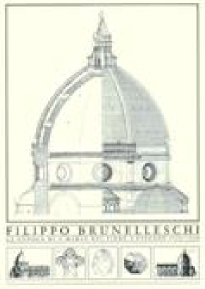
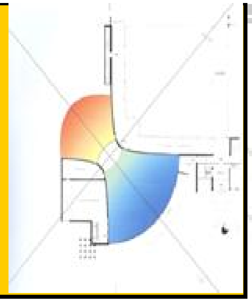


La Geometría Proyectiva en el arte: de Brunelleschi a Fisac



GEOMETRÍA PROYECTIVA

El camino empieza en la PERSPECTIVA

Gregorio Hernández Peñalver

UPM

6 de noviembre de 2007

En el hogar de las matemáticas hay muchas moradas, y de entre ellas, la más elegante es la de la geometría proyectiva

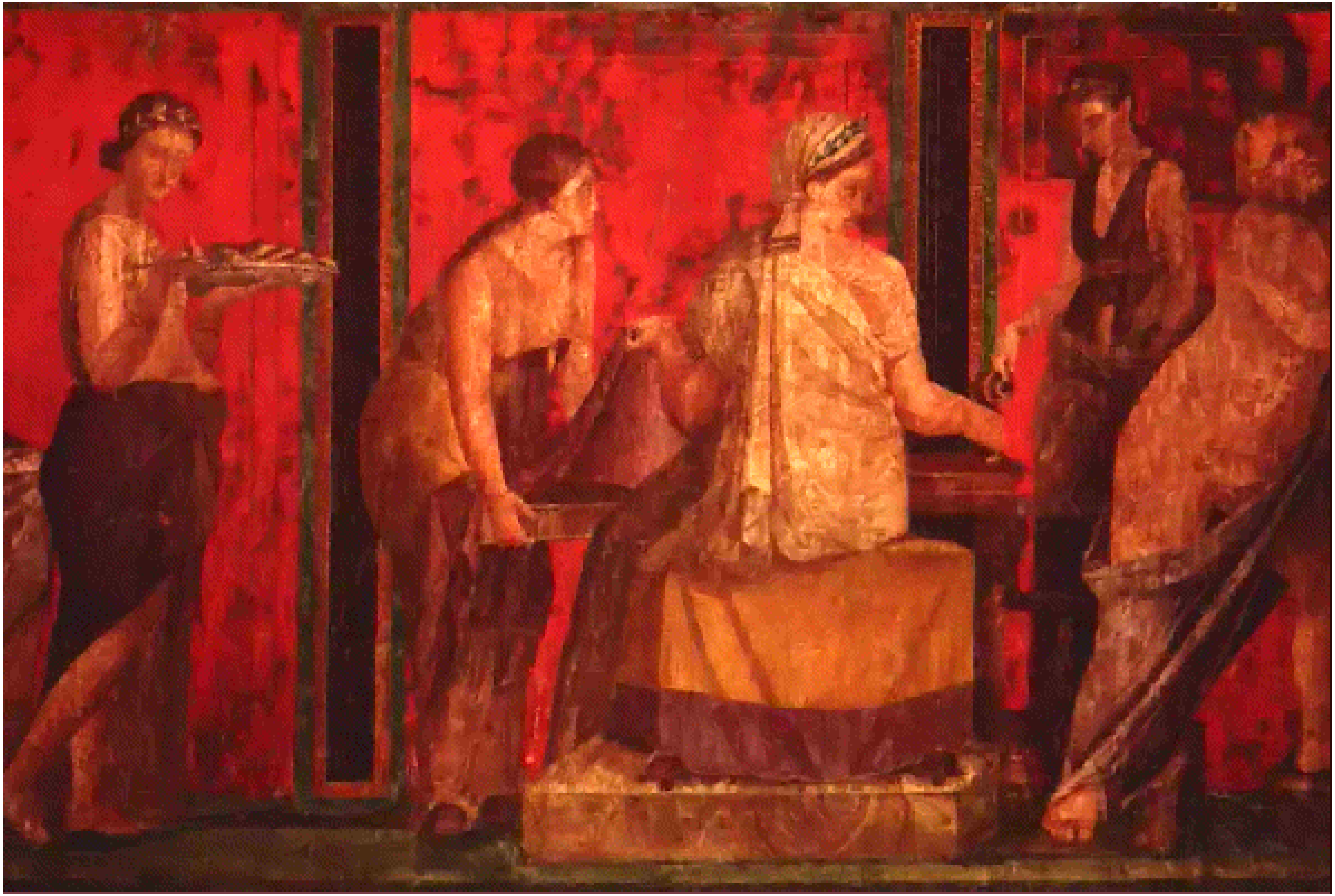
Morris Kline

Sumario

- **La Perspectiva**
  - Balbuceos en el Trecento.
  - La ciencia de los pintores.
  - Alberti. Piero della Francesca. Leonardo. Durero.
  - Desarrollo sistemático: Guidobaldo. Taylor. Lambert.

- **Nacimiento de la Geometría Proyectiva**
  - Desargues.
  - Poncelet.

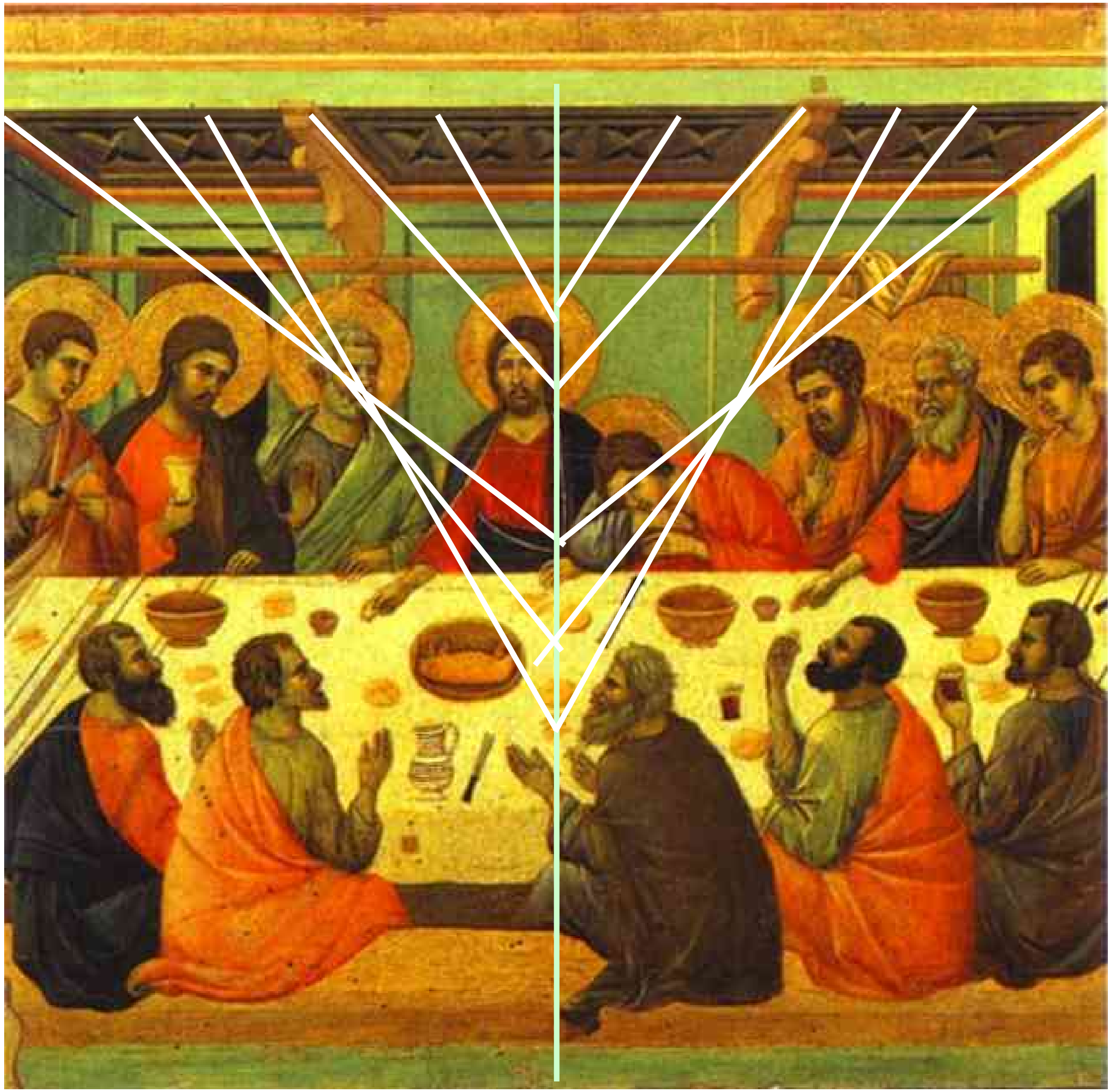
- **La dualidad y el bocadillo de jamón**



1285, Duccio di Boninsegna,
“Madonna Rucellai”

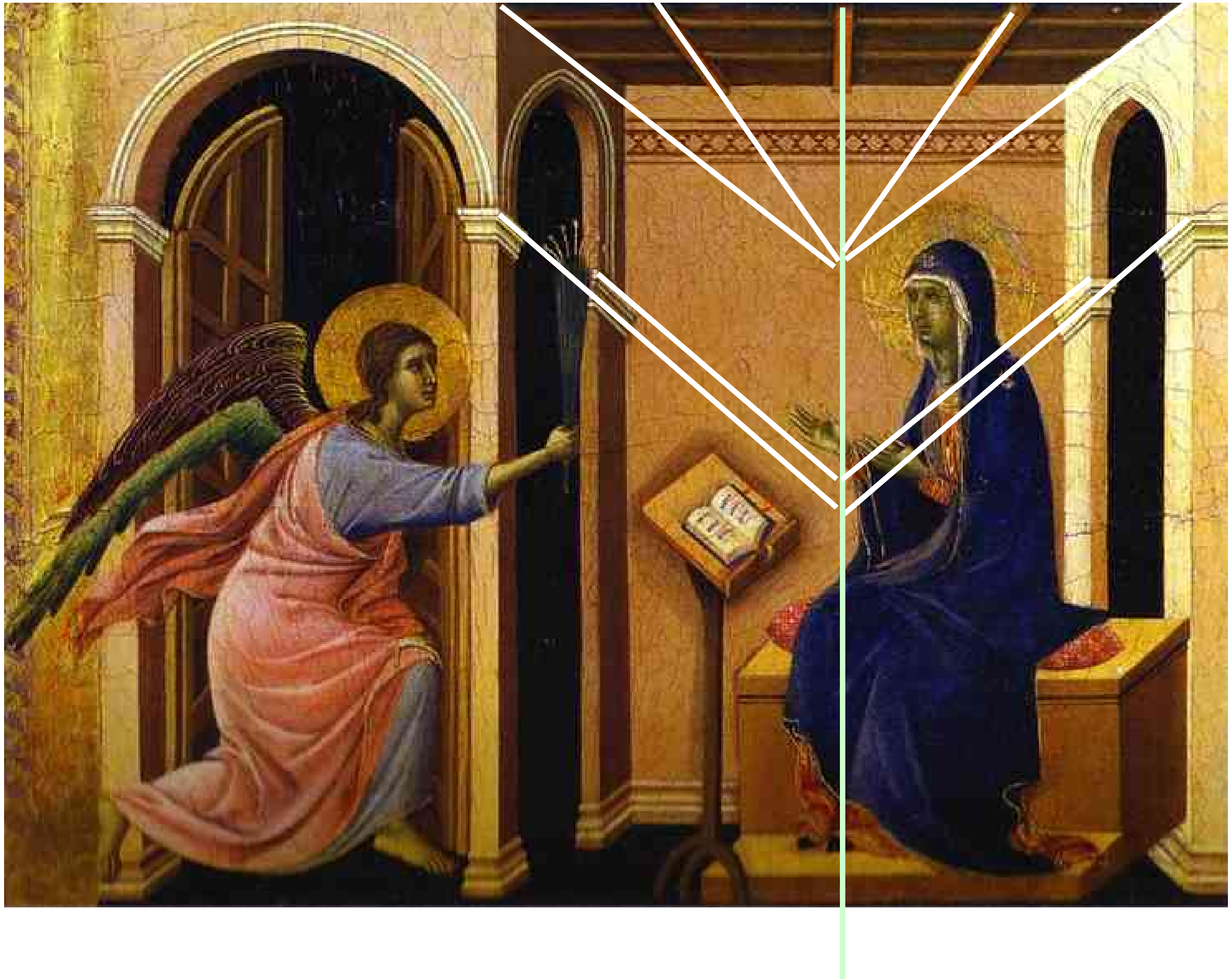
~1290, Giotto,
“Vida de San Francisco”

ILUSIÓN DE PROFUNDIDAD



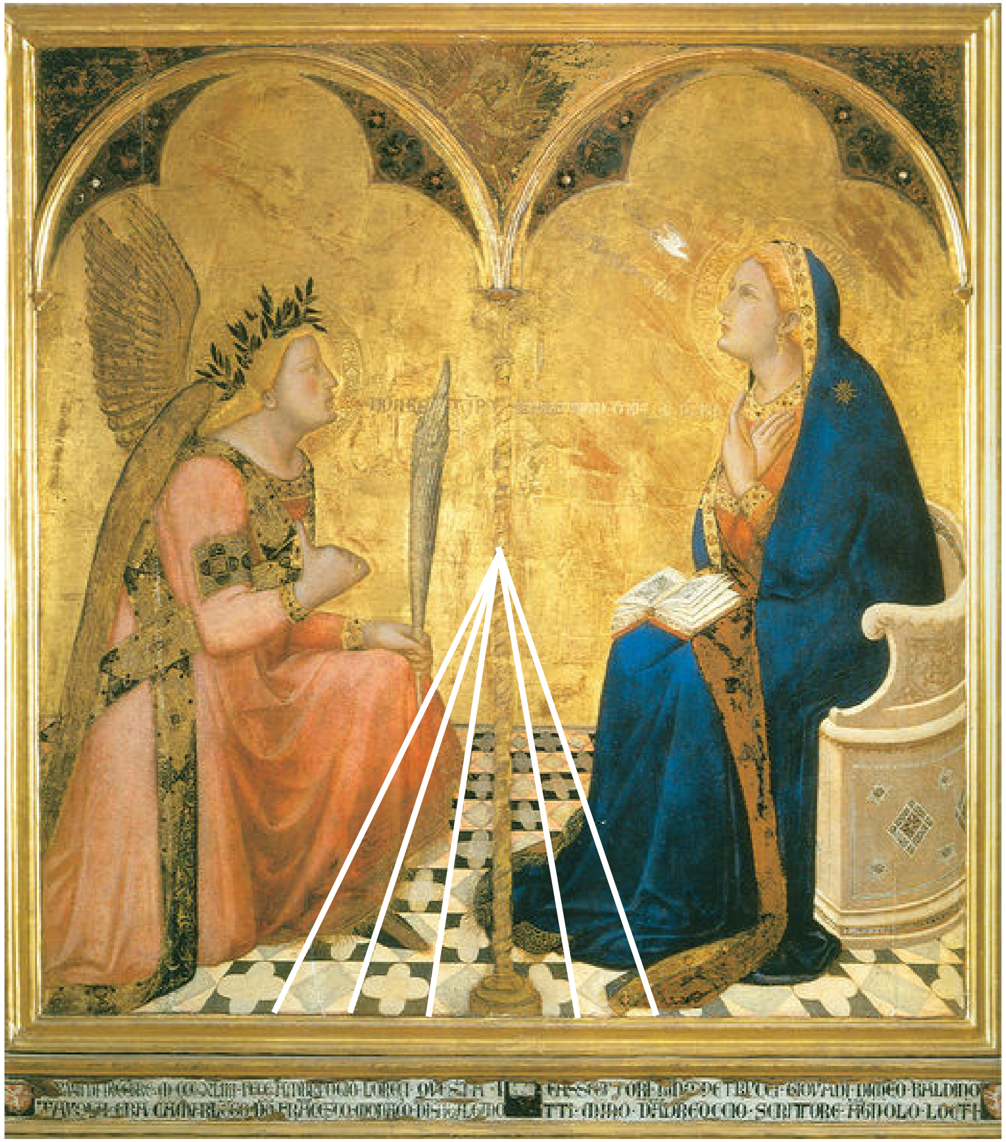
ILUSIÓN DE PROFUNDIDAD

1310, Duccio di Boninsegna
“Última Cena”



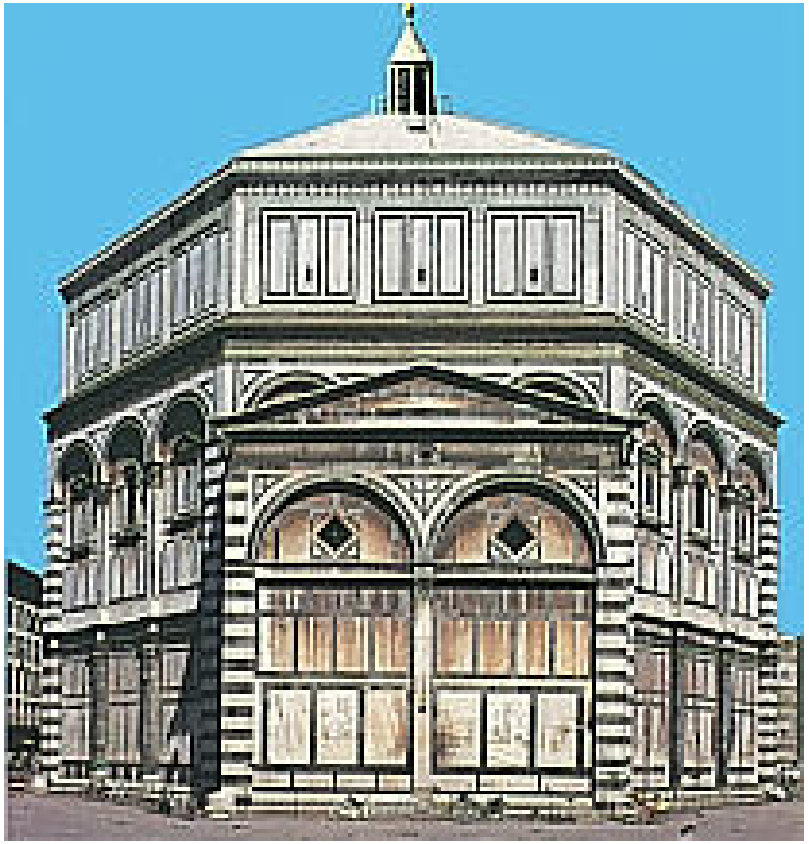
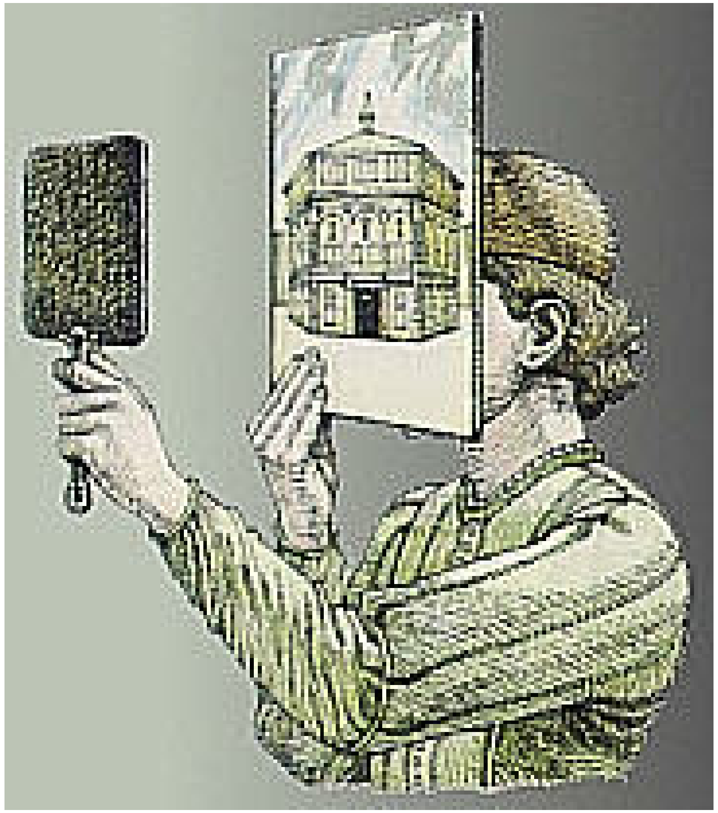
ILUSIÓN DE PROFUNDIDAD

1310, Duccio di Boninsegna
“Anunciación Muerte de la Virgen”

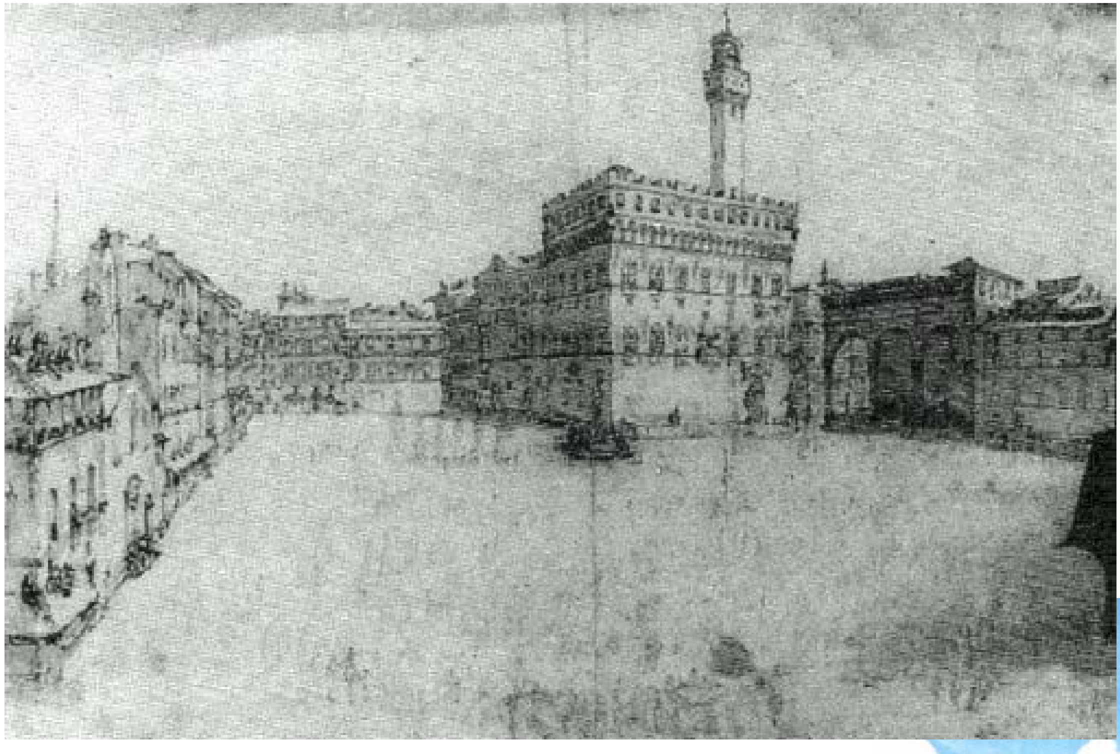


1344, “Anunciación”, A. Lorenzetti

ILUSIÓN DE PROFUNDIDAD

1415, “Baptisterio de Florencia”, Brunelleschi

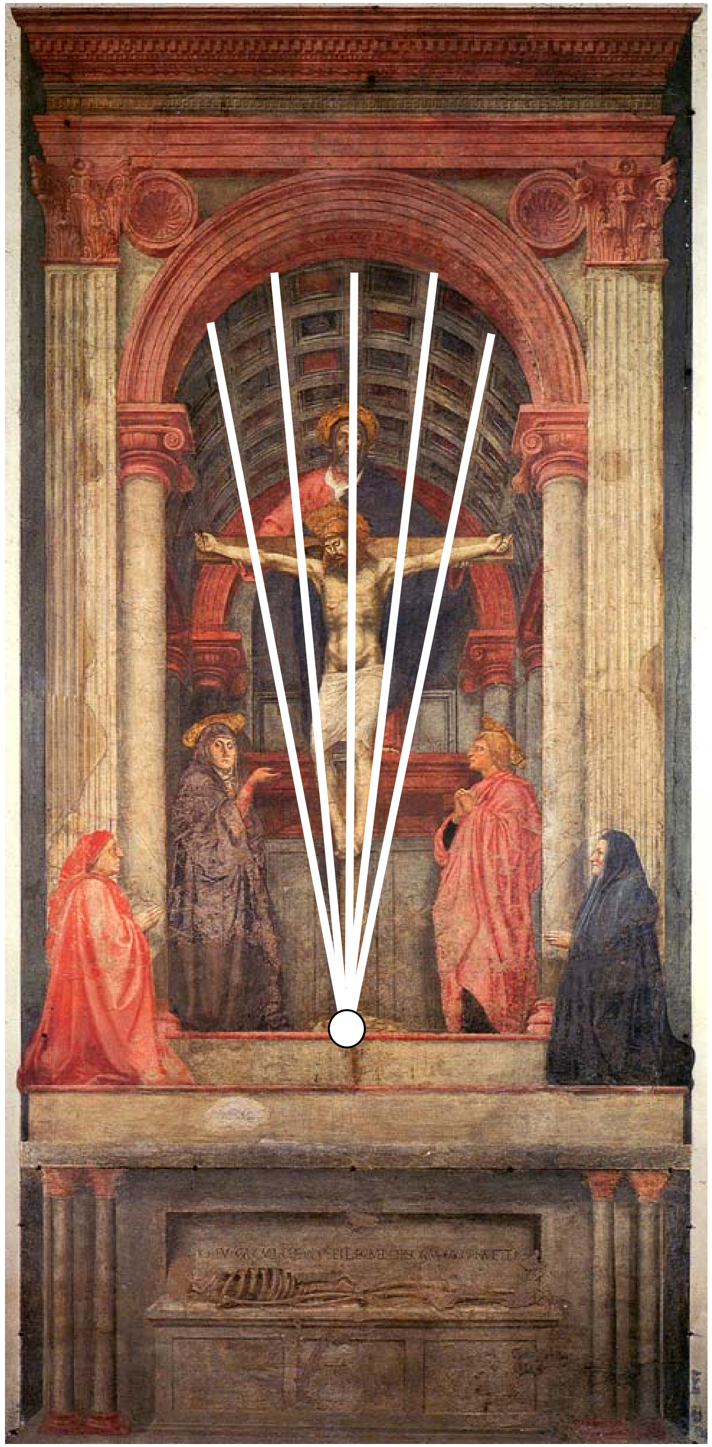


1415, “Palazzo della Signoria”
Florencia, Brunelleschi

1426, Trinidad de Sta. Mª. Novella,
MASSACCIO

ILUSIÓN DE PROFUNDIDAD

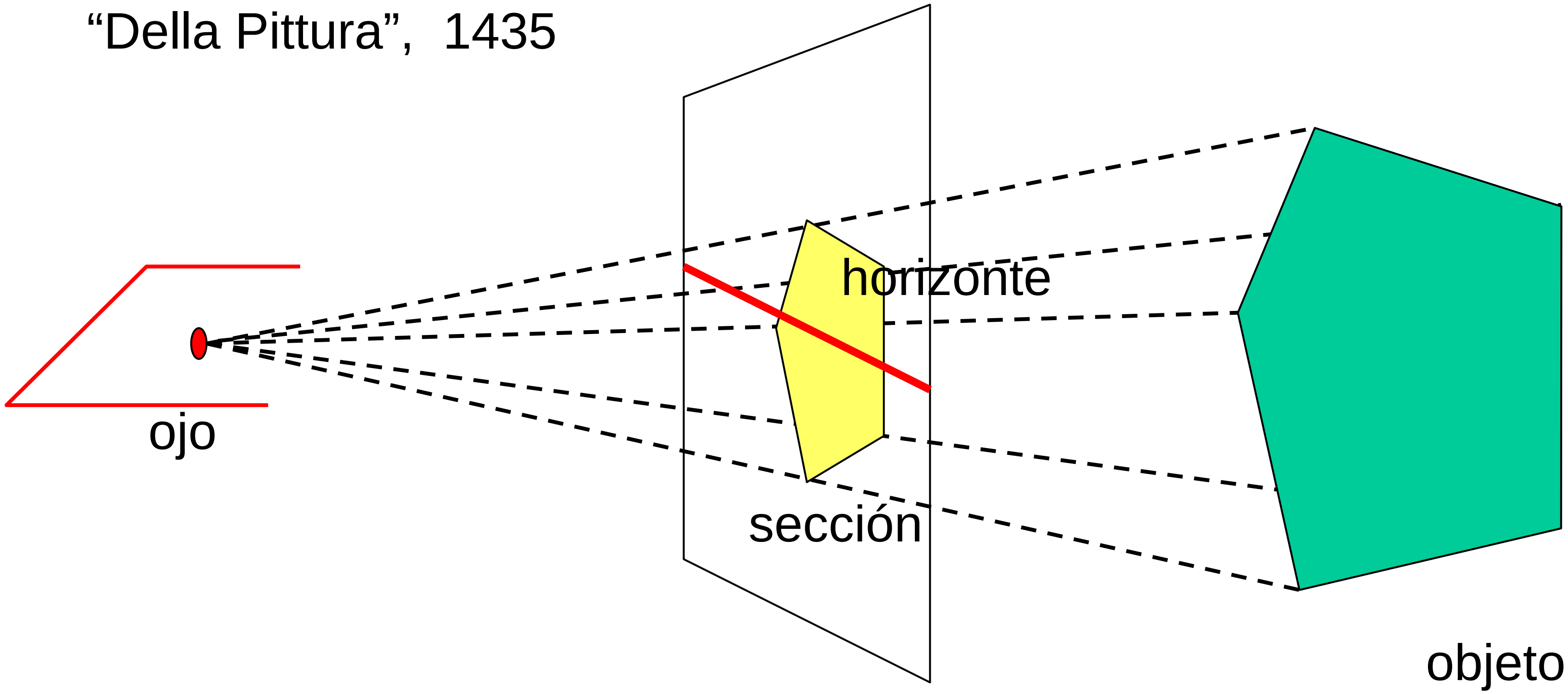
PERSPECTIVA desde un punto



1430, Baptisterio, Florencia
GHIBERTI

ALBERTI (1404-1472)

"Della Pittura", 1435



¿Cómo dibujar UNA sección?

¿Propiedades comunes a TODAS las secciones?

ALBERTI

1) Procedimiento del “VELO”

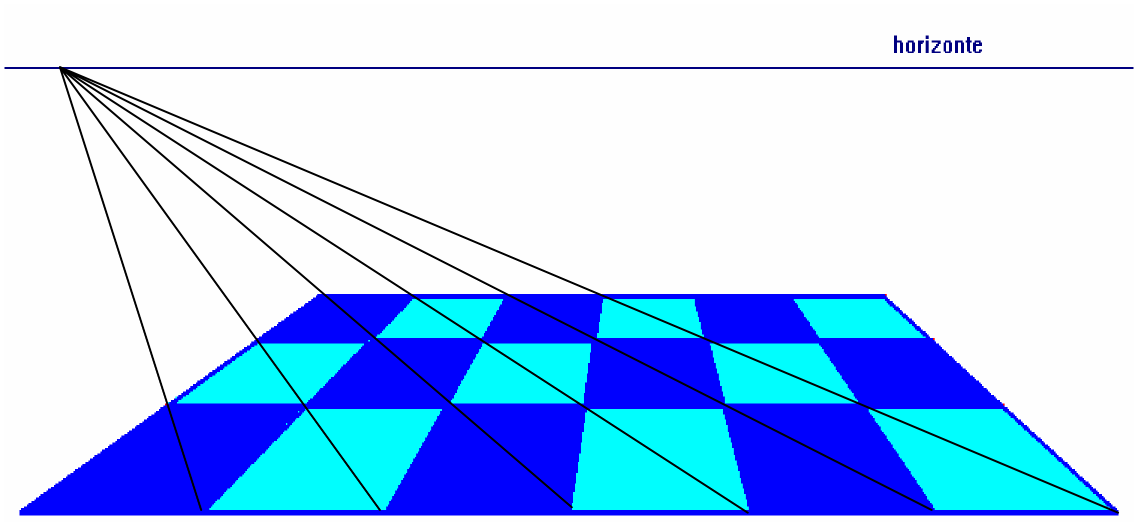
“La circunscripción son aquellas líneas que circunscriben el ámbito de los contornos en pintura. .... Un velo de hilo tenuísimo dividido con gruesos hilos en porciones cuadradas paralelas y distendido en un telar. Lo situo entre el objeto a pintar y el ojo ...”

ALBERTI

2) “Construzione legitima”

Pavimento embaldosado

Regla de la diagonal

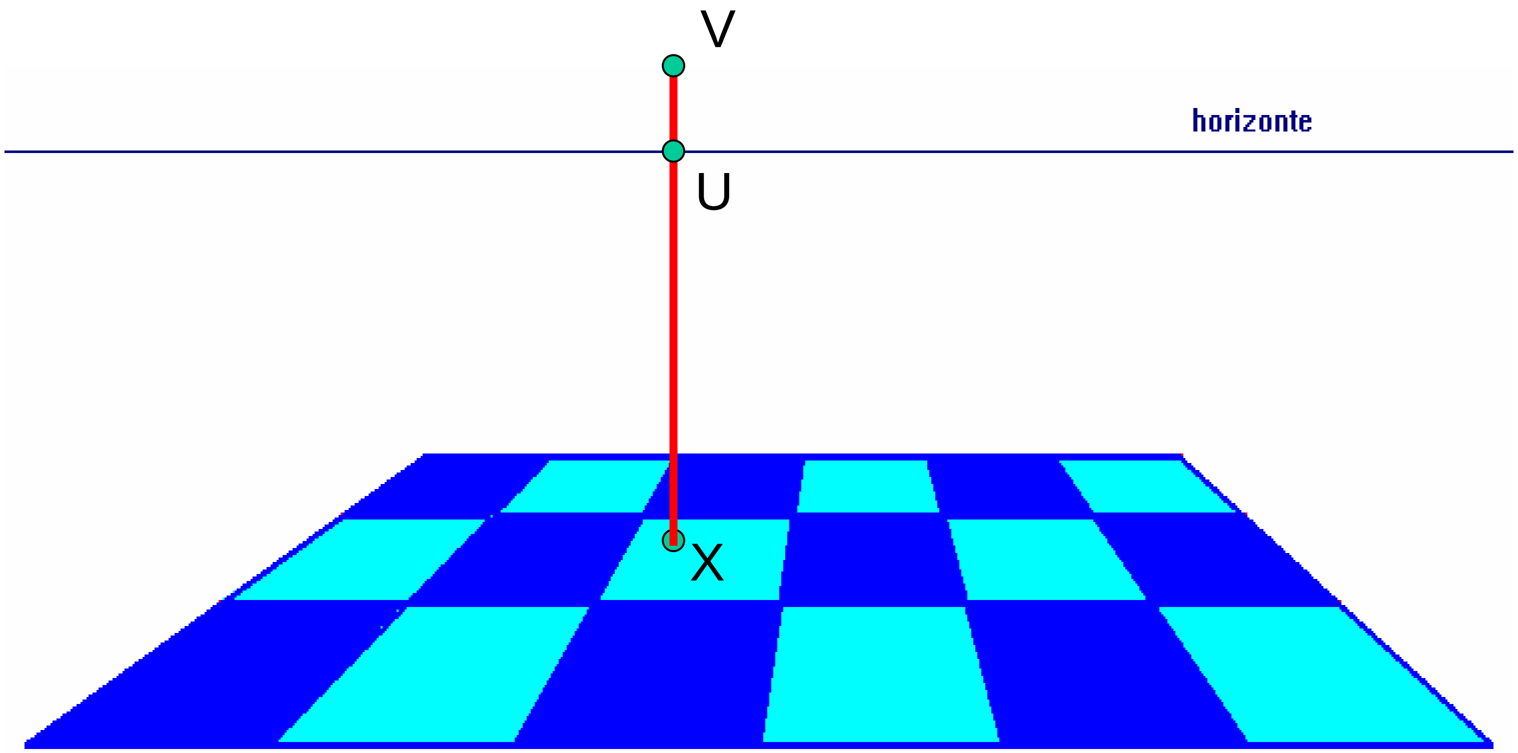


ALBERTI

¿Cómo situar un punto en X a una altura h del suelo?

Altura horizonte 3 braccia

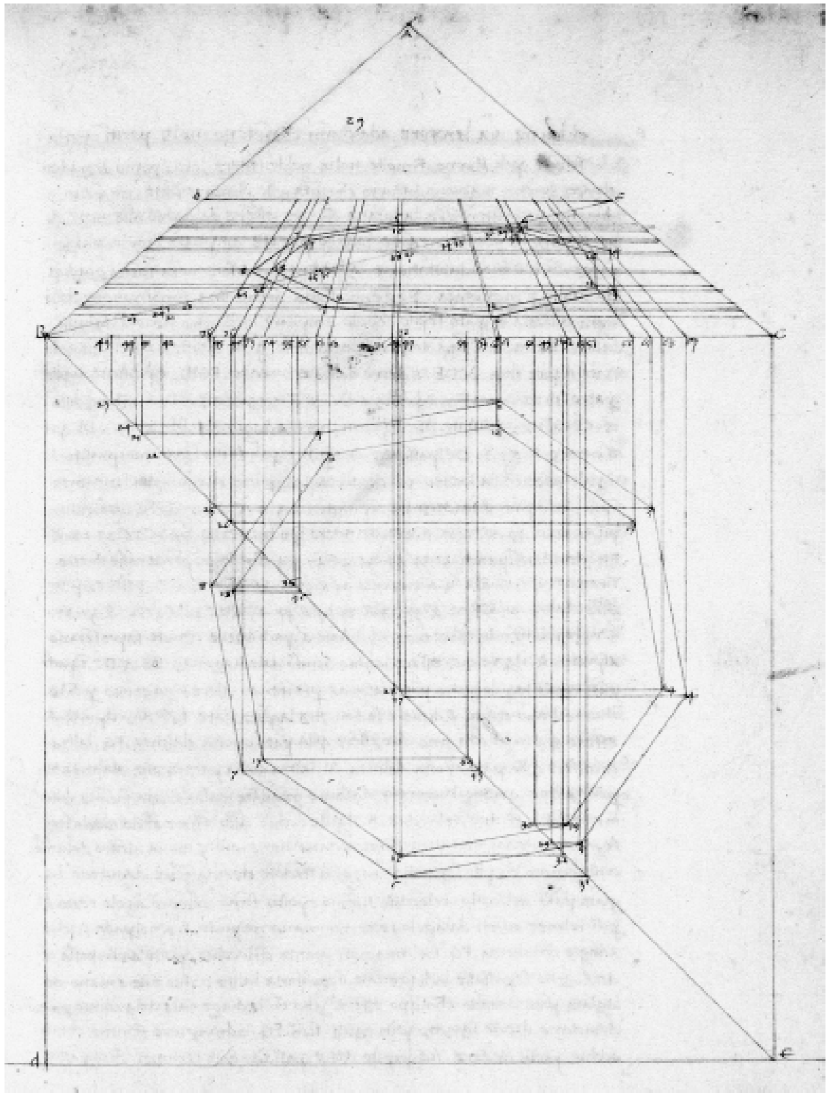
V tal que $\frac{XV}{XU} = \frac{h}{3}$



PIERO della FRANCESCA (1412-1492)

"De prospectiva pingendi", 1480

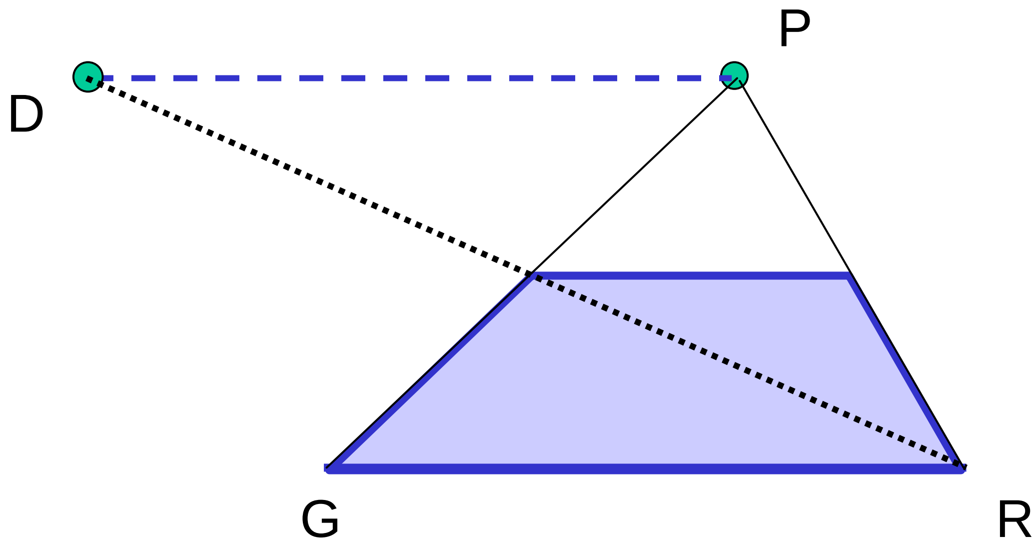
- Demuestra la validez de las construcciones de Alberti.
- Localiza puntos por pares de rectas.
  ¡coordenadas!
- Lenguaje: "Se dibuja Rx, que corta a la diagonal Fz en el punto K,
  luego se traza NP, que corta ...."
- Construcción de polígonos con planta y alzado.



PIERO della FRANCESCA

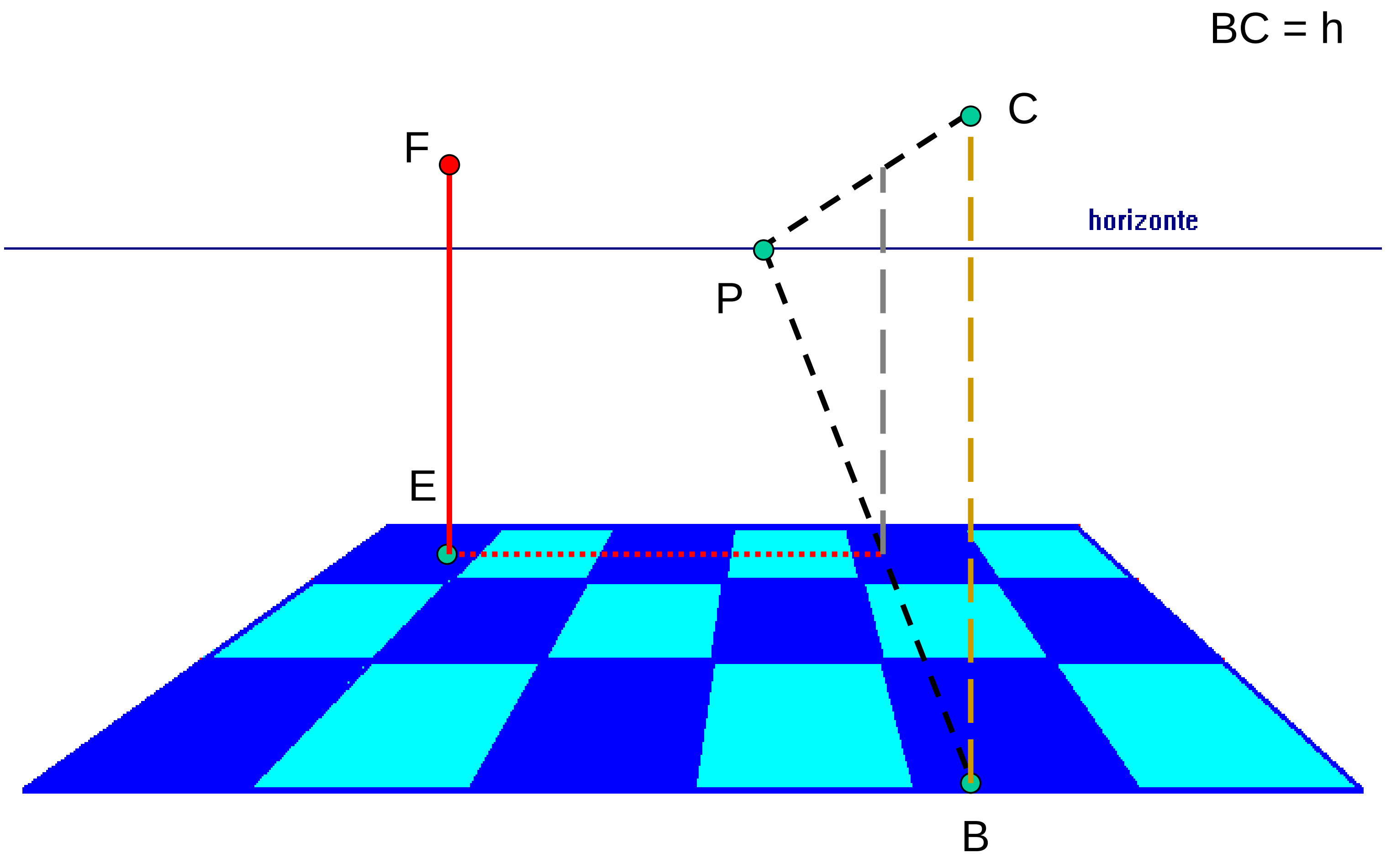
"De prospectiva pingendi", 1480

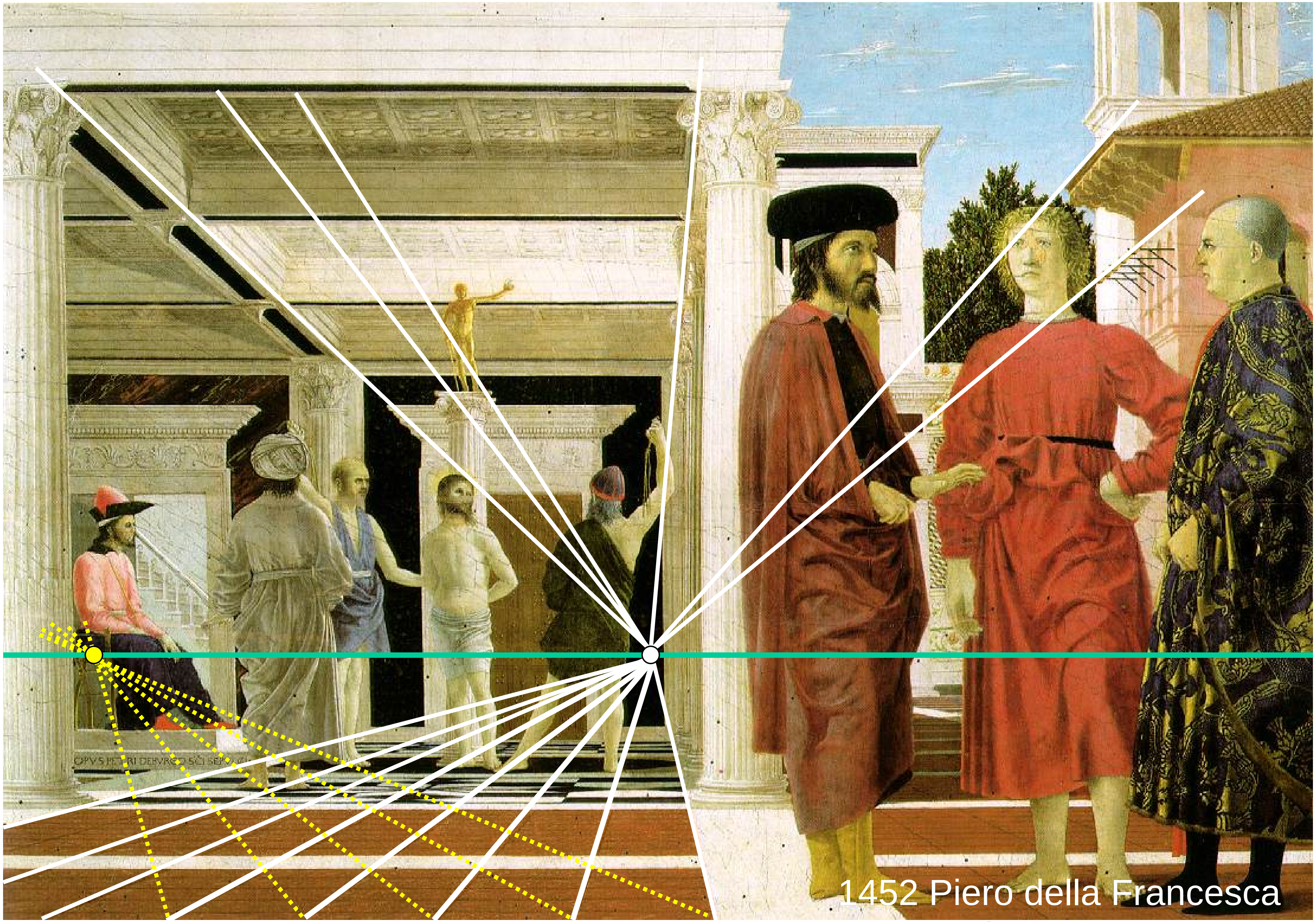
- Método de la distancia para trazar el rectángulo del pavimento.



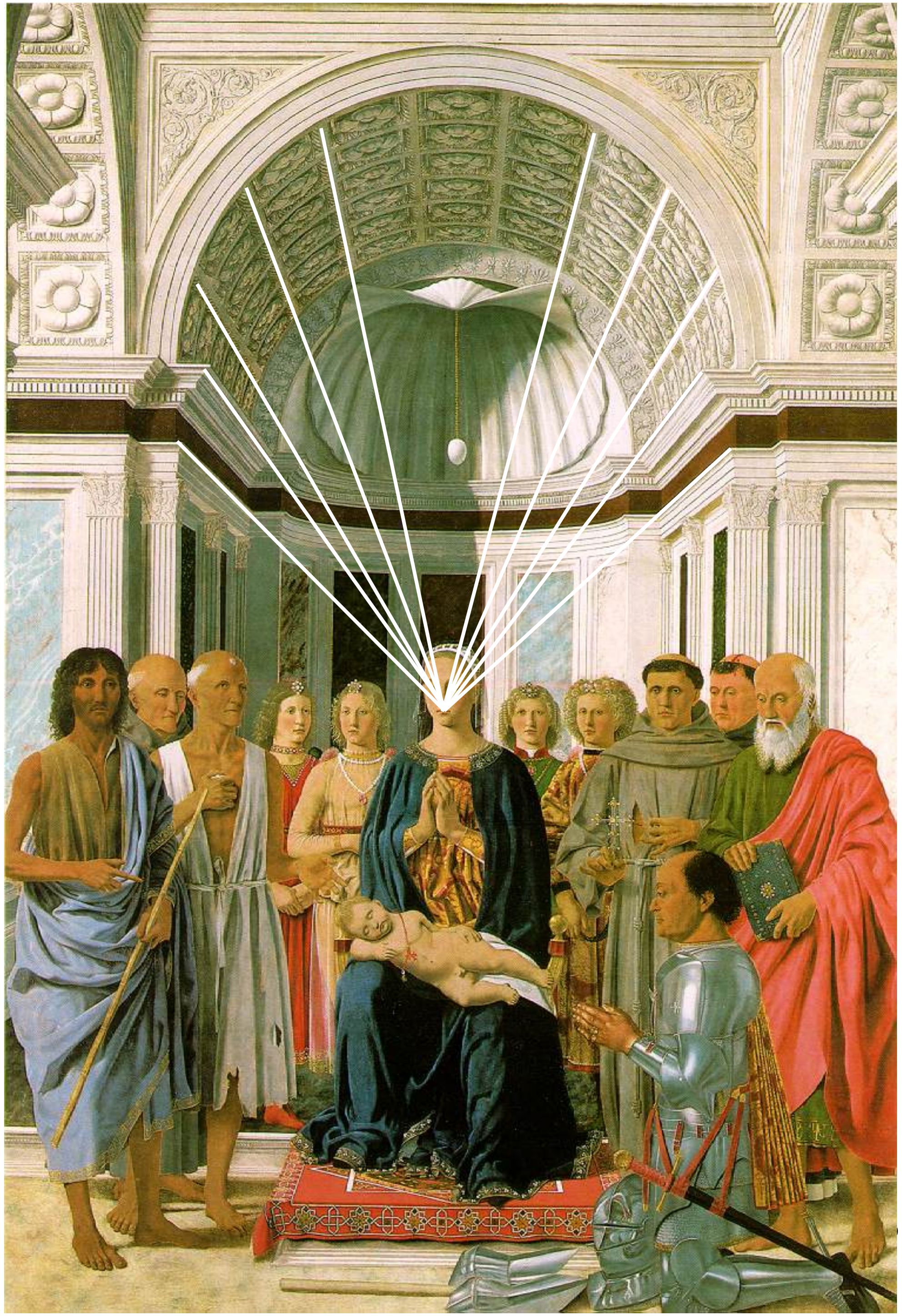
PIERO della FRANCESCA

¿Cómo situar un punto en E a una altura h del suelo?



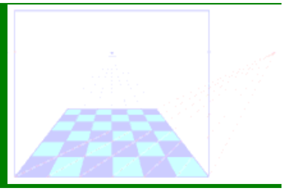


1452 Piero della Francesca
“Flagelación de Cristo”



1465, Piero della Francesca
“Madonna del Ovo”

LEONARDO da VINCI (1452-1519)

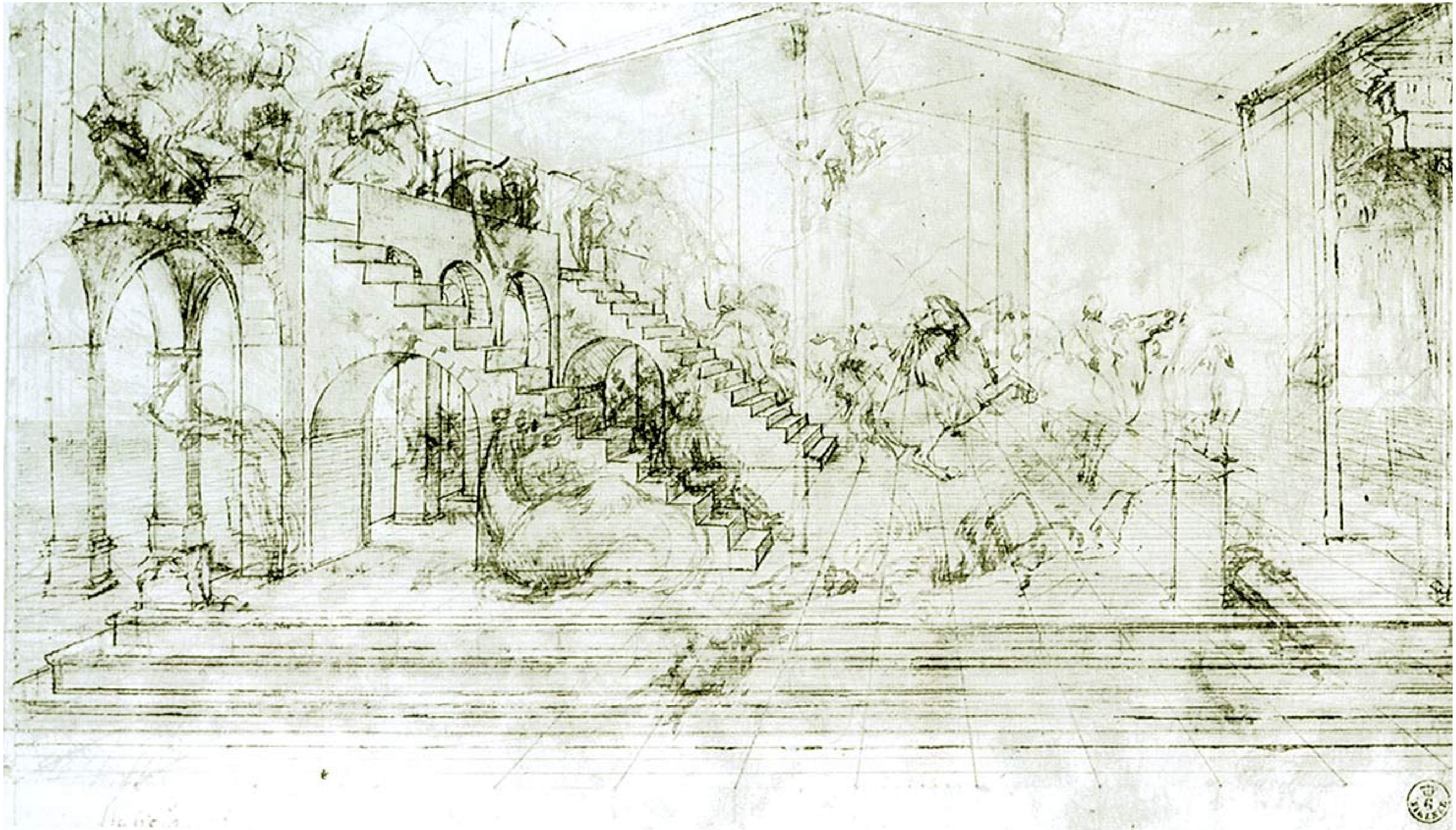


“Discorso” sobre perspectiva
“Tratatto della pittura”, 1530

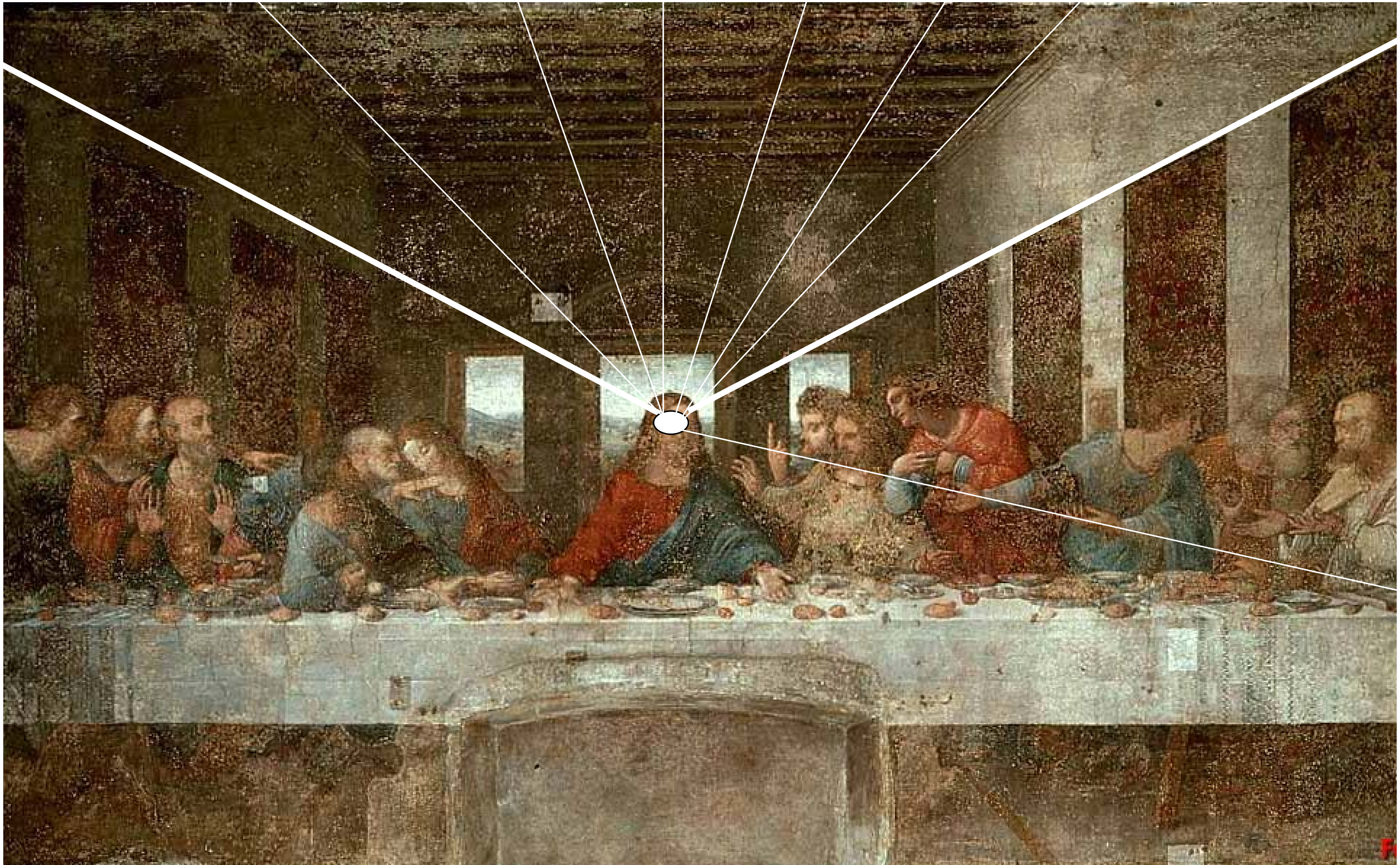
“Aquellos que se enamoran de la práctica del Arte sin haberse aplicado con diligencia en el estudio de su parte científica, pueden compararse con el marinero que se embarca sin timón ni brújula. La práctica debe siempre fundarse sobre una base teórica y, para esto, la PERSPECTIVA es la guía sin la que nada puede hacerse bien”.

Diferentes perspectivas: lineal, de colores, de desaparición.

Profundidad: “sfumatto”, claroscuro



1480 Leonardo da Vinci
“Adoración de los Magos”



DÜRERO (1471-1528)

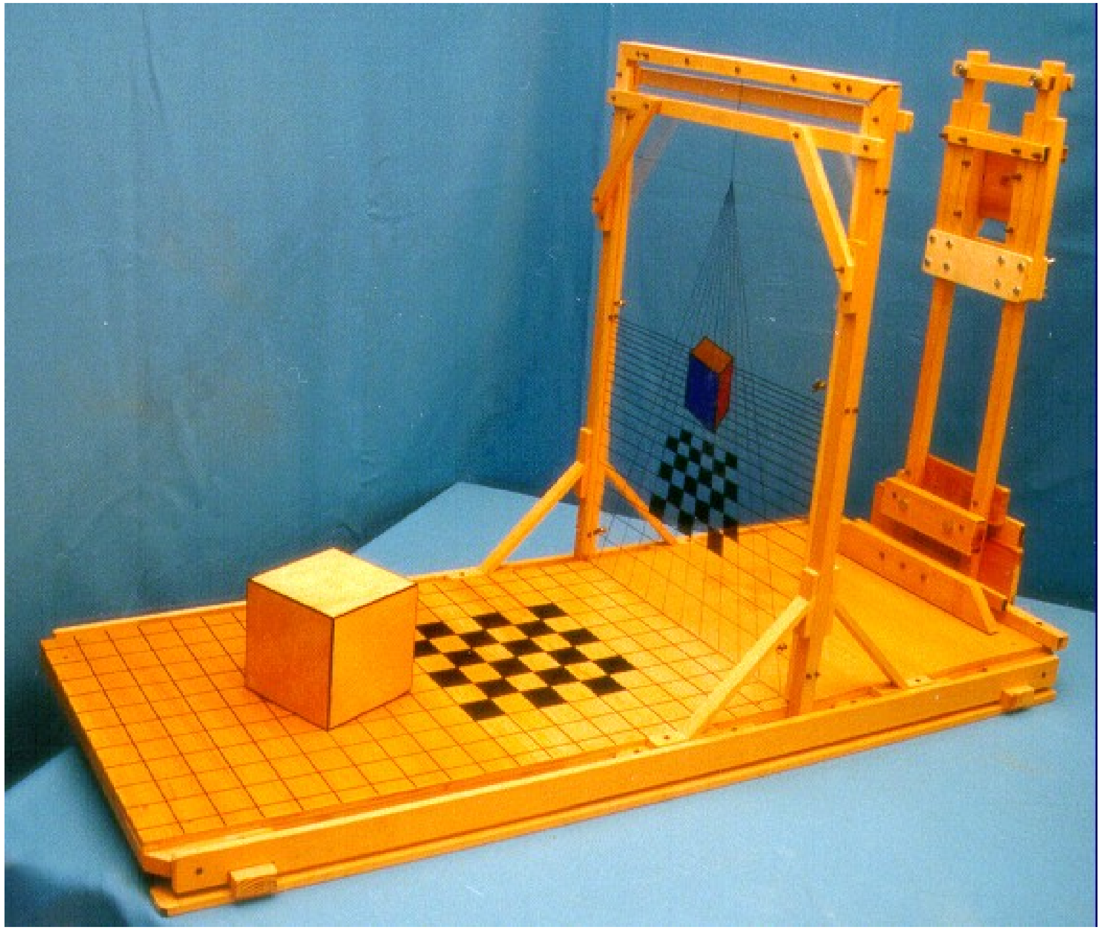
"Underweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheyd", 1525

- Estudios y reglas de perspectiva al norte de los Alpes
- Grabados
- Aparatos para dibujar en perspectiva:
  velo, malla, perspectógrafo de tres hilos, perspectógrafo de Keser

DÜRERO

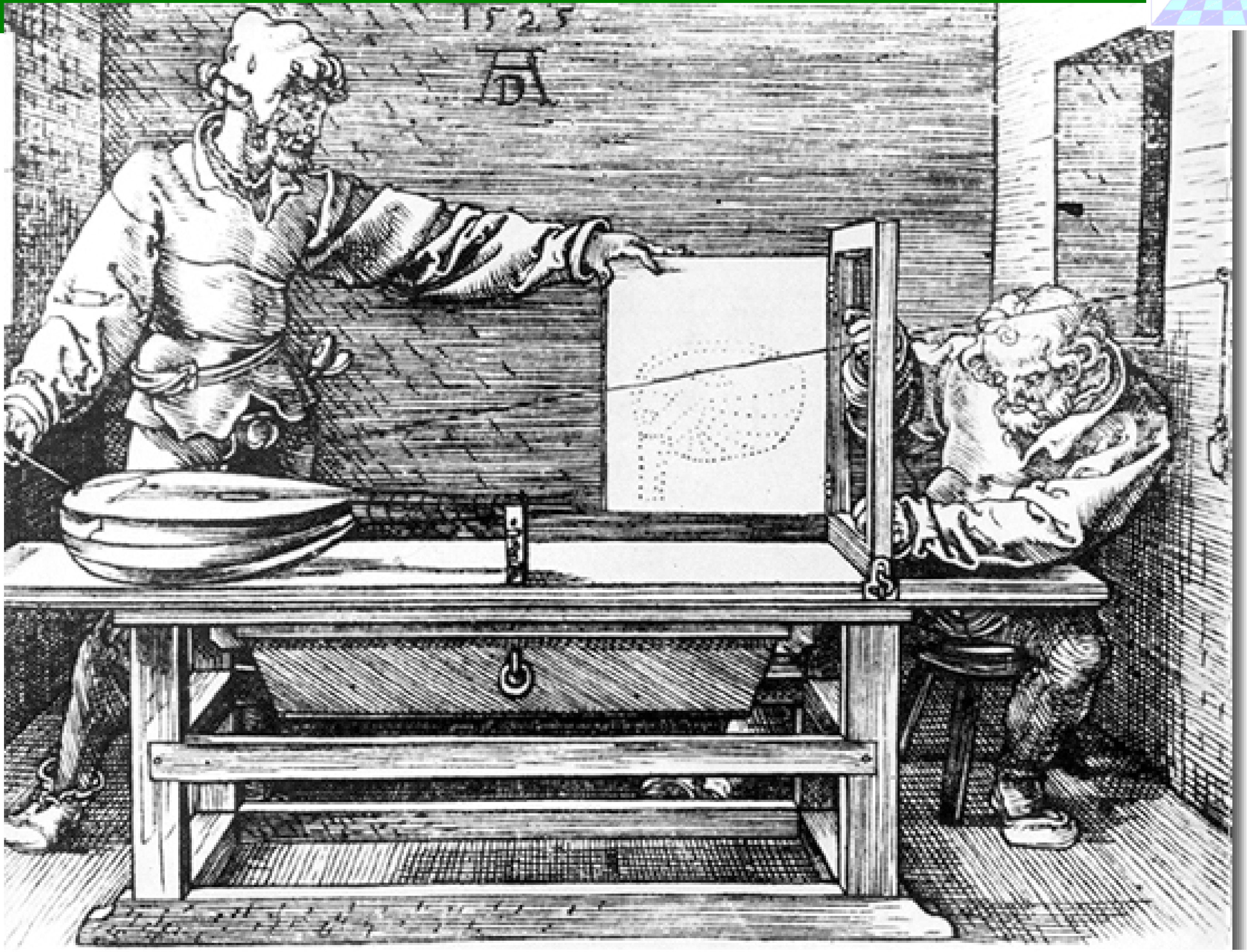
DÜRERO

Velo o ventana



Laboratorio di Macchine Matematiche (Univ. Módena)

DÜRERO



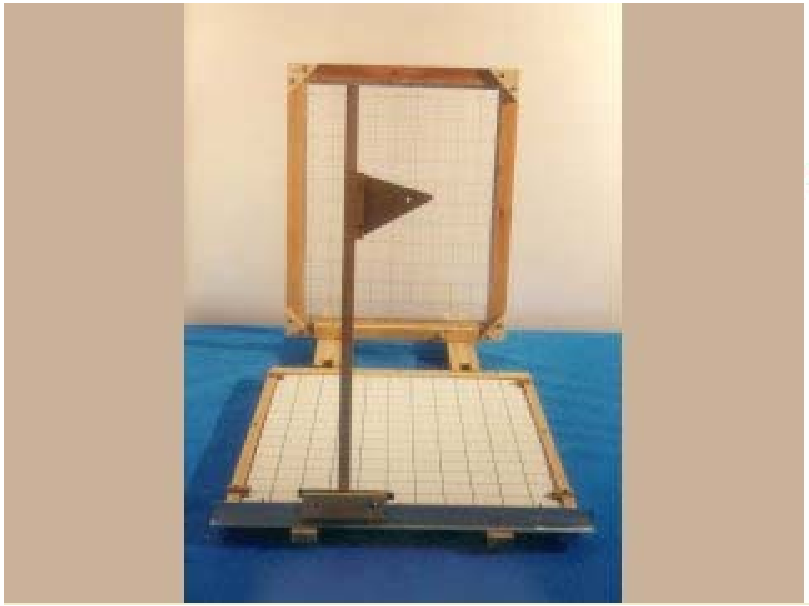
DÜRERO

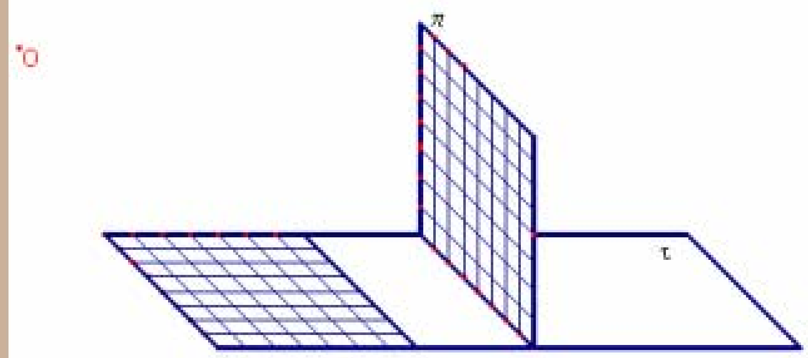
Perspectógrafo de tres hilos

Laboratorio di Macchine Matematiche (Univ. Módena)

DÜRERO

Malla rectangular





Laboratorio di Macchine Matematiche (Univ. Módena)

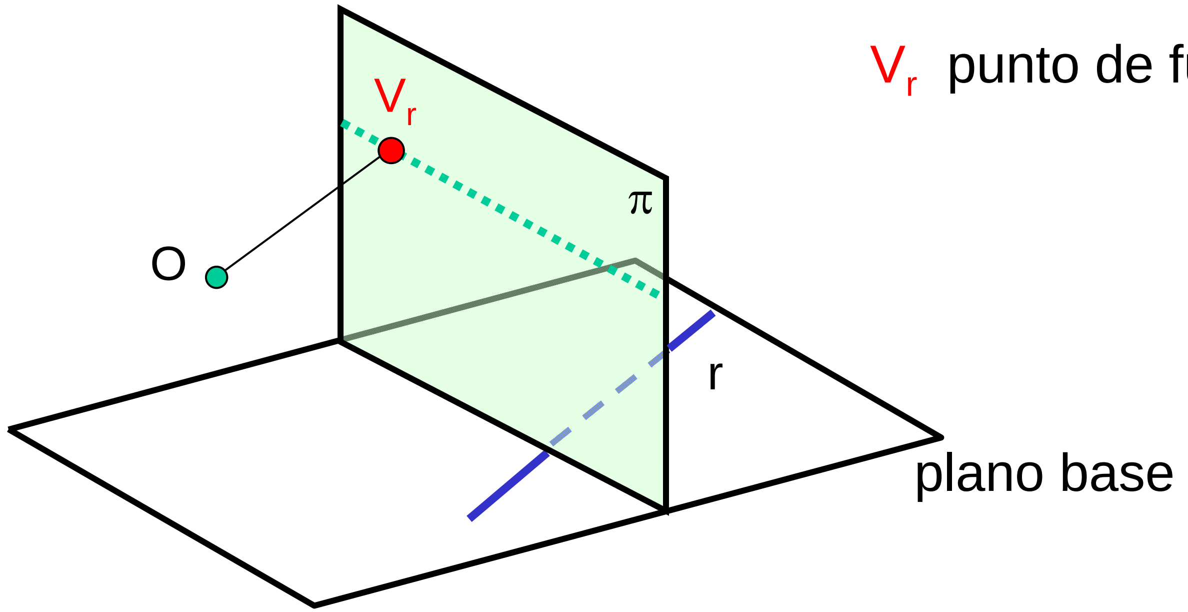
GUIDOBALDO del MONTE (1545-1607)

"Perspectivae libri sex", 1600

Importantes avances teóricos

- Prolonga el plano base hasta el observador
- Construcción del "punctum concursum" (punto de fuga)

V_r punto de fuga de r

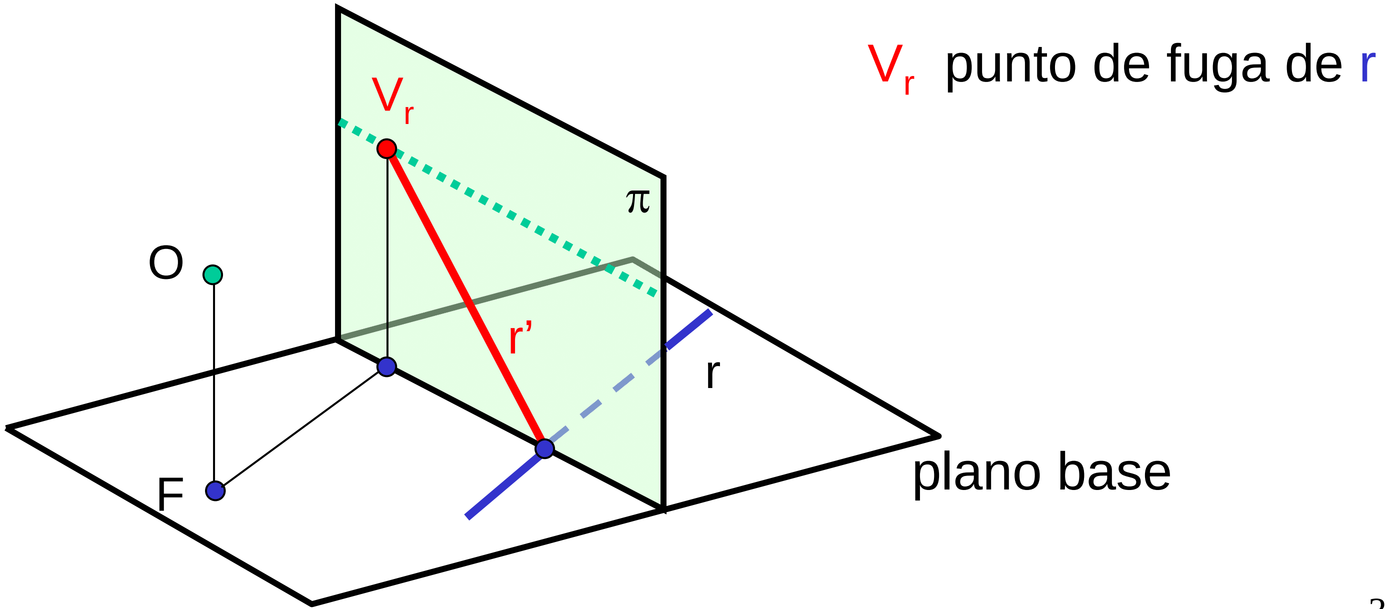


GUIDOBALDO del MONTE

“Perspectivae libri sex”, 1600

Importantes avances teóricos

- Prolonga el plano base hasta el observador
- Construcción del “punctum concursum” (punto de fuga)



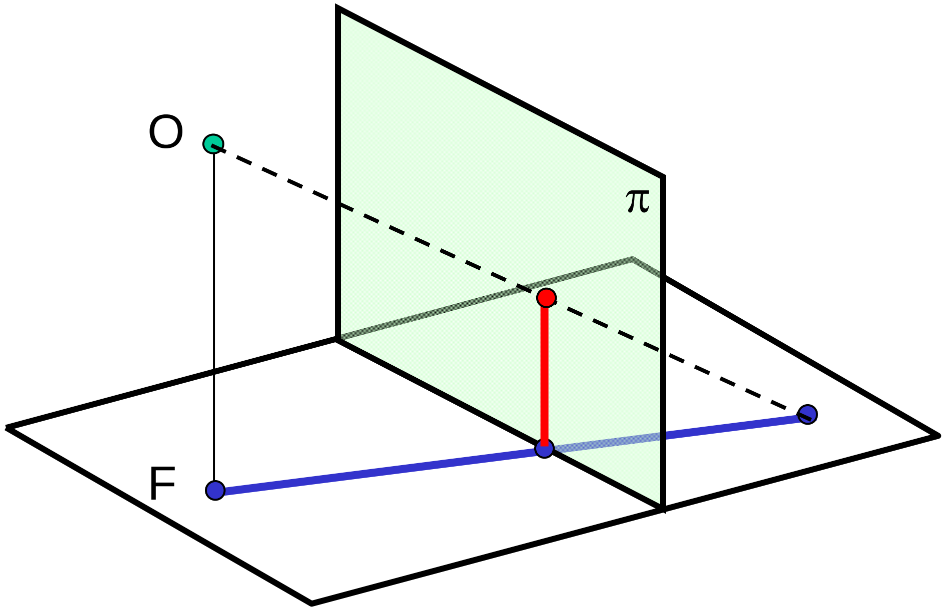
GUIDOBALDO del MONTE

Teorema fundamental de la perspectiva

(1) La imagen de cualquier recta r, no paralela a π está determinada por su punto de fuga, V_r, y la intersección de r con π

(2) Las rectas paralelas a π se representan como paralelas.

(3) Toda recta horizontal que pasa por F (pie del ojo O) se representa por una recta vertical al plano base.



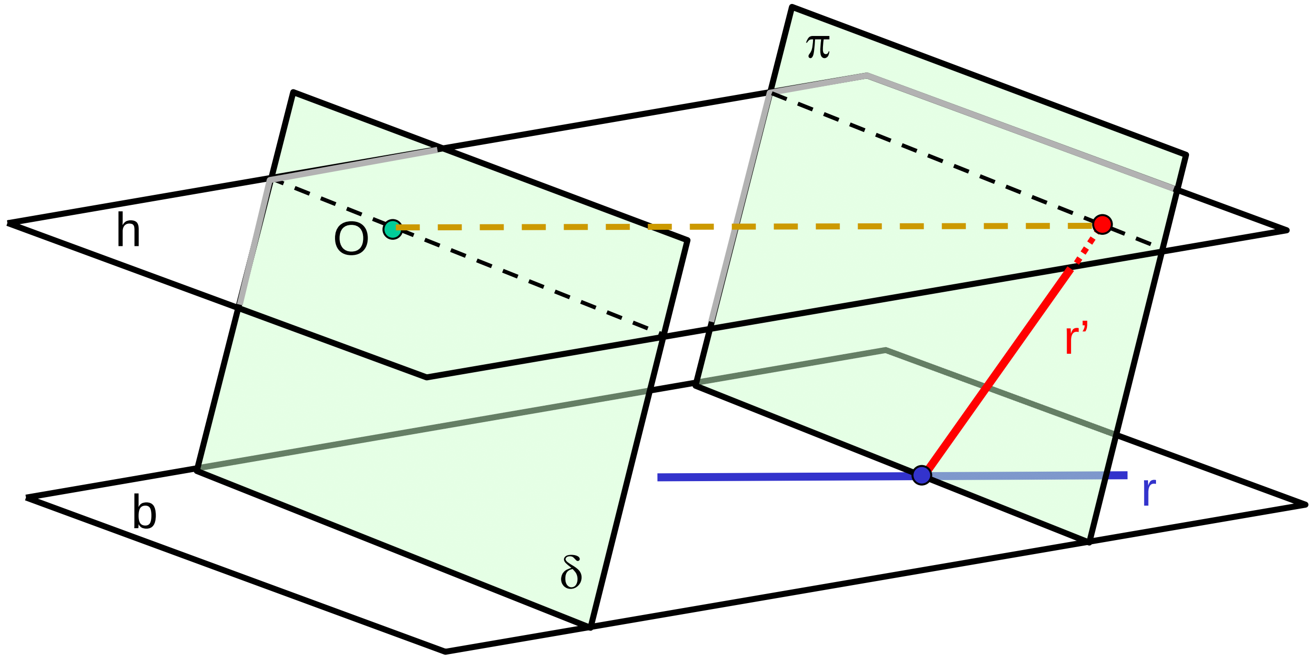
Brook TAYLOR (1685-1731)

“New Principles of linear perspective”, 1723

Sistematiza la perspectiva. Definiciones, teoremas, ...

Prescinde de la perpendicularidad del plano base con el plano del cuadro.

Configuración básica formada por cuatro planos:
base, cuadro, horizonte y directriz



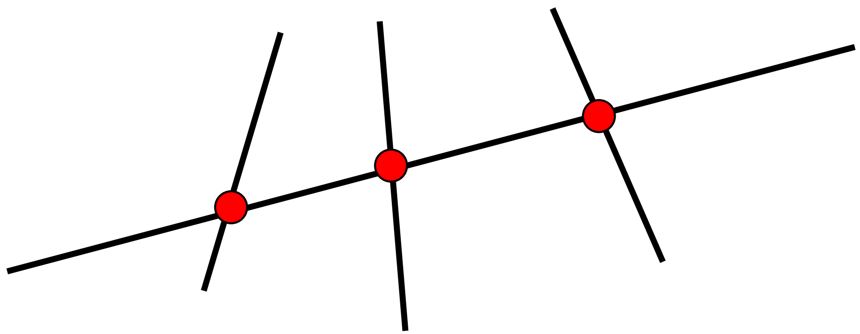
… Hacia 1600

- Sin avances en Geometría desde Pappus ~320
- Problemas nuevos:
  - Propiedades comunes de las secciones
  - Estudio de las cónicas (Kepler)
  - Estudio de nuevas curvas
    - Cartografía
    - Balística

Girard DESARGUES (1591-1661)

- Ingeniero, arquitecto
- Escritos poco difundidos, estilo conciso y oscuro

Brouillon project d'une atteinte aux evenements des rencontres d'une cone avec un plan (1639)



palma

tronco

nudos y ramas

Girard DESARGUES

Nuevas NOCIONES

- Punto del infinito
- Perspectividad (Teorema de Desargues)
- Involución (Cuaterna armónica)
- Polaridad

Girard DESARGUES

PUNTO DEL INFINITO DE UNA RECTA

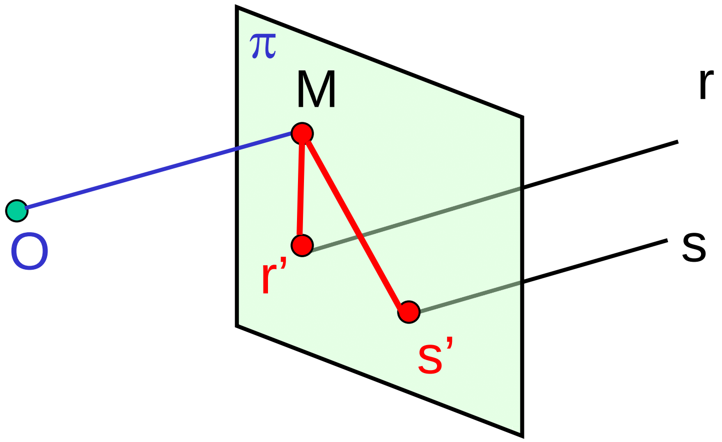
- Alberti, rectas paralelas deben pintarse como secantes.
- Kepler, 1604
  añade un punto en el infinito a cada haz de rectas paralelas.
- Desargues
  - (Haz de rectas paralelas) = (Haz de rectas concurrentes)
  - Todo conjunto de rectas paralelas tiene un punto común
    PUNTO DEL INFINITO corresponde al punto de fuga
  - Los puntos del infinito forman la línea de horizonte

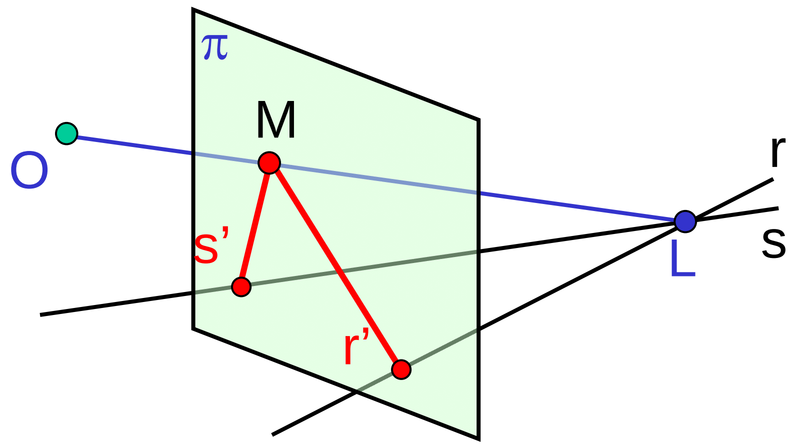
Girard DESARGUES

"La perspectiva", 1636 ¡sólo una figura!

Representación de haces de rectas paralelas o concurrentes

Línea de visión corta a π en el punto M





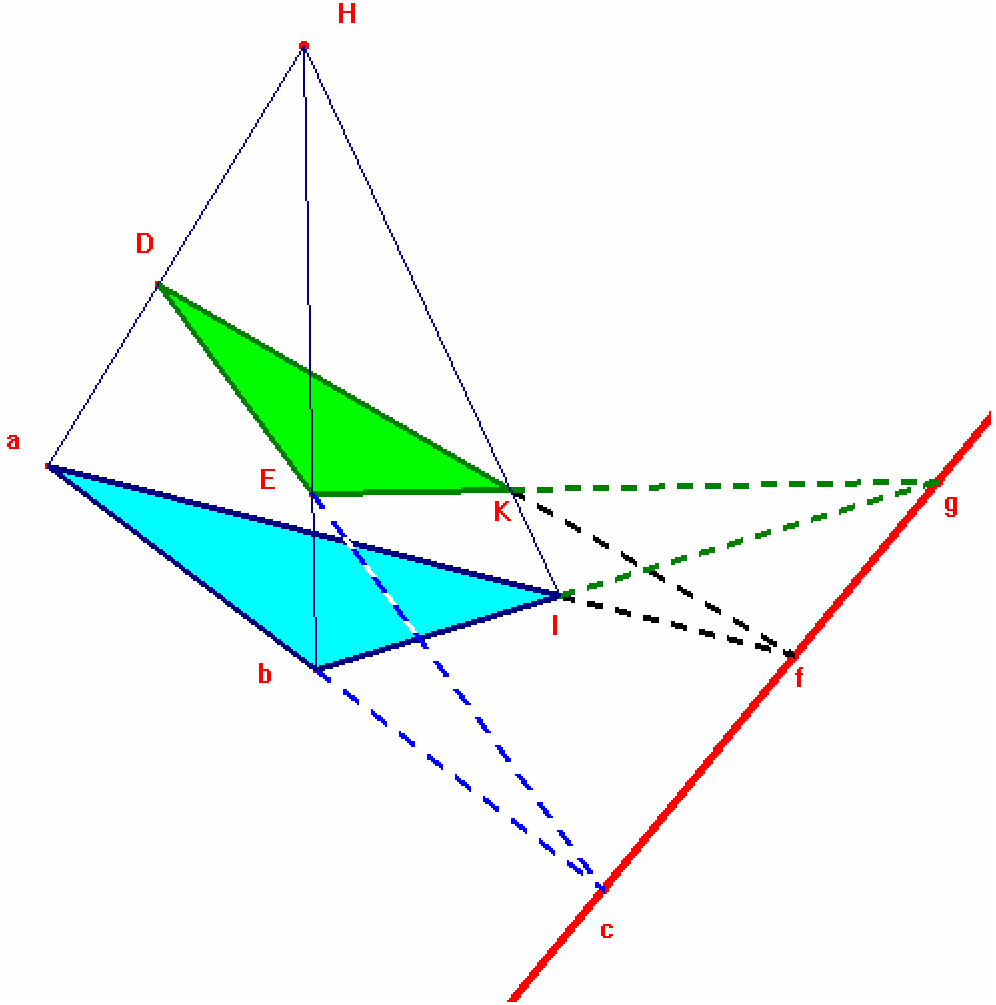
Si r || s,
sus imágenes forman un haz de rectas de vértice M

Si r,s se cortan en L,
sus imágenes forman un haz de rectas de vértice M

Girard DESARGUES

TEOREMA DE DESARGUES (1648)

Los triángulos T y T’ son
perspectivos (desde H) $\Leftrightarrow$
los lados correspondientes
se cortan en puntos alineados



Girard DESARGUES

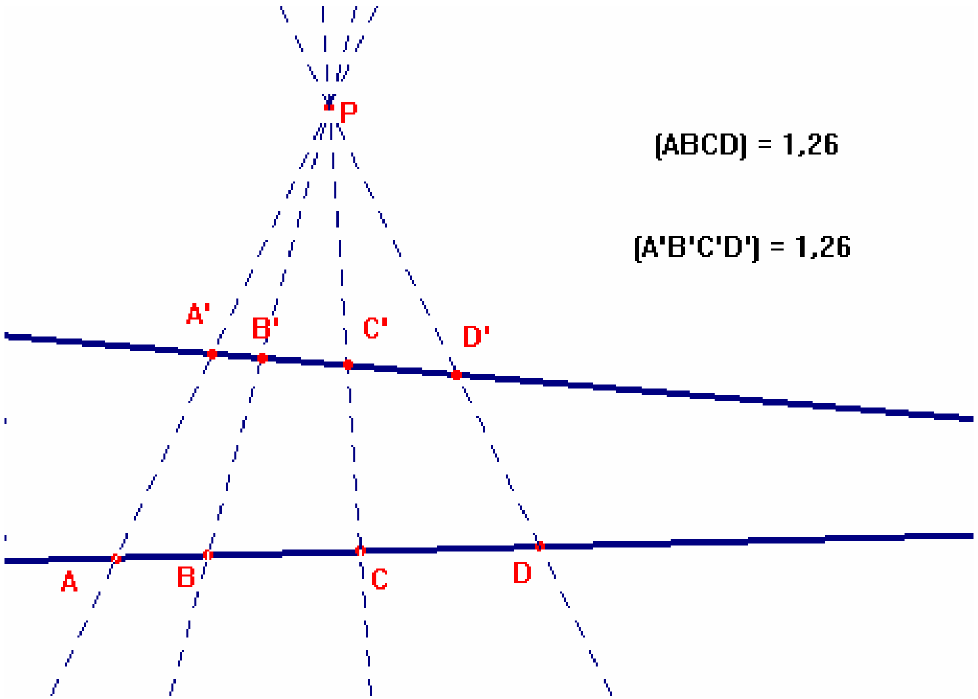
INVARIANCIA DE LA RAZÓN DOBLE

Razón doble de A, B, C D alineados

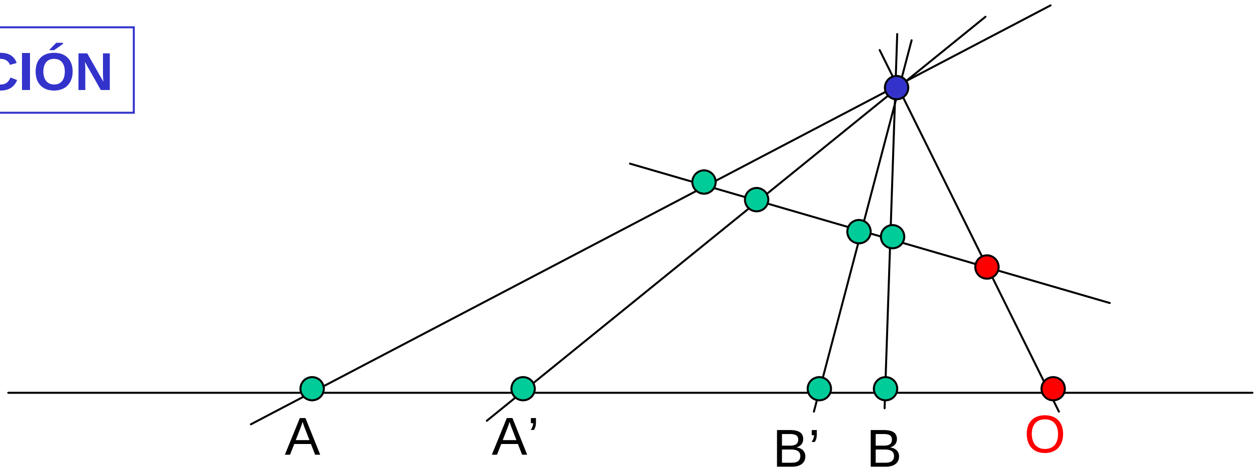
$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

PROYECCIÓN Y SECCIÓN

(ABCD) = (A’B’C’D’)



INVOLUCIÓN



Los pares A, B y A’, B’ están en involución si existe O, alineado con ellos tal que

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA'} \cdot \overline{OB'}$$

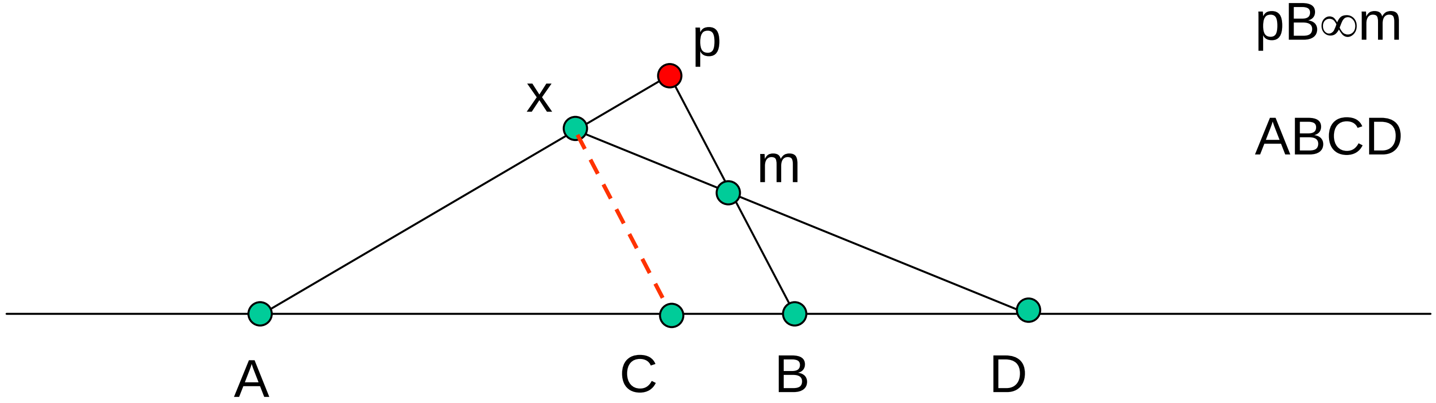
A y B se dicen CONJUGADOS
El conjugado de O es el punto del infinito

La involución se conserva por proyección y sección

CUATERNA ARMÓNICA

ABCD es una cuaterna armónica si A y B son conjugados en una involución con C y D como puntos dobles

- Invariante por proyección
- Si D es punto del ∞, entonces C es el punto medio de AB



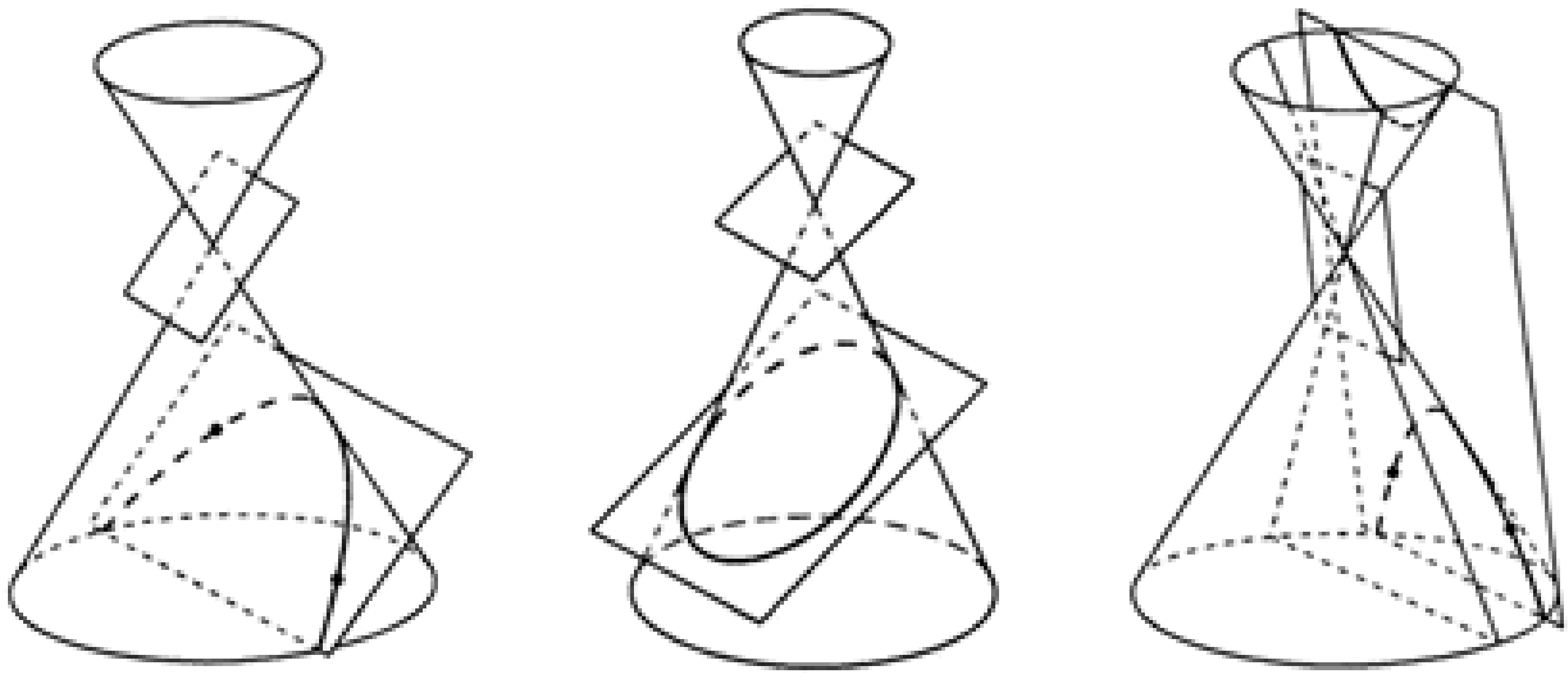
pB∞m

ABCD

Girard DESARGUES

POLARIDAD (respecto de una cónica)

- Polos y polares ya introducidas por Apolonio



Girard DESARGUES

POLARIDAD (respecto de una cónica)

- Polos y polares ya introducidas por Apolonio
- Prueba sus resultados para la circunferencia
- Por proyección y sección son válidos para el resto de las cónicas
- Diámetro, diámetros conjugados, asíntotas,…

Girard DESARGUES

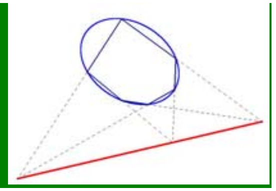
Nuevas NOCIONES

- Punto del infinito
- Perspectividad (Teorema de Desargues)
- Involución (Cuaterna armónica)
- Polaridad

Nuevo MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN

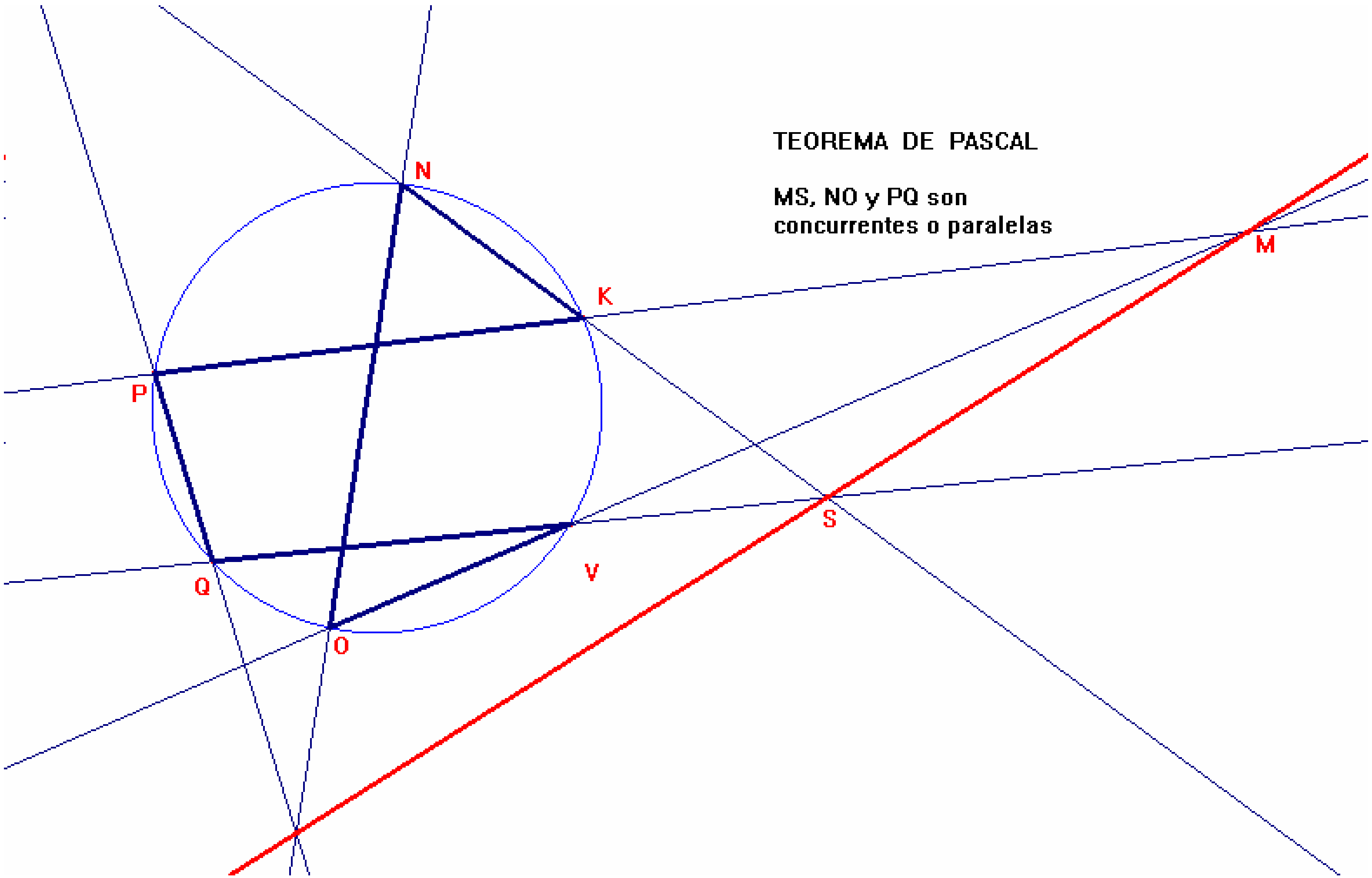
- Proyección y sección

Blaise PASCAL (1623-1662)



Hexagrama místico

“Essay sur les coniques”



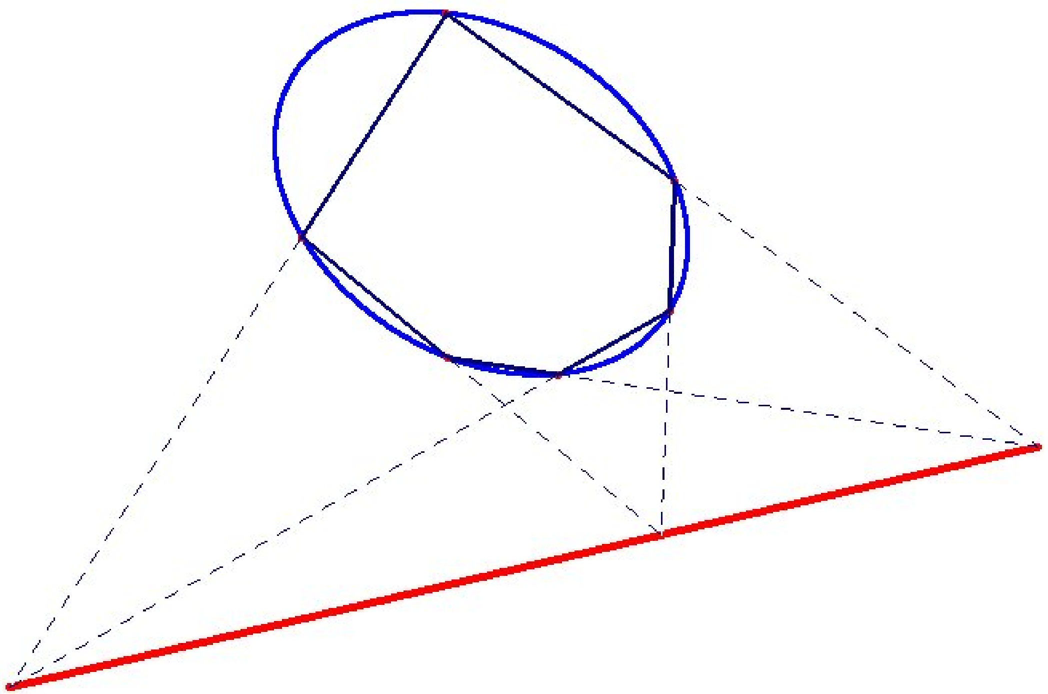
Blaise PASCAL

Hexagrama místico

Los lados de un hexágono
forman un hexagrama místico

$\Leftrightarrow$

los vértices se encuentran
sobre una cónica



PONCELET (1788-1867)

“Traité des propietés projectives des figures”, 1822

La GEOMETRÍA PROYECTIVA aparece como nueva rama de las matemáticas

OBJETIVO Estudiar las propiedades de las figuras que sean invariantes por **PROYECCIÓN** y **SECCIÓN**

- Propiedades **PROYECTIVAS**
  colineación de puntos, concurrencia de rectas, razón doble, involución, cuaterna armónica

- Propiedades **NO PROYECTIVAS**
  distancias, ángulos, ...

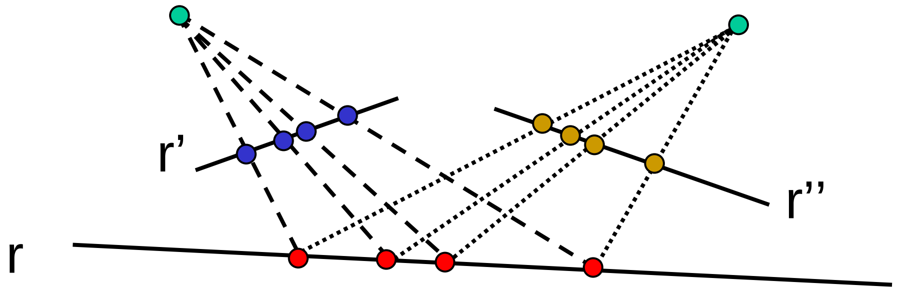
PONCELET

"Traité des propietés projectives des figures", 1822

La GEOMETRÍA PROYECTIVA aparece como nueva rama de las matemáticas

MÉTODOS

- Proyección CENTRAL
- Transformaciones proyectivas: **HOMOLOGÍAS**
  sucesión de proyecciones y secciones



PONCELET

“Traité des propietés projectives des figures”, 1822

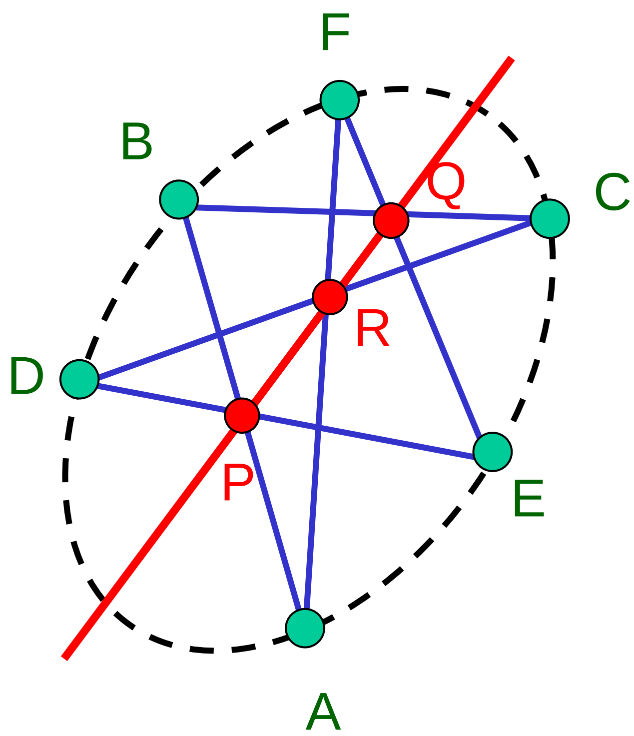
La GEOMETRÍA PROYECTIVA aparece como nueva rama de las matemáticas

IDEAS FUNDAMENTALES

- **HOMOLOGÍA**
- **PRINCIPIO DE CONTINUIDAD**
- **DUALIDAD** (relación polo – polar)

“Si en un teorema se intercambian las palabras punto – recta, el nuevo enunciado sigue siendo cierto y la demostración sigue los mismos pasos” GERGONNE, 1824

TEOREMA DE PASCAL



Si tomamos 6 puntos A, B, C, D, E, F de una cónica

las rectas AB y DE se cortan en el punto P

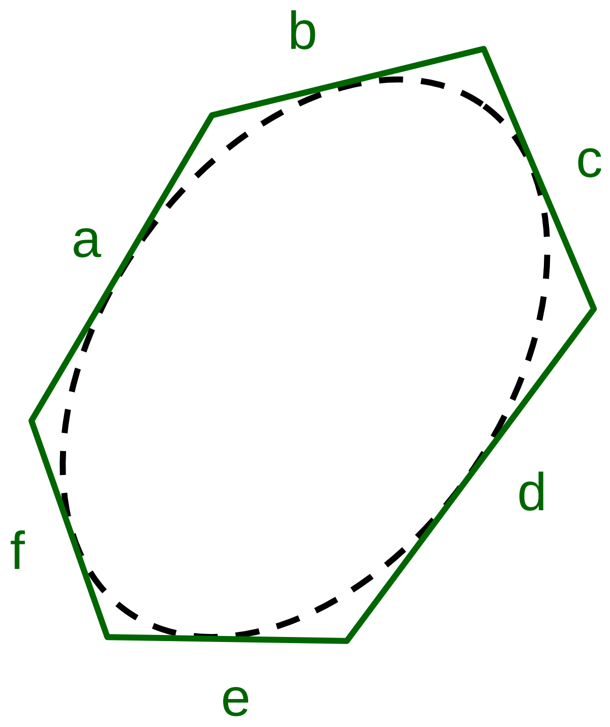
las rectas BC y EF se cortan en el punto Q

las rectas CD y FA se cortan en el punto R

entonces,

P, Q y R están alineados

TEOREMA DE BRIANCHON



Si tomamos 6 puntos A, B, C, D, E, F
de una cónica

Si tomamos 6 rectas a, b, c, d, e, f
tangentes a una cónica

las rectas AB y DE se cortan en el punto P

las rectas BC y EF se cortan en el punto Q

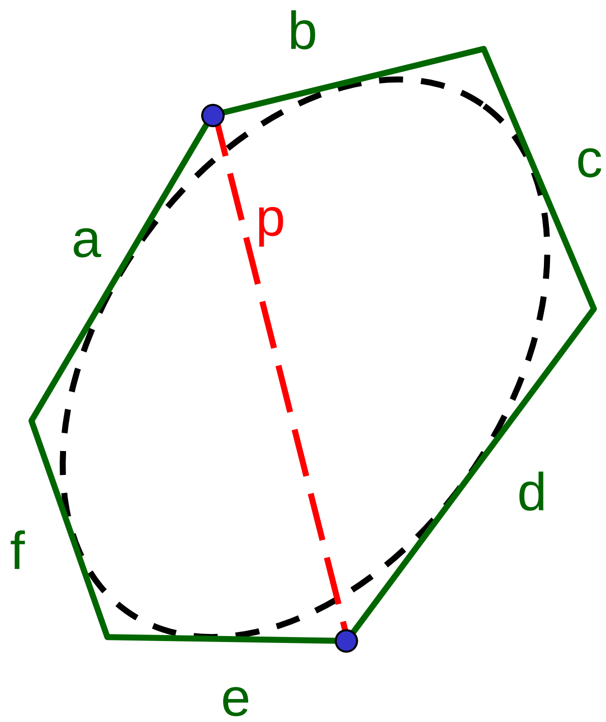
las rectas CD y FA se cortan en el punto R

entonces,

P, Q y R están alineados

DUALIDAD

TEOREMA DE BRIANCHON



Si tomamos 6 rectas a, b, c, d, e, f tangentes a una cónica

las rectas AB y DE se cortan en el punto P

los puntos ab y de determinan la recta p

las rectas BC y EF se cortan en el punto Q

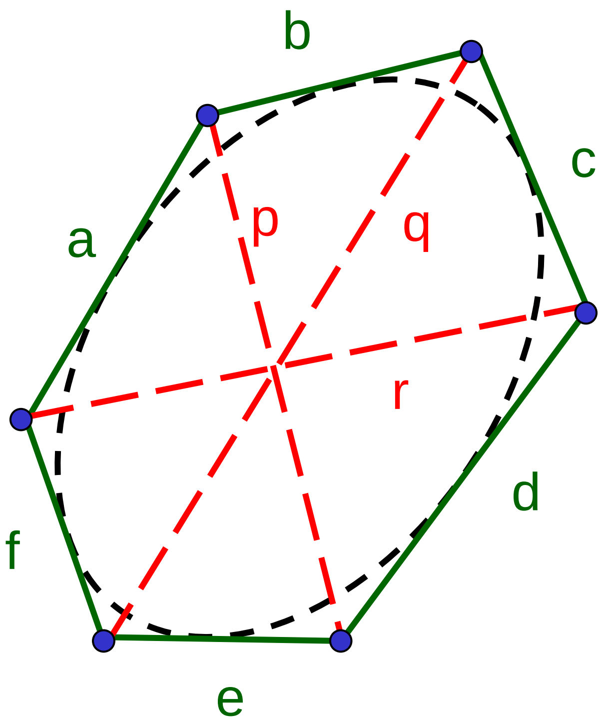
las rectas CD y FA se cortan en el punto R

entonces,

P, Q y R están alineados

DUALIDAD

TEOREMA DE BRIANCHON



Si tomamos 6 rectas a, b, c, d, e, f tangentes a una cónica

los puntos ab y de determinan la recta p

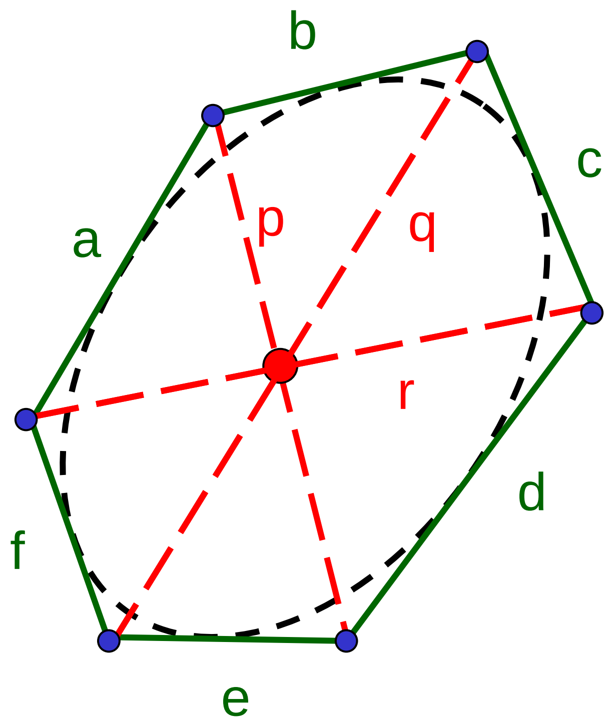
los puntos bc y ef determinan la recta q

los puntos cd y fa determinan la recta r

entonces,

P, Q y R están alineados

TEOREMA DE BRIANCHON



Si tomamos 6 rectas a, b, c, d, e, f tangentes a una cónica

los puntos ab y de determinan la recta p

los puntos bc y ef determinan la recta q

los puntos cd y fa determinan la recta r

entonces,

p, q y r son concurrentes

La dualidad y el bocadillo de jamón

Siempre se puede cortar partiendo por la mitad tanto el pan como el jamón

Existe siempre un corte que parte por la mitad el pan, el jamón y el queso

La dualidad y el bocadillo de jamón

Teorema

Dados d conjuntos medibles y acotados en R^d, existe un hiperplano que biseca simultáneamente todos los conjuntos

Teorema de Borsuk-Ulam

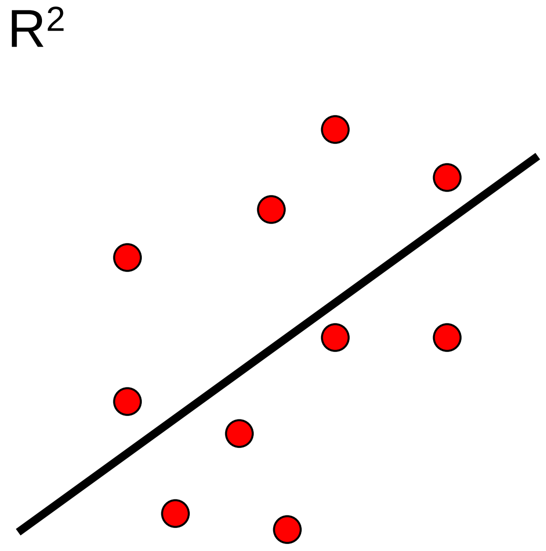
Si $f: S^d \rightarrow R^d$ es continua, entonces existe x en S^d tal que $f(x)= f(–x)$

Versión discreta

Teorema

Dados P_1, P_2,..., P_d conjuntos disjuntos de puntos de R^d, existe un hiperplano que biseca simultáneamente todos los conjuntos

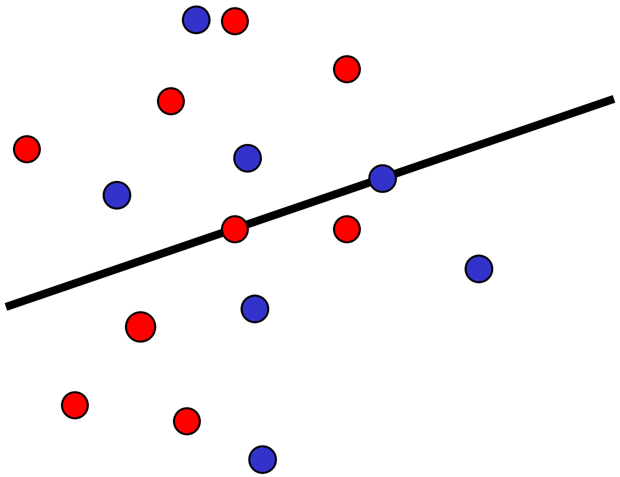
La dualidad y el bocadillo de jamón



Una recta h **biseca** un conjunto S de n puntos si en cada uno de los semiplanos abiertos definidos por la recta no hay más de n/2 puntos

La dualidad y el bocadillo de jamón

R^2 dos colores

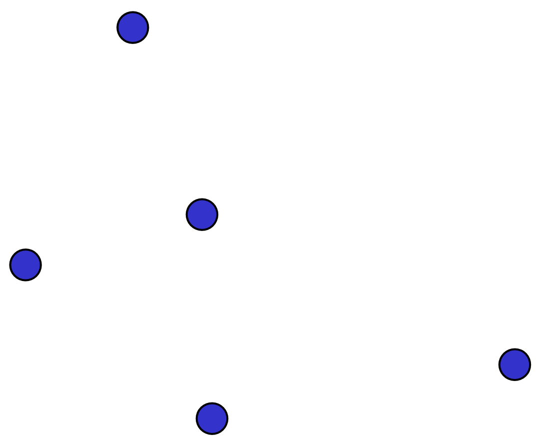


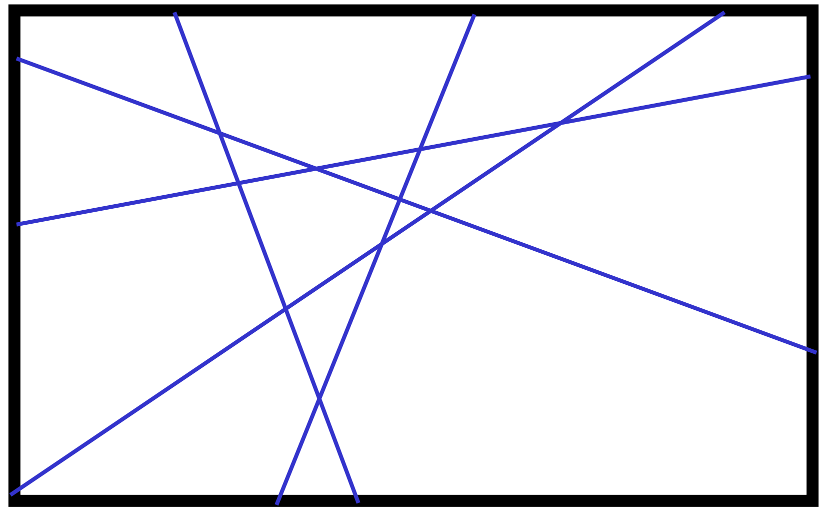
Dados A (puntos azules) y B (puntos rojos), conjuntos de puntos en R^2, hallar una recta **bisectora** de ambos conjuntos

La dualidad y el bocadillo de jamón

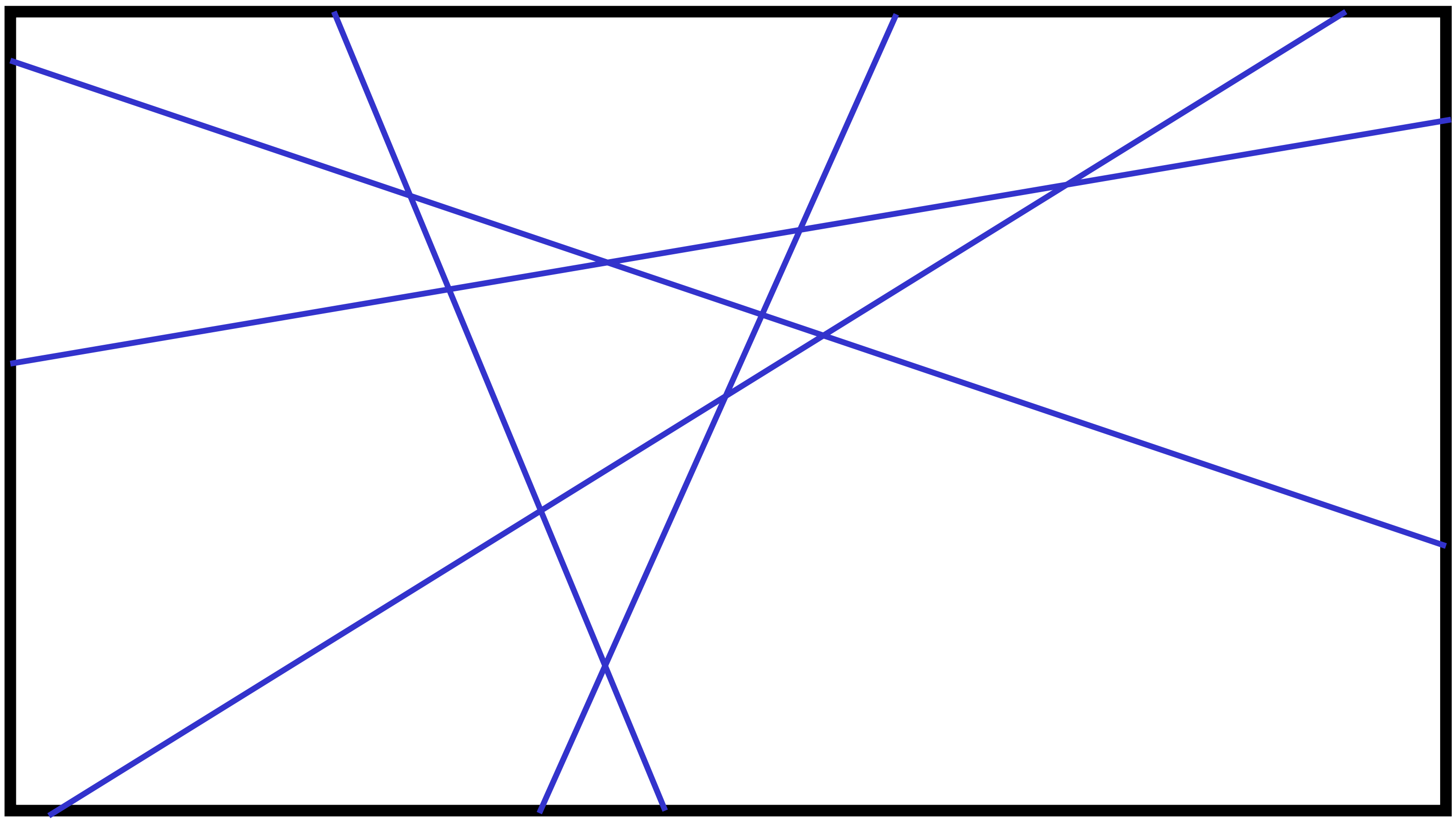
Apliquemos dualidad

Puntos de la nube ↔ Rectas de un arreglo



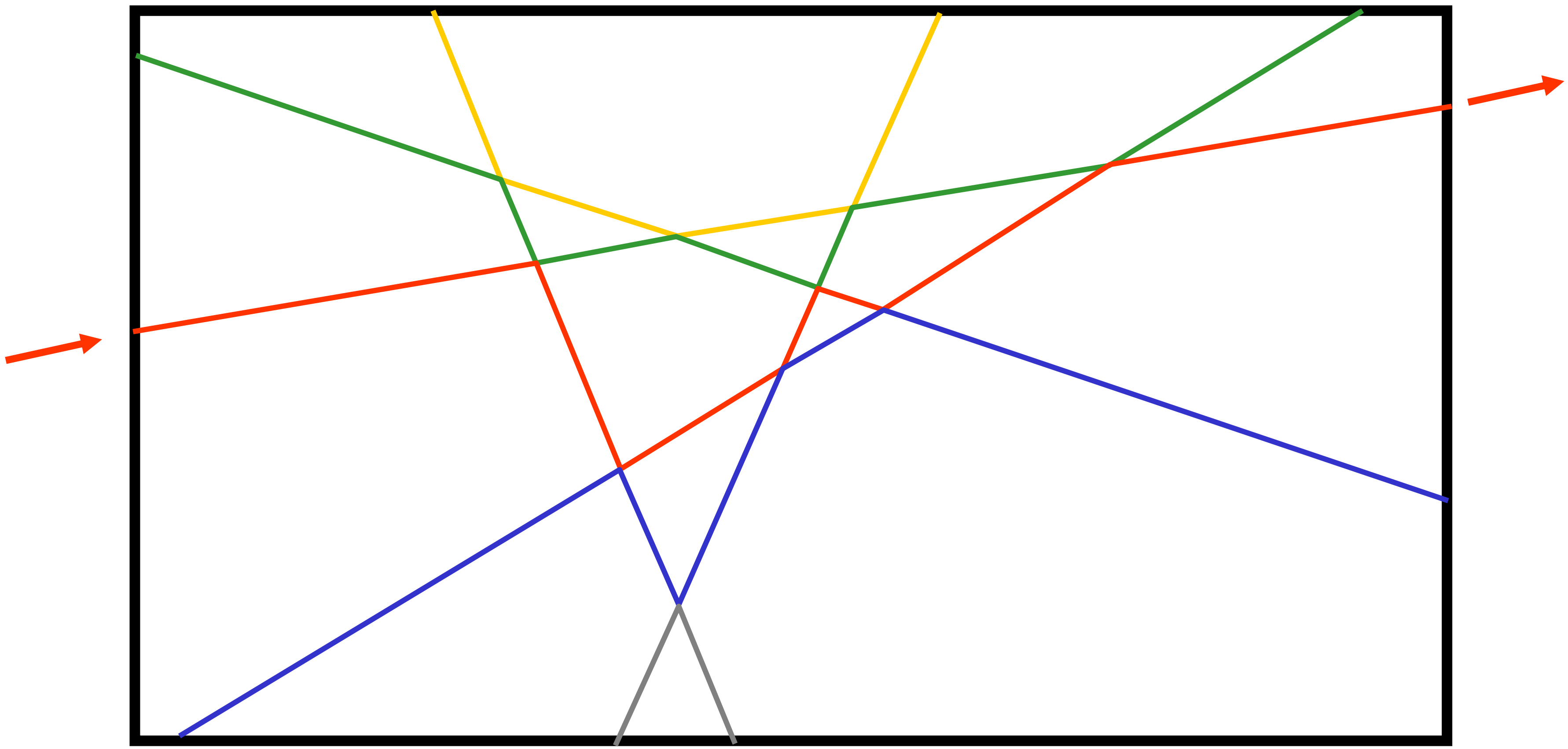


La dualidad y el bocadillo de jamón



La dualidad y el bocadillo de jamón

Niveles de un arreglo

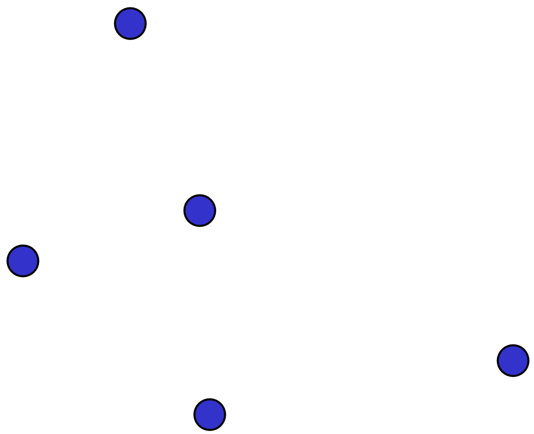


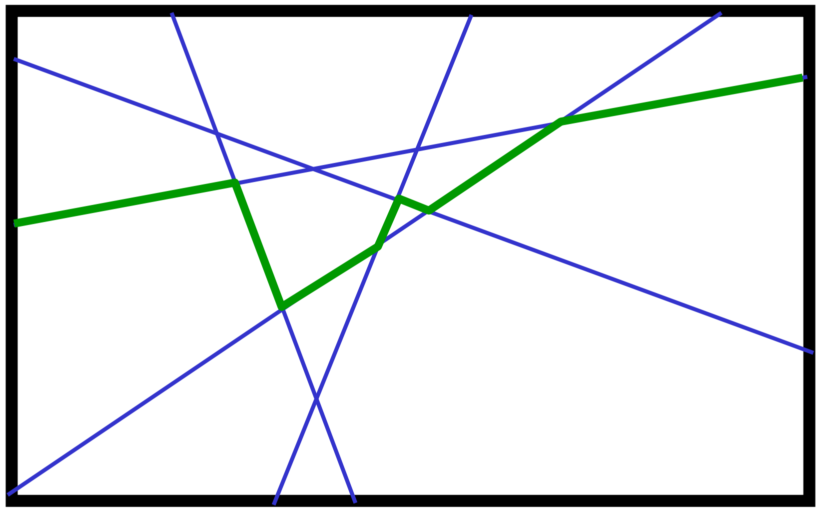
- Los niveles son cadenas poligonales monótonas
- El nivel medio empieza y termina en la misma recta

La dualidad y el bocadillo de jamón

PLANO PRIMAL | ***PLANO DUAL***

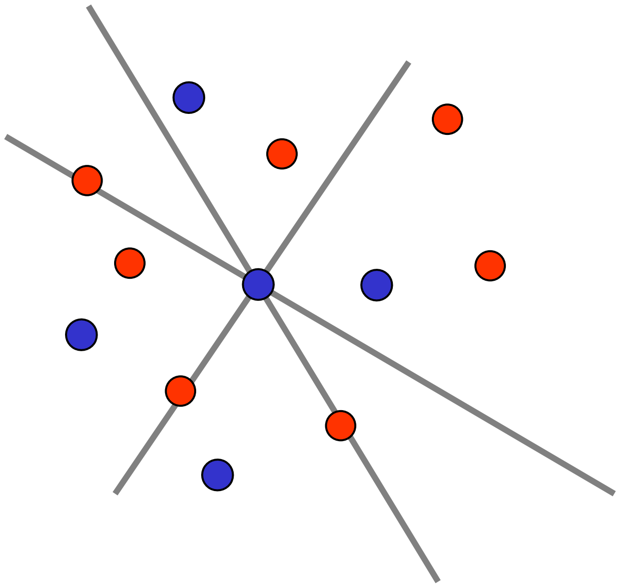
Puntos de la nube ↔ Rectas de un arreglo

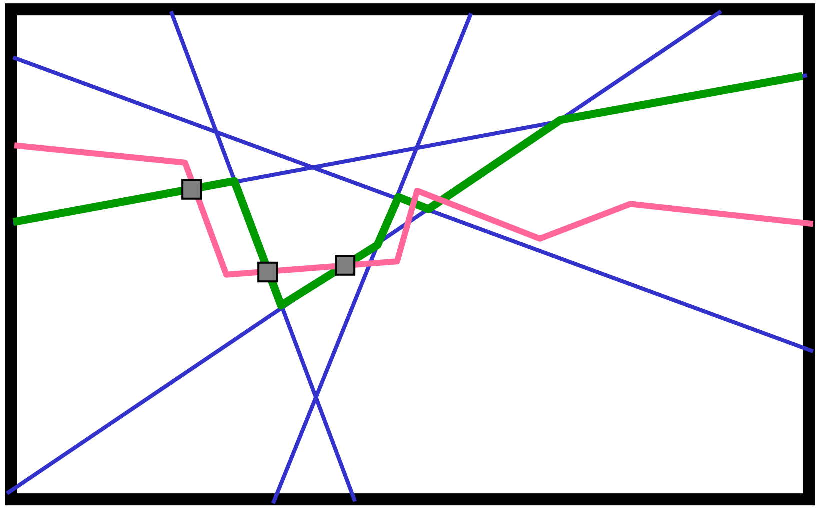




P* recta bisectora de la nube ↔ P punto del nivel medio del arreglo

La dualidad y el bocadillo de jamón

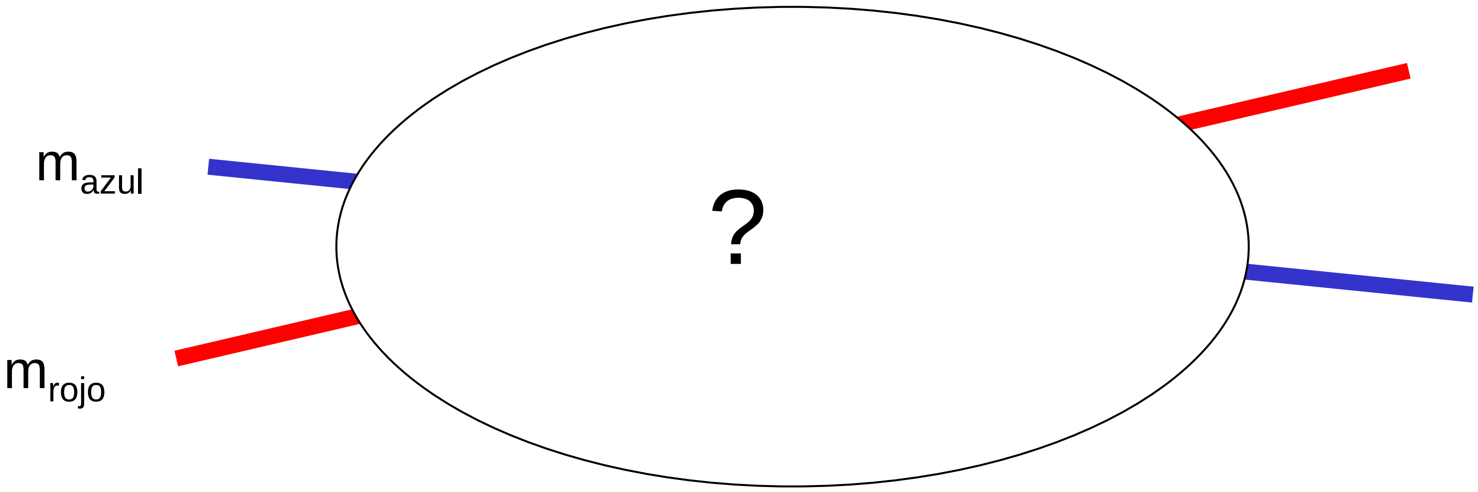




Las rectas bisectoras de los conjuntos A (puntos rojos) y B (puntos azules), son las rectas duales de los puntos de intersección de los niveles medios M_{rojo} y M_{azul} en los arreglos duales

La dualidad y el bocadillo de jamón

Pero, ¿existen los puntos de intersección?



Los niveles medios se cortan en un número impar de puntos

Existe un número impar de rectas que bisecan simultáneamente los puntos azules y los puntos rojos.

REFERENCIAS

K. Andersen. "*The geometry of an art : the history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge*", Springer, 2007.

J. Field. "*The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance*", Oxford, 1997.

C. Boyer. "*Historia de las matemáticas*", Alianza, 1986.

J. Gray. "*Worlds out of nothing: A course in the History of Geometry in the 19th Century*", Springer, 2007

C. Lo, J. Matoušek, W. Steiger. *"Algorithms for Ham-Sandwich Cuts".* *Discrete and Computational Geometry* **11**, 433–452, 1994

GEOMETRÍA PROYECTIVA

El camino empieza en la PERSPECTIVA

GRACIAS

POR SU ATENCIÓN