cages” en inglés). Una g-jaula es un grafo 3-regular, de cintura g y con el menor número posible de vértices. Se pide comprobar que las jaulas de cintura 3, 4, 5 y 6 son, respectivamente, los grafos K_4 , $K_{3,3}$, grafo de Petersen y grafo de Heawood.

Referencias

- M. Aigner, G. Ziegler: “Proofs from THE BOOK”, (cap. 36, 4th edition), Springer, 2010.
- M. Aigner: “Turán’s graph theorem”. *Am. Math. Monthly*, 102 (9), pp. 808-816. (1995)
- N. Hartsfield, G. Ringel: “Pearls in Graph Theory”. Dover, 2003

Y para los interesados aquí tenéis un enlace a otro problema planteado por Turán, para el que todavía no se conoce la solución.

<https://cifrasyteclas.com/el-problema-matematico-que-nacio-en-un-campo-de-trabajo-de-la-segunda-guerra-mundial/>