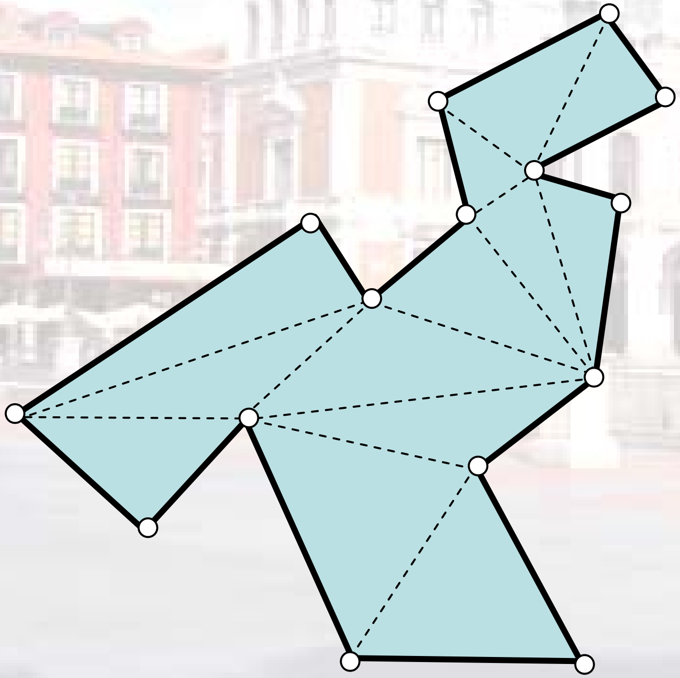
Conectividad y conjuntos dominantes en triangulaciones

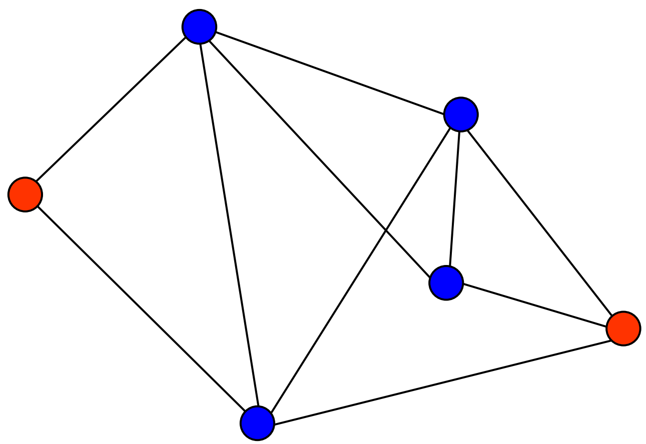


Gregorio Hernández
Universidad Politécnica de Madrid, Spain

Sumario

- Conectividad en conjuntos dominantes
- Variantes de la noción de dominación
- Análisis combinatorio en MOP’s (**maximal outerplanar graphs, grafos periplanos maximales)**
- Análisis combinatorio en **“triangulation graphs” (grafos triangulación)**

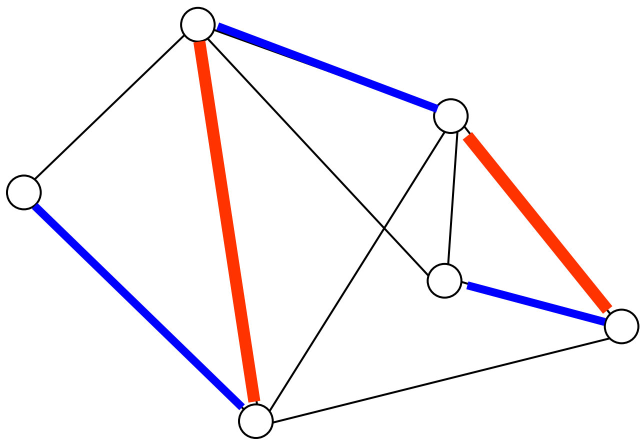
Controlando en un grafo



Controlando desde vértices

CONJUNTO DOMINANTE

RECUBRIMIENTO



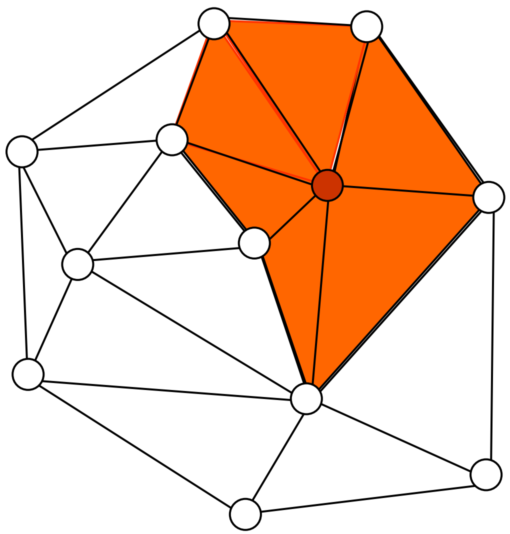
Controlando desde aristas

CONJ. DOMINANTE DE ARISTAS

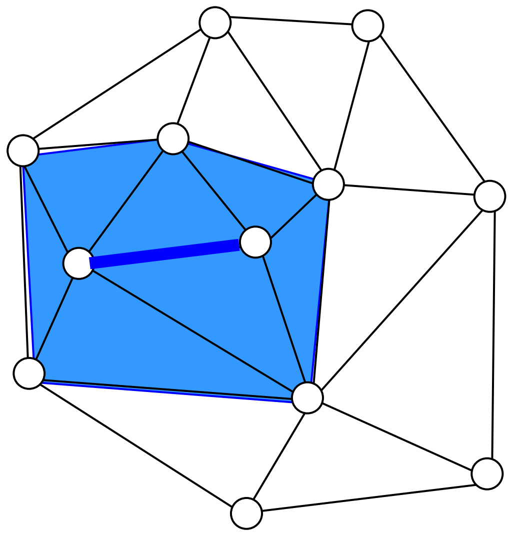
RECUBRIMIENTO POR ARISTAS

Controlando en Geometría Computacional

Grafo triangulación



Guardias-vértice

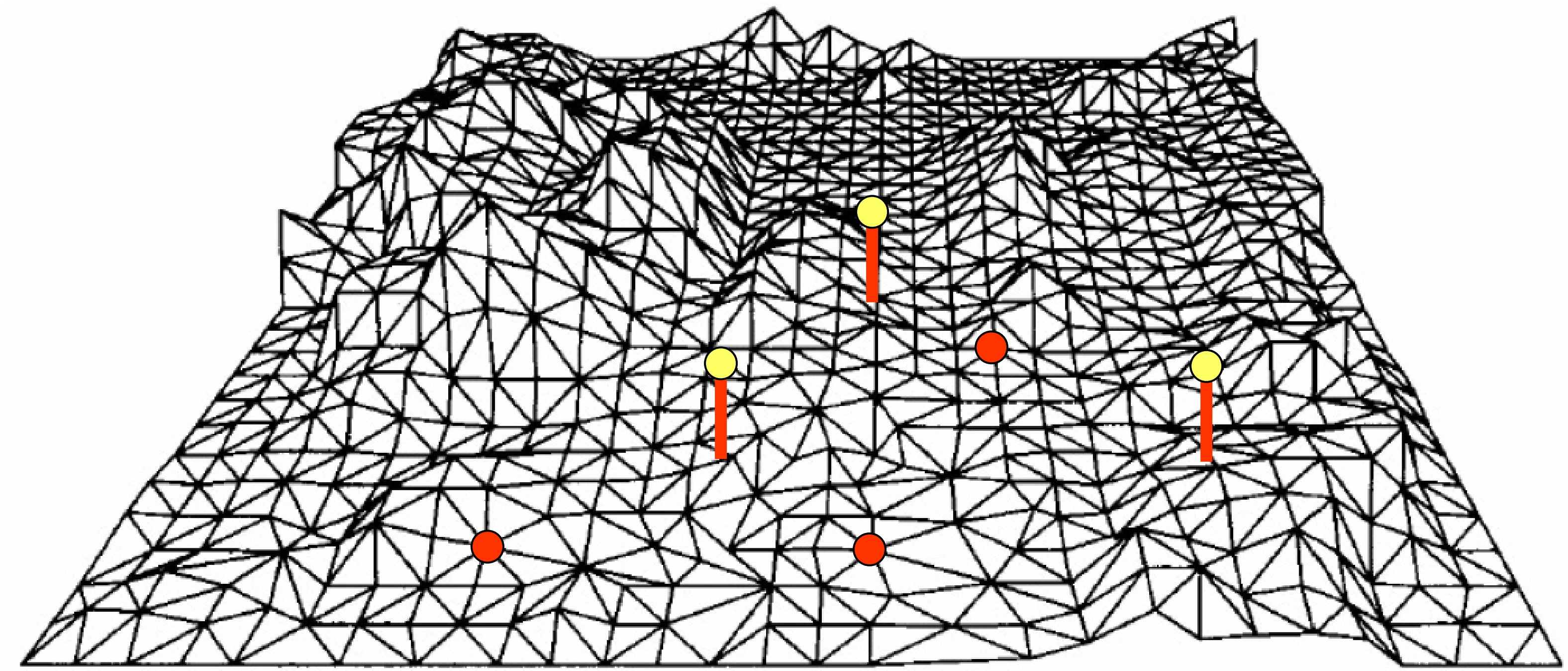


Guardias-arista

Controlando en Geometría Computacional

¿Triangulaciones?

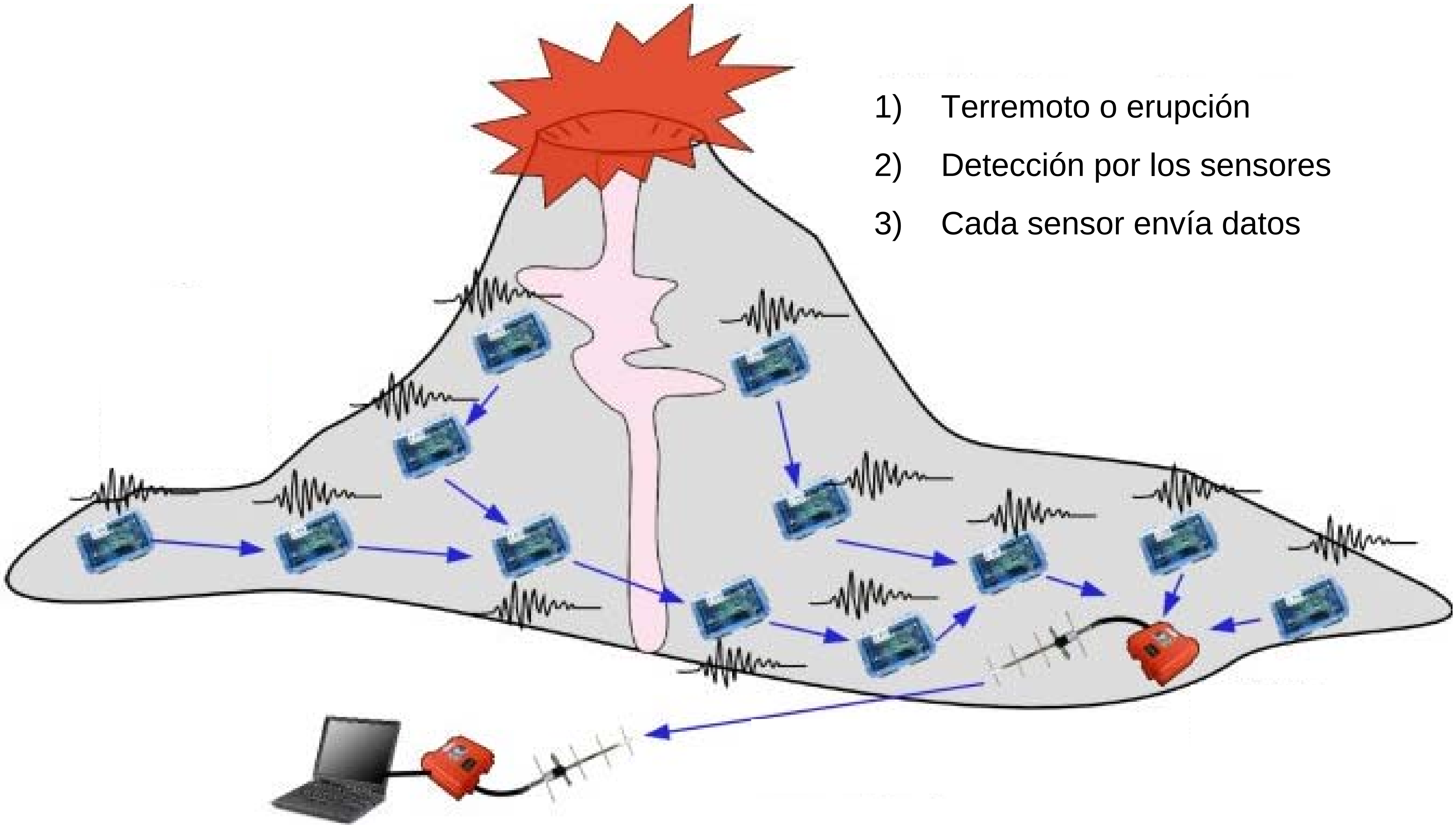
VIGILANCIA DE TERRENOS



Minimizar es un problema NP-duro
Cole-Sharir, 89

GUARDIA-VÉRTICE (PUNTO)
ALTURA FIJA

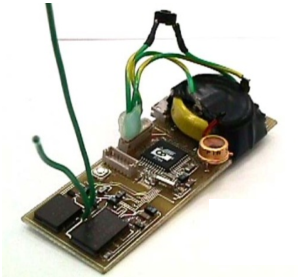
DOMINACIÓN, ¿por qué?



1) Terremoto o erupción
2) Detección por los sensores
3) Cada sensor envía datos

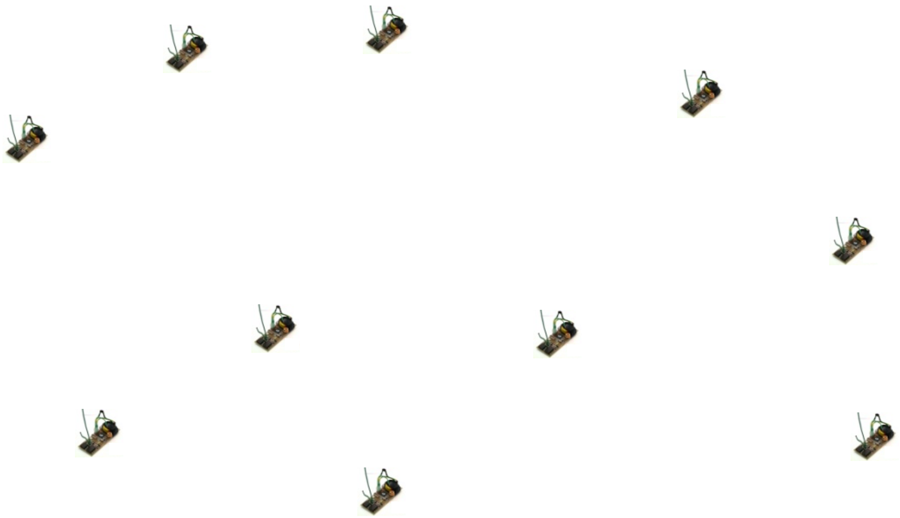
DOMINACIÓN, ¿por qué?

Con los sensores ...



¡No mapa!

¡No camino!



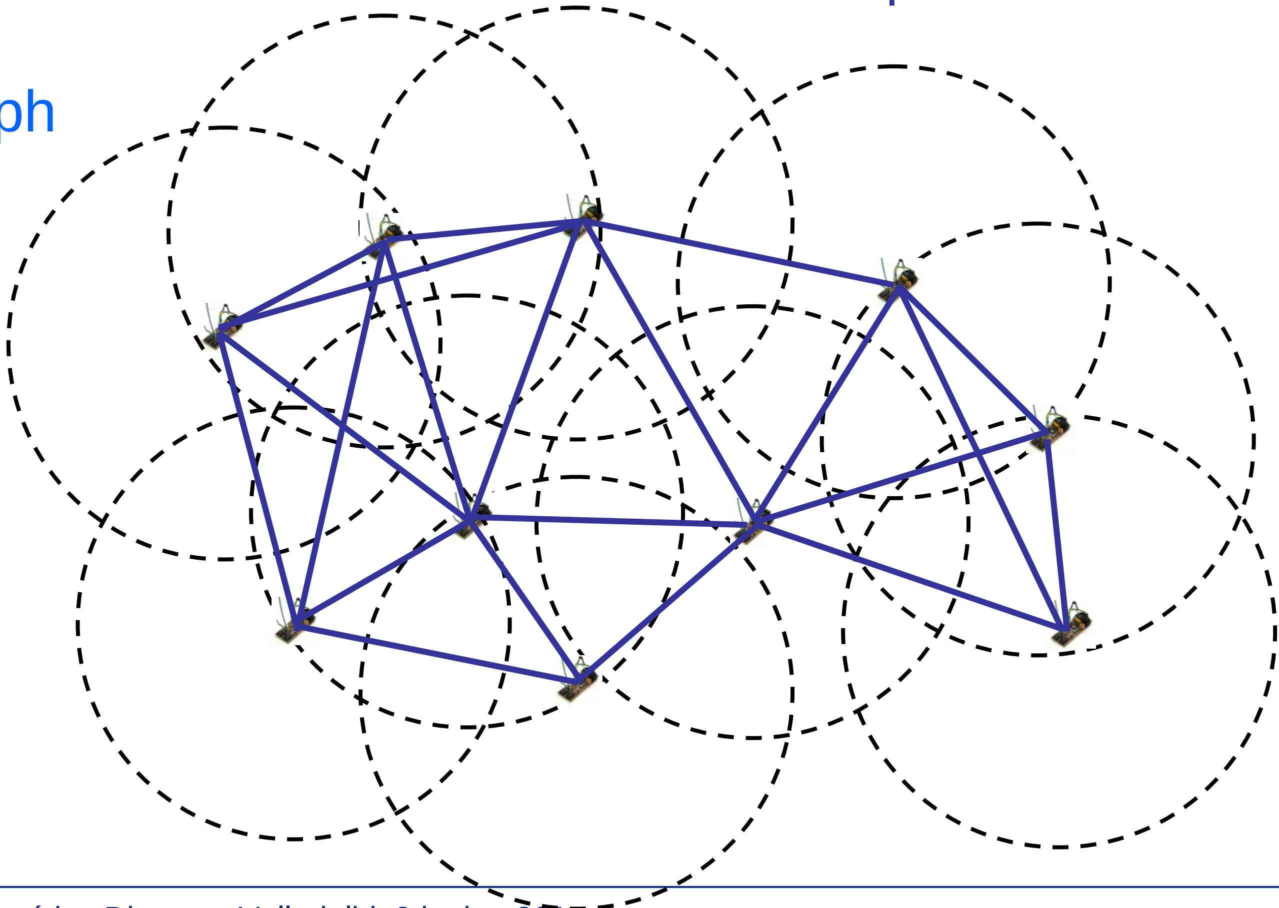
DOMINACIÓN, ¿por qué?

Con los sensores ...

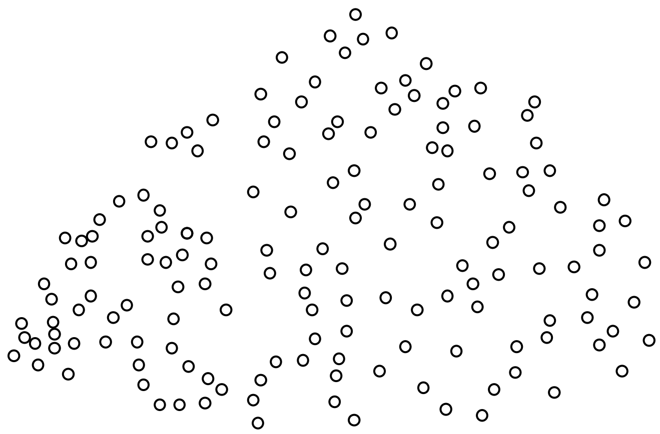
¡No mapa!

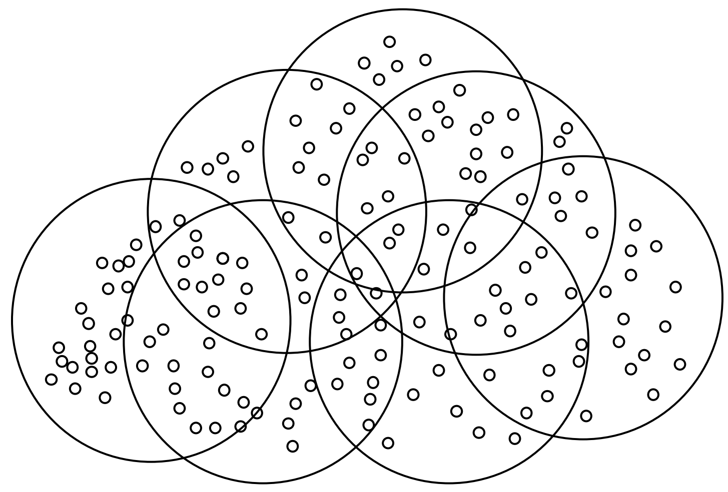
¡No camino!

UDG
UnitDiskGraph

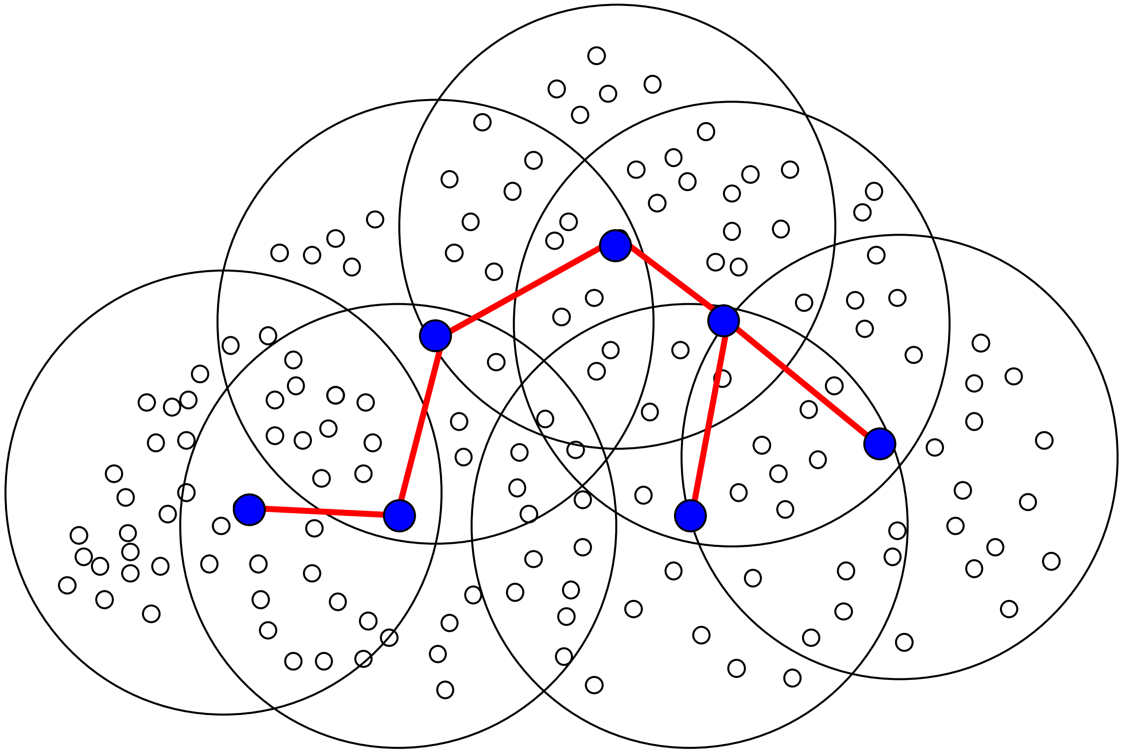


DOMINACIÓN, ¿por qué?





DOMINACIÓN CONEXA



Redes ad-hoc
Esqueleto virtual

Conjunto
dominante y conexo

DOMINACIÓN

Problemas de dominación en grafos

- Conectividad
- Distancia entre vértices dominantes y dominados
- Multiplicidad en la dominación
- Potencialidad. (Monitorización de redes eléctricas)
- …

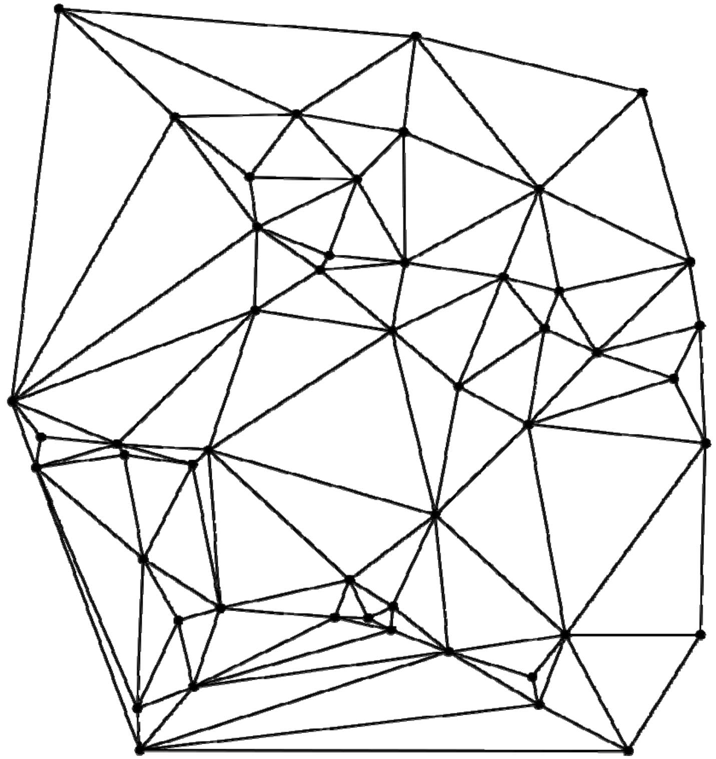
Triangulaciones (combinatorias)

- un tipo especial de triangulaciones

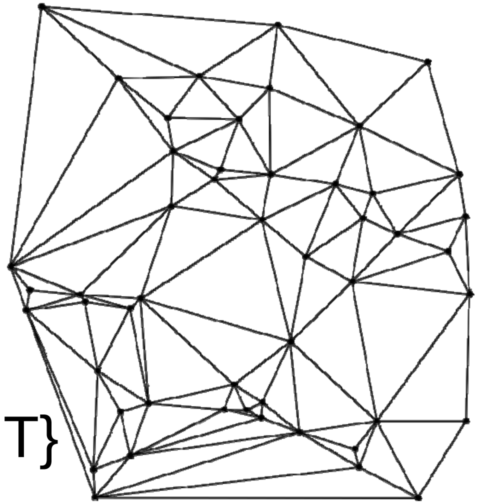
CONTROLANDO TRIANGULACIONES

Problema algorítmico

Dada una triangulación T



CONTROLANDO TRIANGULACIONES



Problema algorítmico

Dada una triangulación T

$\gamma(T) = \min\{|D| \,/\, D$ es un conjunto dominante en $T\}$

$g(T) = \min\{|G| \,/\, G$ es un conjunto de guardias para $T\}$

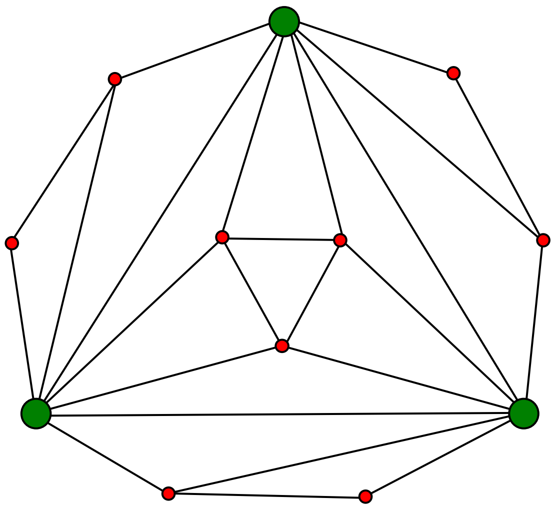
$\beta(T) = \min\{|K| \,/\, K$ es un recubrimiento de $T\}$

El cálculo de estos parámetros es un problema NP-completo

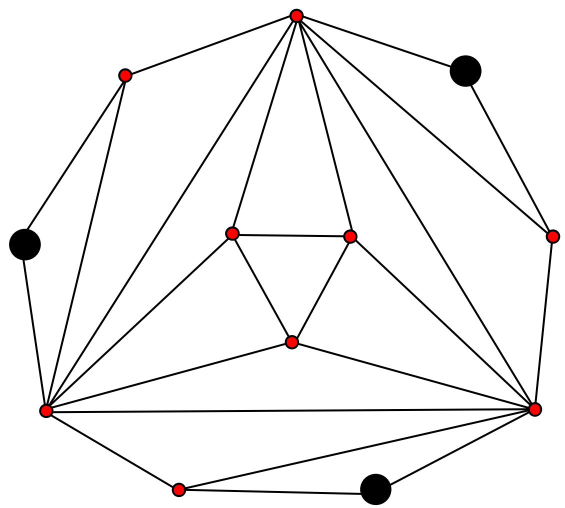
$$\gamma(T) \leq g(T) \leq \beta(T)$$

CONTROLANDO TRIANGULACIONES

$\gamma(T) < g(T) < \beta(T)$



$\gamma(T) \leq 3$

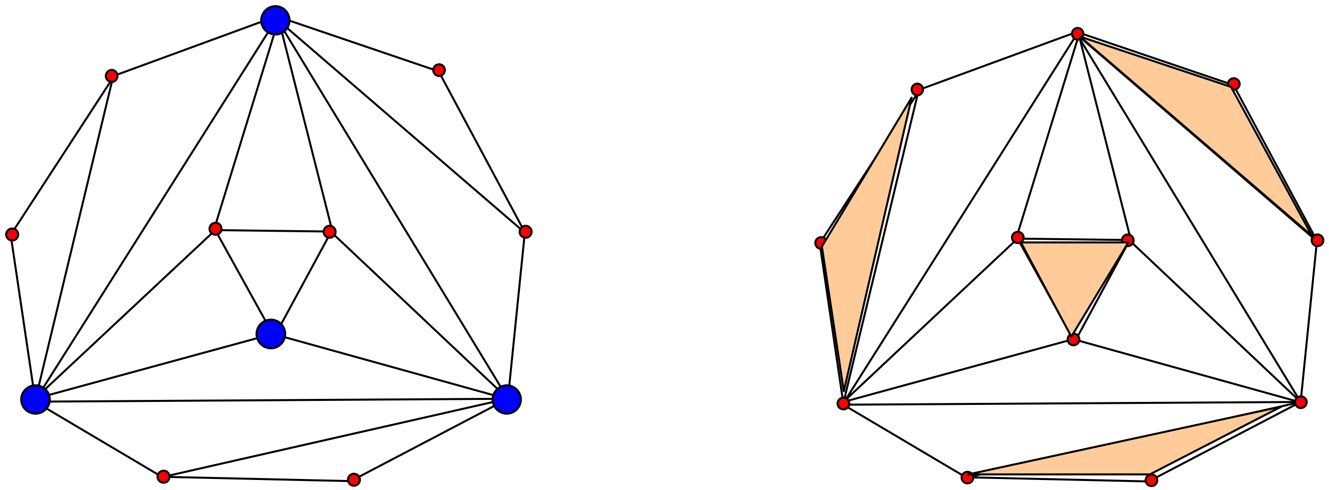


$\gamma(T) \geq 3$

$\gamma(T) = 3$

CONTROLANDO TRIANGULACIONES

$\gamma(T) < g(T) < \beta(T)$

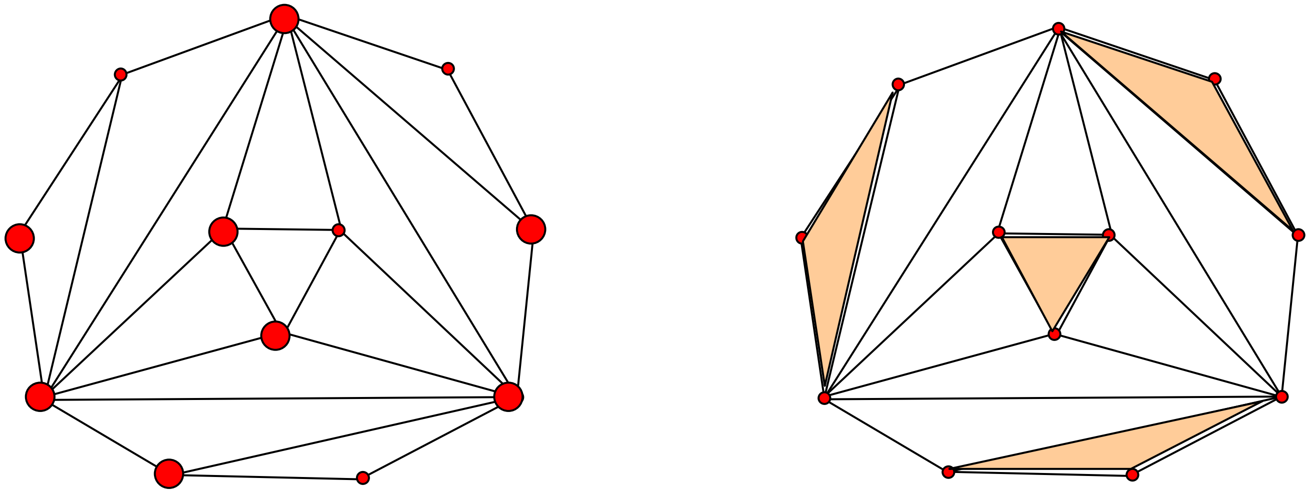


$g(T) \leq 4$ $\qquad$ $g(T) \geq 4$

$g(T) = 4$

CONTROLANDO TRIANGULACIONES

$\boxed{\gamma(T) < g(T) < \beta(T)}$



$\beta(T) \leq 8$ $\beta(T) \geq 8$

$\boxed{\beta(T) = 8}$

CONTROLANDO TRIANGULACIONES

Problema combinatorio

h(T) = min{|K| : K es un conjunto (-------) de T}

(-------) dominante, vigilante, recubrimiento, dominante con una determinada propiedad

h(n) = max {h(T) : T es una triangulación, T = (V,E) , |V| = n}

Cotas combinatorias para h(n)

CONTROLANDO TRIANGULACIONES

$\boxed{\text{Problema combinatorio}}$

h(T) = min{|K| : K es un conjunto (-------) de T}

$\boxed{h(n) = \max \{h(T) : T \text{ es una triangulación}, T = (V,E), |V| = n\}}$

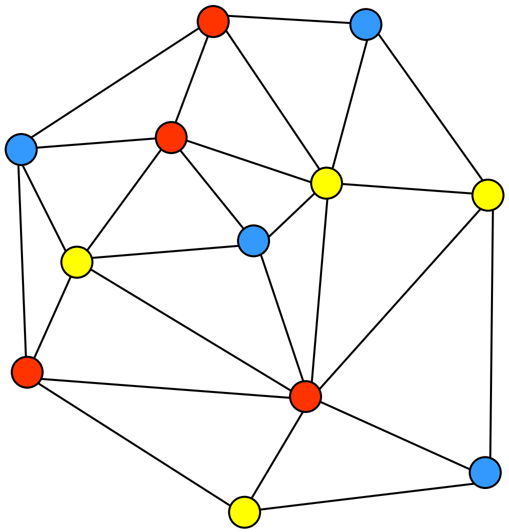
$\boxed{\text{Cotas combinatorias para } h(n)}$

Para cada condición H debemos encontrar:

Cota inferior Un ejemplo de triangulación que necesite h(n)

Cota superior Demostrar que toda triangulación se puede controlar, cumpliendo H, con un conjunto de cardinal h(n)

DOMINANDO TRIANGULACIONES



Teorema Matheson, Tarjan, '96

Toda triangulación de n vértices se domina con $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ vértices

Dem.: (esquema)

Toda triangulación admite una 3-coloración (impropia) tal que cada clase de color es dominante y el subgrafo inducido por la cara exterior coloreado propiamente

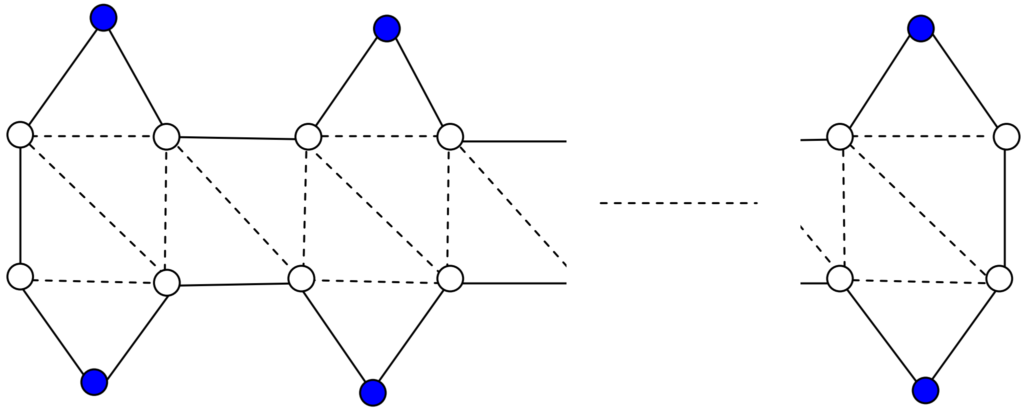
DOMINANDO TRIANGULACIONES

Teorema Matheson, Tarjan, '96

Cota superior

Si T es una triangulación de orden n, entonces $\gamma(T) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

La cota es ajustada para triangulaciones sin puntos interiores



Cota inferior

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \gamma(n)$$

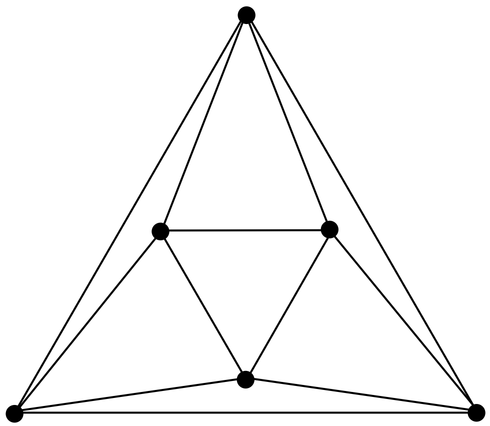
$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \gamma(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

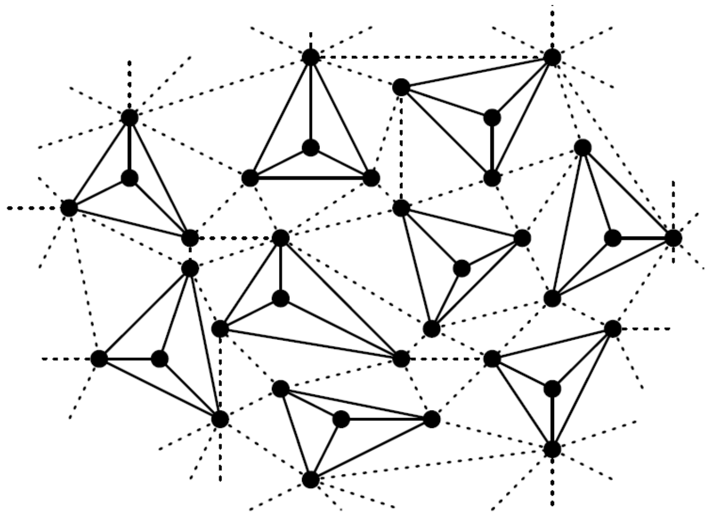
$$\boxed{\gamma(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}$$

DOMINANDO TRIANGULACIONES

Si todas las caras son triángulos (grafo planar maximal)

Conjetura (Matheson, Tarjan, ’96)
Toda triangulación con suficiente número de vértices ($n>n_0$) tiene un conjunto dominante de tamaño a lo sumo $n/4$





DOMINANDO TRIANGULACIONES

Conjetura (Matheson, Tarjan, '96)
Toda triangulación con suficiente número de vértices ($n>n_0$) tiene un conjunto dominante de tamaño a lo sumo $n/4$

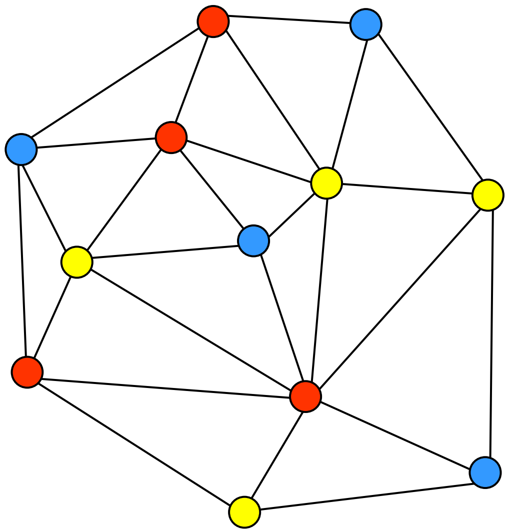
En 2010, King y Pelsmajer demostraron la conjetura para triangulaciones de grado máximo 6 (con $n_0 = 4.5\times10^6$)

En 2014, Plummer, Ye y Zha demostraron que si G es una triangulación hamiltoniana con $n>25$ y $\delta\geq4$ entonces $\gamma(G) \leq \lfloor 5n/16 \rfloor$

En 2010, Plummer y Zha demuestran la cota $n/3$ para triangulaciones en el plano proyectivo, toro y botella de Klein

2015, Furuya y Matsumoto, cota $n/3$ en cualquier superficie cerrada

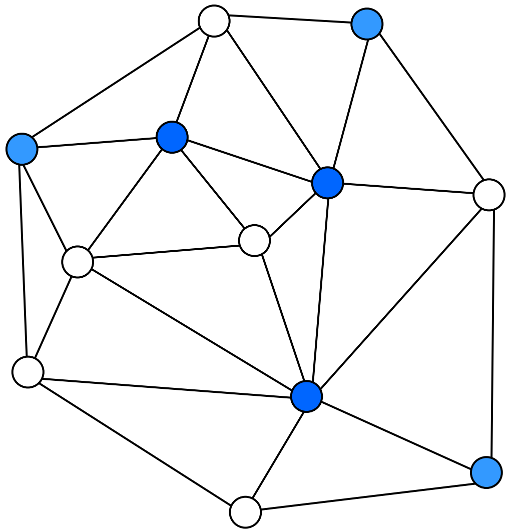
DOMINACIÓN CONEXA en TRIANGULACIONES



S conjunto dominante

$\gamma(G)$ mínimo cardinal de un conjunto dominante

DOMINACIÓN CONEXA en TRIANGULACIONES



D conjunto dominante,
G[D] grafo conexo

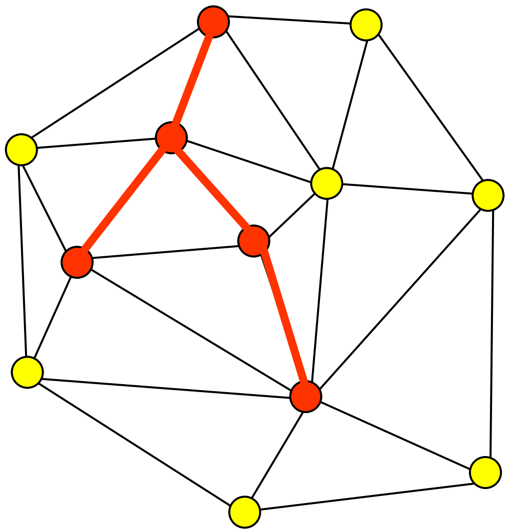
γ_C (G) mínimo cardinal de un conjunto dominante conexo

$$\gamma(G) \leq \gamma_C(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$

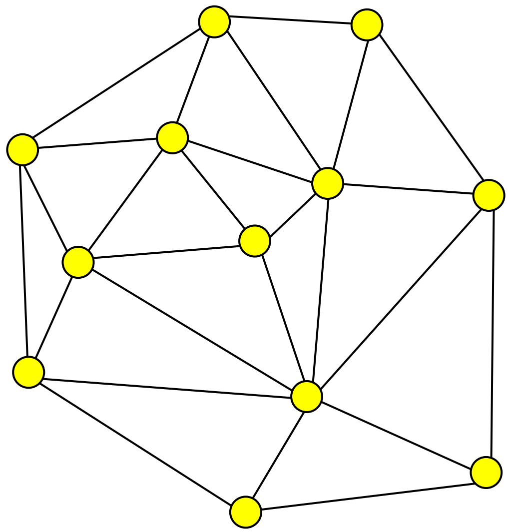
DOMINACIÓN CONEXA $\leftrightarrow$ HOJAS en ÁRBOL GENERADOR

G grafo conexo, orden n

Maximum Leaf Spanning Tree (MaxLeafST) es el árbol generador de G con el mayor número posible de hojas.
Sea h(G) ese máximo de hojas, entonces



$n = \gamma_C + h$

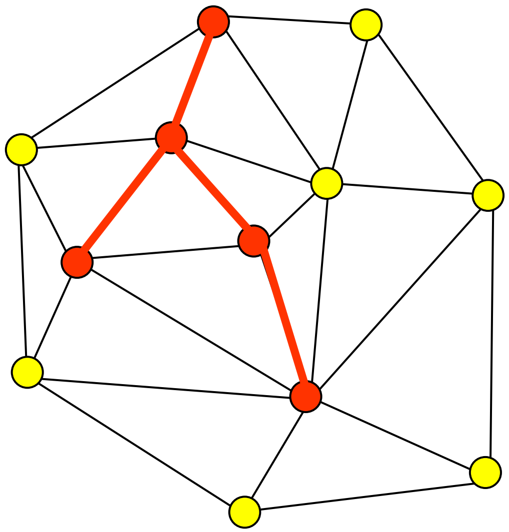


$h \geq n - \gamma_C$

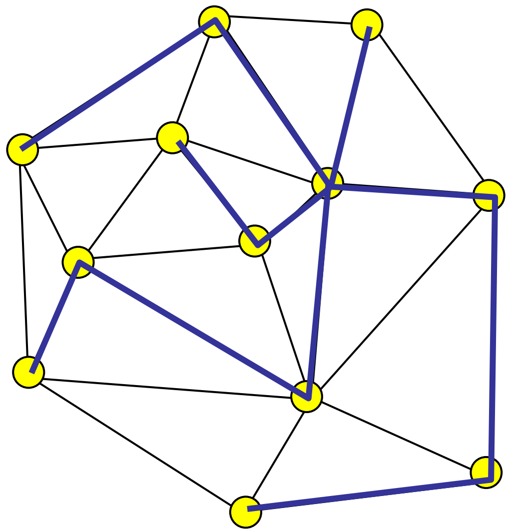
DOMINACIÓN CONEXA $\leftrightarrow$ HOJAS en ÁRBOL GENERADOR

G grafo conexo, n vértices

Maximum Leaf Spanning Tree (MaxLeafST) es el árbol generador de G con el mayor número posible de hojas.
Sea h(G) ese máximo de hojas, entonces



$$n = \gamma_C + h$$



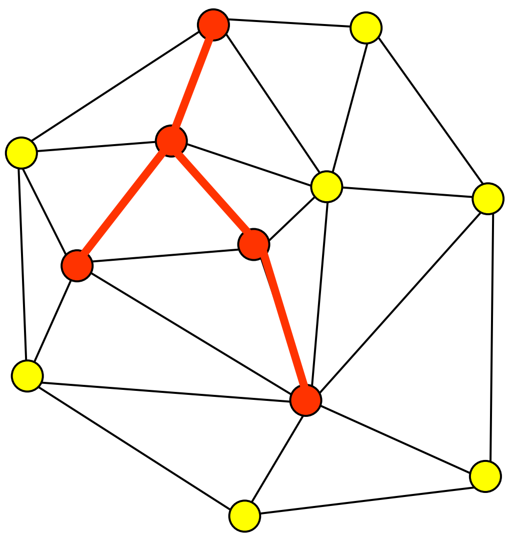
$h \geq n - \gamma_C$

$n - h \geq \gamma_C$

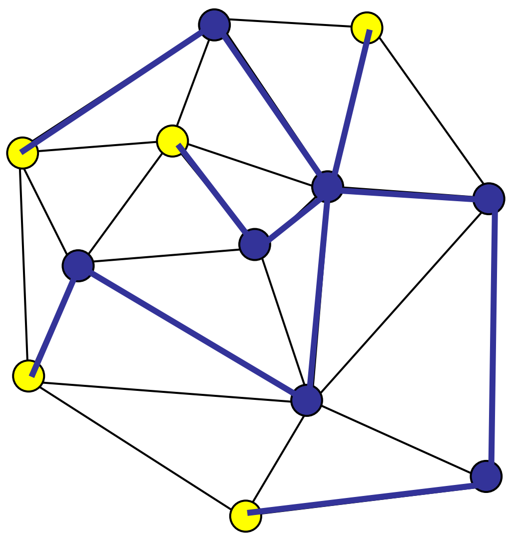
DOMINACIÓN CONEXA $\leftrightarrow$ HOJAS en ÁRBOL GENERADOR

G grafo conexo, n vértices

Maximum Leaf Spanning Tree (MaxLeafST) es el árbol generador de G con el mayor número posible de hojas.
Sea h(G) ese máximo de hojas, entonces



$$n = \gamma_C + h$$

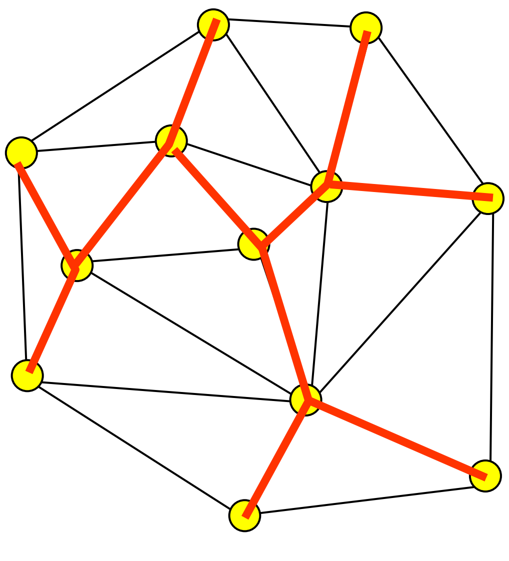


$$h \geq n - \gamma_C \qquad\qquad n - h \geq \gamma_C$$

DOMINACIÓN CONEXA en TRIANGULACIONES

Albertson, Berman, Hutchinson, Thomassen, ‘90

Toda triangulación tiene un árbol generador sin vértices de grado 2



$$2(n - 1) = \Sigma d(v) \geq h + 3(n - h)$$

Luego $h \geq \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$

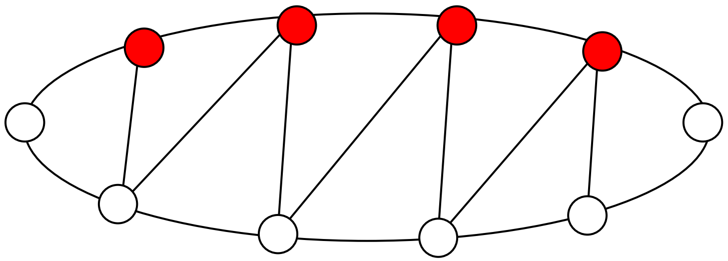
$$\boxed{\gamma_C(T) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$$

Cota superior

DOMINACIÓN CONEXA en TRIANGULACIONES

$$\gamma_C(T) \le \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$$

La cota es ajustada (si T no tiene puntos interiores)



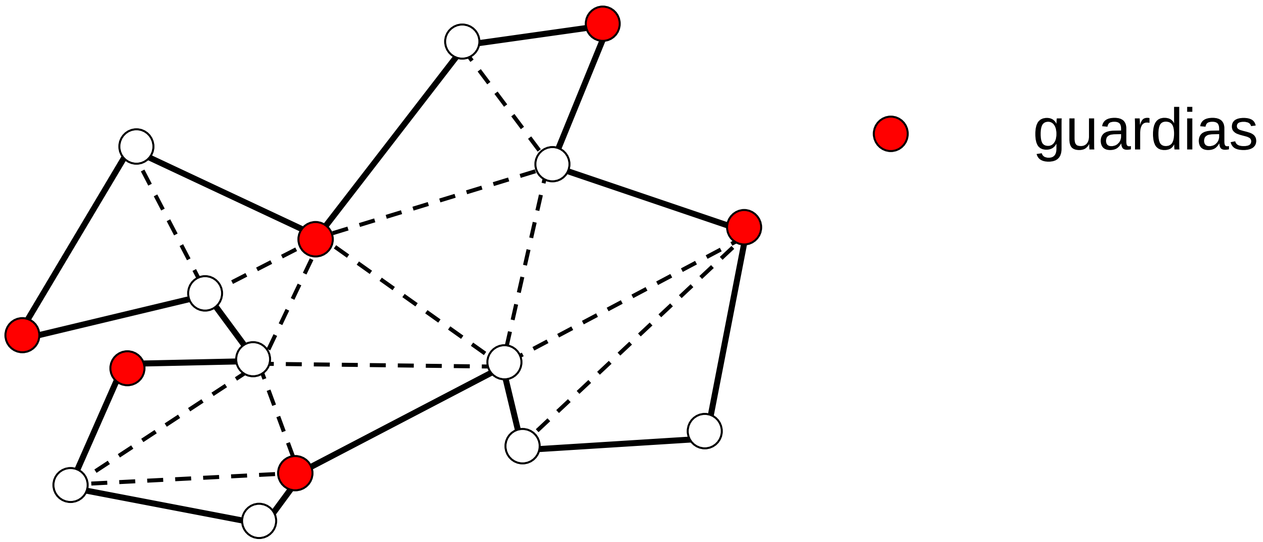
Grafo periplano maximal
(Maximal outerplanar graph, MOP)

$$\boxed{\gamma_C(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$$

(en MOP's)

DOMINACIÓN CONEXA $\leftrightarrow$ VIGILANCIA CONEXA

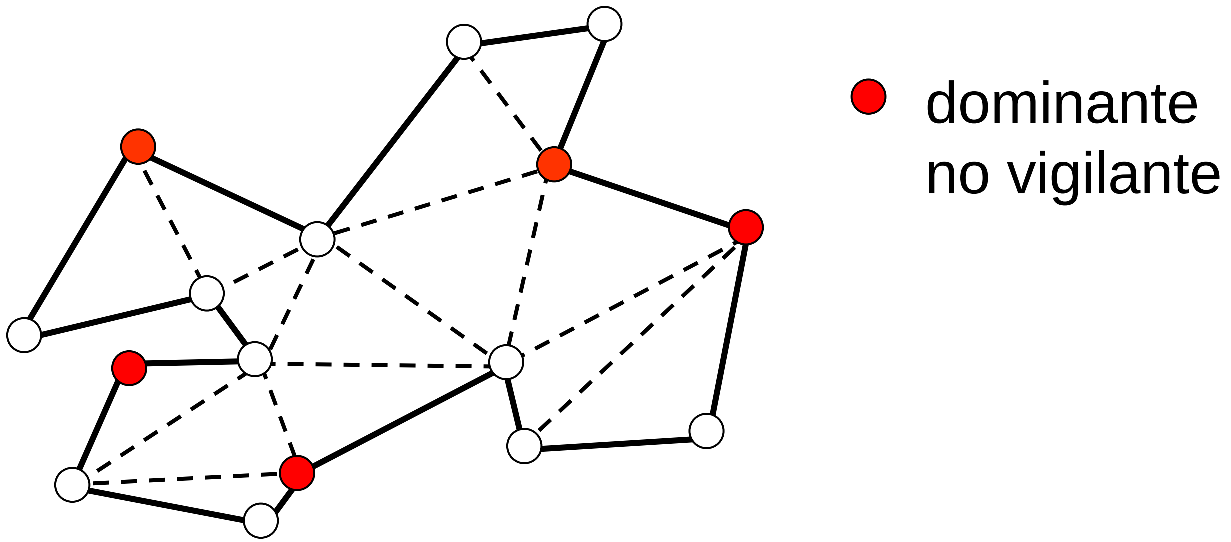
Grafo periplano maximal $\Leftrightarrow$ Grafo triangulación de un polígono



S dominante conexo $\Leftrightarrow$ S conjunto conexo de guardias

DOMINACIÓN CONEXA ↔ VIGILANCIA CONEXA

Grafo periplano maximal ⇔ Grafo triangulación de un polígono

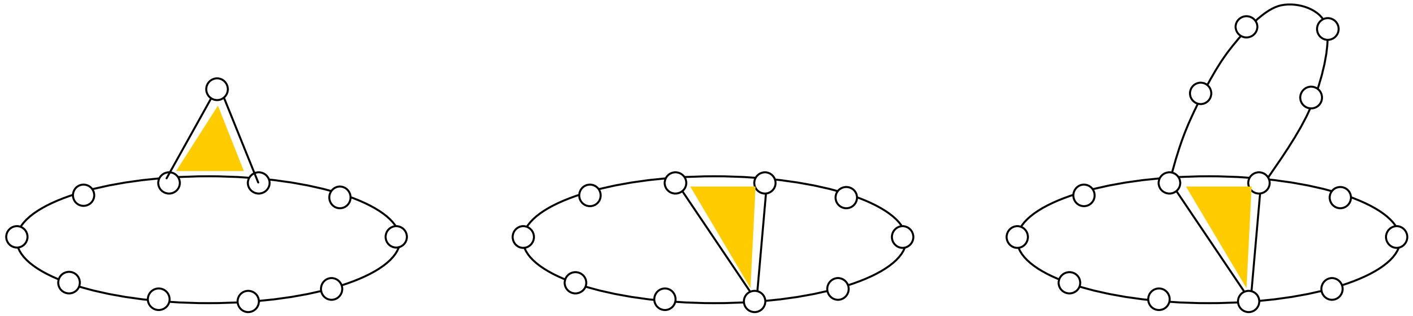


S dominante conexo ⇔ S conjunto conexo de guardias

DOMINACIÓN CONEXA $\leftrightarrow$ VIGILANCIA CONEXA

Grafo periplano maximal $\Leftrightarrow$ Grafo triangulación de un polígono

S dominante conexo $\Leftrightarrow$ S conjunto conexo de guardias



S dominante conexo sí es un conjunto de guardias

$$g_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$$

H. '93

GRAFOS PERIPLANOS

Grafos periplanos maximales ¿por qué?

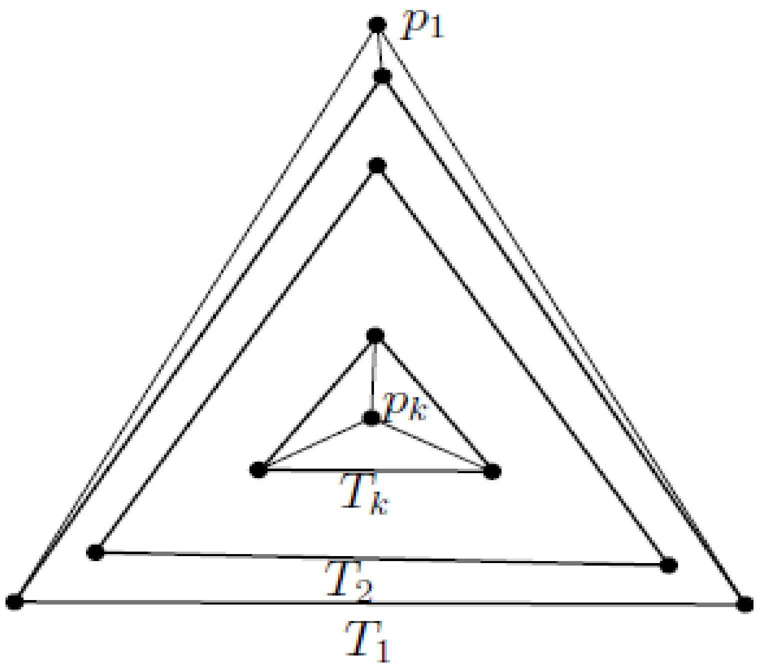
- Triangulaciones de polígonos (GEOMETRÍA)
- Estructuras moleculares (BIOQUÍMICA)

Horváth et al., el 94.3% de los grafos en la base de datos de grafos moleculares en el NCI son grafos periplanos.
Los grafos periplanos pueden representar la mayoría de las moléculas

DOMINACIÓN CONEXA en TRIANGULACIONES

$$\boxed{\gamma_C(T) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$$

¿Si la cara exterior es un triángulo?



Cualquier árbol generador debe contener al menos un nodo no-hoja en cada triángulo.

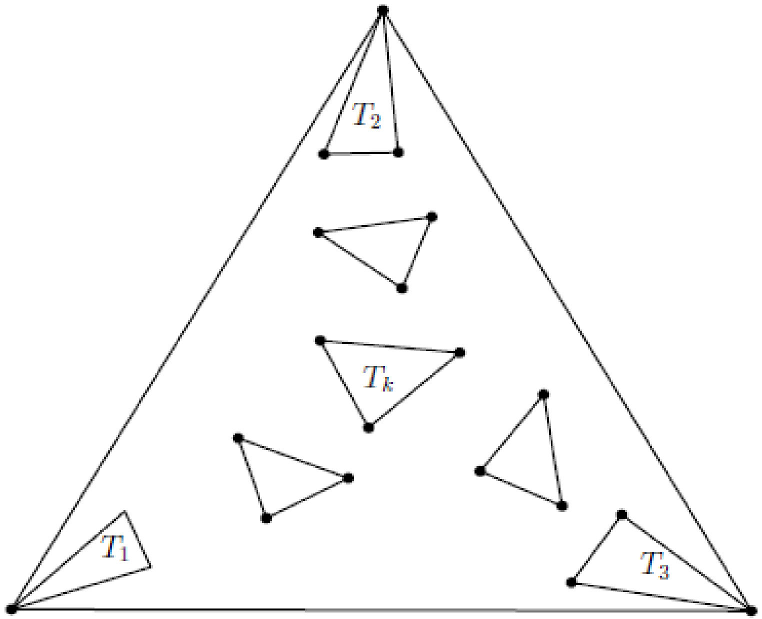
Por tanto cualquier S dominante y conexo tiene cardinal al menos

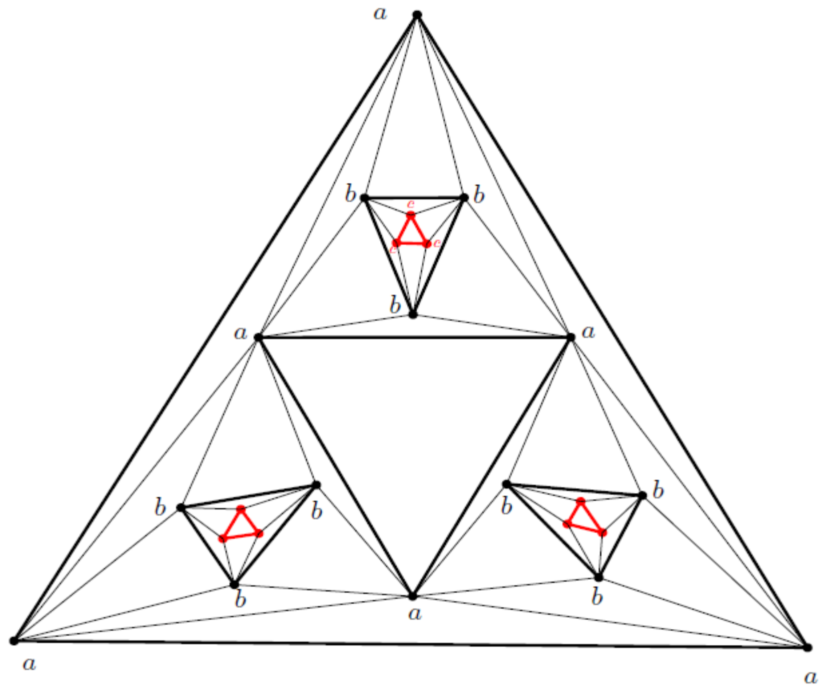
$$\frac{n-2}{3}$$

Claverol, García, H., Hernando, Mora, Tejel, '16-17

DOMINACIÓN CONEXA en TRIANGULACIONES

¿Si la cara exterior es un triángulo?

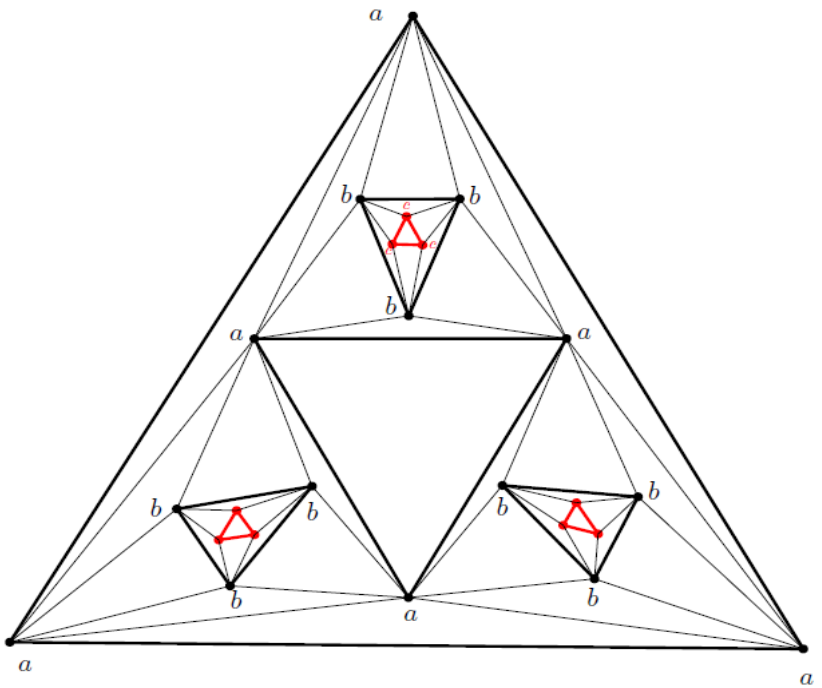




Claverol, García, H., Hernando, Mora, Tejel, ’16-17

DOMINACIÓN CONEXA en TRIANGULACIONES

¿Si la cara exterior es un triángulo?



Cada T_i 24 nodos

Cualquier D dominante conexo contiene 9 vértices de cada T_i

$$|D| \geq \frac{9n}{24} = \frac{3n}{8}$$

$$\frac{3n}{8} \leq \gamma_C(n) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$$

Claverol, García, H., Hernando, Mora, Tejel, ’16-17

CONECTIVIDAD en CONJUNTOS DOMINANTES

G grafo conexo, S conjunto dominante en G

Si G[S] es grafo conexo — **Dominación conexa** γ_C

Si G[S] no tiene vértices aislados — **Dominación total** γ_t

Si G[S] no tiene aristas — **Dominación independiente** **i**

Si la unión de las estrellas de S es un grafo conexo — **Dominación débil-conexa** γ_w

Si para todo $u \in S$ existe $v \in S$ tal que $dist(u,v) \leq 2$ — **Dominación semitotal** γ_{t2}

Si G[S] emparejamiento perfecto — **Dominación emparejada** γ_{pr}

CONECTIVIDAD en CONJUNTOS DOMINANTES

MOP's	CONEXA	DÉBIL-CONEXA, SEMITOTAL o INDEPENDIENTE	TOTAL
DOMINACIÓN	$\gamma_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$	$\gamma_w(n) = \gamma_{t2}(n) = i(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ $\gamma_w(n) = \gamma_{t2}(n) = i(n) = \left\lfloor \frac{n+n_2}{4} \right\rfloor$ (1)	$\gamma_t(n) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$ (2)

n_2 número de vértices de grado 2

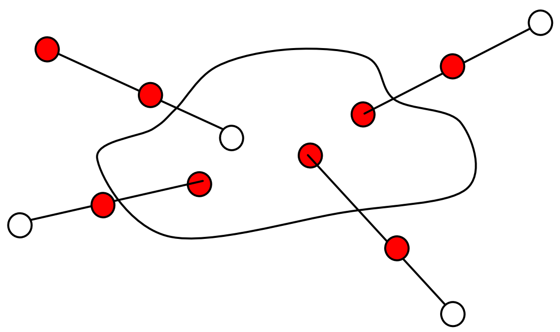
(1) Canales, Castro, H., Martins, '16
(2) Dorfling, Hatting, Jonck, '16 (salvo dos grafos con n=12 y $\gamma_t = 5$)

DOMINACIÓN TOTAL

D es total-dominante si G[D] no tiene vértices aislados

- Si G no tiene vértices aislados, $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$
- Si G es conexo de orden n>2, entonces $\gamma_t(G) \leq 2n/3$

cota ajustada



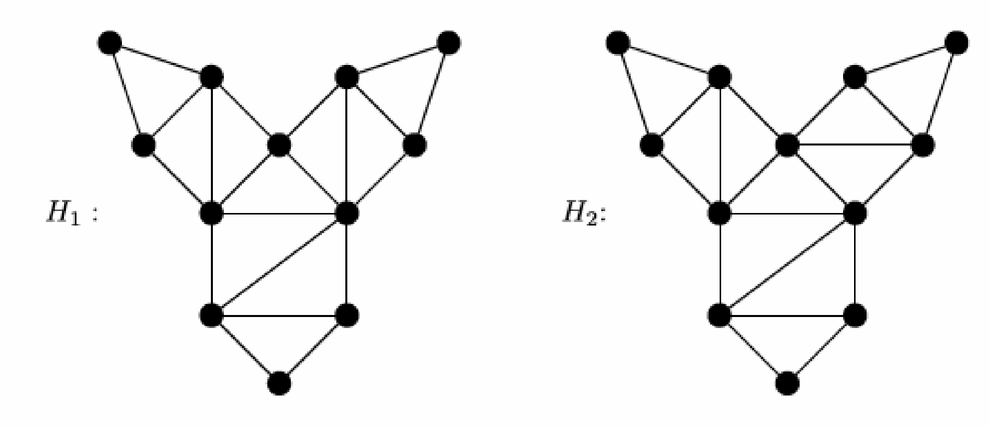
DOMINACIÓN TOTAL

D es total-dominante si G[D] no tiene vértices aislados

MOP's Dorfling, Hatting, Jonck, '16

Si G es un grafo periplano maximal de orden n $\geq$ 5 y no es isomorfo a los grafos de la figura entonces

$$\gamma_t(G) \leq \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$$



DOMINACIÓN TOTAL

D es total-dominante si G[D] no tiene vértices aislados

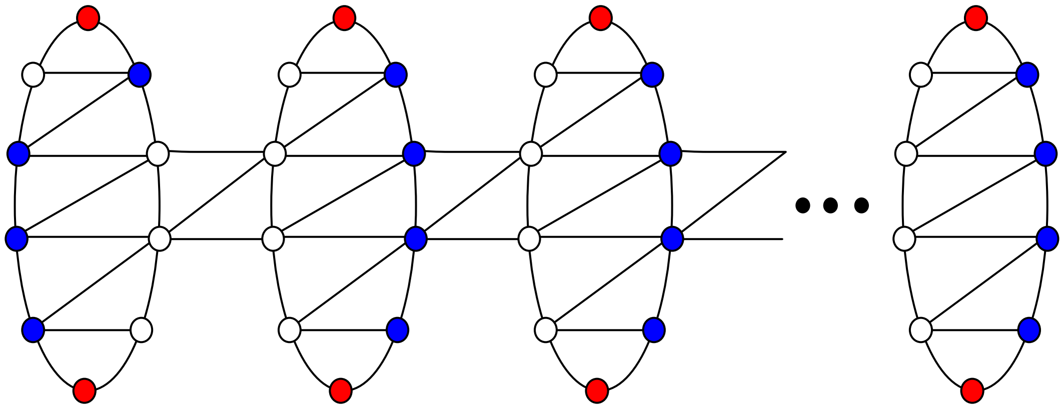
MOP's

Si G es un grafo periplano maximal de orden n ≥ 5 y no es isomorfo a los grafos de la figura entonces

$$\gamma_t(G) \leq \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$$

Y la cota es ajustada

$$\boxed{\gamma_t(n) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor}$$

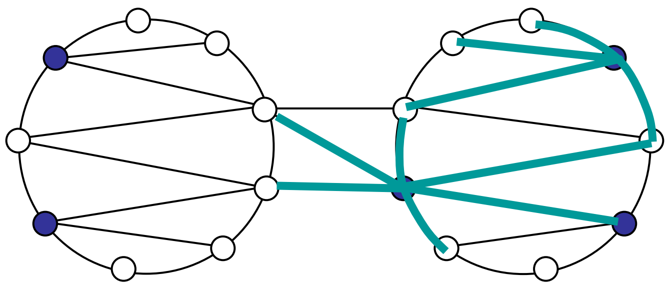


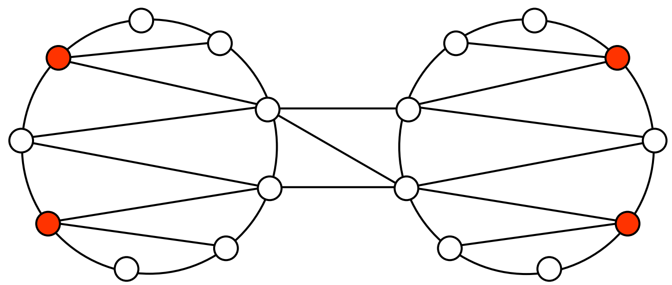
DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

S conjunto dominante en un grafo conexo G

Si la unión de las estrellas de S es un grafo conexo entonces S es un conjunto dominante débilmente conexo   Grossman, 1997

Si para todo $u \in S$ existe $v \in S$ tal que $dist(u,v) \leq 2$ entonces S es dominante semitotal   Goddard, Henning y McPillan, 2014

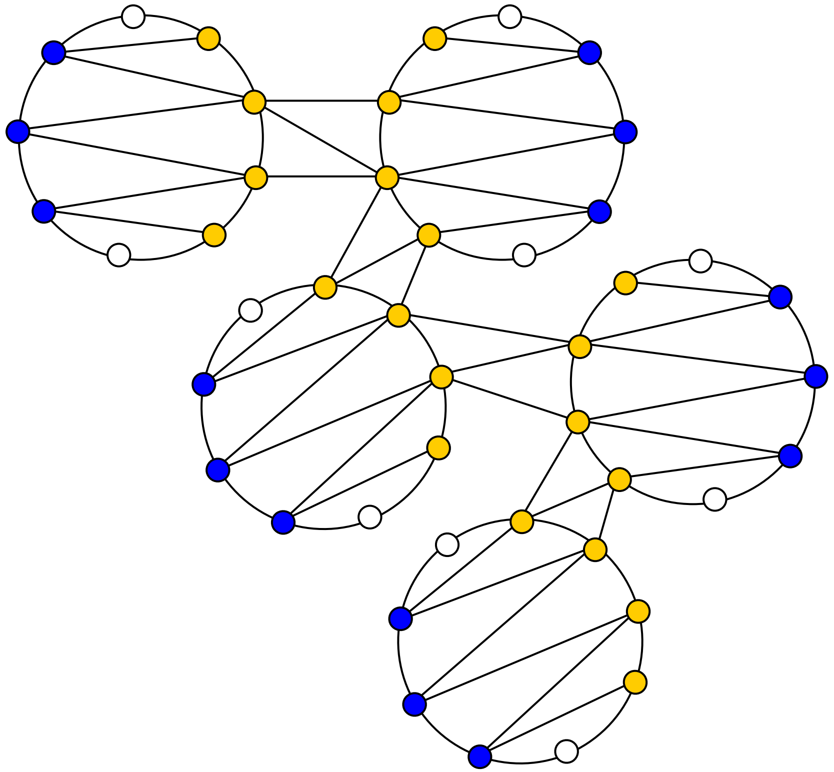




$$\gamma(T) \leq \gamma_{t2}(T) \leq \max\{2, \gamma_w(T)\} \leq \max\{2, \gamma_C(T)\}$$

CONECTIVIDAD en CONJUNTOS DOMINANTES

MOP's



$\gamma_C(T) = 20$

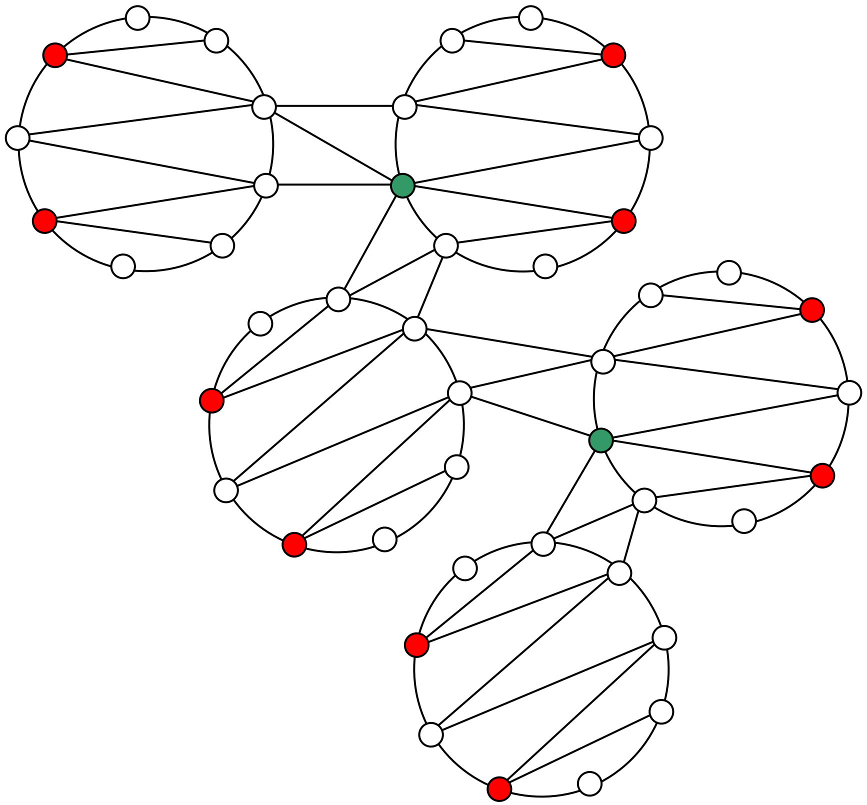
$\gamma_t(T) = 12$

Familia de grafos con
n = 9k vértices

$\gamma_C(G) = 4k$
$\gamma_t(G) = 3k$

CONECTIVIDAD en CONJUNTOS DOMINANTES

MOP's



$\gamma_{t2}(T) = 10$

$\gamma_w(T) = 12$

Familia de grafos con
n = 9k vértices

$\gamma_C(G) = 4k$
$\gamma_t(G) = 3k$
$\gamma_{t2}(G) = 2k$
$\gamma_w(G) = 2k + \lfloor k/2 \rfloor$

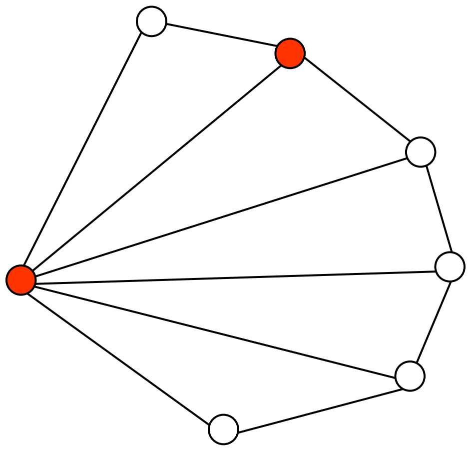
DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

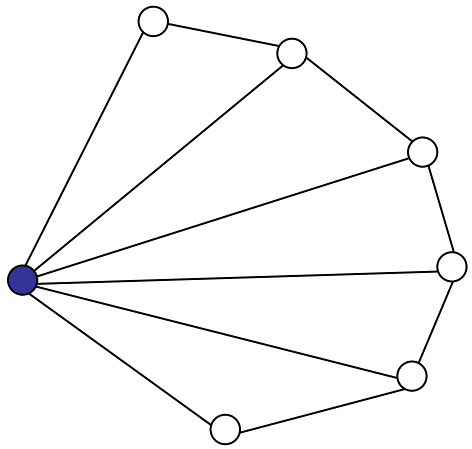
Teorema

Si G es un grafo triangulación de orden n (no abanico) entonces

$$\gamma_{t2}(G) \leq \gamma_w(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Si G es un abanico, entonces $\gamma_{t2}(G) = 2$ y $\gamma_w(G) = 1$





DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

$$\gamma_W(G) \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Toda triangulación admite una 3-coloración (impropia) tal que:
(1) La coloración de los vértices exteriores es propia
(2) Cada clase de color es un conjunto dominante débilmente-conexo

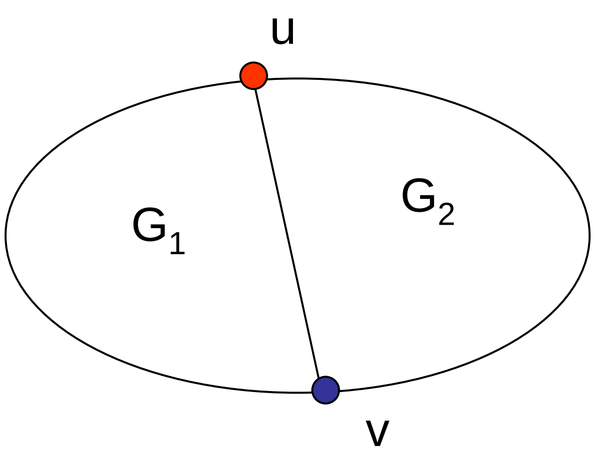
Dem.: Inducción sobre n
Para n = 3,4 ó 5, G es un abanico, luego $\gamma_w(G) = 1$

(HI) Toda triangulación con menos de n vértices admite la 3-coloración
Sea G una triangulación de orden n

DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

$$\gamma_W(G) \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Caso 1) Existe una arista uv separadora en G



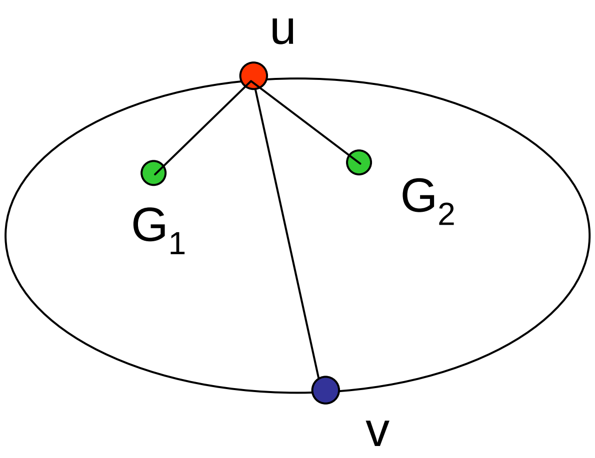
Por (HI) existe 3-coloración
en G_1 y G_2
Permutando colores se consigue
u – color 1, v – color 2
en ambas triangulaciones
Cada clase de color es dominante y débil-conexa en cada parte.
Falta comprobar que es débil conexa en G.

R clase del color 1. Es débilmente conexa en G_1 y G_2 luego lo es en G.
Lo mismo para la clase **Z** del color 2
¿Y la clase Verde del color 3?

DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

$$\gamma_W(G) \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Caso 1) Existe una arista uv separadora en G



Por (HI) existe 3-coloración
en G_1 y G_2
Permutando colores se consigue
u – color 1, v – color 2
en ambas triangulaciones
Cada clase de color es dominante y débil-conexa en cada parte.
Falta comprobar que es débil conexa en G.

R clase del color 1. Es débilmente conexa en G_1 y G_2 luego lo es en G.
Lo mismo para la clase Z del color 2

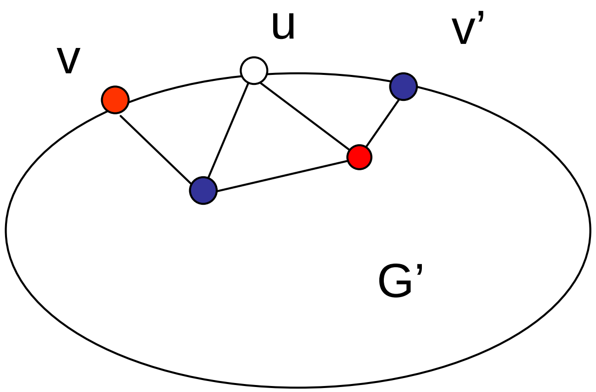
¿Y la clase Verde del color 3? **V** es dominante en G_1 y G_2 luego
las estrellas de los vértices de **V** se conectan por u

DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

$$\gamma_W(G) \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Caso 2) No existe arista separadora en G
Elegimos u de grado ≥ 3 en el borde y se considera el grafo G' = G – {u}

Por (HI) existe 3-coloración en G'



(2a) Los vecinos v y v' reciben distinto color
v – color 1, v' – color 2
Se asigna a u el tercer color

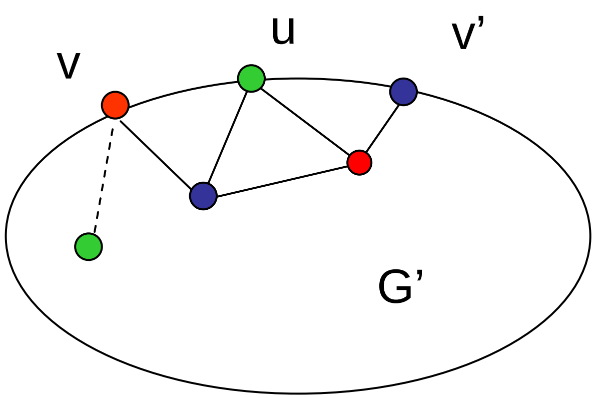
Las clases **R** y **Z** son dominantes y débil-conexas en G
La clase **V** es dominante en G y también es débil-conexa porque en G' la clase **V** también es dominante y un vértice vecino de v será verde

DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

$$\boxed{\gamma_W(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}$$

Caso 2) No existe arista separadora en G
Elegimos u de grado ≥ 3 en el borde y se considera el grafo G' = G – {u}

Por (HI) existe 3-coloración en G'



(2a) Los vecinos v y v' reciben distinto color
v – color 1, v' – color 2
Se asigna a u el tercer color

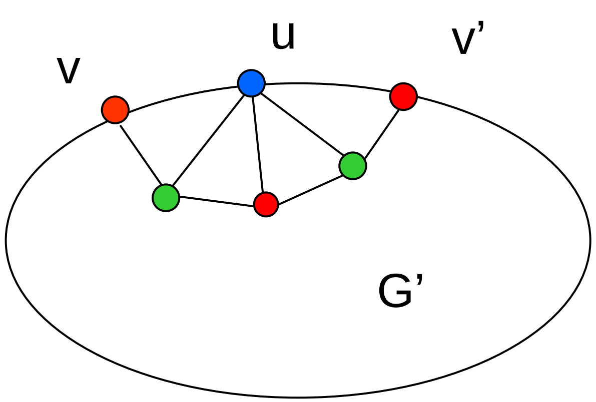
Las clases **R** y **Z** son dominantes y débil-conexas en G
La clase **V** es dominante en G y también es débil-conexa porque en G' la clase **V** también es dominante y un vértice vecino de v será verde

DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

$$\gamma_W(G) \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Caso 2) No existe arista separadora en G
Elegimos u de grado ≥ 3 en el borde y se considera el grafo G' = G – {u}

Por (HI) existe 3-coloración en G'



(2b) Los vecinos v y v' reciben mismo color
Si en los vecinos de u solo hay dos colores se asigna a u el tercer color.
En caso contrario, se asigna verde o azul

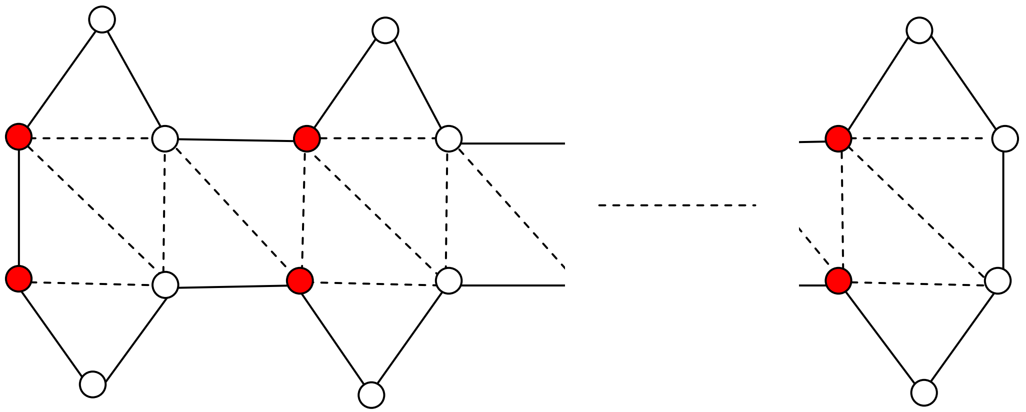
Así las tres clases de color son dominantes y débil-conexas

Eligiendo la clase de menor cardinal obtenemos la cota buscada

DOMINACIÓN SEMITOTAL Y DÉBIL-CONEXA

$$\gamma_W(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

La cota es ajustada para MOP's



Luego, si n > 5

$$\boxed{\gamma_{t2}(n) = \gamma_W(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}$$

DOMINACIÓN INDEPENDIENTE

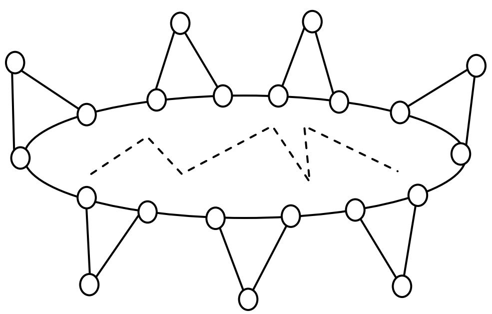
D es dominante independiente si G[D] no tiene aristas

Teorema

Todo grafo G periplano maximal admite un conjunto dominante independiente de cardinal $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

Además, esta cota es ajustada,es decir, existe una familia de MOP's de n vértices tal que para cada grafo de dicha familia se cumple que

$$i(G) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

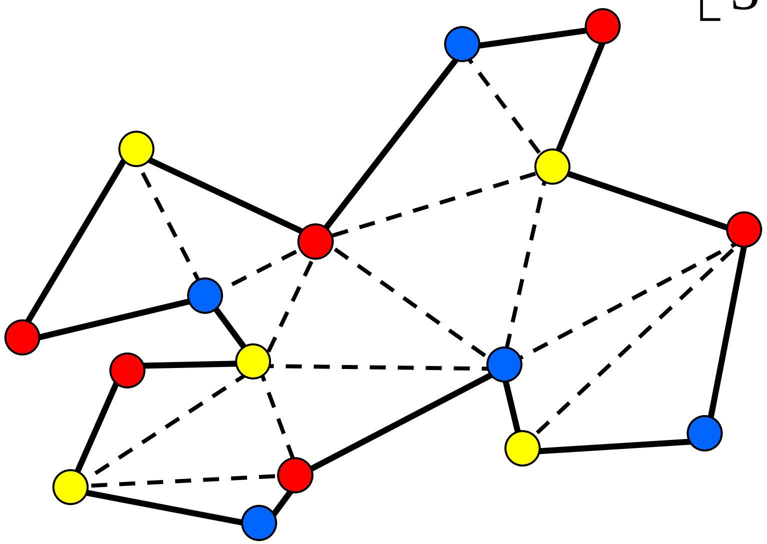


DOMINACIÓN INDEPENDIENTE

D es dominante independiente si G[D] no tiene aristas

Teorema

Todo grafo G periplano maximal admite un conjunto dominante independiente de cardinal $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$



Dem.: Se 3-colorea G.
Cada color es dominante e independiente

CONECTIVIDAD en CONJUNTOS DOMINANTES

MOP's	CONEXA	DÉBIL-CONEXA, SEMITOTAL o INDEPENDIENTE	TOTAL
DOMINACIÓN	$\gamma_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$	$\boxed{\gamma_w(n) = \gamma_{t2}(n) = i(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}$ $\boxed{\gamma_w(n) = \gamma_{t2}(n) = i(n) = \left\lfloor \frac{n+n_2}{4} \right\rfloor \text{ (1)}}$	$\gamma_t(n) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$ (2)

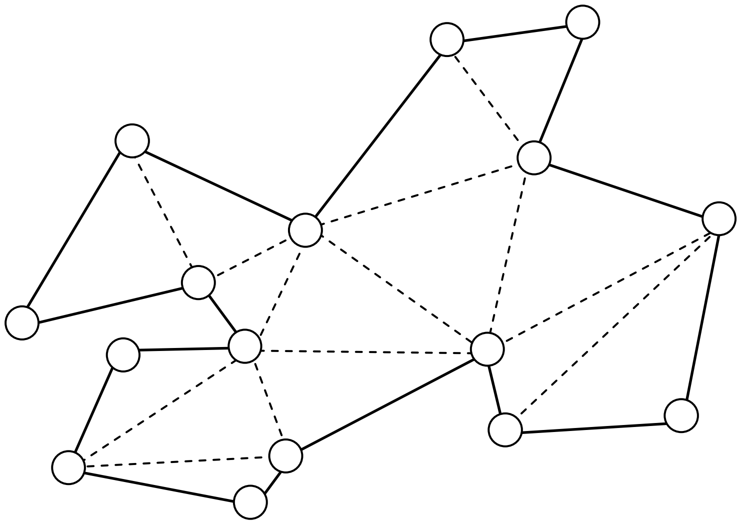
n_2 número de vértices de grado 2

(1) Canales, Castro, H., Martins, '16
(2) Dorfling, Hatting, Jonck, '16 (salvo dos grafos con n=12 y $\gamma_t = 5$)

COTA en función de n_2

Lema (Tokunaga '13)

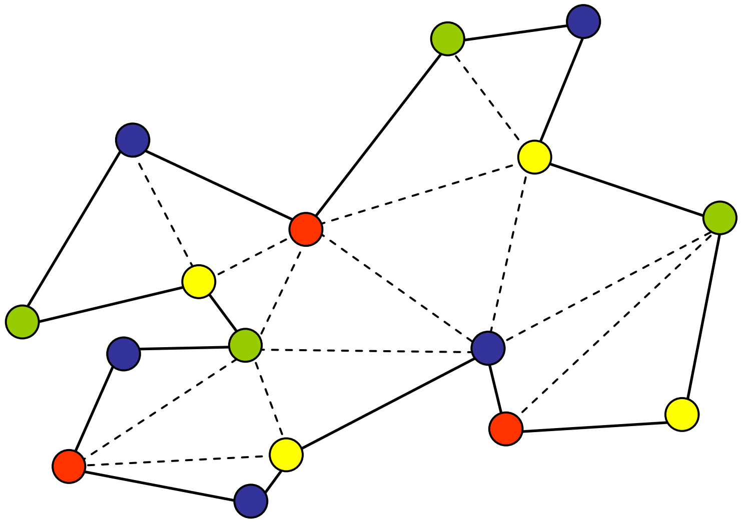
Los vértices de cualquier MOP pueden 4-colorearse de forma de cada 4-ciclo tenga los 4 colores.



COTA en función de n_2

Lema (Tokunaga '13)

Los vértices de cualquier MOP pueden 4-colorearse de forma de cada 4-ciclo tenga los 4 colores.

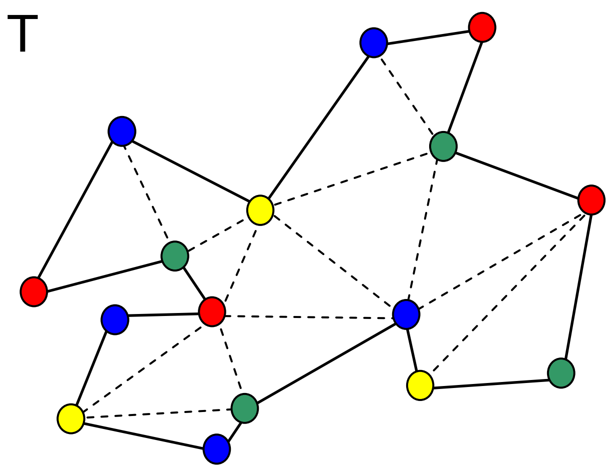


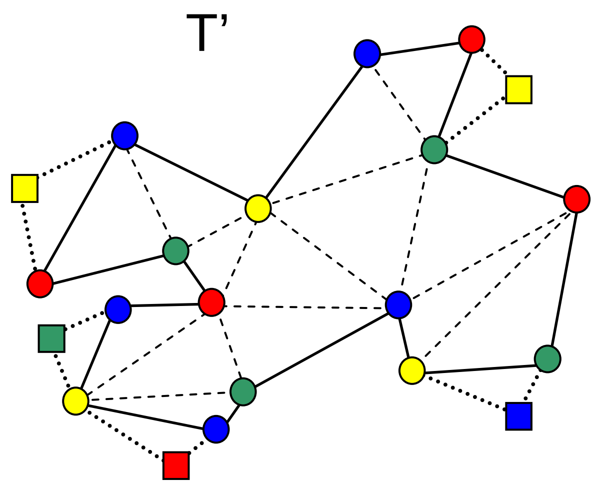
COTA en función de n_2

Teorema (Campos, Watanabe, Tokunaga '13)

Si T es un MOP de n vértices entonces $\gamma(T) \leq \left\lfloor \frac{n+n_2}{4} \right\rfloor$

Dem.:





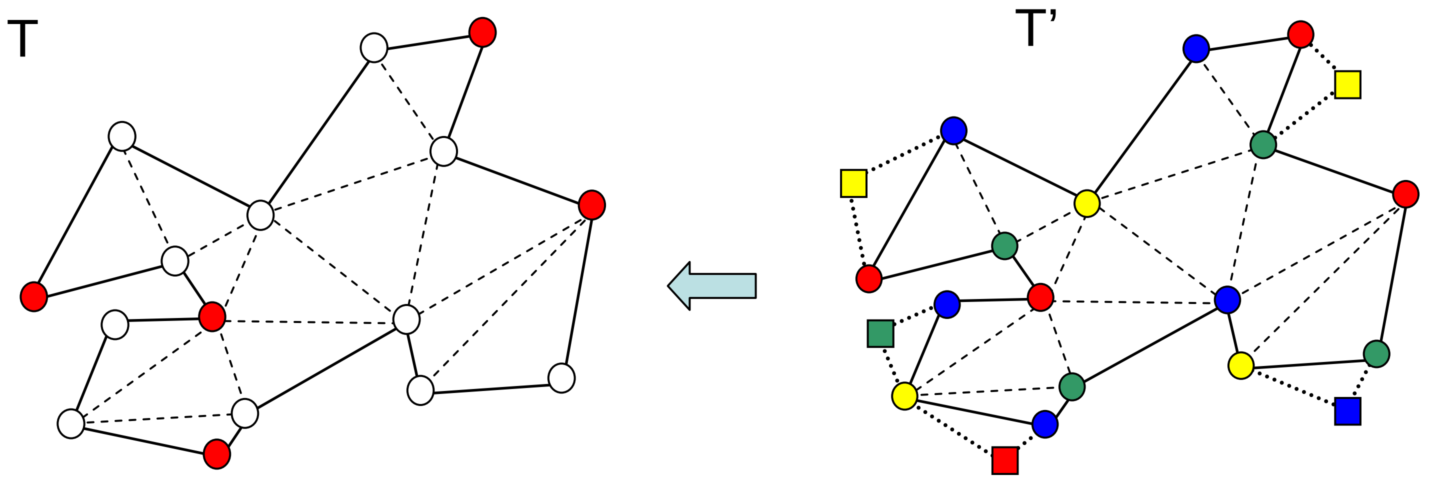
Cada color es dominante en T'
y en total hay $n + n_2$ vértices

COTA en función de n_2

Teorema (Campos, Watanabe, Tokunaga '13)

Si T es un MOP de n vértices entonces $\gamma(T) \leq \left\lfloor \frac{n+n_2}{4} \right\rfloor$

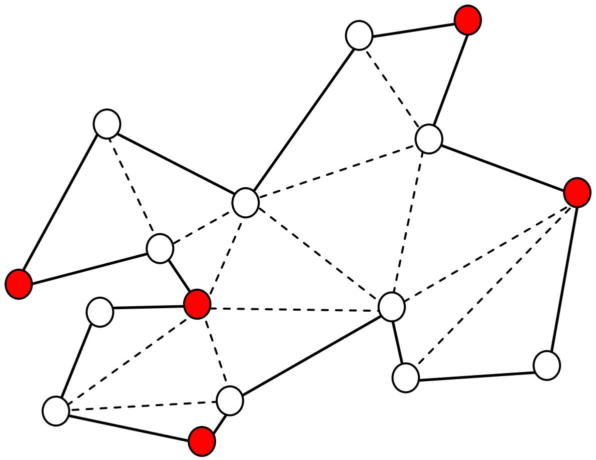
Dem.:



$|D| \leq \left\lfloor \frac{n+n_2}{4} \right\rfloor$

R es dominante $|R| \leq \left\lfloor \frac{n+n_2}{4} \right\rfloor$

COTA en función de n_2

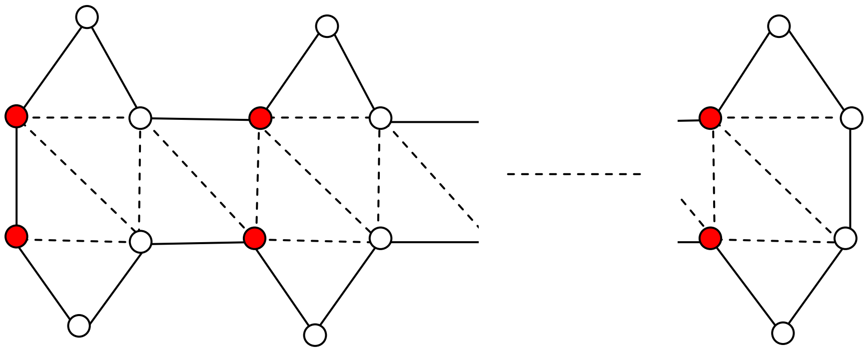


El conjunto dominante es

- semitotal
- débilmente conexo
- independiente

$$\gamma_w(n) = \gamma_{t2}(n) = i(n) = \left\lfloor \frac{n + n_2}{4} \right\rfloor$$

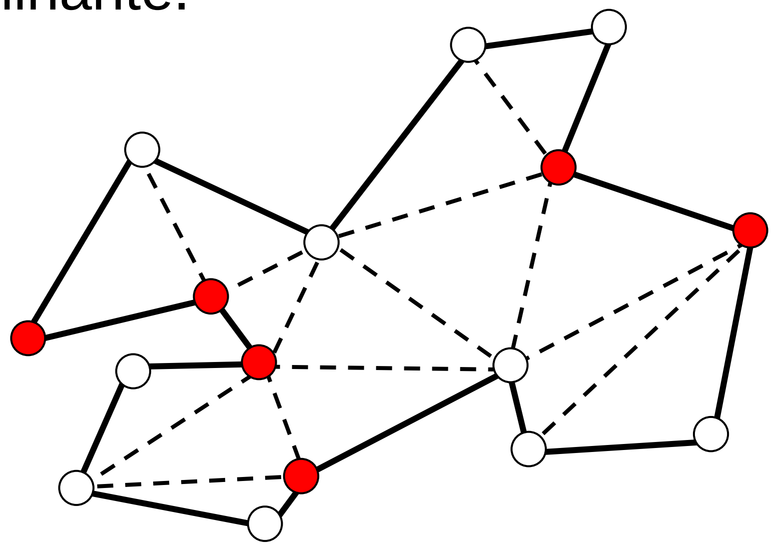
cota inferior



DOMINACIÓN EMPAREJADA

D es dominante emparejado si G[D] tiene un emparejamiento perfecto. Se llama conjunto pr-dominante.

$\gamma_{pr}(G)$ cardinal mínimo de un conjunto pr-dominante



Haynes, Slater, ‘98

Teorema

Si G es un grafo periplano maximal de orden n entonces

$$\gamma_{pr}(G) \leq 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

DOMINACIÓN EMPAREJADA

Teorema

Si G es un grafo periplano maximal de orden n entonces

$$\gamma_{pr}(G) \leq 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

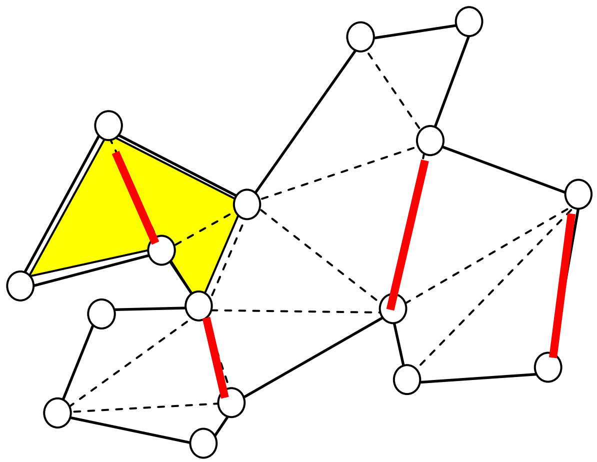
Utilizamos un resultado de O'Rourke sobre vigilancia de polígonos con guardias móviles. Un guardia móvil puede patrullar por una arista o por una diagonal del polígono. Dice así:

"Todo grafo triangulación de un polígono de n>3 vértices puede vigilarse con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ **guardias móviles"**

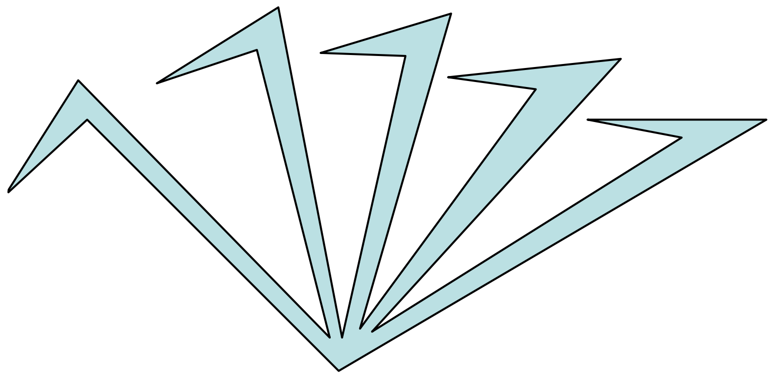
DOMINACIÓN EMPAREJADA

"Todo grafo triangulación de un polígono de n>3 vértices puede vigilarse con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias móviles"

$$g_g(T) \leq g_c(T) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$



"guardia combinatorio"

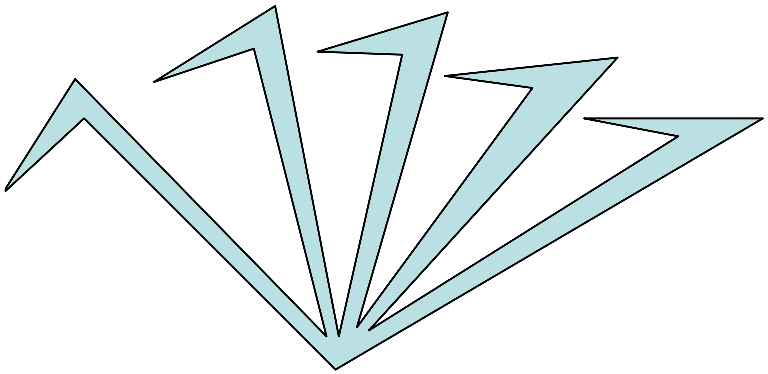


cota inferior

DOMINACIÓN EMPAREJADA

"Todo grafo triangulación de un polígono de n>3 vértices puede vigilarse con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias móviles"

$$g_g(T) \leq g_c(T) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

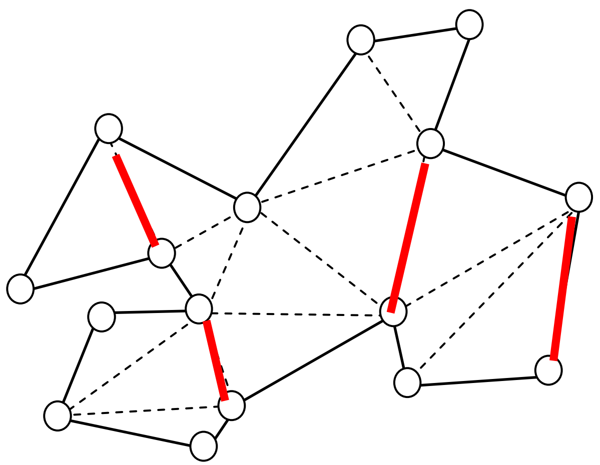


cota inferior para
guardias geométricos

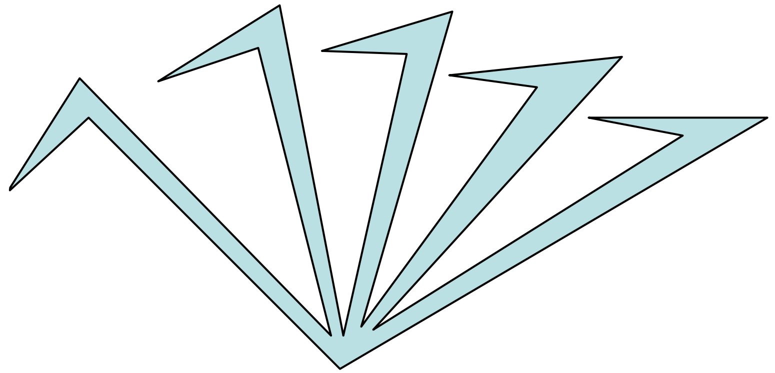
$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq g_g(n) \leq g_c(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

DOMINACIÓN EMPAREJADA

“Todo grafo triangulación de un polígono de n>3 vértices puede vigilarse con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias móviles”



“combinatorios” NO “geométricos



cota inferior

DOMINACIÓN EMPAREJADA

Teorema

Si G es un grafo periplano maximal de orden n entonces

$$\gamma_{pr}(G) \leq 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

El conjunto de guardias móviles se puede elegir de forma que sea un emparejamiento en el grafo triangulación del polígono.

Sustituyendo cada guardia móvil, lado o diagonal del polígono, por sus extremos tendremos un conjunto de vértices del cardinal indicado que es pr-dominante.

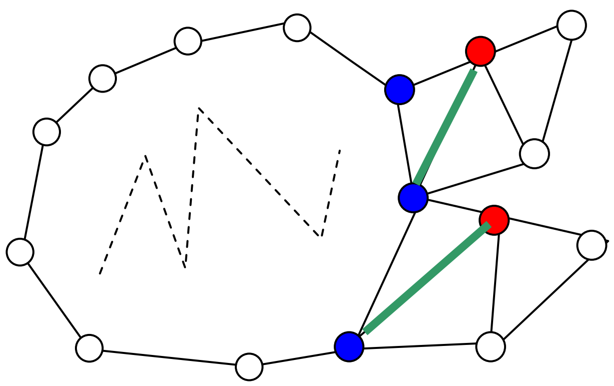
DOMINACIÓN EMPAREJADA

Teorema

Si G es un grafo periplano maximal de orden n entonces

$$\gamma_{pr}(G) \leq 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

La cota es ajustada



Polígono de k lados, una solapa por lado

Así n = 4k

Cada “solapa” necesita un vértice dominante (en rojo) y cada uno de ellos necesita una pareja independiente de las demás (en azul)

Si queremos n = 4k + j con j=1,2,3 se añaden más vértices a una solapa, y siguen bastando 2k vértices p-dominantes

Luego, $\gamma_{pr}(G) = 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

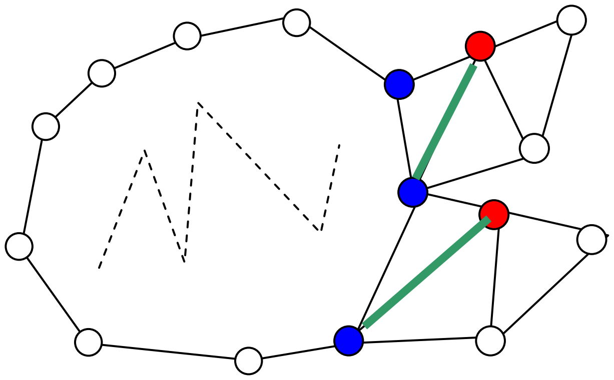
DOMINACIÓN EMPAREJADA

Teorema

Si G es un grafo periplano maximal de orden n entonces

$$\gamma_{pr}(G) \leq 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

La cota es ajustada



$$\boxed{\gamma_{pr}(n) = 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor}$$

Luego, $\gamma_{pr}(G) = 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

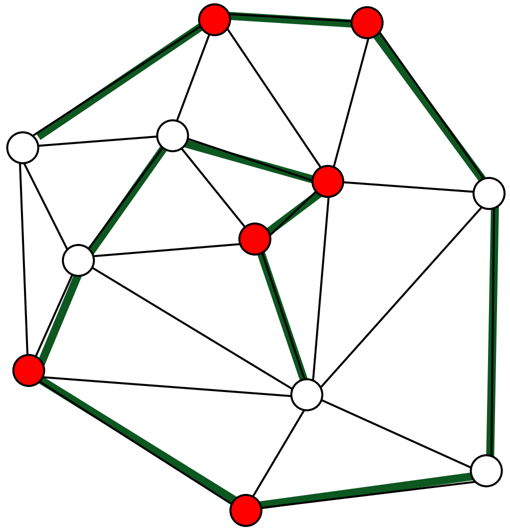
DOMINACIÓN EMPAREJADA

¿Triangulaciones con puntos interiores?

Conjetura $$\gamma_{pr}(G) \le 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

Demostrada para triangulaciones hamiltonianas:

Si G es un grafo con un camino hamiltoniano P, se eligen los dos vértices centrales de cada cuatro consecutivos en el camino P.
Así tendremos un conjunto pr-dominante con el cardinal requerido



DOMINACIÓN MÚLTIPLE Y CONECTIVIDAD

G grafo conexo, S conjunto dominante en G tal que cada vértice de V – S tiene al menos k vecinos en S **k-dominación** γ_k

k = 2

Si G[S] conexo **2-dominación conexa**

Si G[S] sin vértices aislados **2-dominación total y conexa**

G grafo conexo, S conjunto dominante en G tal que cada vértice de V – S tiene al menos 2 vecinos en S y los vértices de S al menos un vecino en S **dominación doble** $\gamma_{\times 2}$

DOMINACIÓN MÚLTIPLE Y CONECTIVIDAD

G grafo conexo, S conjunto dominante en G tal que cada vértice de V – S tiene al menos 2 vecinos en S **2-dominación** γ_2

En grafos periplanos maximales (MOP's)

Castro, H. '16

$$\gamma_2(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \qquad \gamma_2^c(n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \qquad \gamma_2^t(n) = \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$$

$$\gamma_{\times 2}(n) = \gamma_{\times 2}^c(n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$$

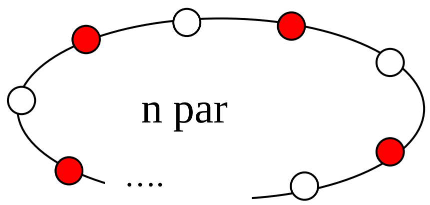
2-DOMINACIÓN en MOP's

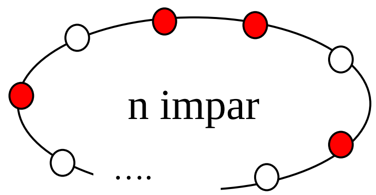
Un conjunto S es 2-dominante total si cada vértice de V – S tiene al menos dos vecinos en S.

Teorema
En MOP's se verifica que $\gamma_2(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Cota superior

En un grafo hamiltoniano (y cualquier MOP lo es) los vértices alternos del ciclo hamiltoniano forman un conjunto 2-dominante.
(Si n impar hay que añadir uno más)



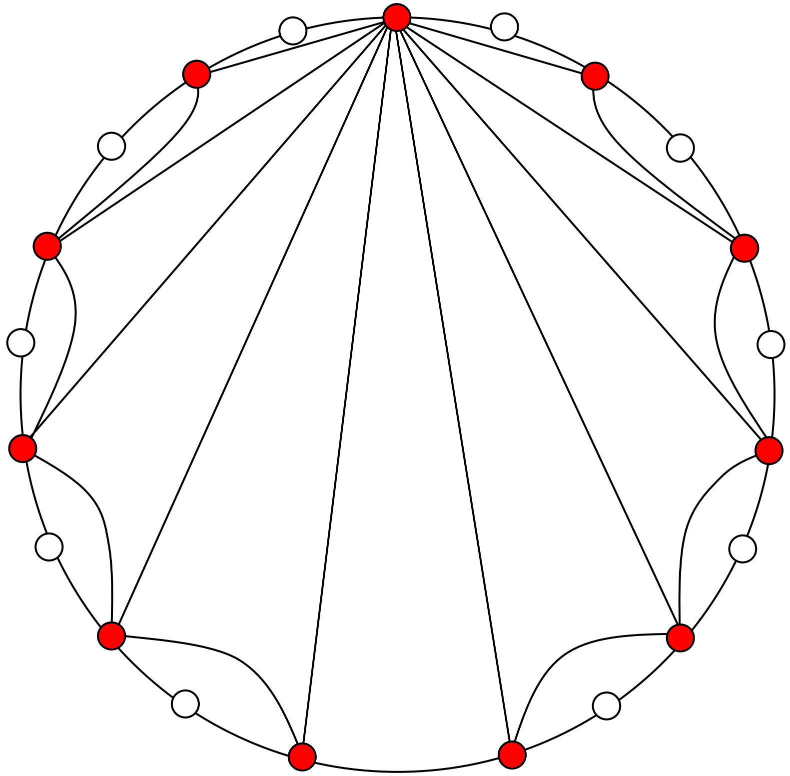


2-DOMINACIÓN en MOP's

Teorema

En MOP's se verifica que $\gamma_2(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Cota inferior



Cada vértice de grado 2 necesita a sus dos vecinos para quedar 2-dominado.

Por tanto los rojos constituyen un conjunto 2-dominante con el cardinal mínimo

- TRIANGULACIONES

  Dominación y conectividad

- Cotas combinatorias para

  MAXIMAL OUTERPLANAR GRAPHS

  TRIANGULACIONES (resultados parciales

- **TRABAJO FUTURO: Triangulaciones más parámetros de dominación**

Gracias por vuestra atención!!