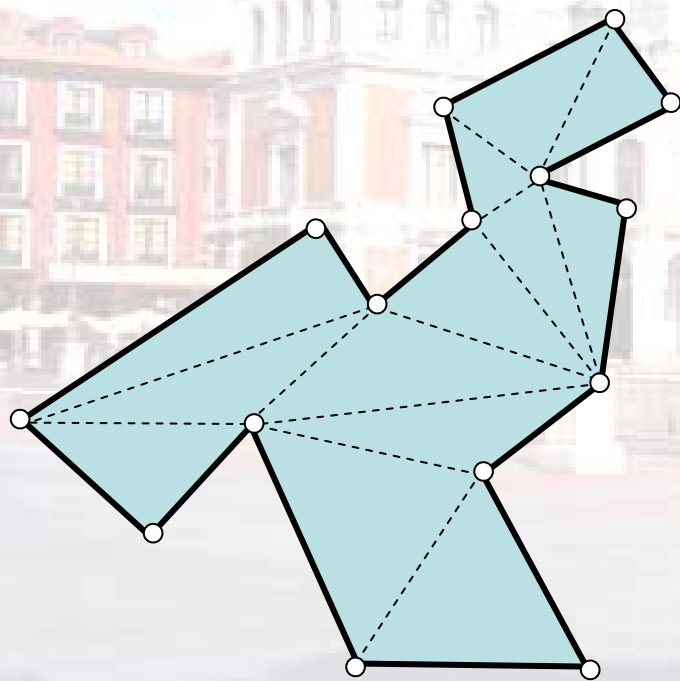


Galerías de Arte

Combinatoria *versus* Geometría



Gregorio Hernández
Universidad Politécnica de Madrid

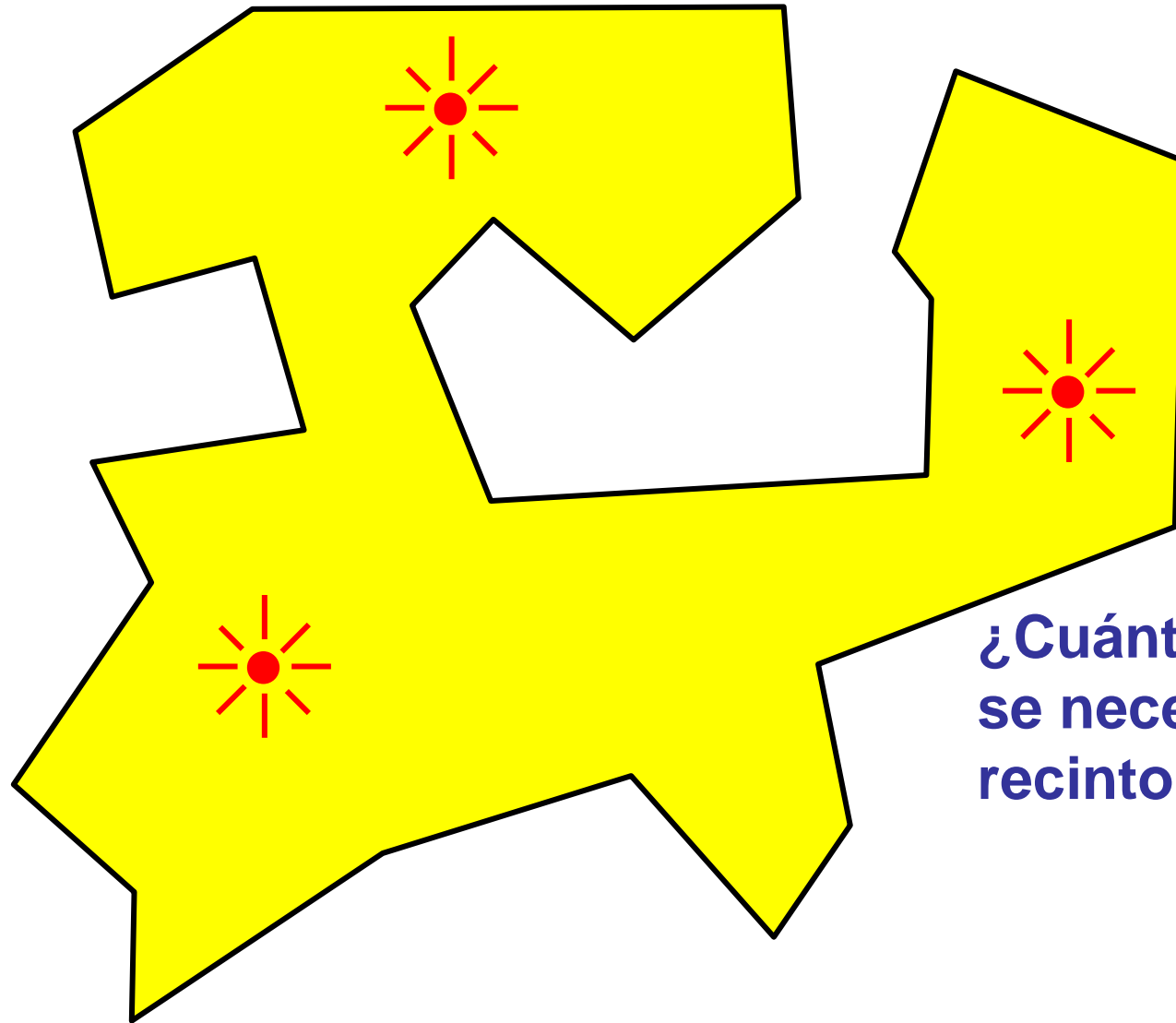




¿Cuántos vigilantes se necesitan?

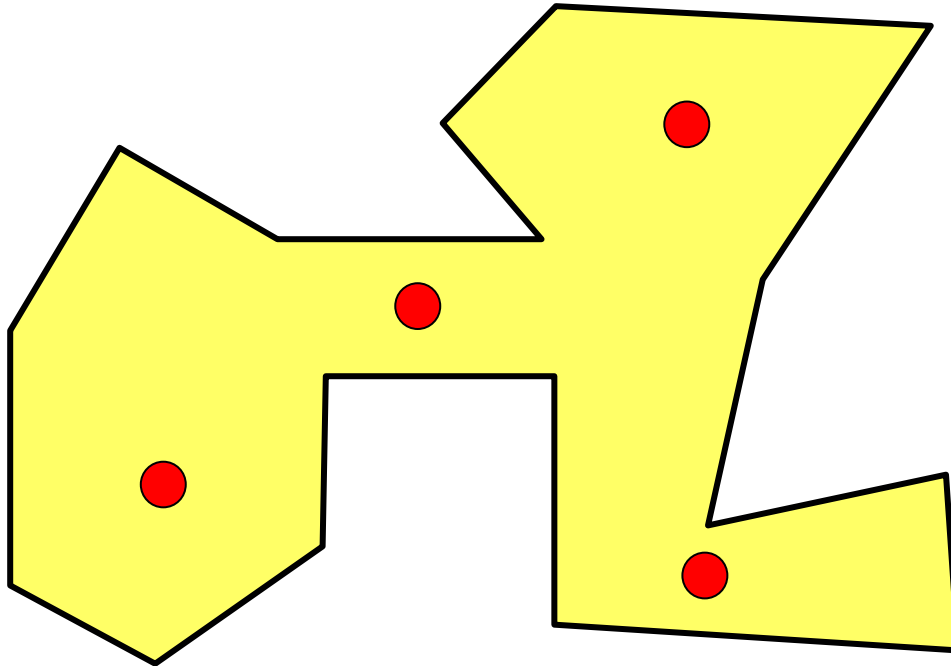


Galerías de Arte



¿Cuántos vigilantes se necesitan en un recinto poligonal?

Galerías de Arte

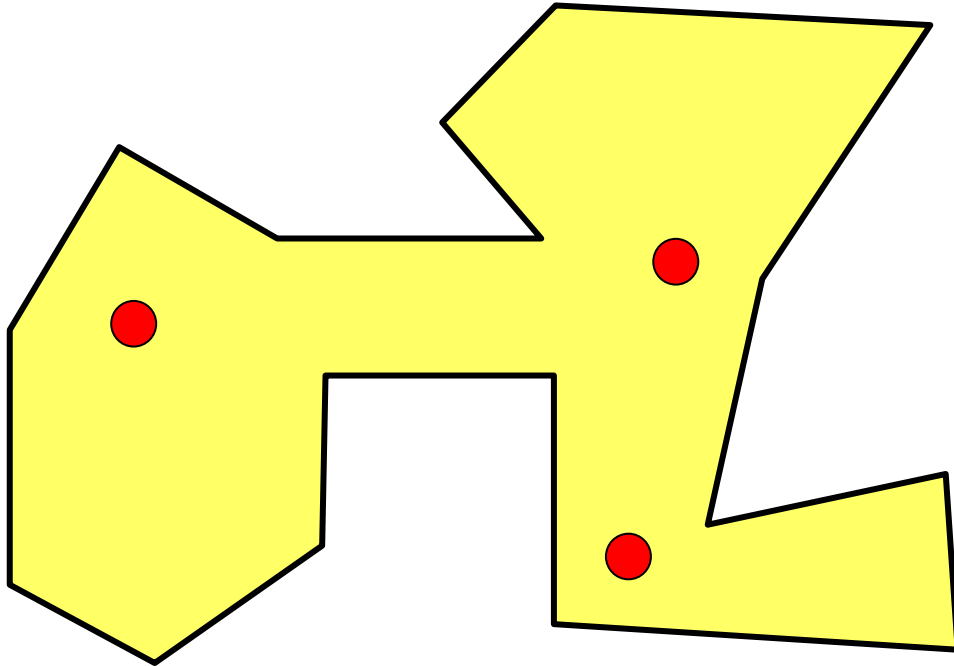


Victor Klee, 1973

¿Cuántas luces?
¿Cuántos guardias?

PROBLEMA DE LAS GALERÍAS DE ARTE

Galerías de Arte

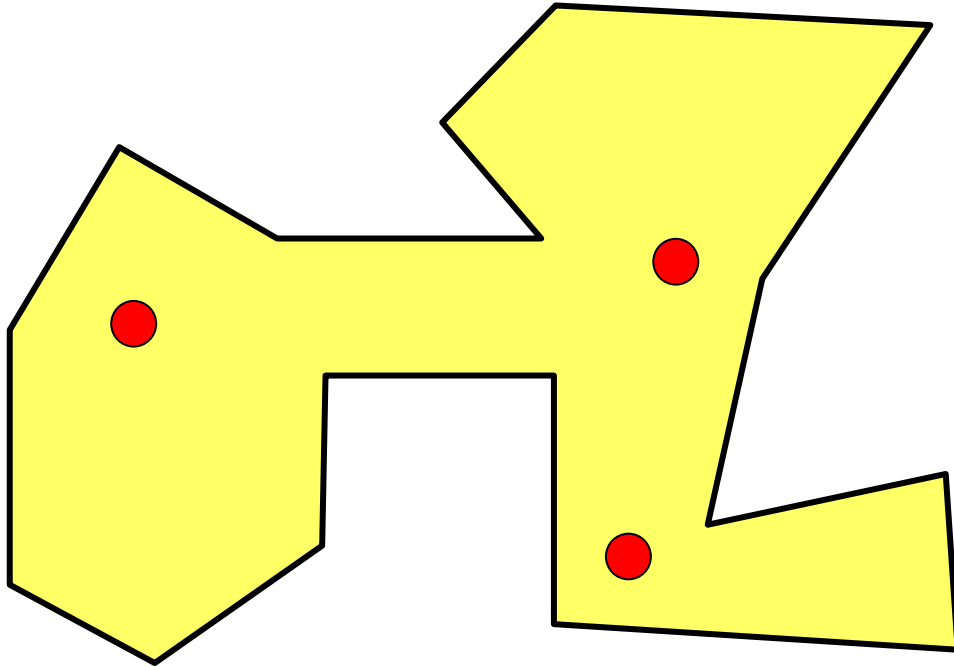


PROBLEMA ALGORÍTMICO

... es NP-completo
Lee-Lin, 1979

Dado un polígono P de n lados, decidir cuántos guardias son necesarios para vigilar P y dónde se deben ubicar.

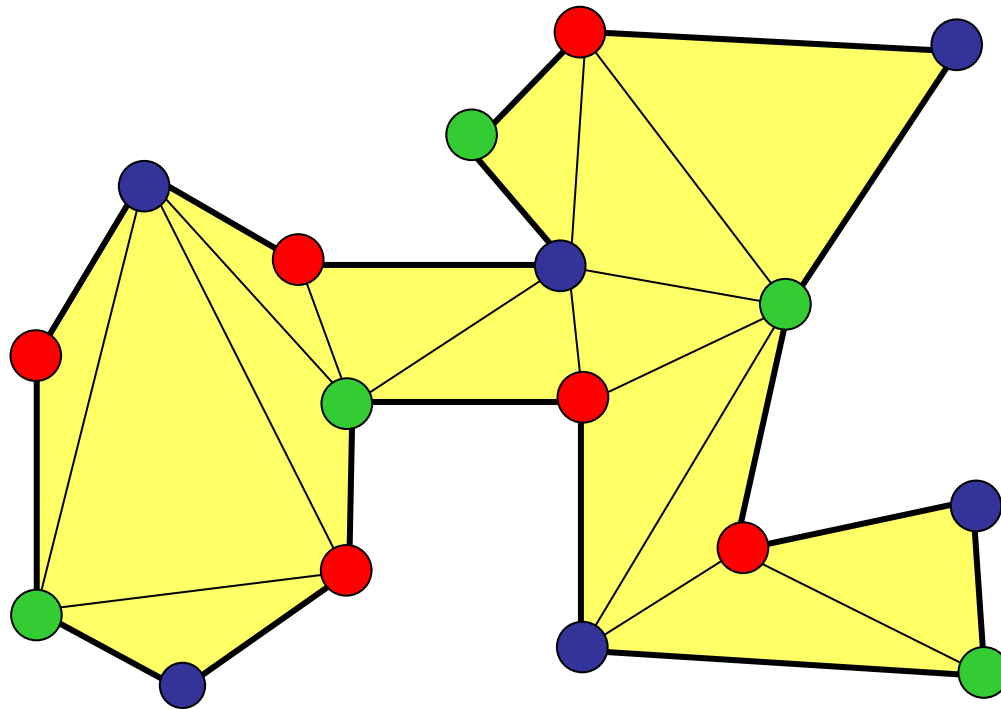
Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Dado n , ¿cuál es el número de guardias suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados?

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

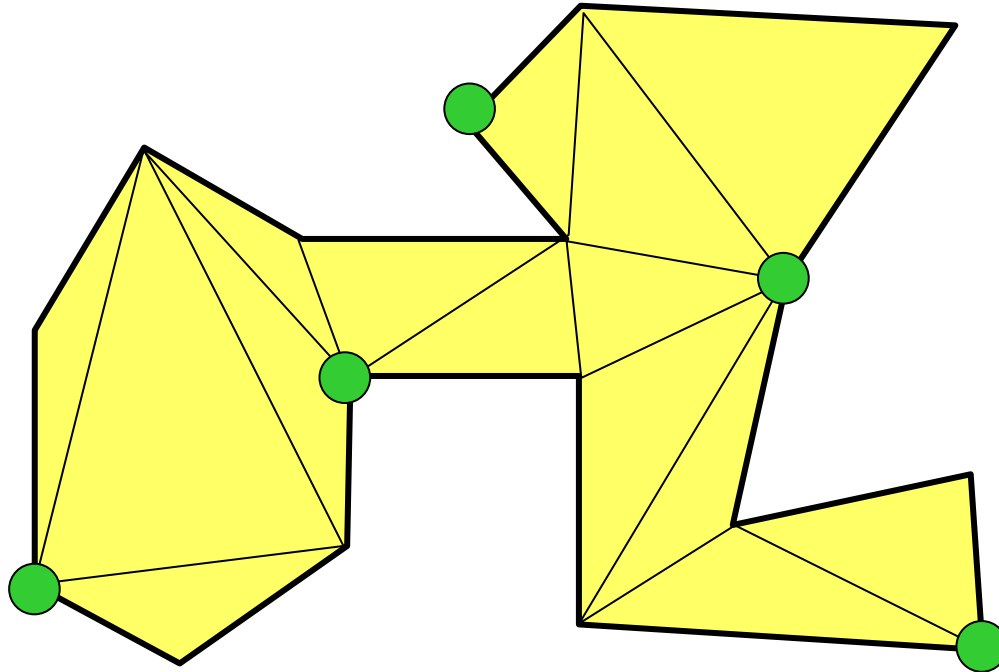
Chvátal, 1975

Fisk, 1978

$$R + A + V = n$$

- 1) Triangular el polígono
- 2) Colorear el grafo con tres colores
- 3) Colocar guardias en el color menos utilizado

Galerías de Arte



- 1) Triangular el polígono
- 2) Colorear el grafo con tres colores
- 3) Colocar guardias en el color menos utilizado

PROBLEMA COMBINATORIO

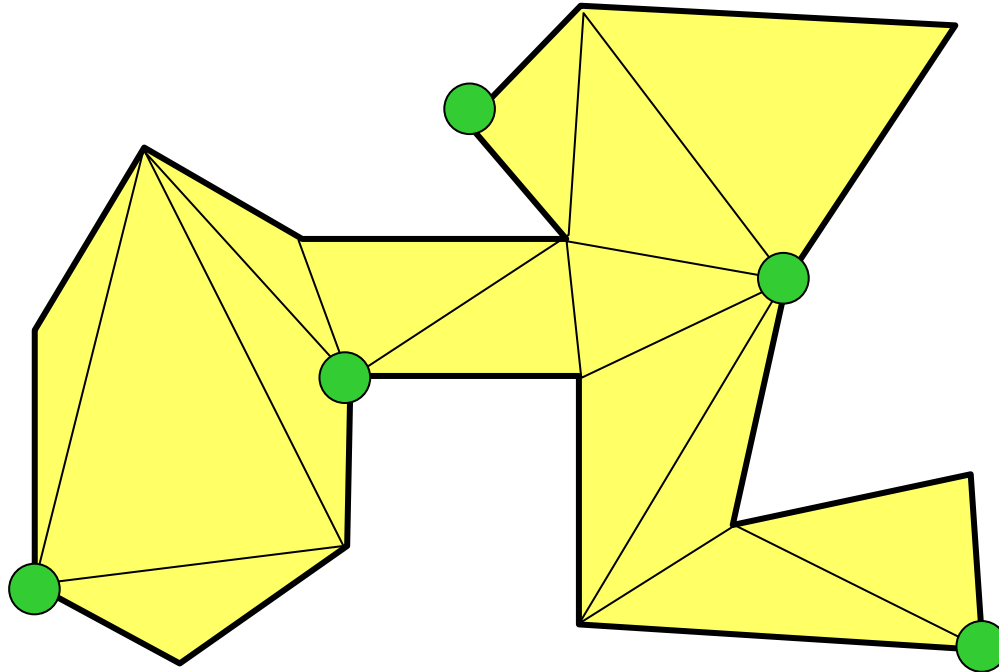
Chvátal, 1975

Fisk, 1978

$$R + A + V = n$$

$$V \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Chvátal, 1975

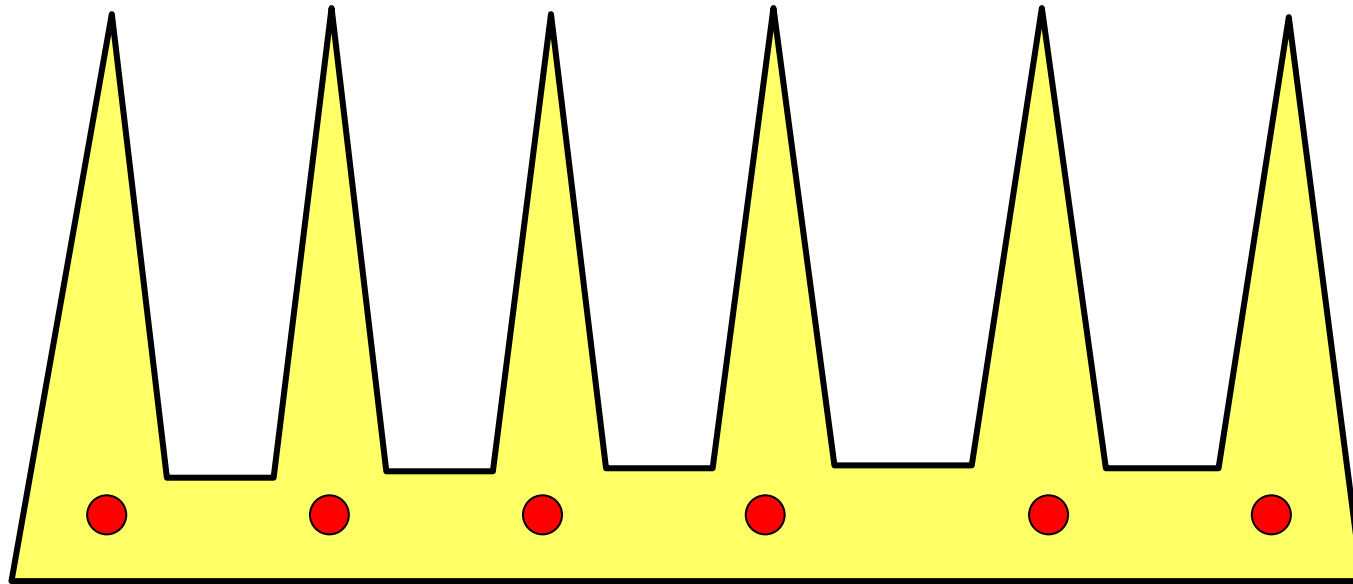
Fisk, 1978

$$R + A + V = n$$

$$V \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

“Todo polígono de n lados puede vigilarse con $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardias”

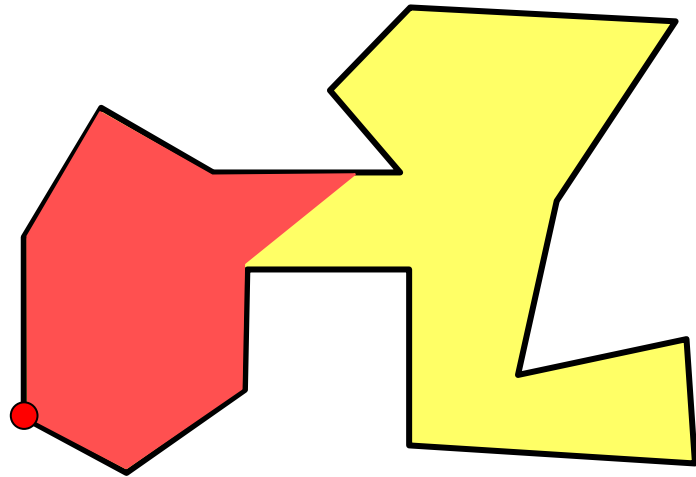
Galerías de Arte



Teorema

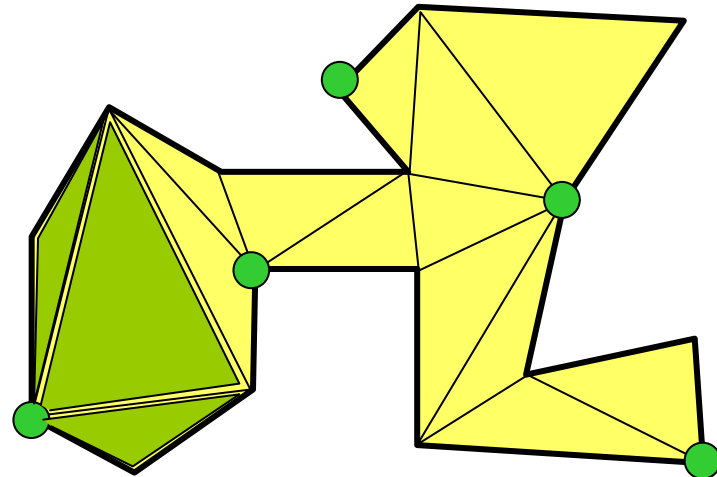
$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

Guardias geométricos versus Guardias combinatorios



Guardias
geométricos en P

Puntos (o vértices) para vigilar P

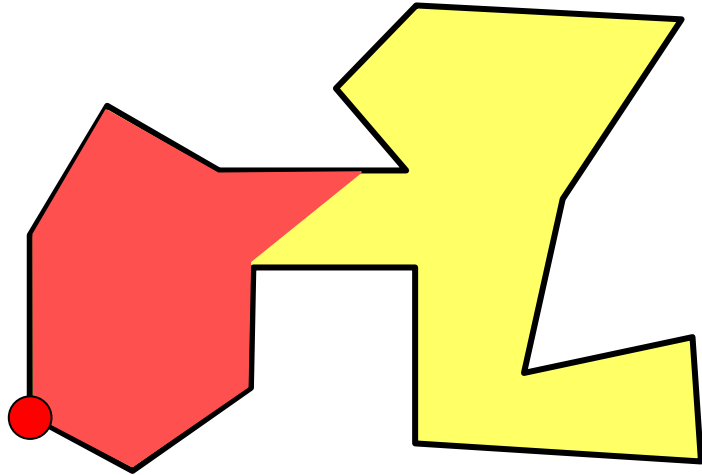


Guardias
combinatorios en T

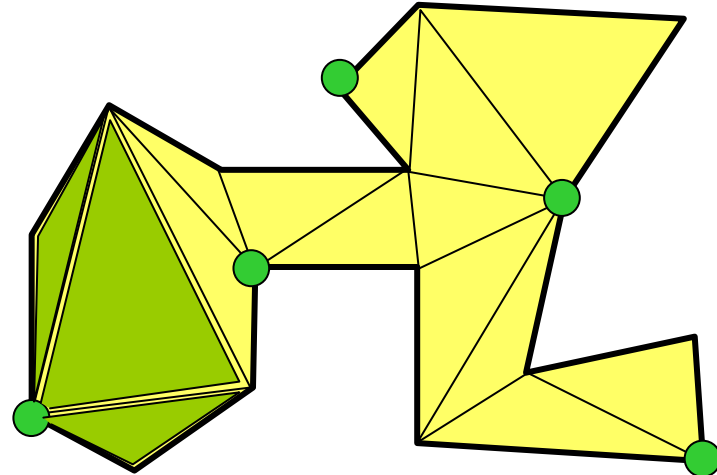
Vértices que vigilan las caras de T

$$g_g(P) \leq g_c(T)$$

Guardias geométricos versus Guardias combinatorios



Guardias **geométricos**



Guardias **combinatorios**

$$g_g(n) = \max\{ g(P) / P \text{ polígono de } n \text{ vértices} \}$$

$$g_c(n) = \max\{ g(T) / T \text{ grafo periplano maximal (MOP) de } n \text{ vértices} \}$$

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq g_g(n) \leq g_c(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Ejemplo geométrico

Demostración combinatoria

Sumario

- ❑ Galerías de Arte
- ❑ **Guardias geométricos** versus guardias combinatorios

- ❑ Guardias segmento
(lado, diagonal, móvil)
(cerrado, abierto)

¿Cómo se vigila?

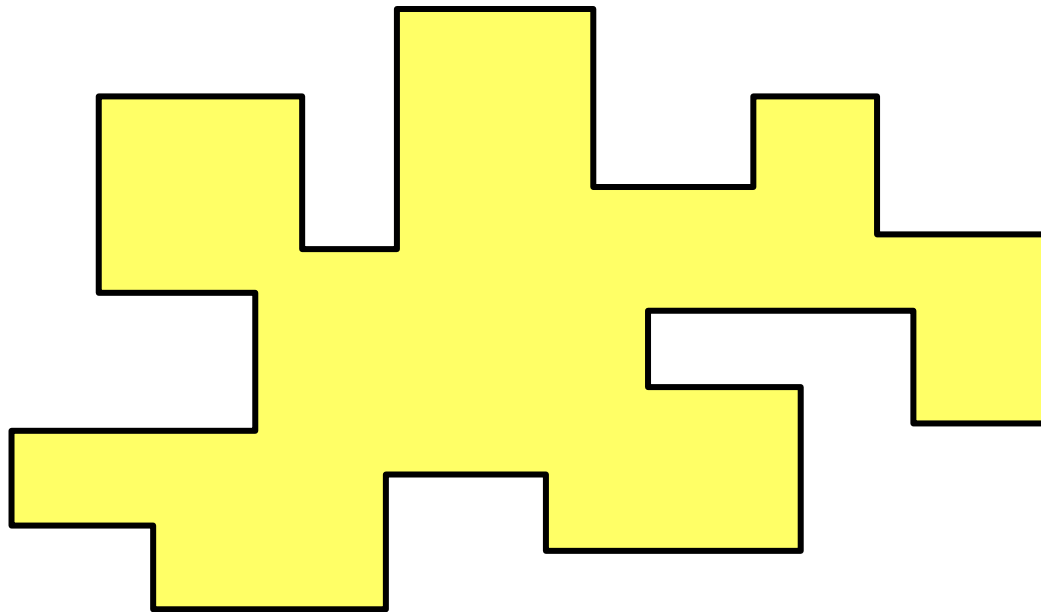
- ❖ Polígonos generales
- ❖ Polígonos ortogonales
- ❖ Polígonos con agujeros
- ❖ Triangulaciones de puntos
- ❖ Cuadrangulaciones de puntos

¿Qué se vigila?

POLÍGONOS ORTOGONALES

Teorema (Kahn, Klawe, Kleitman, 1983)

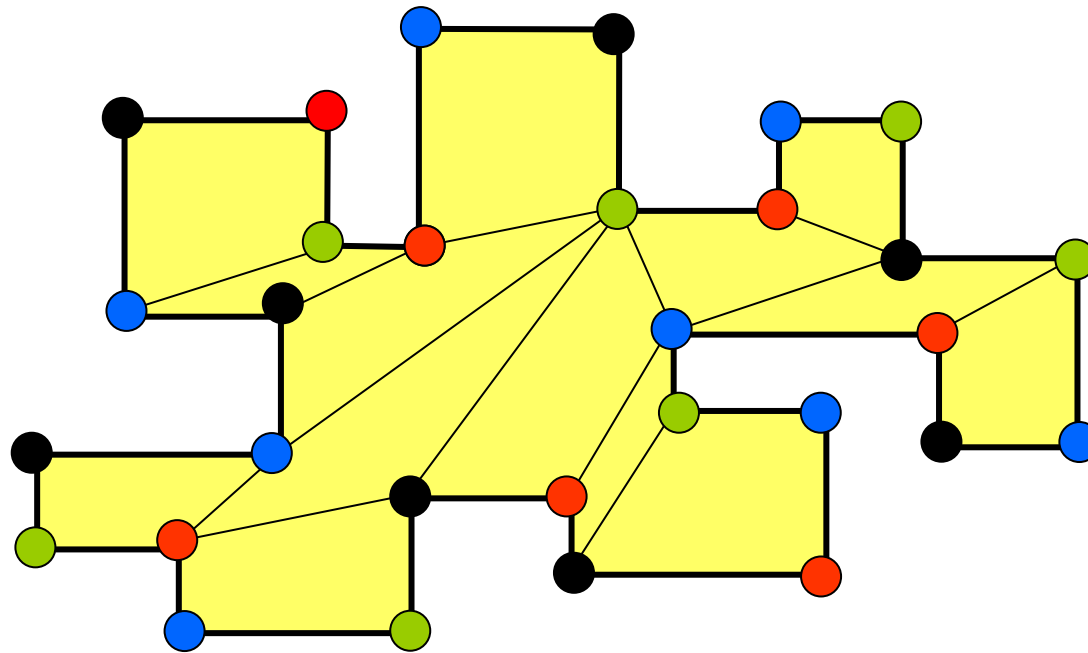
$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal de n lados



$$g^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

POLÍGONOS ORTOGONALES

Cota superior (demostración combinatoria)

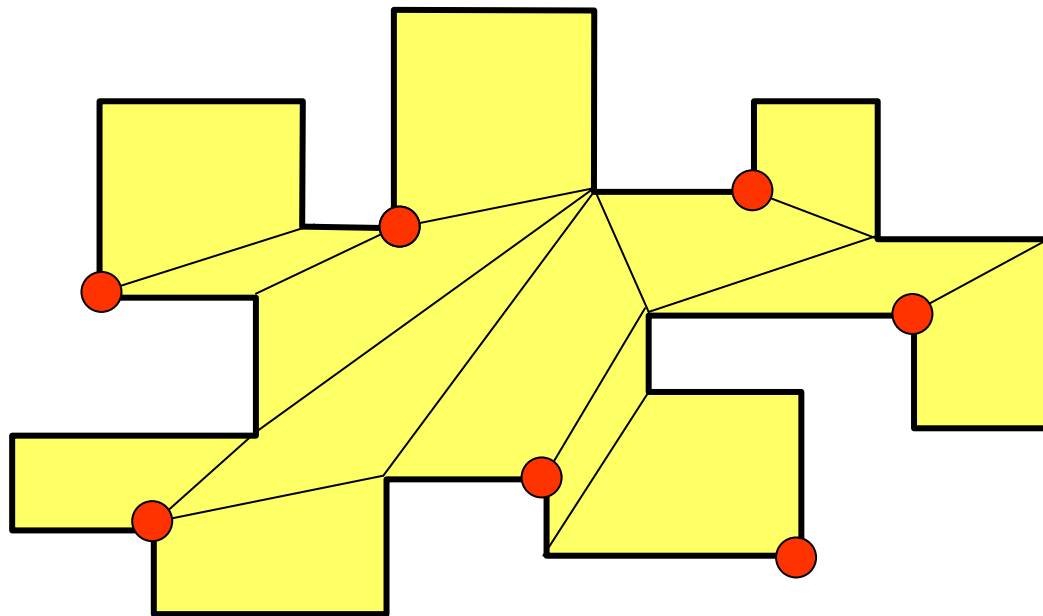


$$g^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

- 1) Cuadrangular (convexamente) el polígono
- 2) Colorear el grafo con cuatro colores

POLÍGONOS ORTOGONALES

Cota superior (demostración combinatoria)



$$g^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$g_c^{\text{ort}}(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

- 1) Cuadrangular (convexamente) el polígono
- 2) Colorear el grafo con cuatro colores
- 3) Colocar guardias en el color menos utilizado

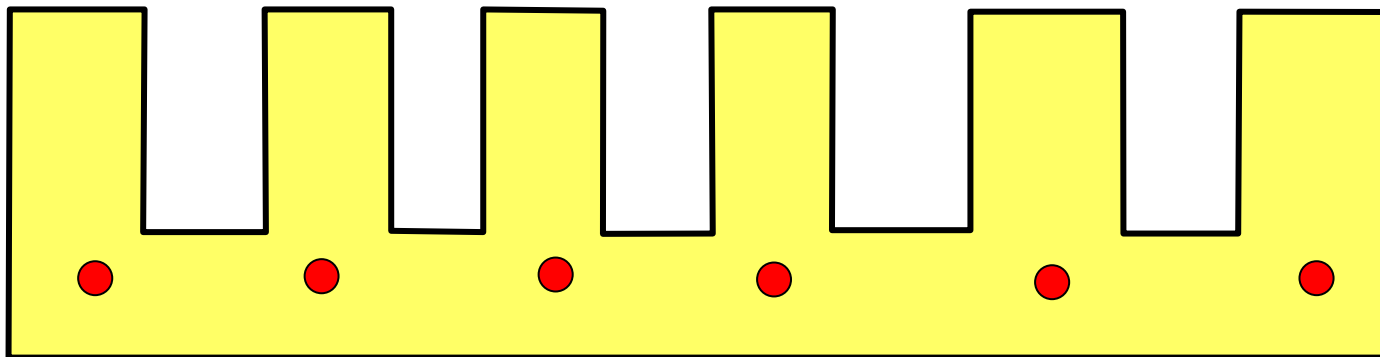
POLÍGONOS ORTOGONALES

$$g^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq g_g^{\text{ort}}(n) \leq g_c^{\text{ort}}(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

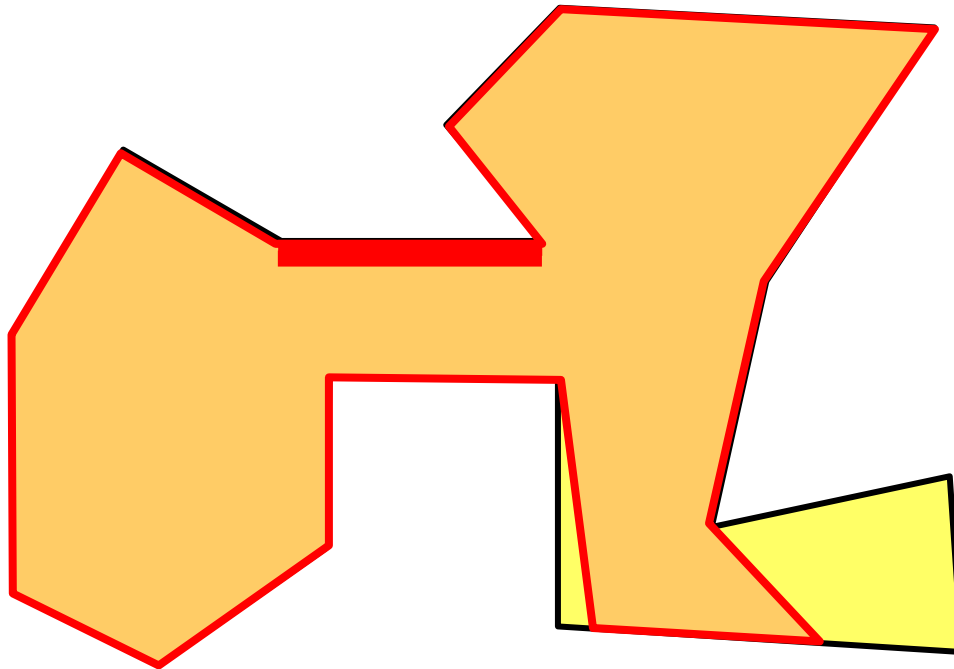
Ejemplo geométrico

Demostración combinatoria



VIGILANCIA DESDE LOS LADOS

G



Conjetura (Toussaint, 1981)

$$¿ g_g^E(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor ?$$

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

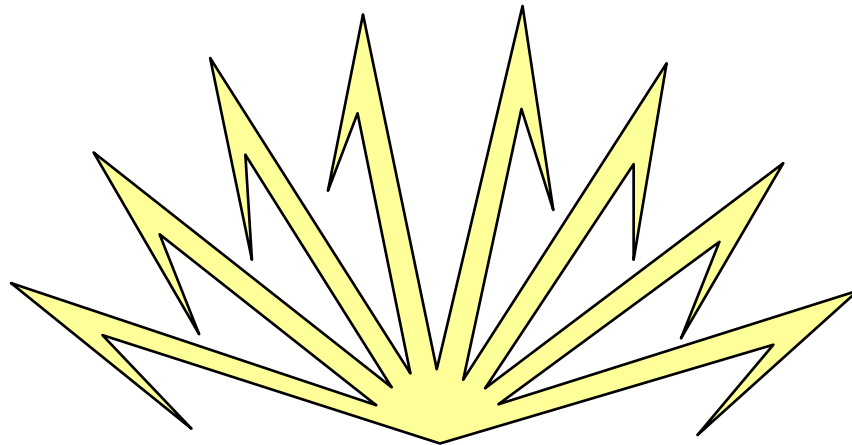
VIGILANCIA DESDE LOS LADOS

G

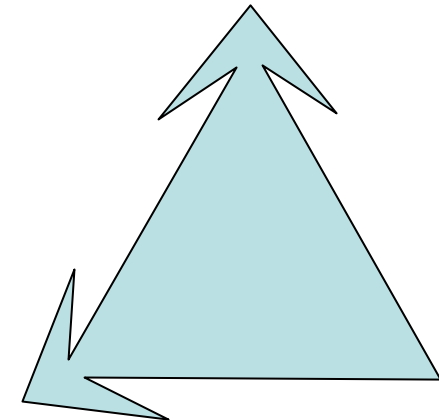
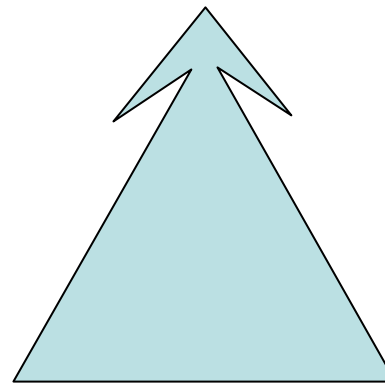
Conjetura (Toussaint, 1981)

$$¿g_g^E(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor ?$$

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados



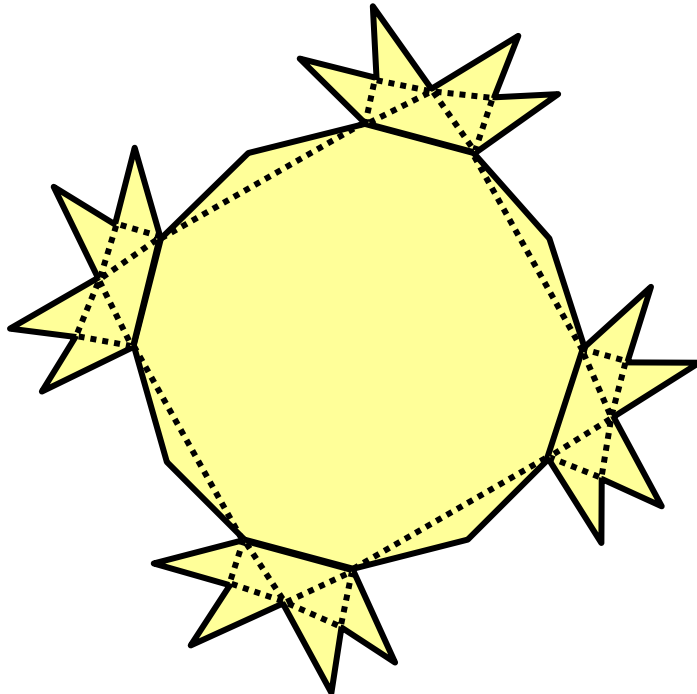
... salvo estos ejemplos



Conjetura (Toussaint, 1981)

¡¡No se puede demostrar por triangulación !!

$$\text{¿ } g_g^E(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \text{ ?}$$



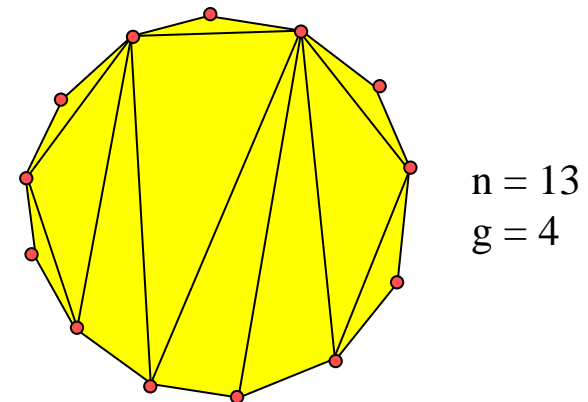
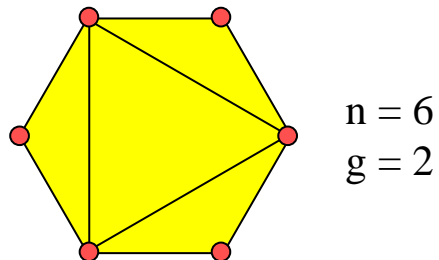
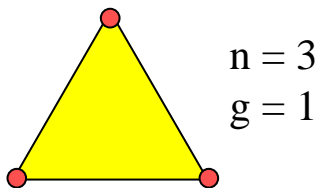
Cualquier conjunto de guardias-lado que cubra todos los triángulos contiene al menos $\lfloor 3n/10 \rfloor$ lados

Teorema Shermer, 1994
 $\lfloor 3n/10 \rfloor$ guardias-lado son siempre suficientes y, a veces, necesarios para vigilar cualquier triangulación de n vértices, salvo tres grafos.

$$g_c^E(n) = \left\lfloor \frac{3n}{10} \right\rfloor$$

Teorema (Shermer, 1994)

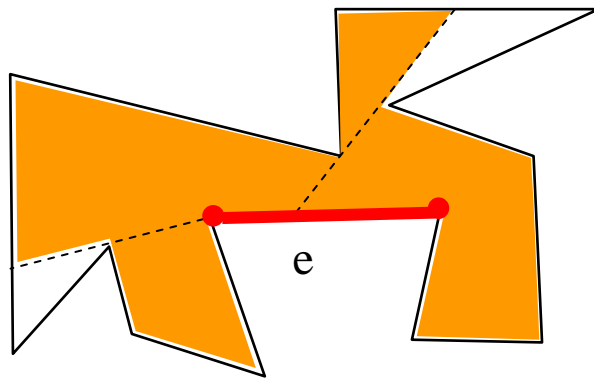
Todo grafo periplano maximal (MOP) de n vértices con $n \geq 4$ se puede vigilar (sus caras triangulares) con $\lfloor 3n/10 \rfloor$ guardias situados en sus aristas, salvo tres grafos que necesitan un guardia adicional.



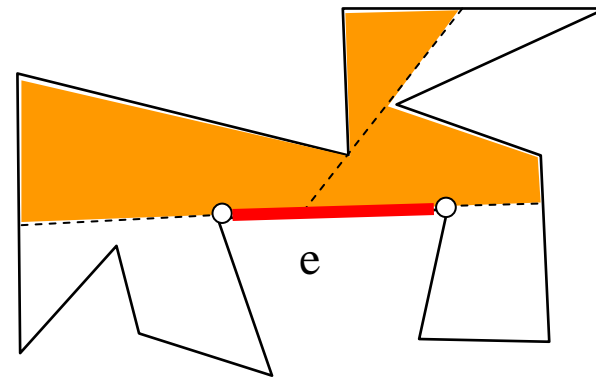
VIGILANCIA DESDE LOS LADOS

G

¿Y si el vigilante no puede mirar desde los extremos?



Edge guards (closed)



Open edge guards

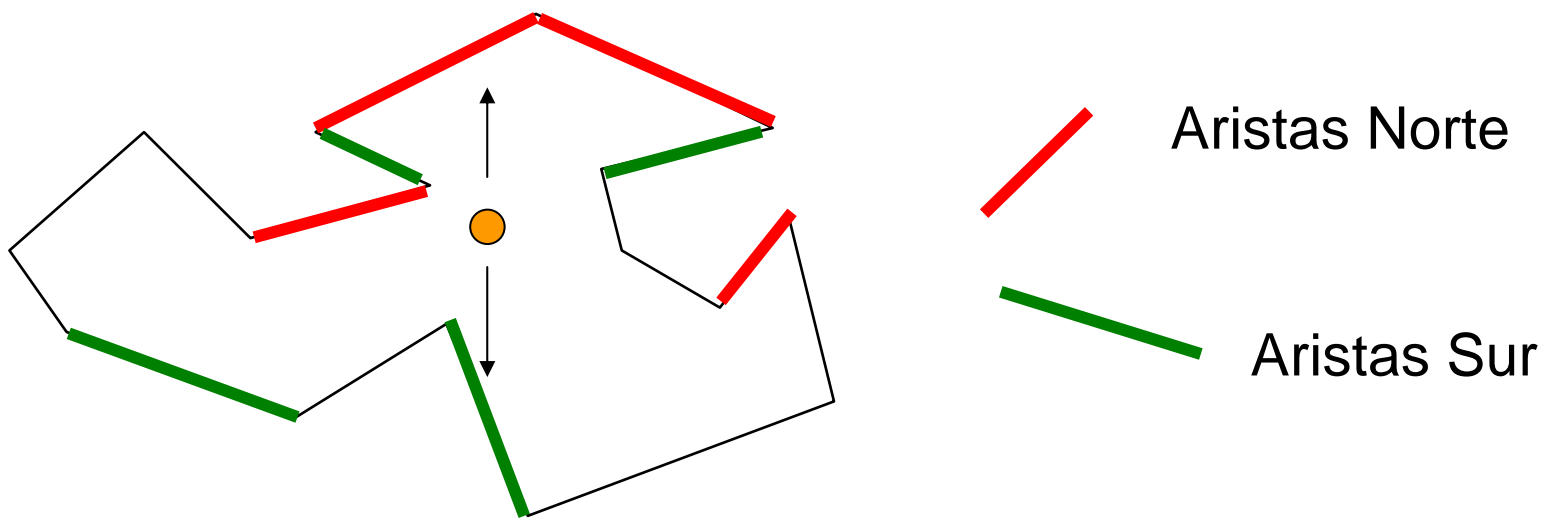
Viglietta, 2011

VIGILANCIA DESDE LOS LADOS (abiertos)

G

Toth, Toussaint, Winslow, 2011

Todo polígono de n vértices se vigila con $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ guardias-arista

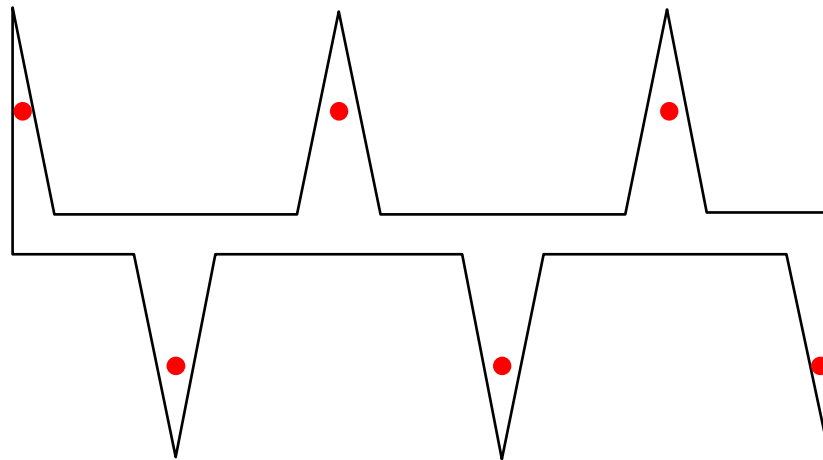


VIGILANCIA DESDE LOS LADOS (abiertos)

G

Toth, Toussaint, Winslow, 2011

Existen polígonos que necesitan $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias-arista



$$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \leq g_{OE}(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Ejemplo geométrico

Demostración geométrica

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq g_{\text{OE}}(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

(Bajuelos, Canales, H., Martins, Matos, 2015)

Se intenta demostrar la cota superior $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$
para polígonos monótonos

Demostración por inducción sobre n distinguiendo numerosos casos geométricos. **¡Y se necesitan diagonales!**

Debemos pasar de guardias-arista a **guardias móviles** que incluyen **aristas** y **diagonales** del polígono

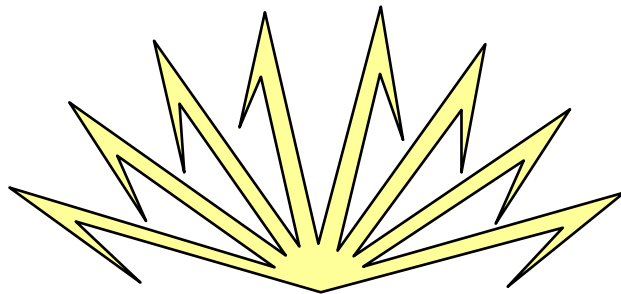
Teorema (O'Rourke, 1983)

Todo polígono se vigila con $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias móviles y existen polígonos que necesitan dicho número de guardias.

$$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq g_g^M(n) \leq g_c^M(n) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$$

Ejemplo geométrico

Demostración combinatoria



Teorema (O'Rourke, 1983)

Todo grafo periplano maximal (MOP) se vigila con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ aristas

Demostración por inducción

Lema clave

Sea T un MOP de $n \geq 2s$ vértices ($s > 1$). Entonces existe una arista interior de T que separa un mínimo de k aristas exteriores de T donde $k = s, s + 1, \dots, 2s - 2$

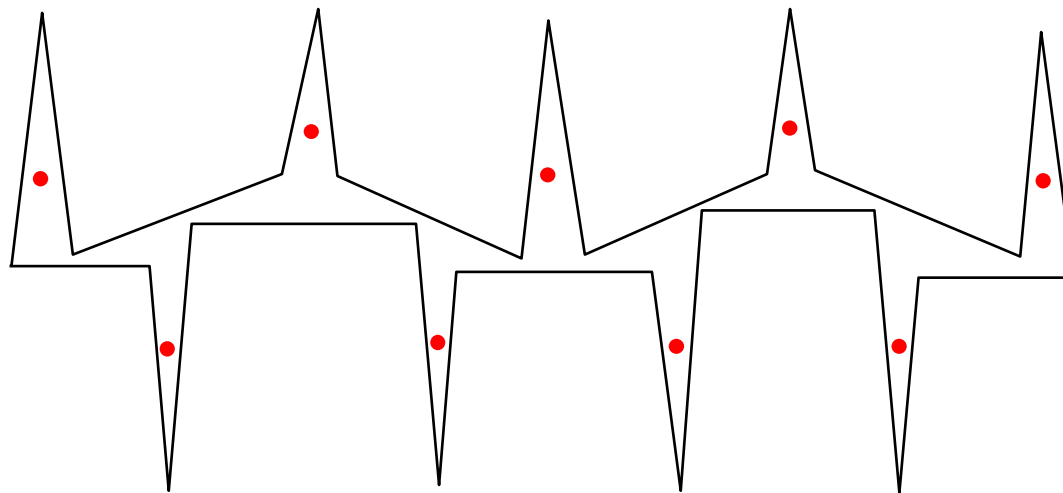
VIGILANCIA DESDE GUARDIAS MÓVILES (abiertos)



Teorema (BCHMM, 2015)

El número de guardias móviles abiertos que son siempre suficientes y, a veces, necesarios para vigilar cualquier polígono

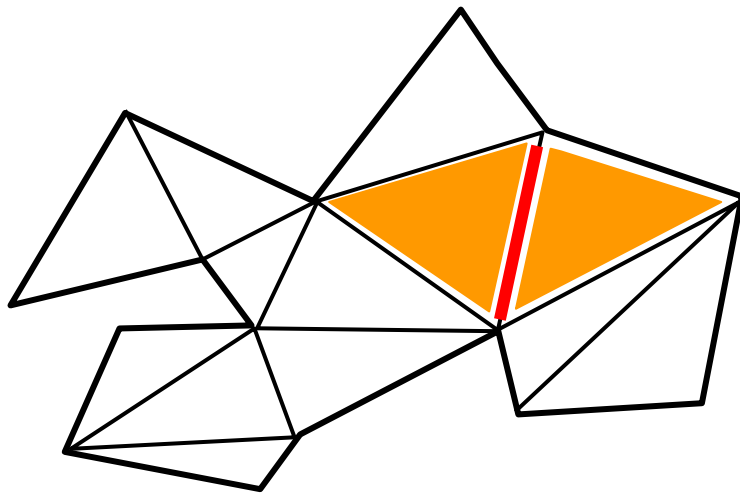
monótono de n vértices es $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$



GUARDIAS MÓVILES (abiertos) COMBINATORIOS

Grafo periplano maximal, MOP (triangulación de un polígono)

Vigilamos desde las aristas (abiertas) del grafo todos sus triángulos



$$g_c^{\text{OM}}(n) = g_c^{\text{OD}}(n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$$

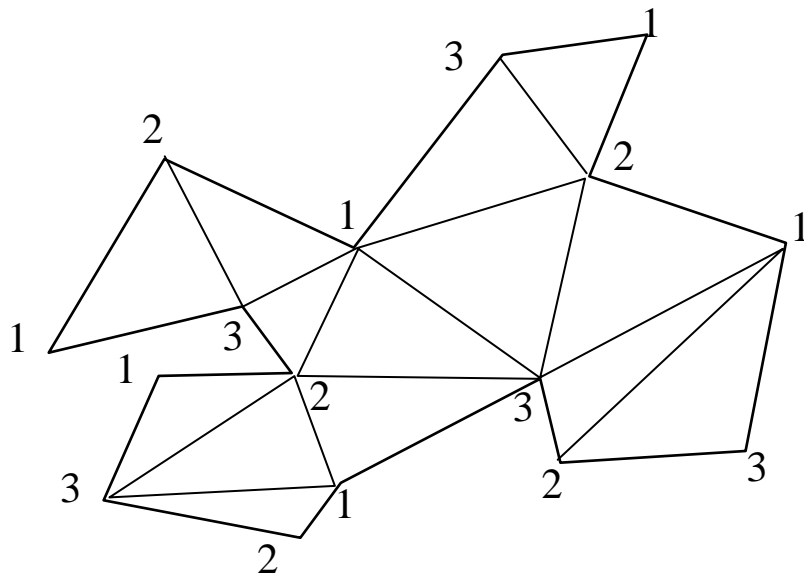
Como tanto diagonales como lados son aristas del grafo, diremos

$$g_c^{\text{OE}}(n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$$

GUARDIAS MÓVILES (abiertos) COMBINATORIOS

Todo MOP de orden n se vigila con $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$ guardias-arista abiertos

Cota superior (coloreando)



3-coloración de los vértices

3-coloración de las aristas

12 color rojo

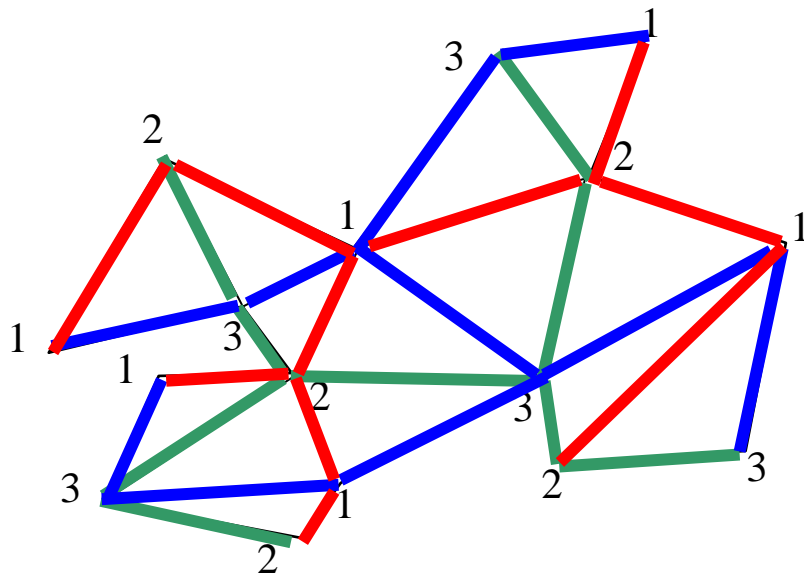
13 color azul

23 color verde

GUARDIAS MÓVILES (abiertos) COMBINATORIOS

Todo MOP de orden n se vigila con $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$ guardias-arista abiertos

Cota superior (coloreando)



3-coloración de los vértices

3-coloración de las aristas

12 color rojo

13 color azul

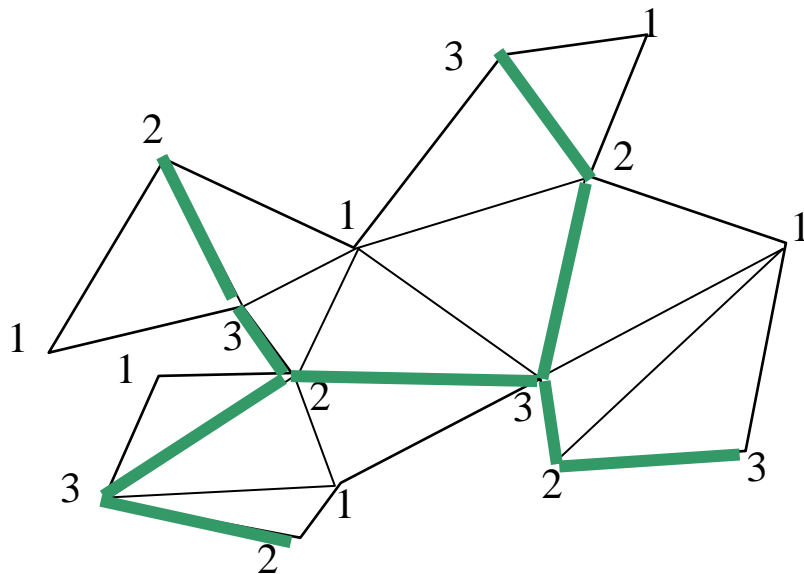
23 color verde

Cada triángulo tiene una arista de cada color y hay $2n - 3$ aristas

GUARDIAS MÓVILES (abiertos) COMBINATORIOS

Todo MOP de orden n se vigila con $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$ guardias-arista abiertos

Cota superior (coloreando)



3-coloración de los vértices

3-coloración de las aristas

12 color rojo

13 color azul

23 color verde

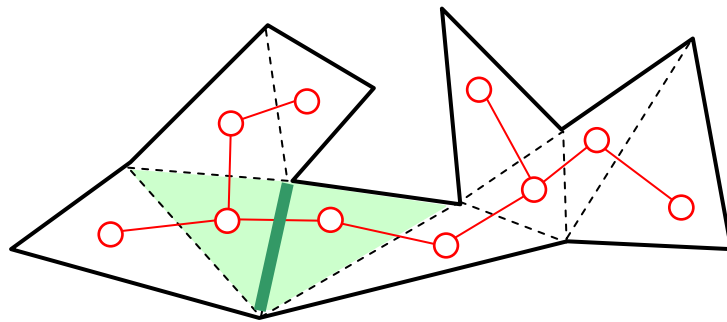
Elegimos el menor color y tendremos un conjunto de guardias con a lo sumo

$$\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$$

GUARDIAS MÓVILES (abiertos) COMBINATORIOS

Todo MOP de orden n se vigila con $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$ guardias-arista abiertos

Cota inferior (ejemplo que necesita esos guardias)

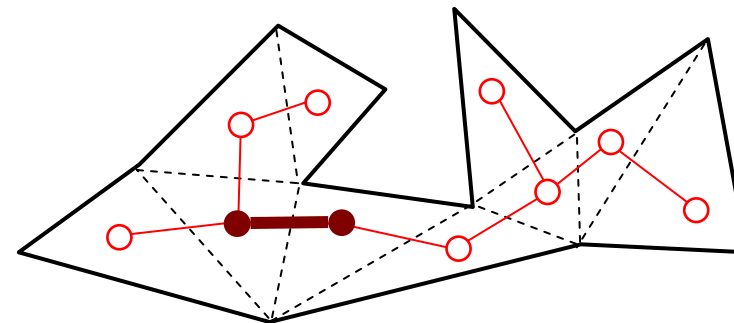


Arista en T vigilando sus triángulos incidentes

Vigilar combinatoriamente T

$$\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$$

$$t = n - 2$$



Arista en T* recubriendo sus nodos incidentes

Cubrir los nodos de T* con aristas

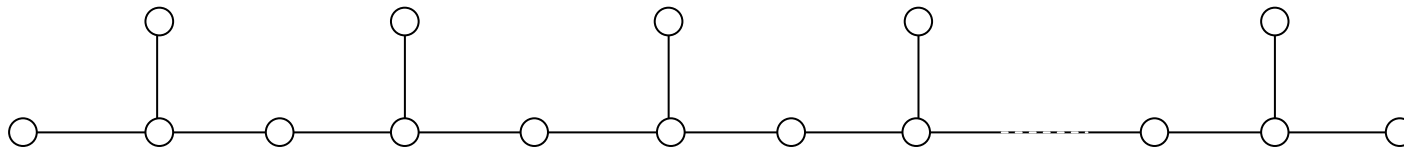
$$\left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$$

GUARDIAS MÓVILES (abiertos) COMBINATORIOS

Todo MOP de orden n se vigila con $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$ guardias-arista abiertos

Cota inferior (ejemplo que necesita esos guardias)

Árbol de t nodos, grado máximo 3 y que requiera $\left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$ aristas para cubrir sus nodos



Los nodos de grados 1 y 2 (conjunto H) se cubren con diferentes aristas

$$t_1 = 2 + t_3$$

$$t_2 = t_3 - 1$$

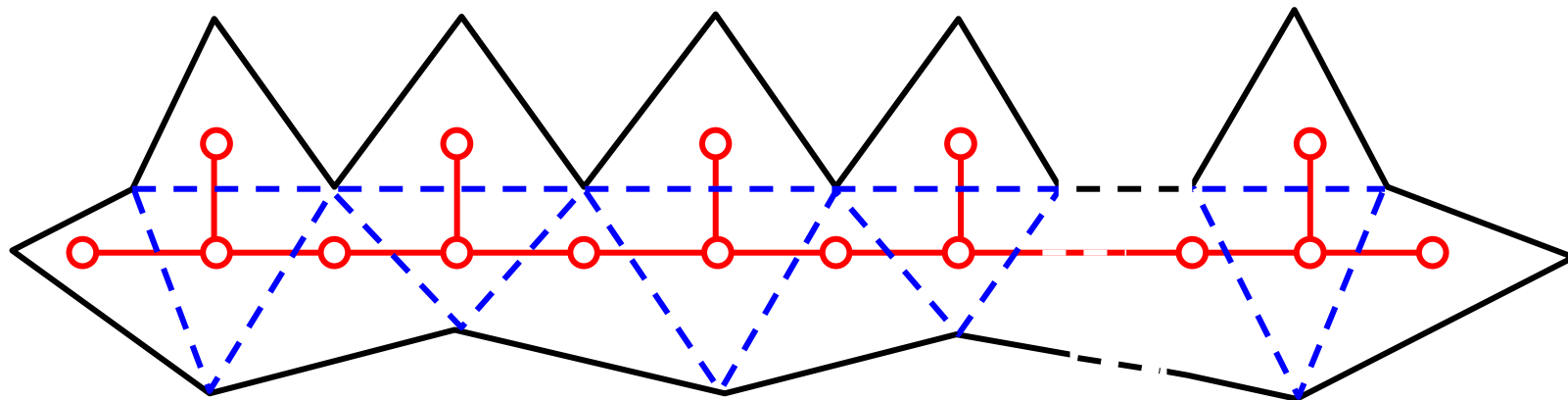
$$|H| = t_1 + t_2 = 2t_3 + 1 = \left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$$

GUARDIAS MÓVILES (abiertos) COMBINATORIOS

Todo MOP de orden n se vigila con $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - 1$ guardias-arista abiertos

Cota inferior (ejemplo que necesita esos guardias)

MOP de orden con t triángulos que requiere $\left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$ aristas para vigilar sus triángulos

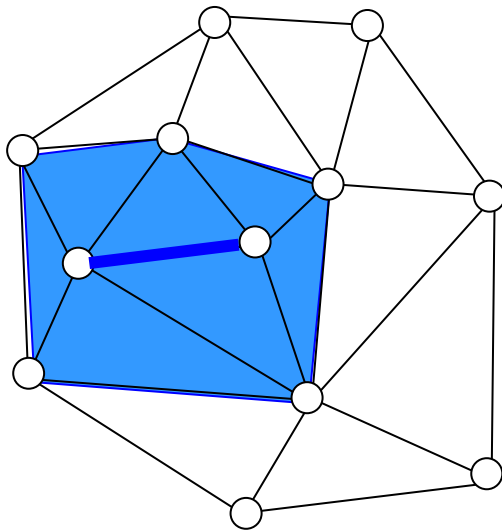


GUARDIAS ARISTA (abiertos) COMBINATORIOS

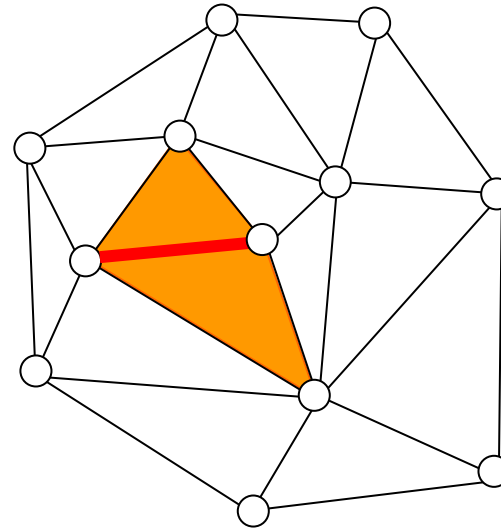
Toda triangulación de n vértices se vigila con guardias-arista abiertos

$$\left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$$

Grafo de la triangulación de un conjunto de puntos en el plano



Guardia-arista

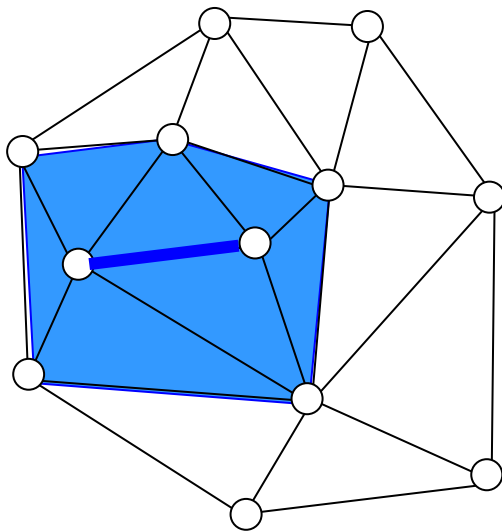
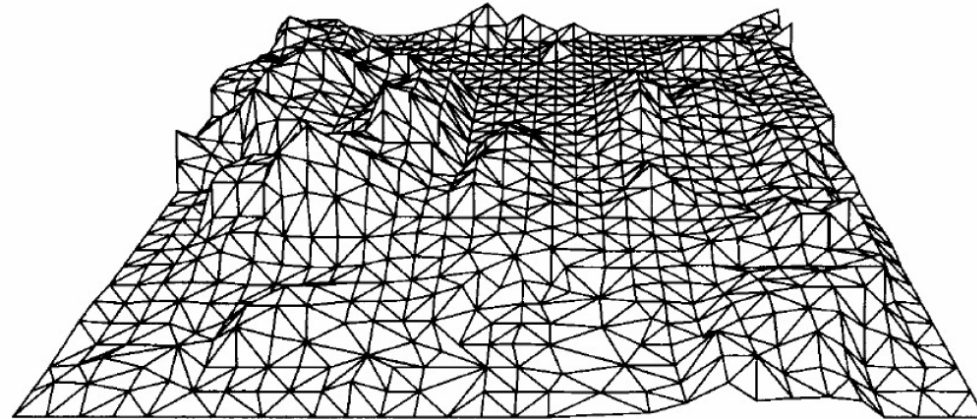


Guardia-arista abierto

GUARDIAS ARISTA en TRIANGULACIONES

C

TERRAIN



Guardia-arista (combinatorio)

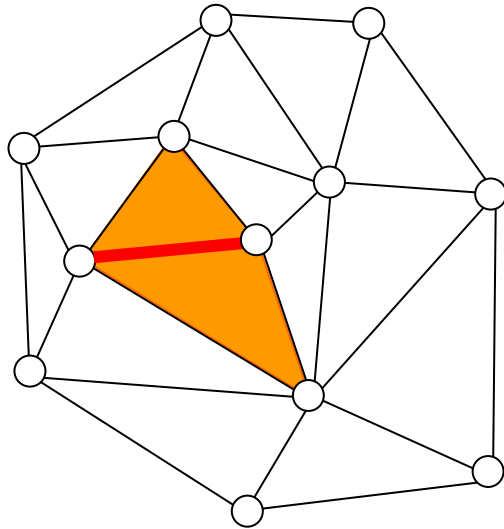
$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ son suficientes,

Everett, Rivera-Campo, 94

Ejemplo que necesita $\left\lceil \frac{4n-4}{13} \right\rceil$

GUARDIAS ARISTA en TRIANGULACIONES

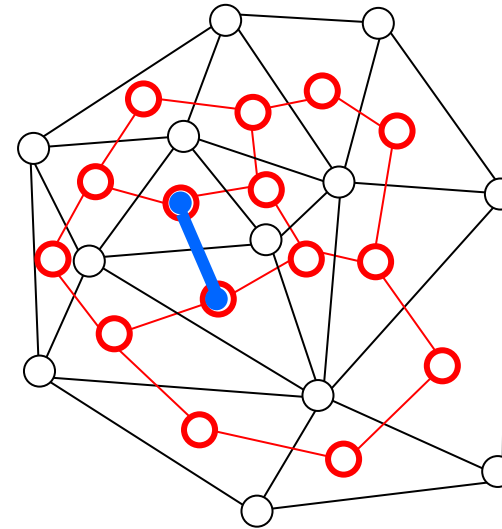
C



Arista en G vigilando sus triángulos incidentes

Vigilar combinatoriamente G

$g^{OE}(G)$

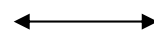
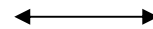


Arista en G^* recubriendo sus nodos incidentes

Cubrir los nodos de G^* con aristas

$\beta'(G^*)$

EDGE COVER

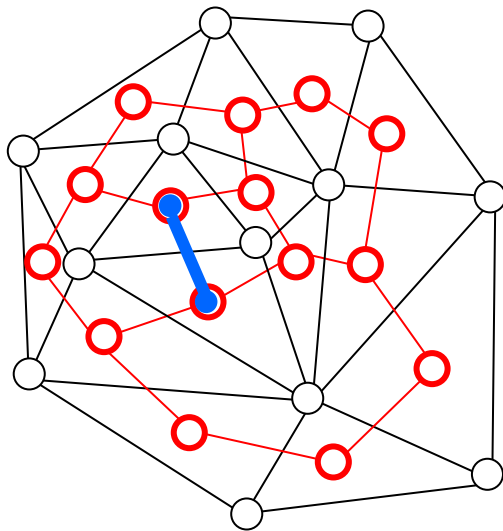


GUARDIAS ARISTA en TRIANGULACIONES

C

Toda triangulación de n vértices se vigila con guardias-arista abiertos

$$\left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$$



Si e es una arista de un ciclo de G^*
 $\beta'(G^*) \leq \beta'(G^* - e)$

Luego si T^* es árbol generador de G^*
 $\beta'(G^*) \leq \beta'(T^*)$

Si T^* es un árbol de t nodos con $\Delta = 3$,

entonces
$$\beta'(T^*) \leq \left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$$

GUARDIAS ARISTA en TRIANGULACIONES

C

Si T^* es un árbol de t nodos con $\Delta = 3$, entonces $\beta'(T^*) \leq \left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$

Teorema de Gallai

Si G es un grafo de orden p sin vértices aislados, entonces

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = p \qquad \alpha'(G) \text{ n}^\circ \text{ de emparejamiento}$$

Si T^* es un árbol de t nodos con $\Delta = 3$, entonces existe en T^* un emparejamiento con al menos $t - \left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor = \left\lceil \frac{t-1}{3} \right\rceil$ aristas

Relación emparejamiento --- recubrimiento por vértices

Teorema de König

Si G es un grafo bipartito entonces $\alpha'(G) = \beta(G)$ max emp = min rec

GUARDIAS ARISTA en TRIANGULACIONES

C

Lema auxiliar

Si G es un grafo bipartito de q aristas entonces existe un emparejamiento en G de cardinal al menos $\lceil q/\Delta \rceil$

Cada vértice cubre a lo sumo Δ aristas, luego si K es un recubrimiento por vértices $|K| \geq \lceil q/\Delta \rceil$ Por tanto, $\alpha' = \beta \geq \lceil q/\Delta \rceil$

Pero nuestro árbol T^* tiene $t - 1$ aristas y $\Delta = 3$, luego admite un

emparejamiento de cardinal al menos $\left\lceil \frac{t-1}{3} \right\rceil = t - \left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$

Luego

$$g_c^{\text{OE}}(t) \leq \left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor$$

Y la cota es ajustada porque existen MOPs que necesitan ese número de guardias

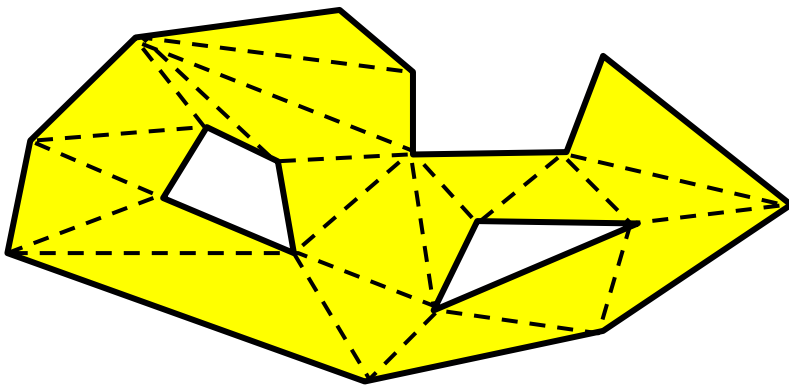
GUARDIAS MÓVILES (Polígonos con agujeros)

C

El número de guardias móviles abiertos que son siempre suficientes y, a veces necesarios para vigilar cualquier grafo triangulación de un polígono de n vértices con h agujeros es

$$g_c^{\text{OM}}(n, h) = \left\lfloor \frac{2n + 4h}{3} \right\rfloor - 1$$

P



En el polígono P
 $t = n + 2h - 2$, luego la cota es

$$g_c^{\text{OM}}(t) = \left\lfloor \frac{2t + 1}{3} \right\rfloor$$

La demostración de la **cota superior** (suficiencia) es la misma que para triangulaciones (pasar al grafo dual y recubrimiento por aristas)

GUARDIAS MÓVILES (Polígonos con agujeros)

C

Cota inferior

$$g_c^{\text{OM}}(n, h) = \left\lfloor \frac{2n + 4h}{3} \right\rfloor - 1$$

Construir un polígono de n vértices con h agujeros que necesite ese número de guardias

$$g_c^{\text{OM}}(t) = \left\lfloor \frac{2t + 1}{3} \right\rfloor$$

Construir un grafo (dual) de t nodos (con h ciclos y $\Delta = 3$), que necesite ese número de aristas en cualquier recubrimiento

Construiremos una sucesión de grafos H_c tales que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{2t + 1}{3}$$

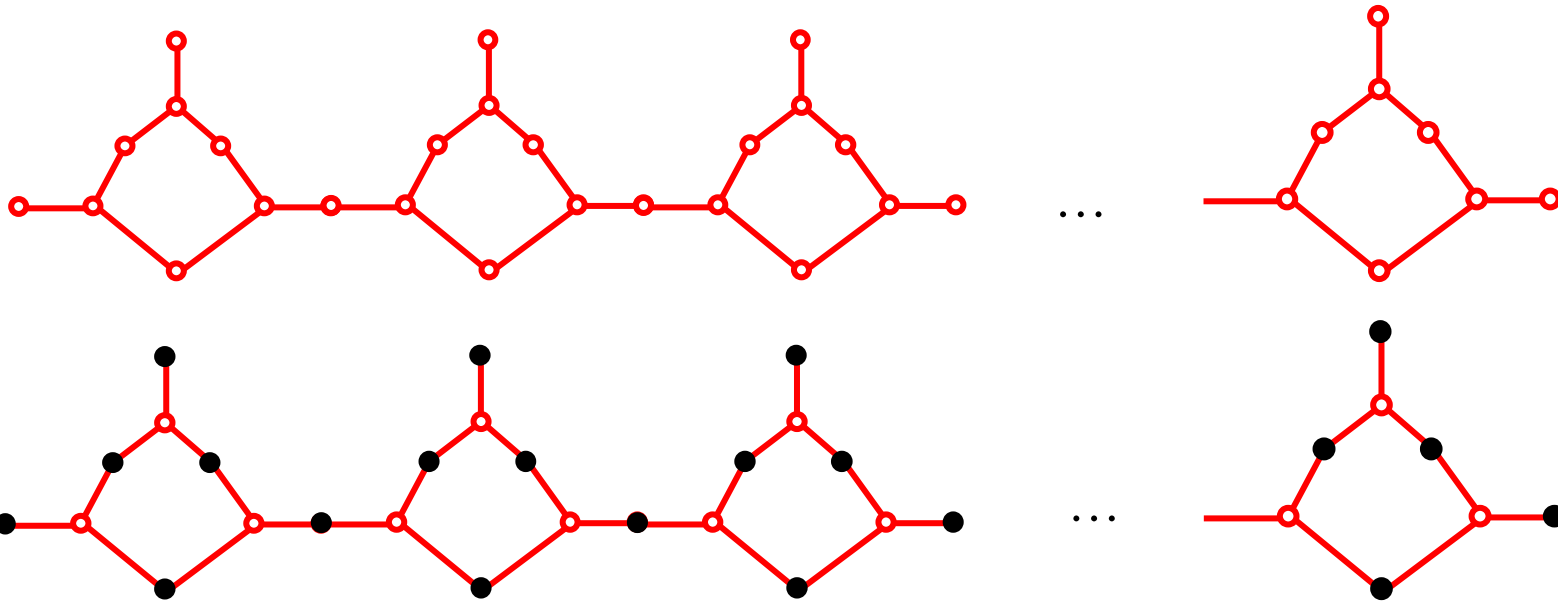
GUARDIAS MÓVILES (Polígonos con agujeros)

C

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{2t+1}{3}$$

La base de la construcción es H_6 $t = 1 + 8h$



Todo recubrimiento por aristas requiere, al menos, $1 + 5h$ aristas

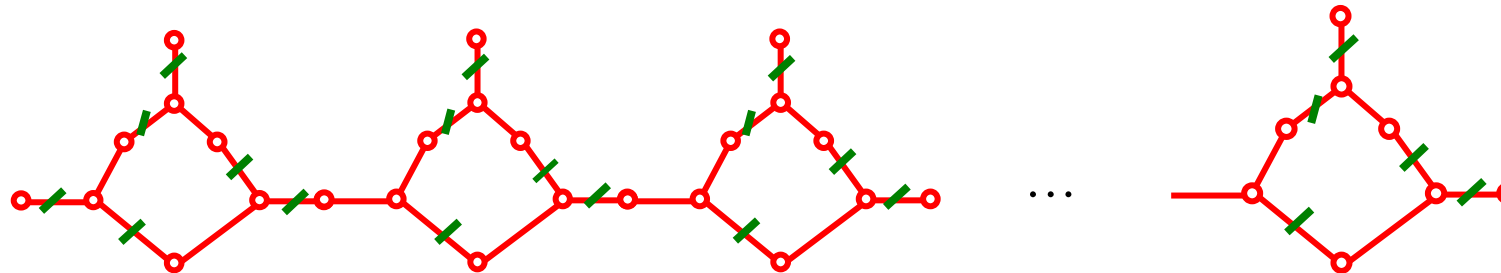
GUARDIAS MÓVILES (Polígonos con agujeros)

C

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{2t+1}{3}$$

La base de la construcción es H_6 : $t = 1 + 8h$ $\beta' = 1 + 5h$



Si ampliamos los ciclos:

$$H_8: \quad t = 1 + 11h, \quad \beta' = 1 + 7h$$

$$H_{10}: \quad t = 1 + 14h, \quad \beta' = 1 + 9h$$

.....

$$H_{2c}: \quad t = 1 + (3c - 1)h, \quad \beta' = 1 + (2c - 1)h$$

Luego,
$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_{2c}) = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(2c-1)(t-1)}{3c-1}\right) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(2c-1)t + c}{3c-1} = \frac{2t+1}{3}$$

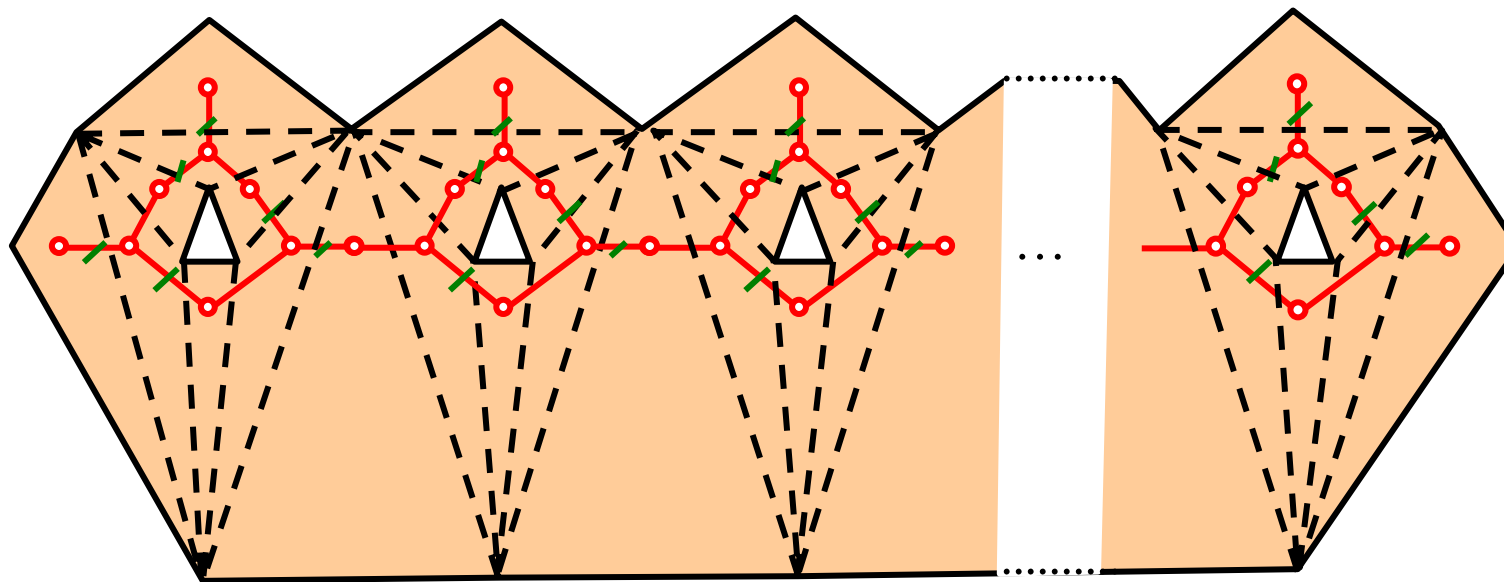
GUARDIAS MÓVILES (Polígonos con agujeros)

C

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{2t+1}{3}$$

Polígono y triangulación correspondiente al grafo H_6



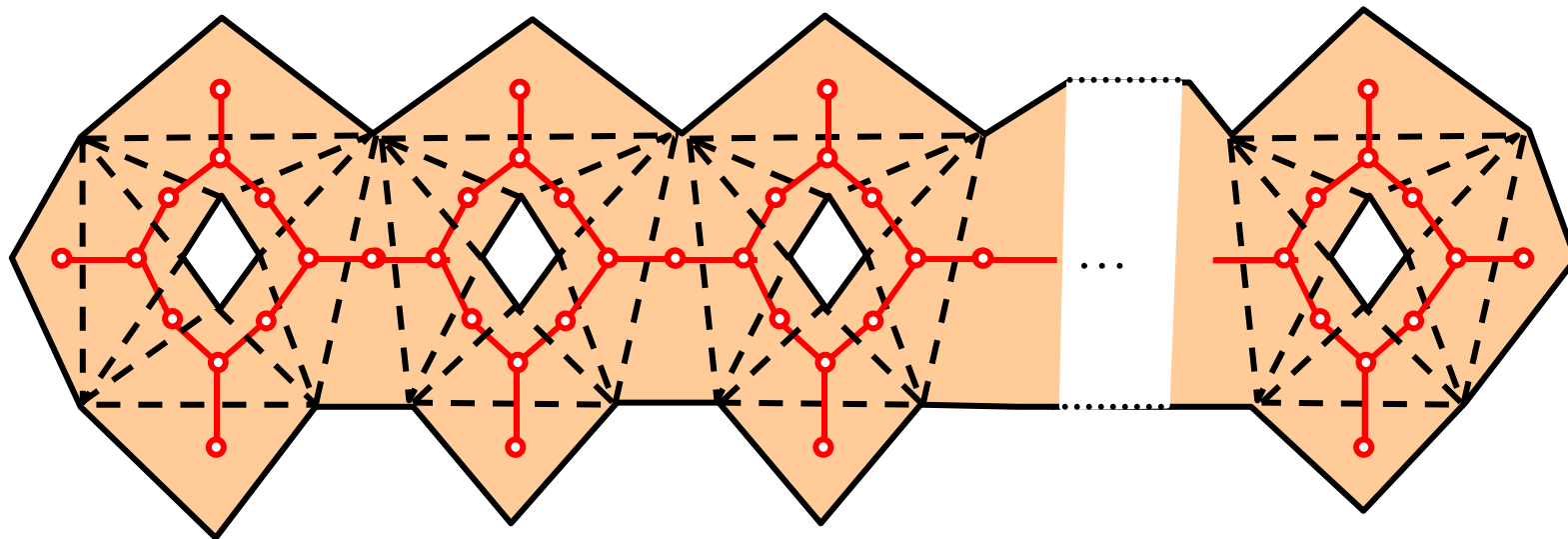
GUARDIAS MÓVILES (Polígonos con agujeros)

C

Cota inferior

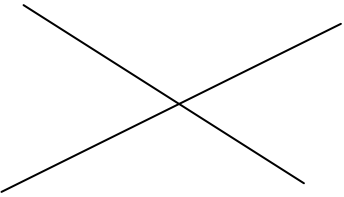
$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{2t+1}{3}$$

Polígono y triangulación correspondiente al grafo H_8



Guardias segmento (Polígonos y triangulaciones)

n vértices, h agujeros, t triángulos

	Arista	Móviles (arista + diagonal)	TRIANGULACIONES
Cerrados	Geom. $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq g^E \leq ?$	$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ O'Rourke '84	
	Combin. $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor$ Shermer '92	$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ O'Rourke '84	$\lfloor \frac{4n-4}{13} \rfloor \leq g^E \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$
Abiertos	Geom. $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \leq g_{OE} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Monótono BCHMM '15	
		Combin. $\lfloor \frac{2n-3}{3} \rfloor$ $\lfloor \frac{2n+4h-3}{3} \rfloor$ $\lfloor \frac{2t+1}{3} \rfloor$	$\lfloor \frac{2t+1}{3} \rfloor$

ER-C '94

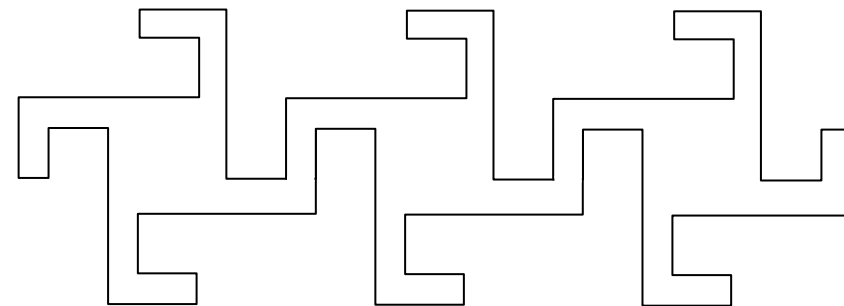
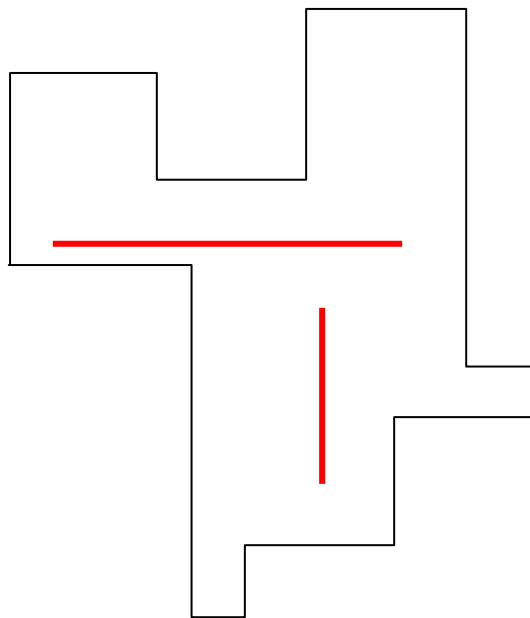
POLÍGONOS ORTOGONALES

G

Vigilancia desde segmentos cerrados (Aggarwal, 1984)

Todo polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$ guardias-segmento

y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias-segmento.



$$g_L^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$$

POLÍGONOS ORTOGONALES

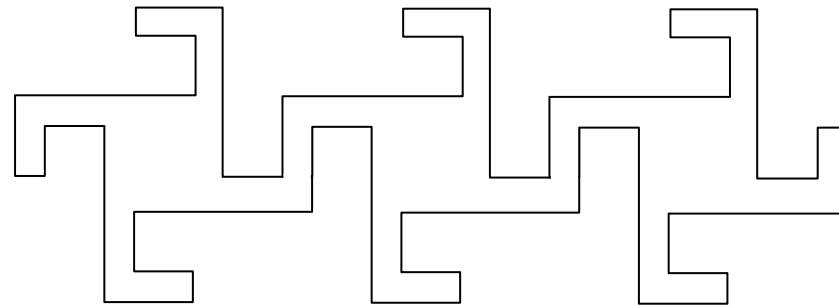
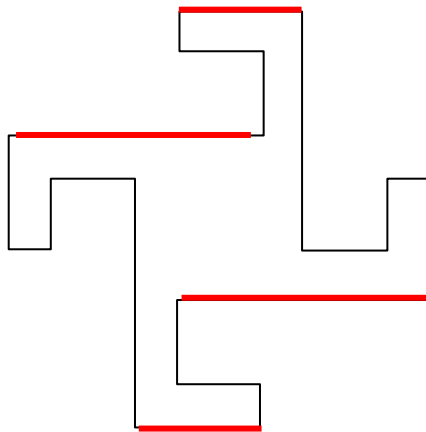


Vigilancia desde aristas

(Bjorling-Sachs, 1996)

Todo polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$ guardias-arista

y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias-arista.



$$g_E^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$$

POLÍGONOS ORTOGONALES

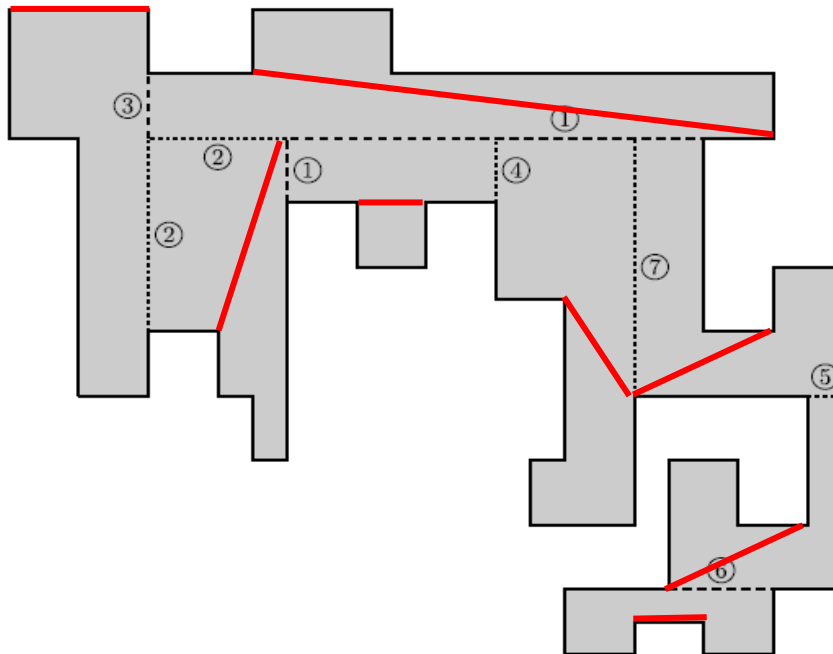


Vigilancia desde segmentos

(Györi, Mezei, 2016)

Todo polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$ guardias-segmento

(visibilidad solo en los extremos) y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias-segmento.



Descomposición de P en poliomínos con a lo más 8 vértices

$$g_M^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$$

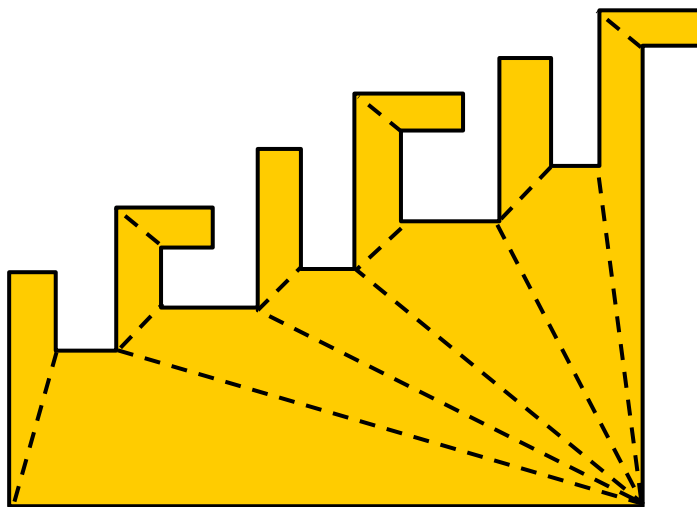
Vigilancia combinatoria desde segmentos

Toda cuadrangulación de un polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$

guardias-segmento combinatorios (aristas o diagonales) y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias-segmento.

Suficiencia: Aggarwal, 1984

Ejemplo: Yiu, 1993



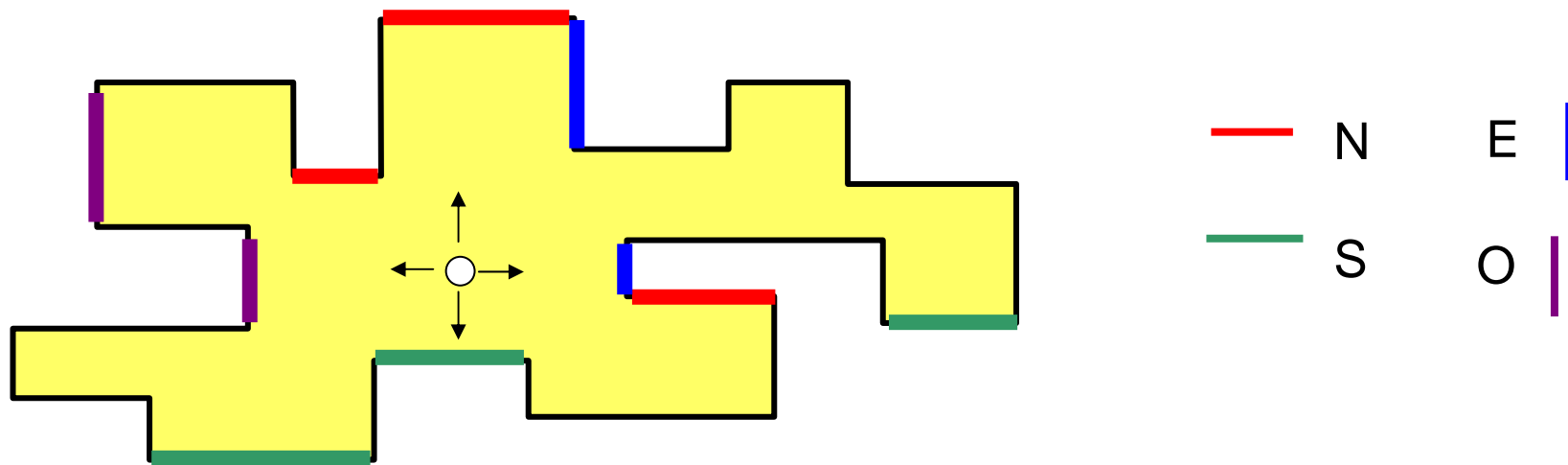
$$g_{M,c}^{\text{ort}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$$

POLÍGONOS ORTOGONALES (segmentos **abiertos**)

G

Vigilancia geométrica desde lados (Bajuelos, Canales, H., Martins, Matos, '15)

Todo polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias-arista y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias-arista.



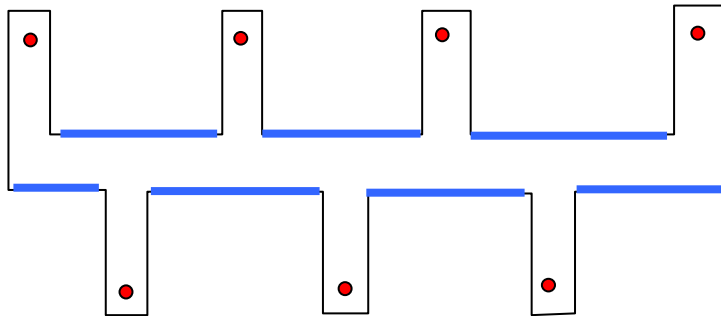
La demostración también es válida para polígonos con agujeros

POLÍGONOS ORTOGONALES (segmentos **abiertos**)

G

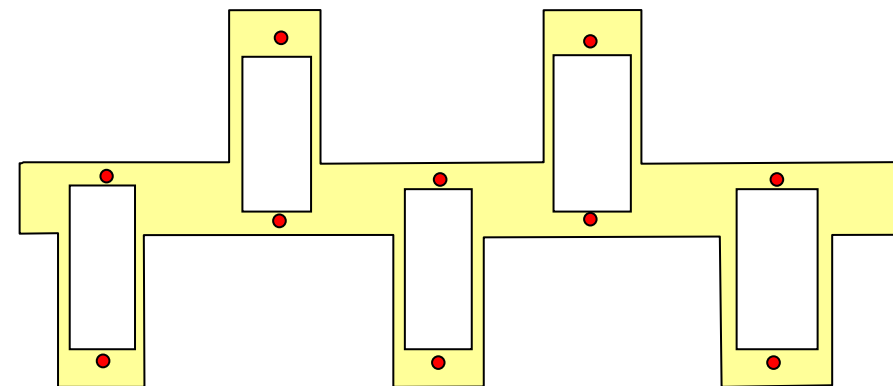
Vigilancia geométrica desde lados (Bajuelos, Canales, H., Martins, Matos, '15)

Todo polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias-arista y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias-arista.



$$g_{OE}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

La cota se mantiene para polígonos con agujeros



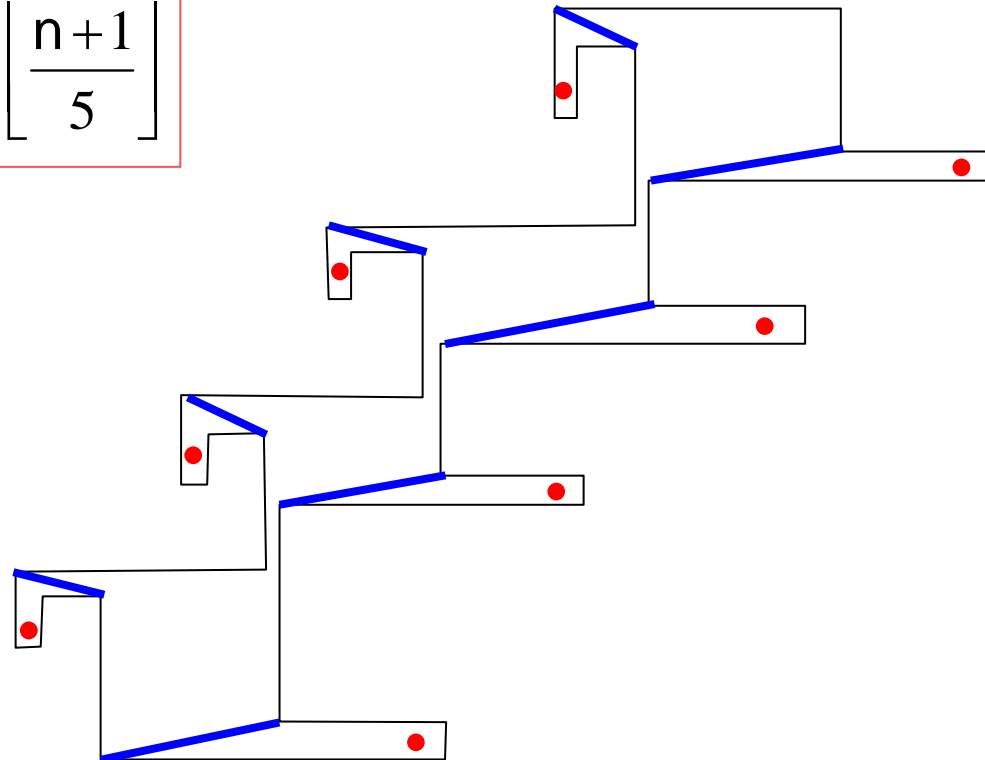
POLÍGONOS ORTOGONALES (segmentos **abiertos**)

G

Vigilancia desde lados y diagonales

Conjetura H.

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$$



POLÍGONOS ORTOGONALES (aristas **abiertas**)

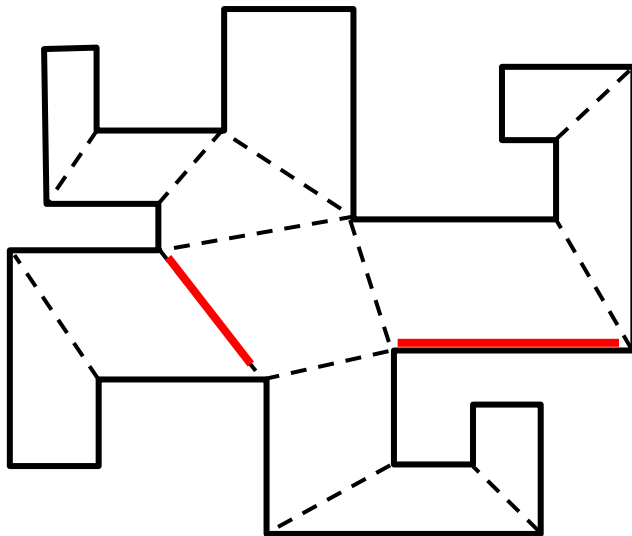
C

Vigilancia combinatoria

CUADRANGULACIÓN CONVEXA

¡Vigilamos las caras del grafo!

El número de **guardias móviles abiertos** que son siempre suficientes y, a veces necesarios para vigilar cualquier grafo cuadrangulación de un polígono ortogonal de n vértices es



$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$

Los guardias pueden limitarse a las aristas interiores del grafo

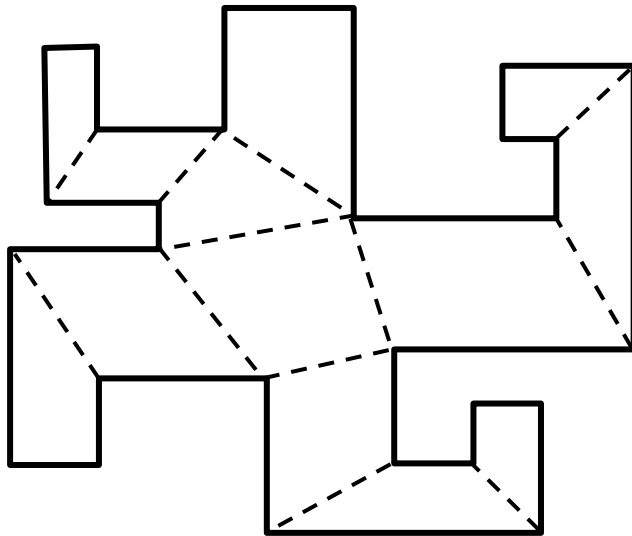
GUARDIAS MÓVILES (abiertos)

C

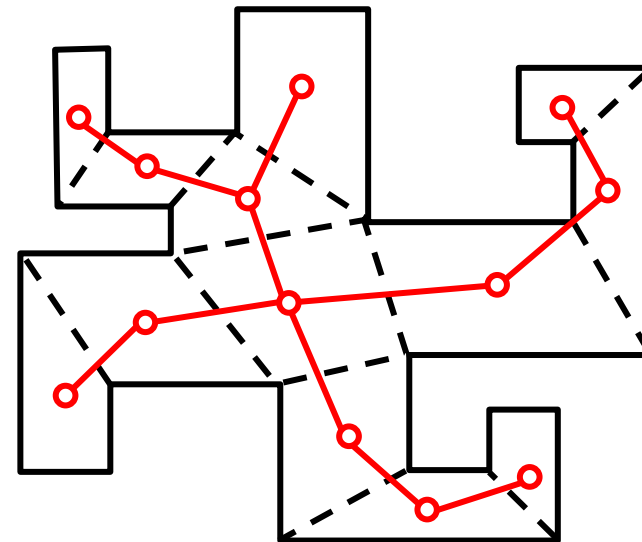
Polígonos ortogonales

Cota superior (suficiencia por **colorines**)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$



Cuadrangulación Q



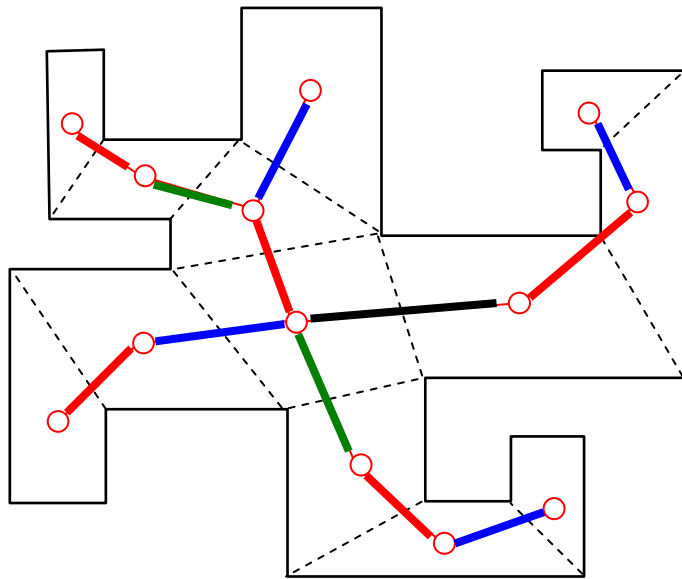
Árbol dual Q^* (con $\Delta = 4$)

4-coloración en aristas de Q^*

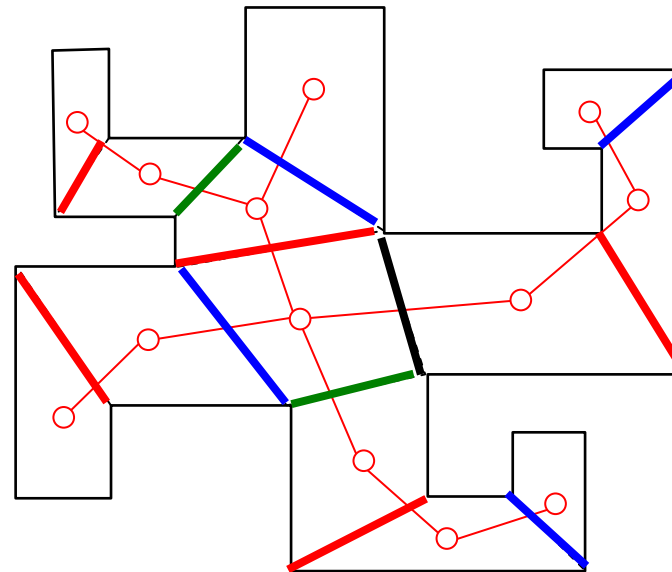
Polígonos ortogonales

Cota superior (suficiencia por **colorines**)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$



4-coloración aristas Q^*



4-coloración diagonales de Q

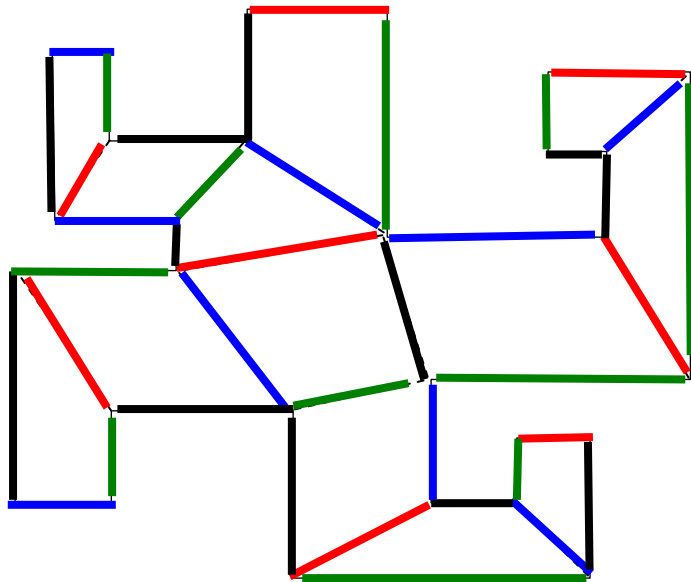
GUARDIAS MÓVILES (abiertos)

C

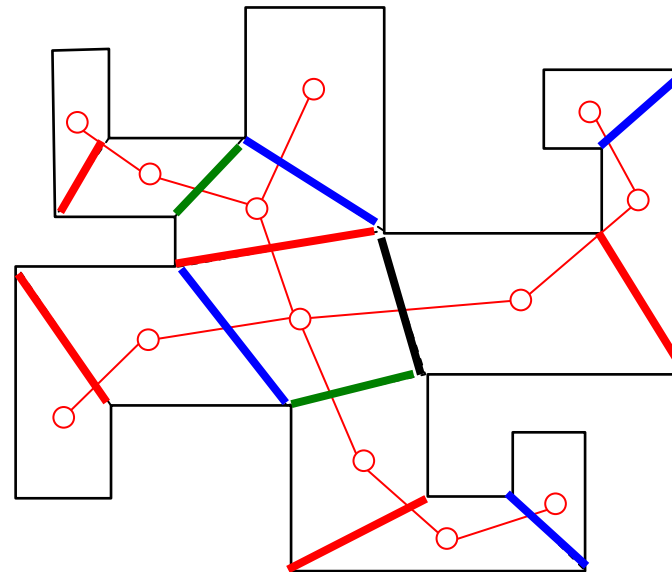
Polígonos ortogonales

Cota superior (suficiencia por **colorines**)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$



4-coloración aristas de Q
(no válida)



4-coloración diagonales de Q

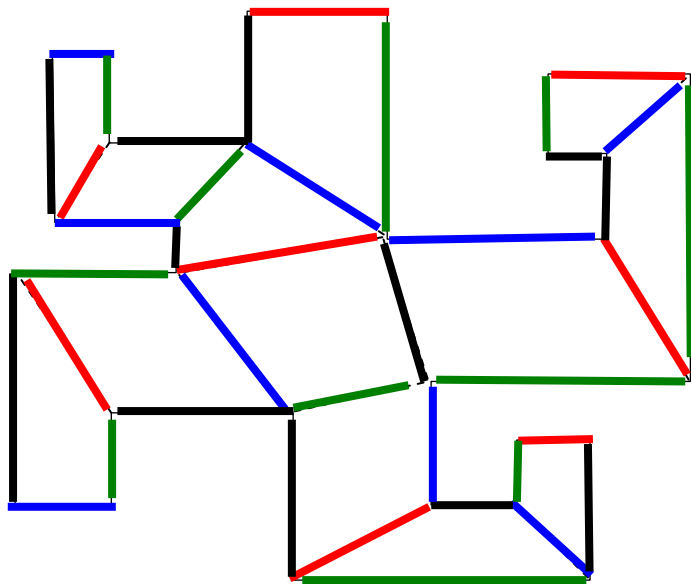
GUARDIAS MÓVILES (abiertos)

C

Polígonos ortogonales

Cota superior (suficiencia por **colorines**)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$



4-coloración aristas de Q
(no válida)

Q tiene $\frac{3n}{2} - 2$ aristas

Cada color, R, A, V y N forma un conjunto de guardias móviles abiertos.

Elegimos el color menos usado R

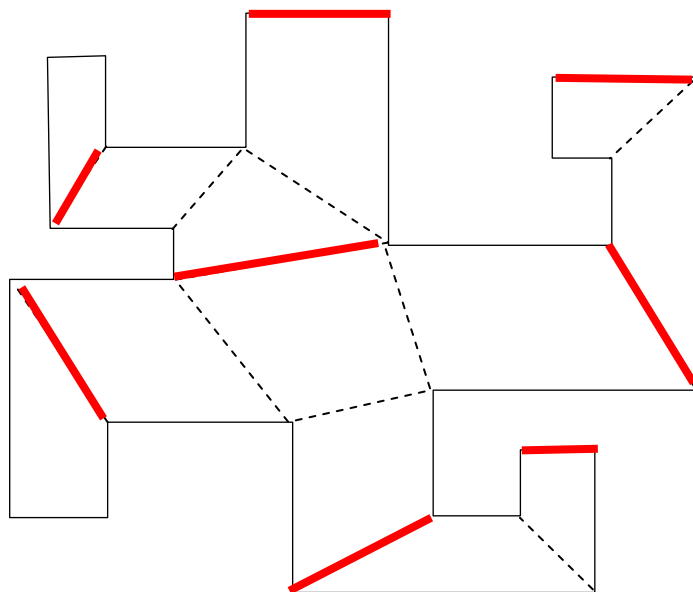
GUARDIAS MÓVILES (abiertos)

C

Polígonos ortogonales

Cota superior (suficiencia por **colorines**)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$



Q tiene $\frac{3n}{2} - 2$ aristas

Cada color, R, A, V y N forma un conjunto de guardias móviles abiertos.

Elegimos el color menos usado R

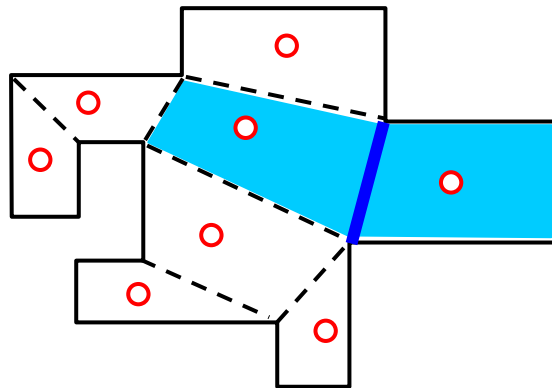
Y tenemos un conjunto de guardias de cardinal a lo sumo

$$\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$

Polígonos ortogonales

Cota inferior (ejemplo)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$

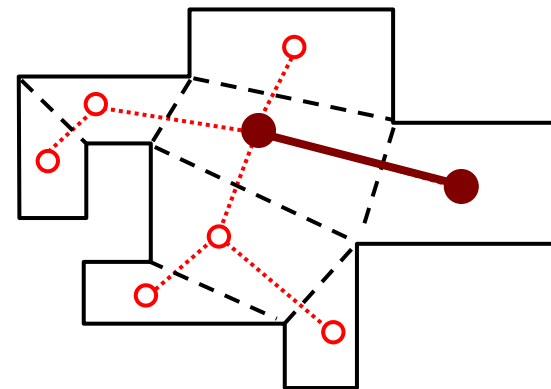


Arista en Q vigilando sus cuadriláteros incidentes

Vigilar combinatoriamente Q

$$\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$

$$q = n/2 - 1$$



Arista en Q^* recubriendo sus nodos incidentes

Cubrir los nodos de Q^* con aristas

$$\left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$$

GUARDIAS MÓVILES (abiertos)

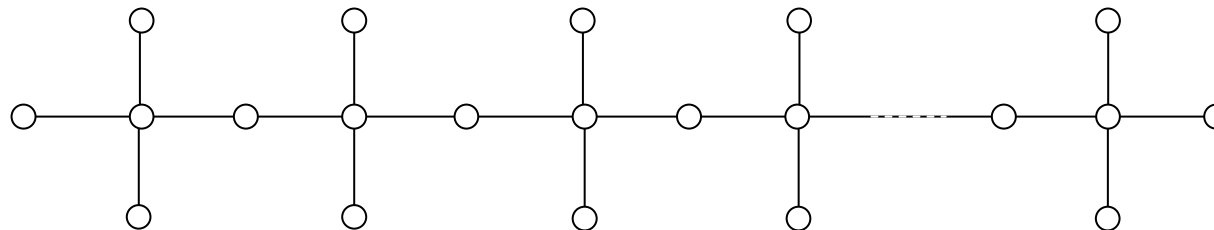
C

Polígonos ortogonales

Cota inferior (ejemplo)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$

Árbol de q nodos, grado máximo 4 y que requiera $\left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$ aristas para cubrir sus nodos



Los nodos de grados 1 y 2 (conjunto H) se cubren con diferentes aristas

$$q_1 = 2 + q_4$$

$$q_2 = q_4 - 1$$

$$|H| = q_1 + q_2 = 3q_4 + 1 = \left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$$

GUARDIAS MÓVILES (abiertos)

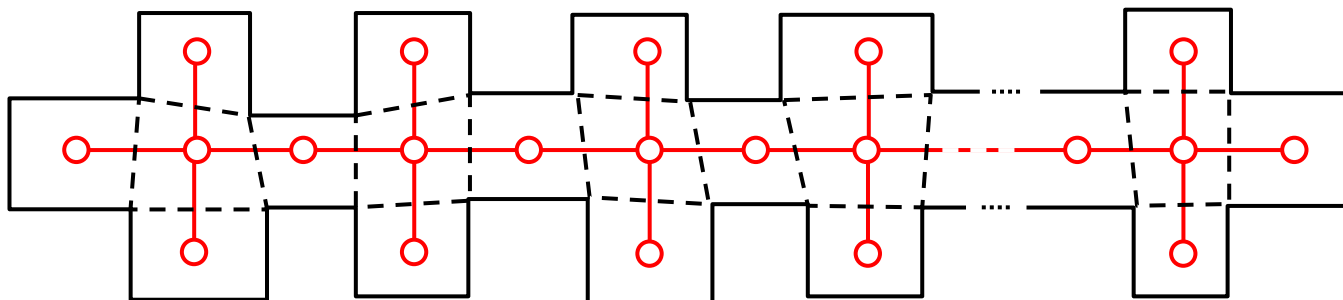
C

Polígonos ortogonales

Cota inferior (ejemplo)

$$g_{OM}^{ort}(n) = \left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$$

Cuadrangulación de un polígono ortogonal correspondiente al árbol dual anterior

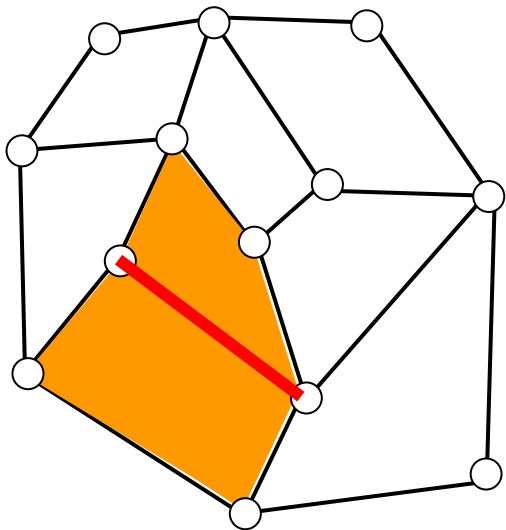


GUARDIAS ARISTA en CUADRANGULACIONES

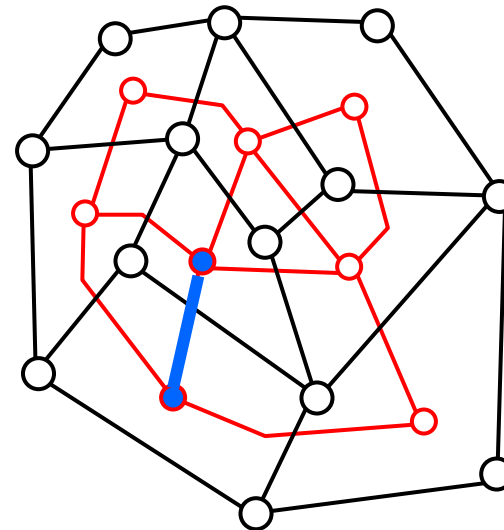
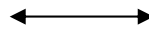
C

Toda cuadrangulación convexa de un conjunto de puntos en el plano con q

cuadriláteros se vigila con $\left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$ guardias-arista abiertos



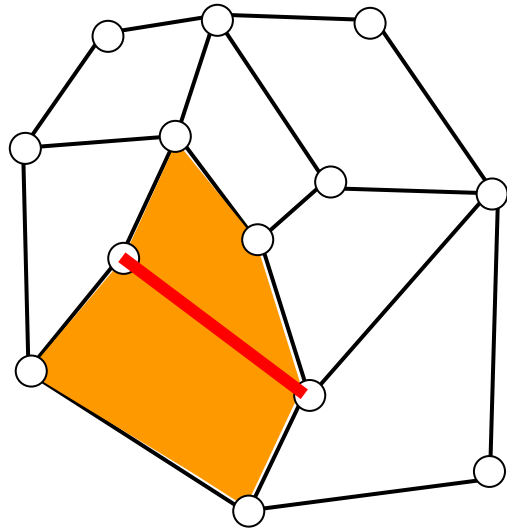
Arista en Q vigilando sus triángulos incidentes



Arista en Q^* recubriendo sus nodos incidentes

GUARDIAS ARISTA en CUADRANGULACIONES

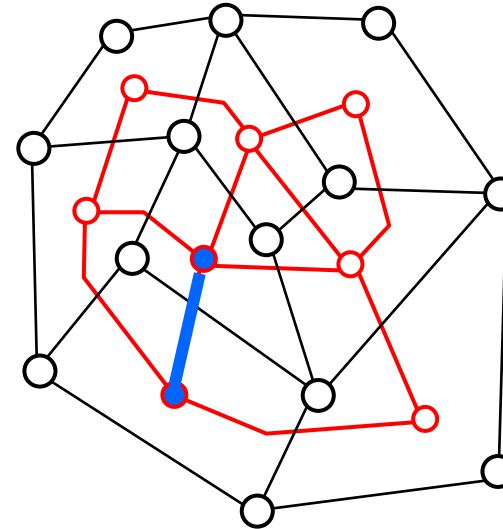
C



Arista en Q vigilando sus triángulos incidentes

Vigilar combinatoriamente Q

$g^{OE}(Q)$



Arista en Q^* recubriendo sus nodos incidentes

Cubrir los nodos de Q^* con aristas

$\beta'(Q^*)$

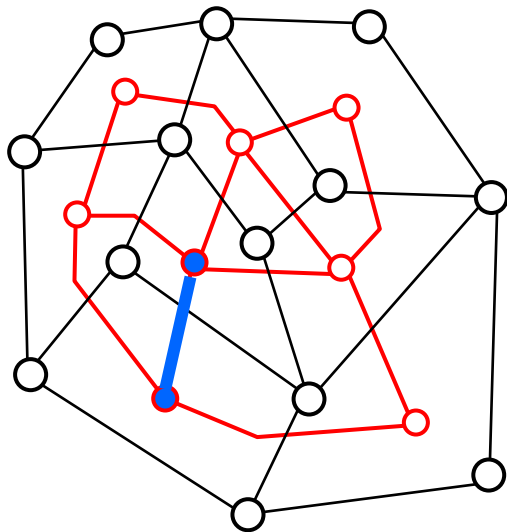
EDGE COVER

GUARDIAS ARISTA en CUADRANGULACIONES

C

Toda cuadrangulación convexa de n vértices con q cuadriláteros

se vigila con $\left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$ guardias-arista abiertos



Si e es una arista de un ciclo de Q^*
 $\beta'(Q^*) \leq \beta'(Q^* - e)$

Luego si T^* es árbol generador de Q^*
 $\beta'(Q^*) \leq \beta'(T^*)$

Si T^* es un árbol de q nodos con $\Delta = 4$,

entonces $\beta'(T^*) \leq \left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$

GUARDIAS ARISTA en CUADRANGULACIONES

C

Si T^* es un árbol de q nodos con $\Delta = 4$, entonces $\beta'(T^*) \leq \left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$

Teorema de Gallai

Si G es un grafo de orden p sin vértices aislados, entonces

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = p \qquad \alpha'(G) \text{ n}^\circ \text{ de emparejamiento}$$

Si T^* es un árbol de q nodos con $\Delta = 4$, entonces existe en T^* un emparejamiento con al menos $\left\lceil \frac{q-1}{4} \right\rceil = q - \left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$ aristas

Relación emparejamiento --- recubrimiento por vértices

Teorema de König

Si G es un grafo bipartito entonces $\alpha'(G) = \beta(G)$ max emp = min rec

GUARDIAS ARISTA en CUADRANGULACIONES

C

Lema auxiliar

Si G es un grafo bipartito de q aristas entonces existe un emparejamiento en G de cardinal al menos $\lceil q/\Delta \rceil$

Pero nuestro árbol T^* tiene $q - 1$ aristas y $\Delta = 4$, luego admite un

emparejamiento de cardinal al menos $\lceil \frac{q-1}{4} \rceil = q - \lfloor \frac{3q+1}{4} \rfloor$

Luego

$$g_c^{\text{OE}}(q) \leq \left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$$

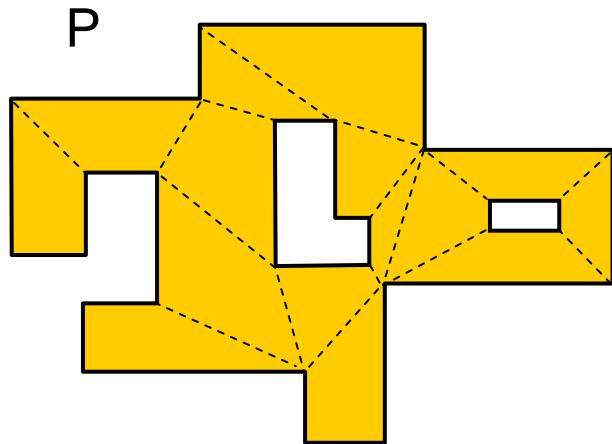
Y la cota es ajustada porque existen cuadrangulaciones de polígonos que necesitan ese número de guardias

GUARDIAS MÓVILES (Polígonos ortogonales con agujeros)

C

El número de guardias móviles abiertos que son siempre suficientes y, a veces necesarios, para dominar cualquier grafo cuadrangulación convexa de un polígono cuadrangulable de n vértices con h agujeros es

$$g_{OM}^{\text{cuad}}(n, h) = \left\lfloor \frac{3n + 6h - 4}{8} \right\rfloor$$



En el polígono P
 $n = 2q - 2h + 2$, luego la cota es

$$g_{OM}^{\text{cuad}}(q) = \left\lfloor \frac{3q + 1}{4} \right\rfloor$$

La demostración de la **cota superior** (suficiencia) es la misma que para cuadrangulaciones (pasar al grafo dual y recubrimiento por aristas)

Cota inferior

$$g_{OM}^{\text{cuad}}(n, h) = \left\lfloor \frac{3n + 6h - 4}{8} \right\rfloor$$

Construir un polígono ortogonal de n vértices con h agujeros que necesite ese número de guardias

$$g_{OM}^{\text{cuad}}(q) = \left\lfloor \frac{3q + 1}{4} \right\rfloor$$

Construir un grafo (dual) de q nodos (con h ciclos y $\Delta = 4$), que necesite ese número de aristas en cualquier recubrimiento

Construiremos una sucesión de grafos H_c tales que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{3q + 1}{4}$$

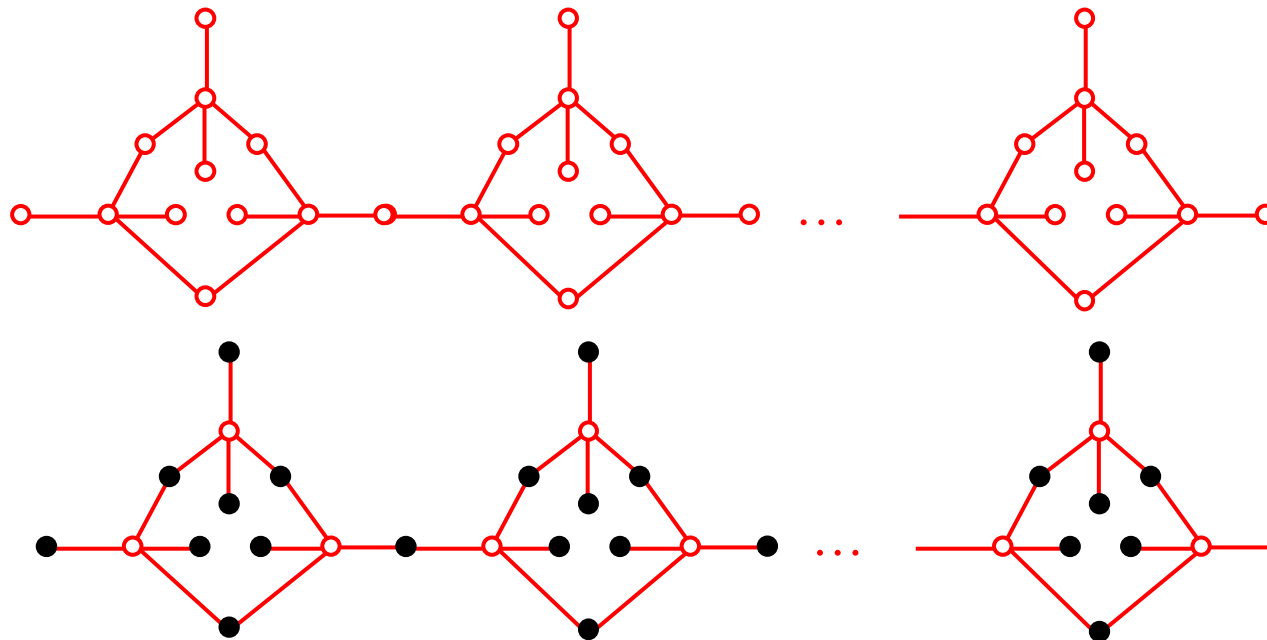
GUARDIAS MÓVILES (Polígonos ortogonales con agujeros)

C

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{3q+1}{4}$$

La base de la construcción es H_6



$$q = 1 + 11h$$

Todo recubrimiento por aristas requiere, al menos, $1 + 8h$ aristas

GUARDIAS MÓVILES (Polígonos ortogonales con agujeros)

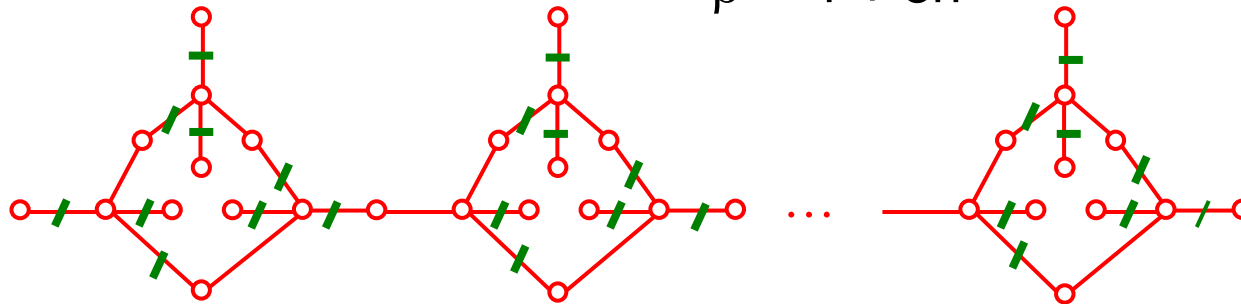
C

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{3q+1}{4}$$

La base de la construcción es H_6 : $t = 1 + 11h$

$$\beta' = 1 + 8h$$



Si aumentamos la longitud de los ciclos, manteniendo su estructura alterna de vértices de grados 2 y 4, construimos una sucesión de grafos (H_{2c}):

$$H_8: \quad q = 1 + 15h, \quad \beta' = 1 + 11h$$

$$H_{10}: \quad q = 1 + 19h, \quad \beta' = 1 + 14h$$

.....

$$H_{2c}: \quad q = 1 + (4c - 1)h, \quad \beta' = 1 + (3c - 1)h$$

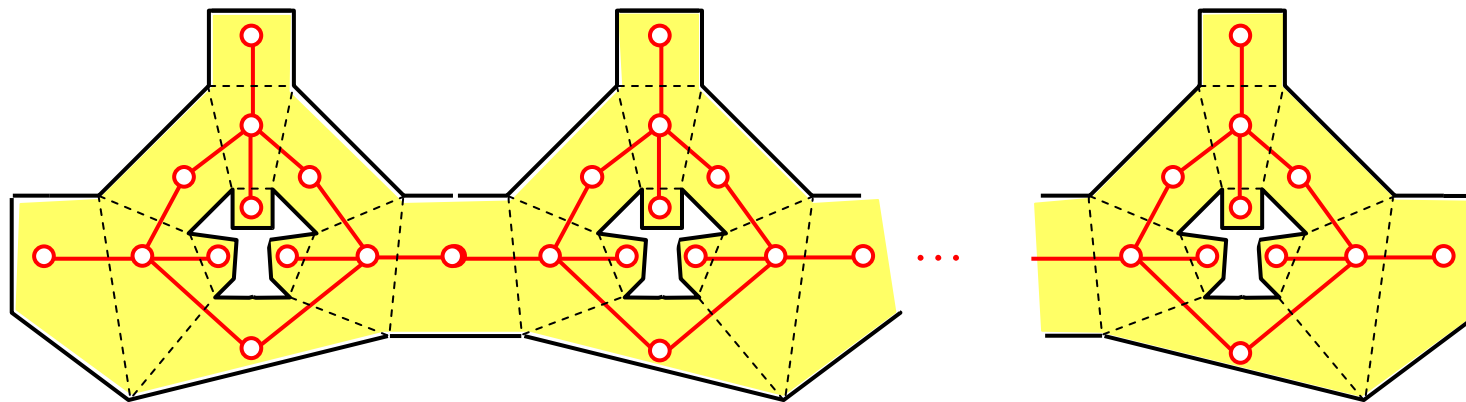
Luego,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_{2c}) = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(3c-1)(q-1)}{4c-1} \right) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(3c-1)q + c}{4c-1} = \frac{3q+1}{4}$$

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{3q+1}{4}$$

Polígono cuadrangulable y cuadrangulación correspondiente al grafo H_6



Pero NO es un polígono ortogonal. Un ciclo de grados 4, 2, 4, 2, 4, 2 no puede corresponder a un polígono ortogonal con agujeros

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{3q+1}{4}$$

Familia de grafos que **SÍ** corresponden a cuadrangulaciones de polígonos ortogonales. Cada uno de los agujeros del polígono debe originar un ciclo que alterna vértices de grados 2 y 4 más 4 parejas (al menos) de vértices consecutivos de grado 2. (Son los necesarios para “cambiar de dirección” los cuadriláteros correspondientes)

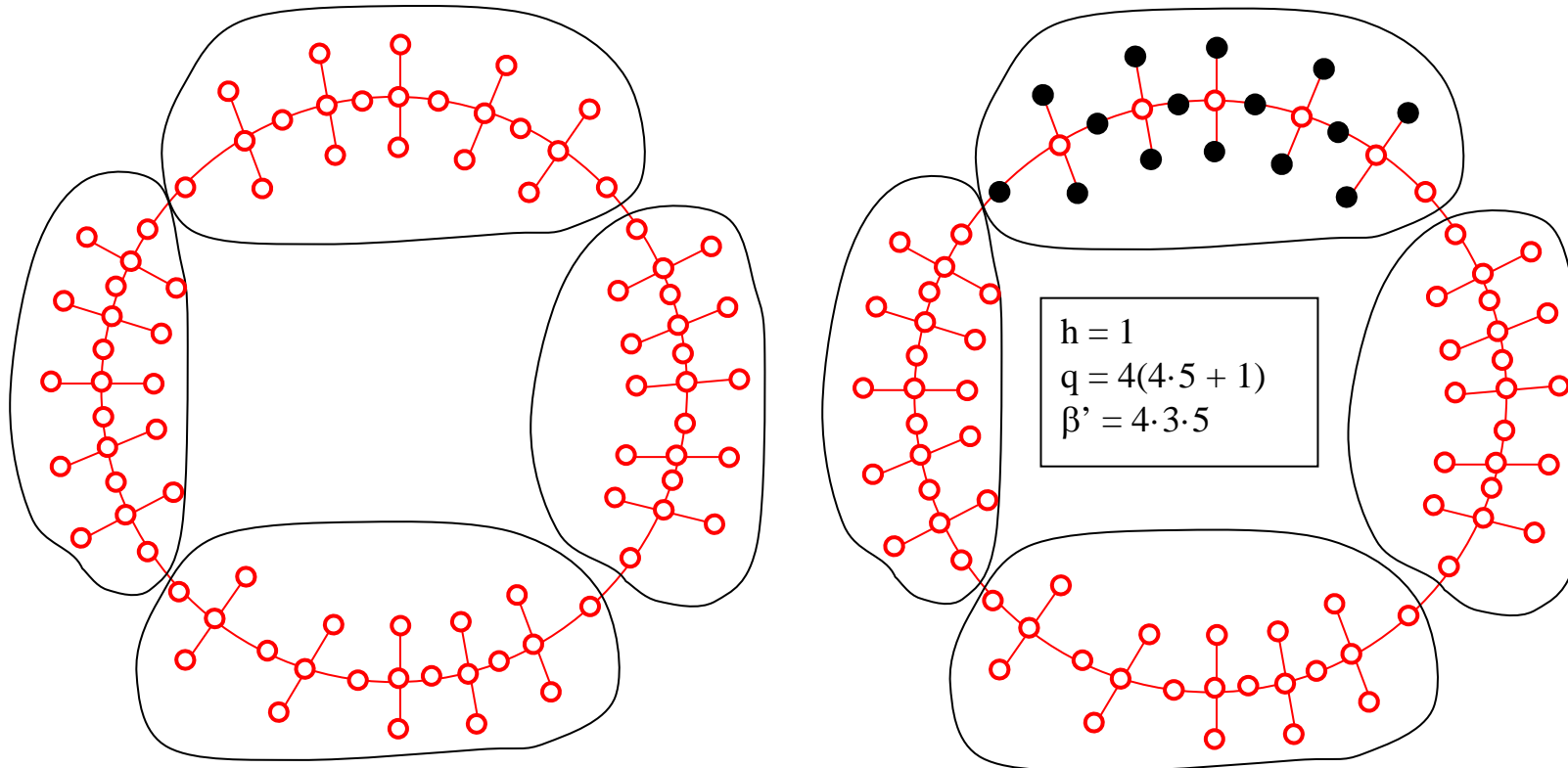
GUARDIAS MÓVILES (Polígonos ortogonales con agujeros)

C

Cota inferior

Ciclo G_s ($s = 5$)

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{3q+1}{4}$$



GUARDIAS MÓVILES (Polígonos ortogonales con agujeros)

C

Cota inferior

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta'(H_c) = \frac{3q+1}{4}$$

$$\text{Ciclo } G_s \quad q = 4(4s + 1), \quad \beta' = 4 \cdot 3s$$

Concatenamos h ciclos G_s y construimos G_s^* que tiene $q = 1 + (16s + 3)h$ vértices y $\beta' = 1 + (12s - 1)h$

$$\beta'(G_s^*) = 1 + (12s - 1) \frac{q-1}{16s+3} = \frac{(12s-1)q + 4s + 4}{16s+3}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \beta'(G_s^*) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(12s-1)q + 4s + 4}{16s+3} = \frac{3q+1}{4}$$

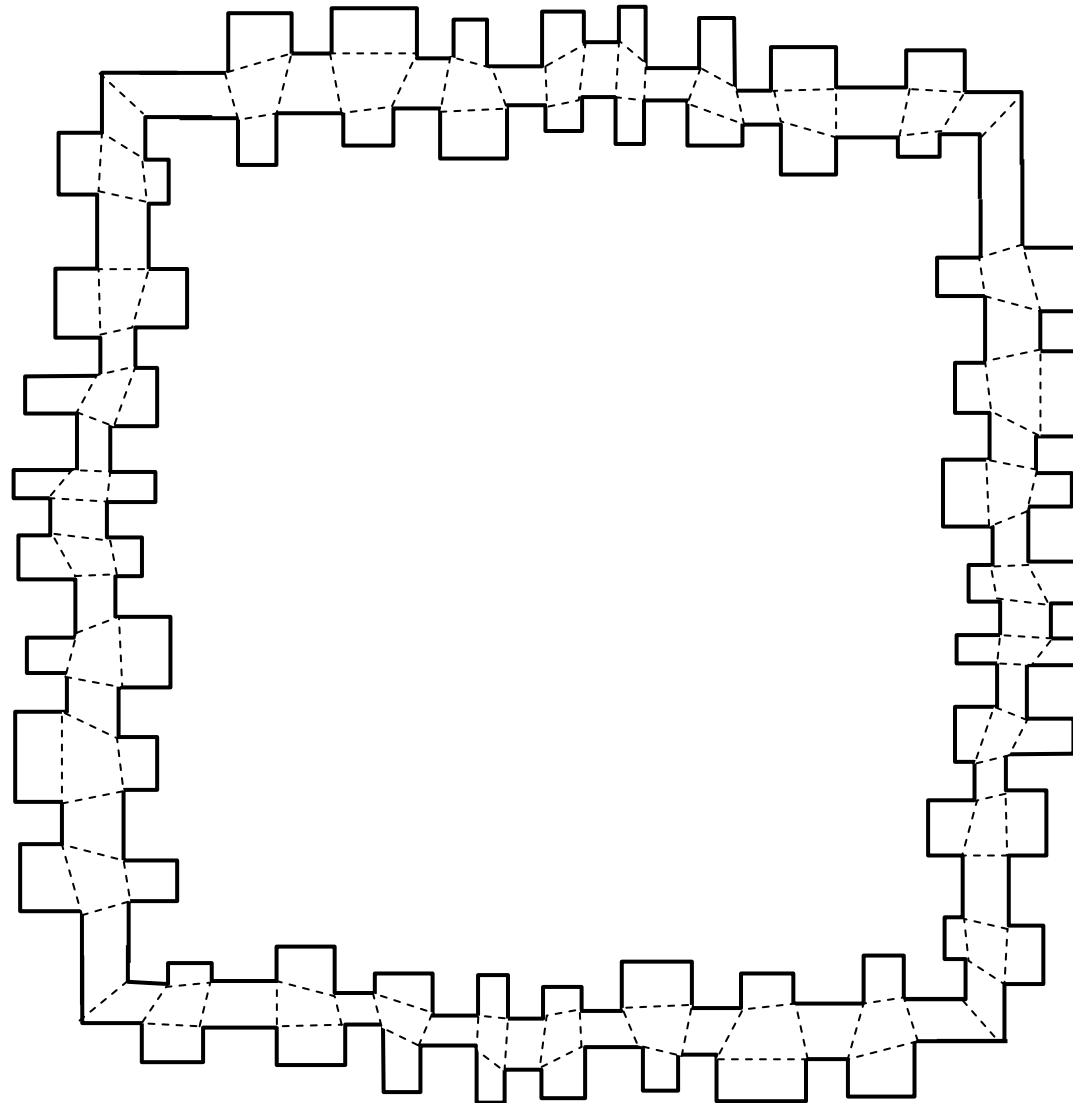
Así, para $n \gg 0$ tenemos polígono ortogonal con h agujeros que necesita $(3q+1)/4$ guardias

GUARDIAS MÓVILES (Polígonos ortogonales con agujeros)

C

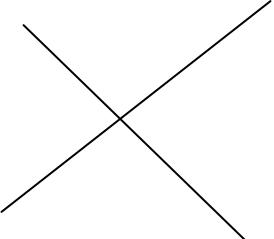
Cota inferior

Polígono con un agujero

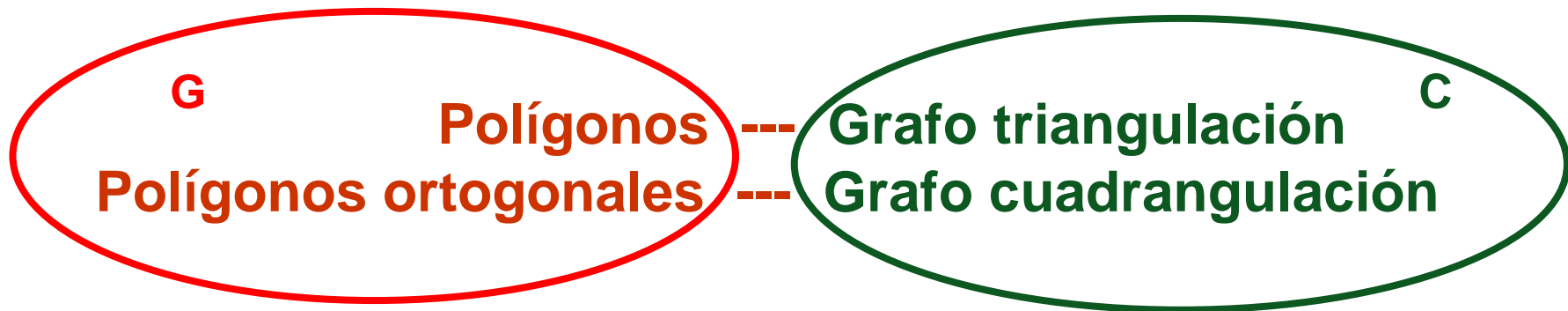


Guardias segmento (P. ortogonales y cuadrangulaciones)

n vértices, h agujeros, q cuadriláteros convexos

	Arista	Móviles (arista + diagonal)	CUADRANGULACIONES
Cerrados	Geom. $\left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$ (1)	$\left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$ (2) $\left\lfloor \frac{3n+4h+4}{16} \right\rfloor$ (3)	(1) Björling-Sachs, '96 (2) Aggarwal, '84 (3) Györi et al., '96
	Combin.	$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ (2)	
Abiertos	Geom. $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ (4)	$\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor \leq g_{OM}^{ort} \leq ?$	(4) BCHMM, '15
		Combin. $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$ $\left\lfloor \frac{3n+6h-4}{8} \right\rfloor$ $\left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{3q+1}{4} \right\rfloor$

- Relación entre guardias **geométricos** y **combinatorios**
- Cotas combinatorias para **Guardias-segmento cerrados y abiertos**



- **TRABAJO FUTURO: ...**



Gracias por vuestra atención!!

REFERENCIAS

- A. Bajuelos, S. Canales, G. Hernández, A. M. Martins, I. Matos, “Some Results on Open-Edge and Open Mobile Guarding of Polygons and Triangulations”, *The Computer Journal*, 58, 160-171, (2015)
- Bjorling-Sachs, I. (1998) “Edge guards in rectilinear polygons”. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 11, 111–123
- Everett, H., Rivera-Campo, E. “Edge guarding polyhedral terrains”. *Comput. Geom.*, 7, 201–203, (1997)
- O’Rourke, J. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford Univ. (1987)
- Shermer, T.C. “A tight bound on the combinatorial edge guarding problem”. *Snapshots Comp. Discrete Geom.*, 3, 191–223. (1994)
- Tóth, C.D., Toussaint, G.T., Winslow, A. (2012) “Open Guard Edges and Edge Guards in Simple Polygons”. LNCS 7579, 54–64. Springer
- Viglietta, G. *Guarding and searching polyhedra*. PhD. Thesis, (2012)