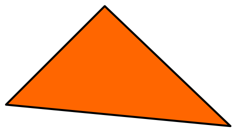
Universidad de Otoño
Colegio de Doctores y Licenciados

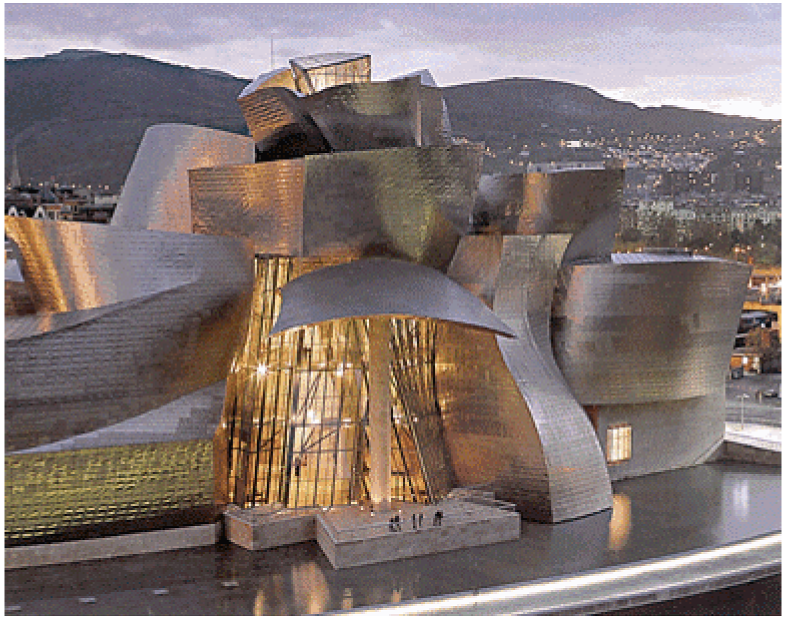
De  a triangulaciones: una nueva mirada geométrica

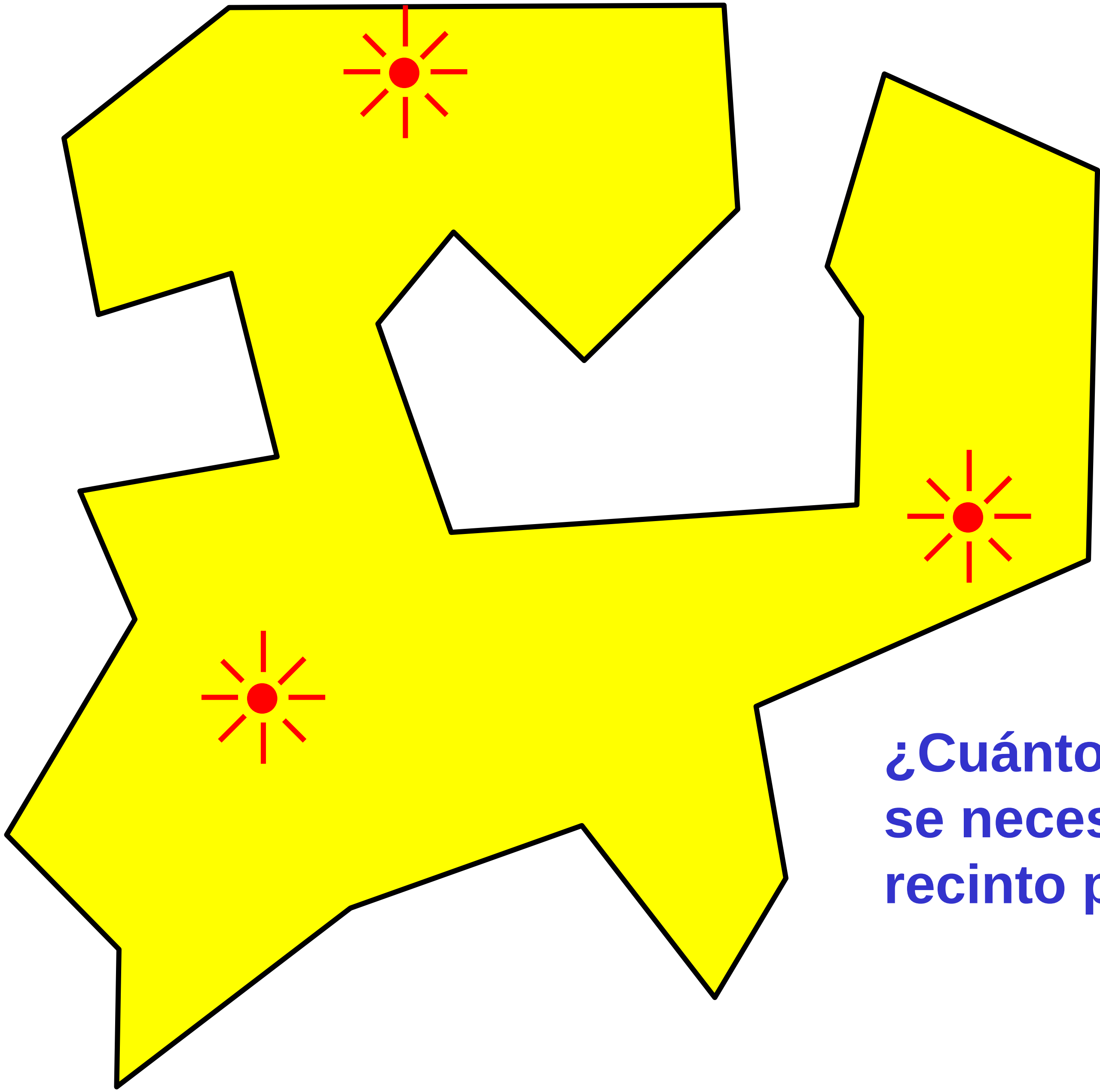
Gregorio Hernández Peñalver

UPM

28 de septiembre 2006

¿Cuántos vigilantes se necesitan?





¿Cuántos vigilantes se necesitan en un recinto poligonal?


Un brazo robótico, ¿puede desplegarse
y recogerse sin problemas?

Sumario

- **Triángulo**

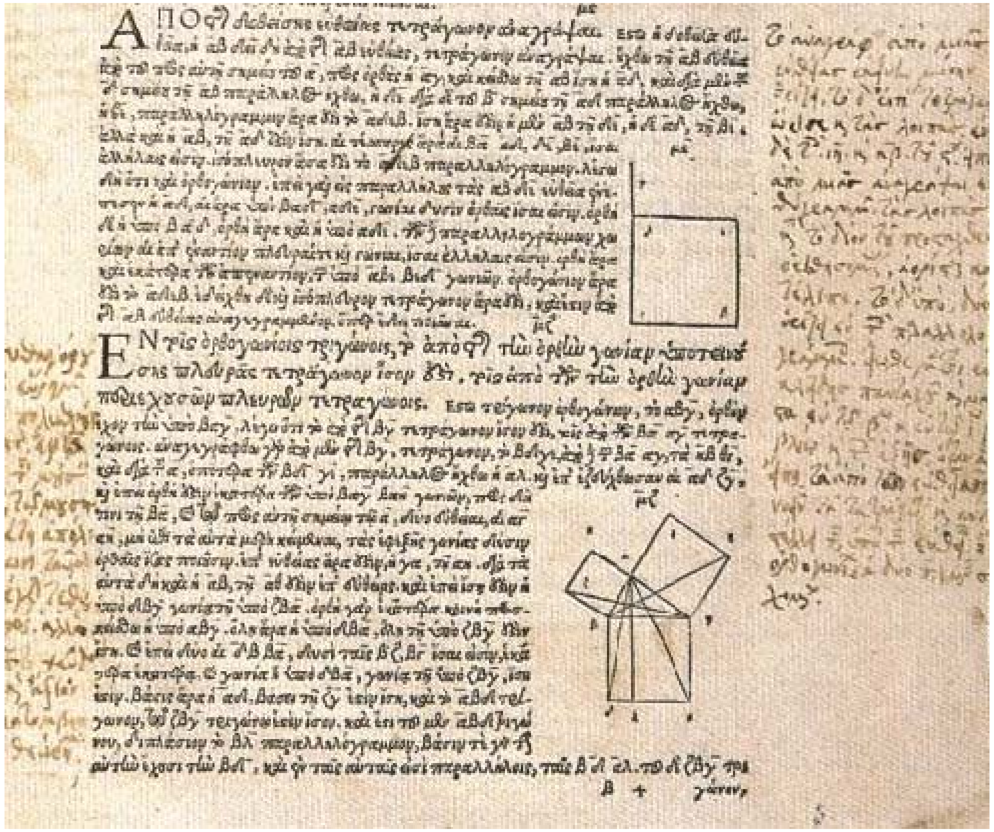
- **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

- **Problemas de Galerías de Arte**

- **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

Triángulo

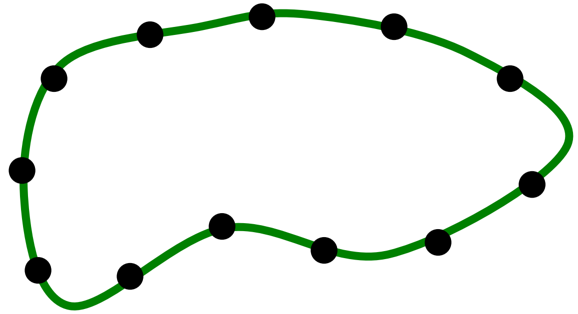
- Objeto elemental, muy conocido.

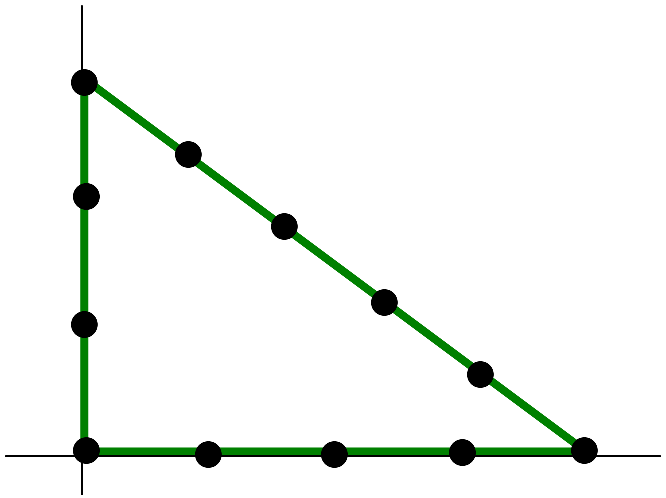


Elementos de Euclides

Triángulo

- Objeto elemental, muy conocido.
- Egipto, hace 4000 años.
- Deslinde de terrenos, cuerda con nudos.



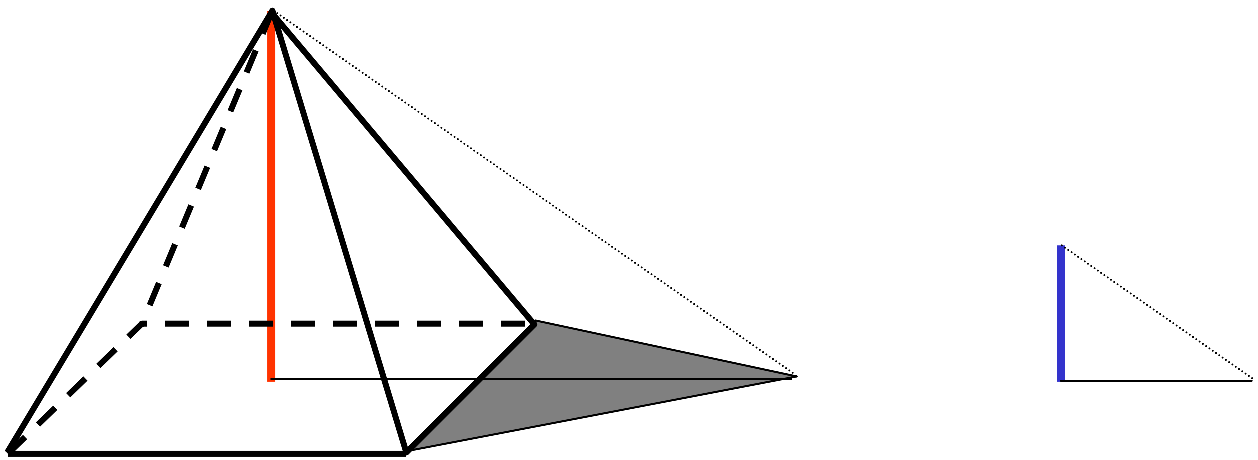


Triángulo

- Objeto elemental, muy conocido.
- Egipto, hace 4000 años.
- Deslinde de terrenos, cuerda con nudos.
- Medida de la altura de una pirámide.

Triángulo

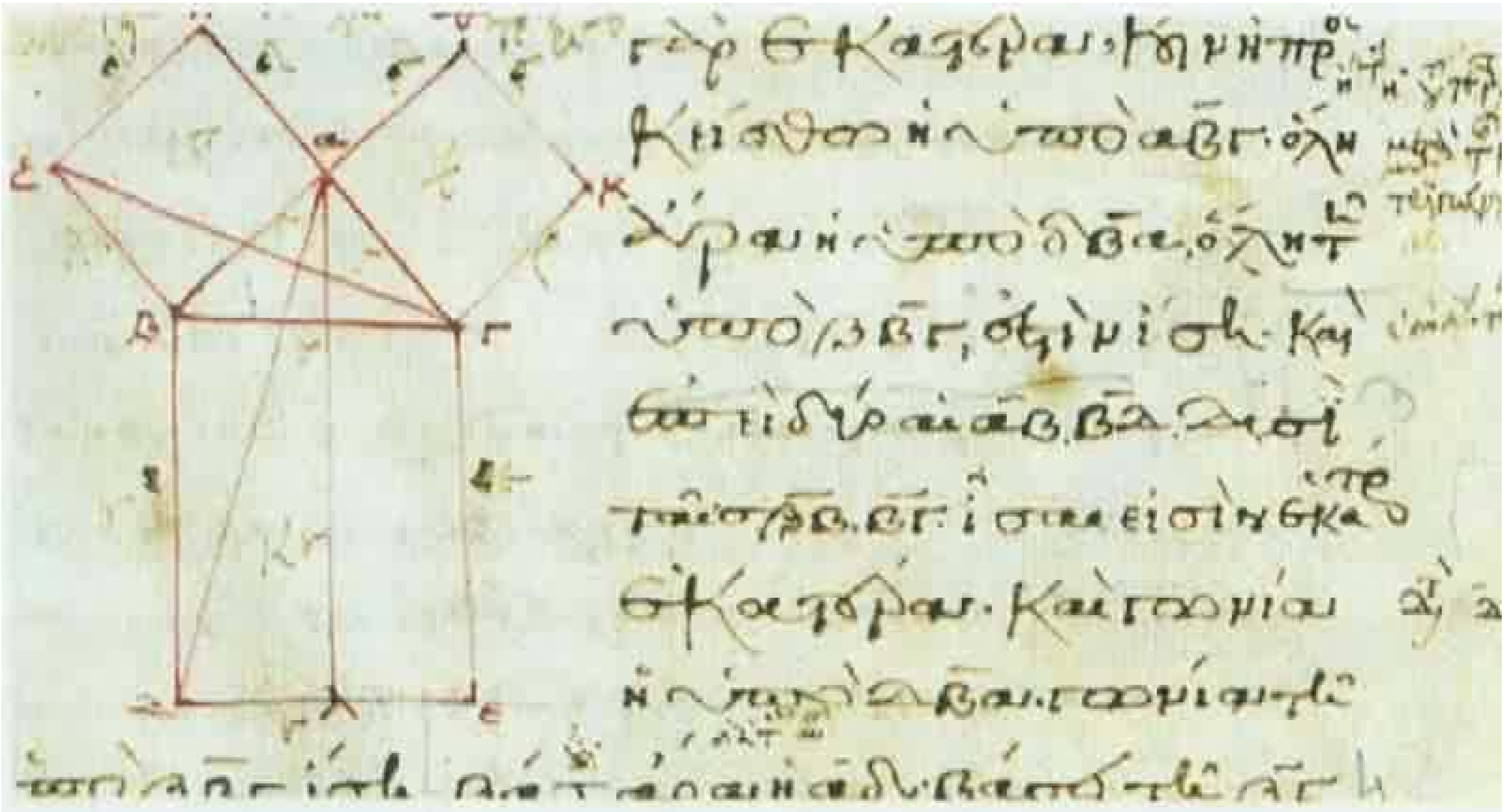
- Objeto elemental, muy conocido.
- Egipto, hace 4000 años.
- Deslinde de terrenos, cuerda con nudos.
- Medida de la altura de una pirámide.



Triángulo

- Teoremas y más teoremas

Pitágoras

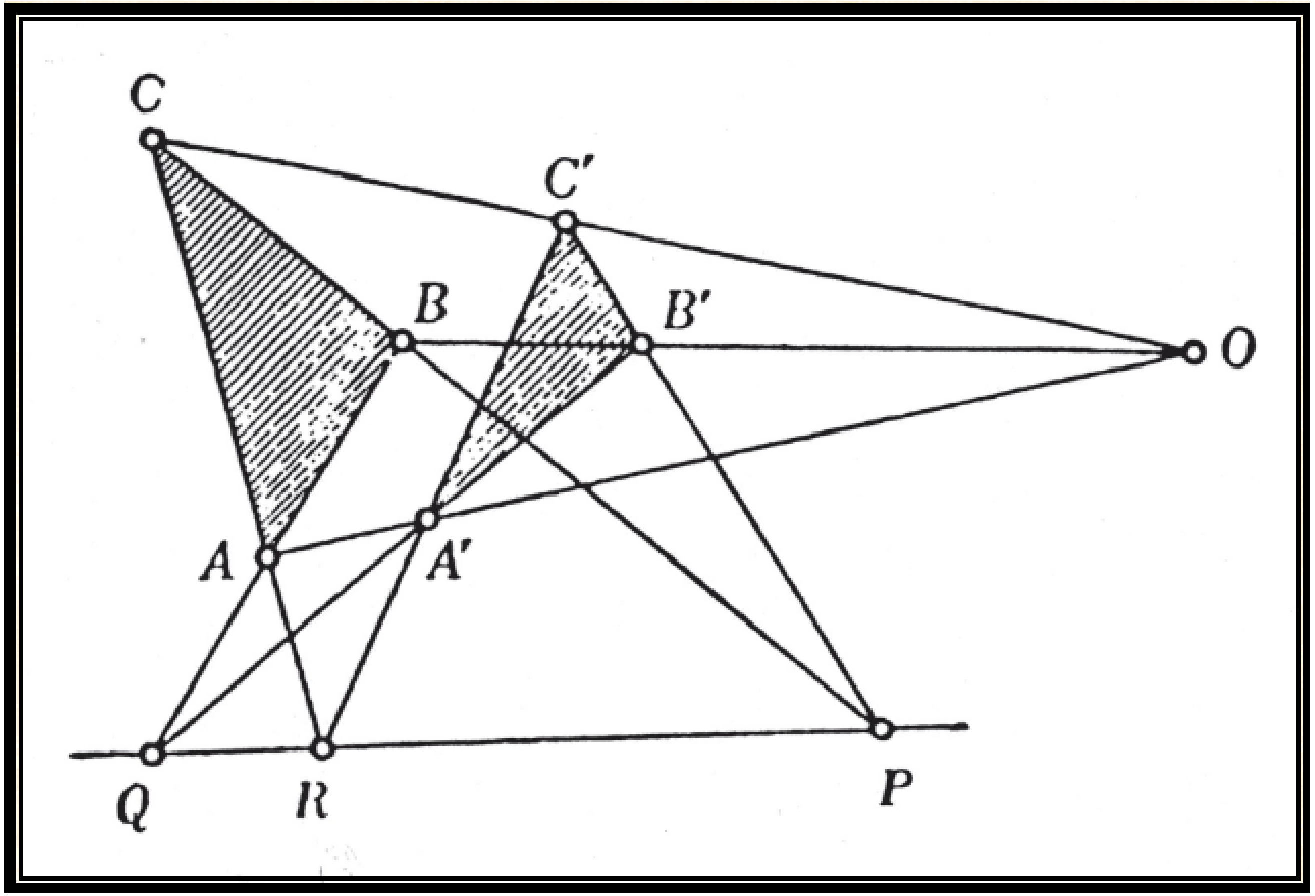


Triángulo

- Teoremas y más teoremas

Desargues, 1637

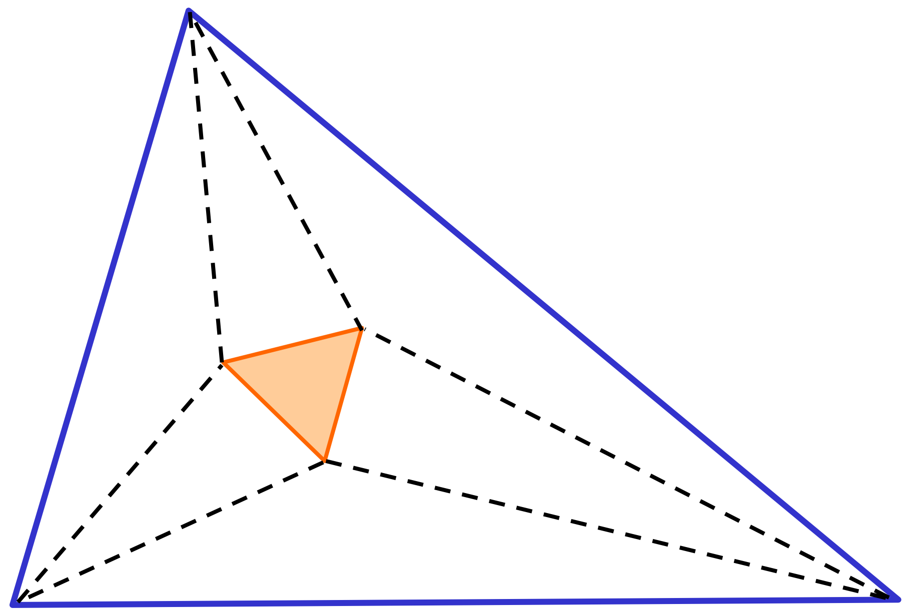
Concurrencia $\Leftrightarrow$ colinealidad



Triángulo

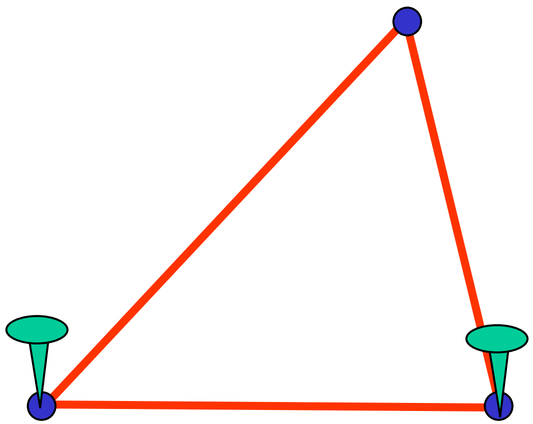
- Teoremas y más teoremas

Pitágoras
Desargues
Morley, 1904



Triángulo

- Rígido



Si las aristas son barras rígidas, los vértices son articulaciones y fijamos dos, el tercer vértice no puede moverse

Triángulo

- Rígido

Sumario

- **Triángulo**

- **Triangulaciones**
  - **Medida del meridiano. (unos centenares)**
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

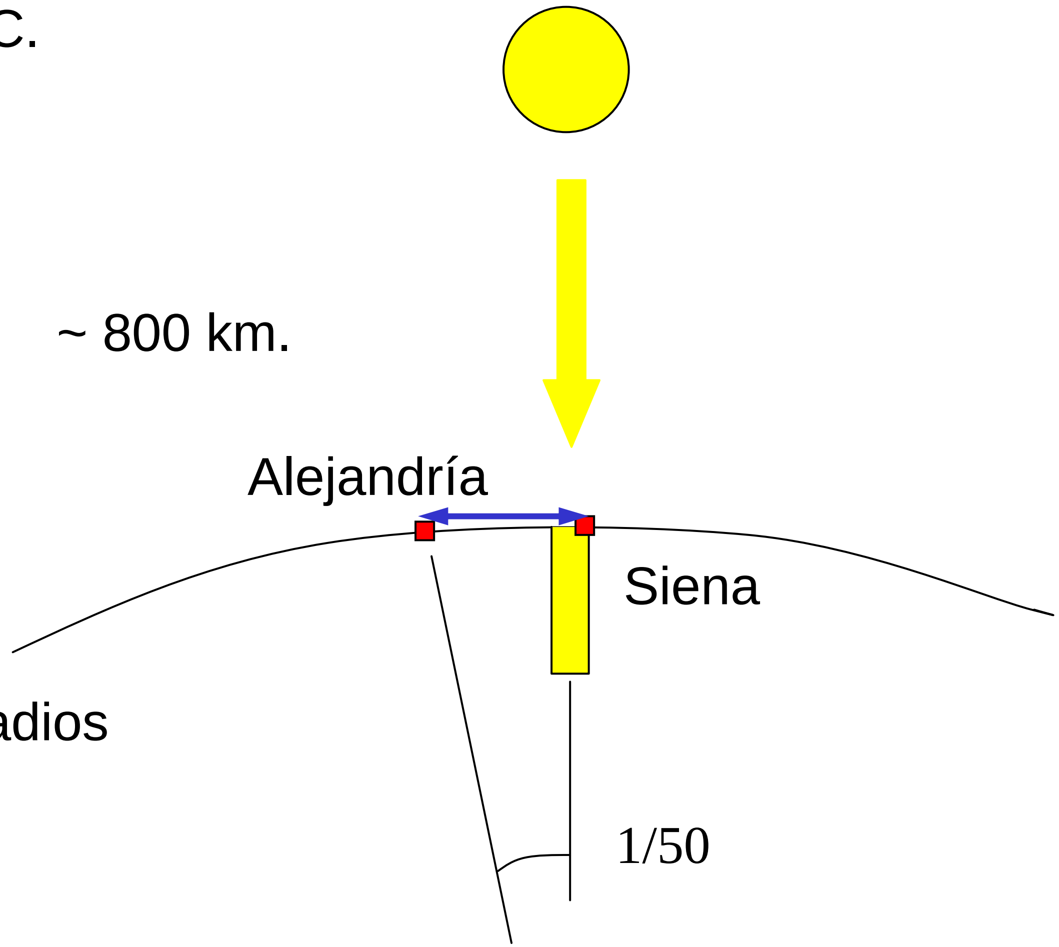
- **Problemas de Galerías de Arte**

- **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

Triangulaciones

Medida de la Tierra

Eratóstenes, siglo III a.C.



5000 estadios ~ 800 km.

1º = 700 estadios

Meridiano = 252000 estadios
= 39690 km.

Triangulaciones

Medida de la Tierra

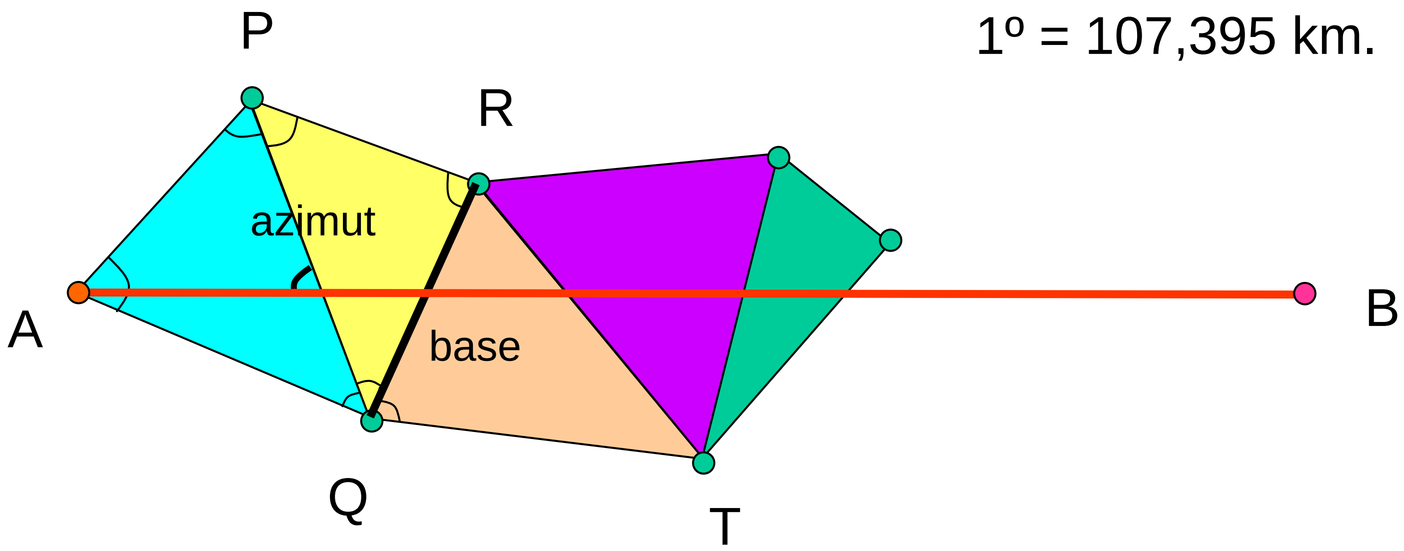
Medida de 1º de meridiano

Eratóstenes, siglo III a.C.

Posidonio, 1º = 500 estadios ⇒ meridiano = 29000 kilómetros

Snellius, 1617, introduce la idea de medir longitudes a partir de ángulos

1º = 107,395 km.



Triangulaciones

Medida de la Tierra

Medida de 1º de meridiano

Eratóstenes, siglo III a.C.

Posidonio, 1º = 500 estadios ⇒ meridiano = 29000 kilómetros

Snellius, 1617, introduce la idea de medir longitudes a partir de ángulos

Picard, 1669, París- Amiens, 1º = 111,038 km.
diferencia de latitud entre estaciones por observaciones estelares

Cassini, 1684-1718, Dunquerke-París-Colliure,
1º = 110,844 km. zona norte
1º = 111,110 km. zona sur

La Tierra está achatada, ¿por los polos?, ¿en el Ecuador?

Triangulaciones

Medida de la Tierra Medida de 1º de meridiano

Expediciones a la búsqueda del grado

- Perú, 1735-1744, La Condamine, Jorge Juan, Ulloa

  miden un arco de 3º 7’ 3’’ 1’ = 945 toesas =1838,97 m

- Laponia, 1736, Maupertius, Clairaut, Celsius

Revolución Francesa

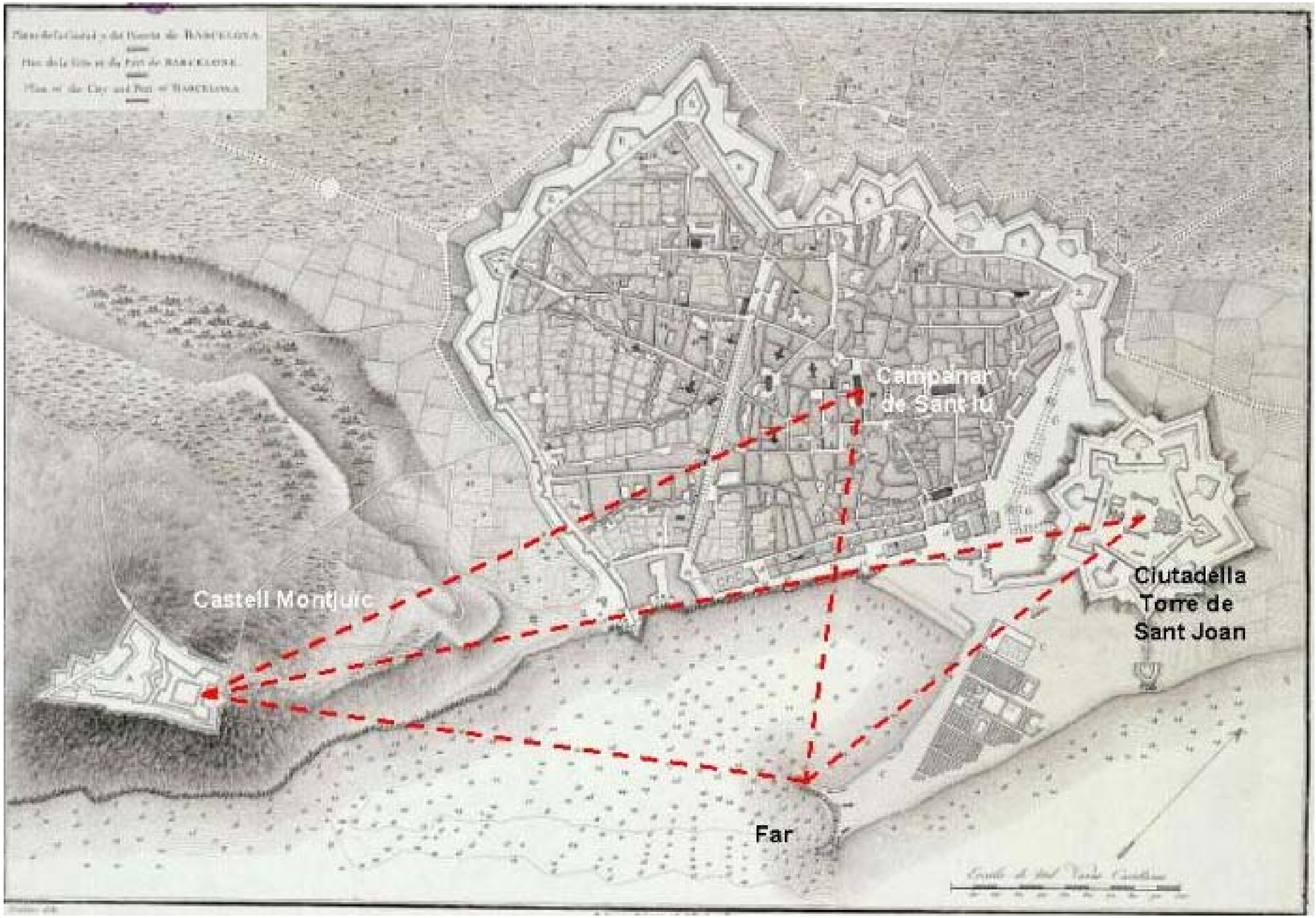
- 1791 Asamblea Nacional
  Sistema Universal de medidas
  Unidad de longitud = diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano

Triangulaciones

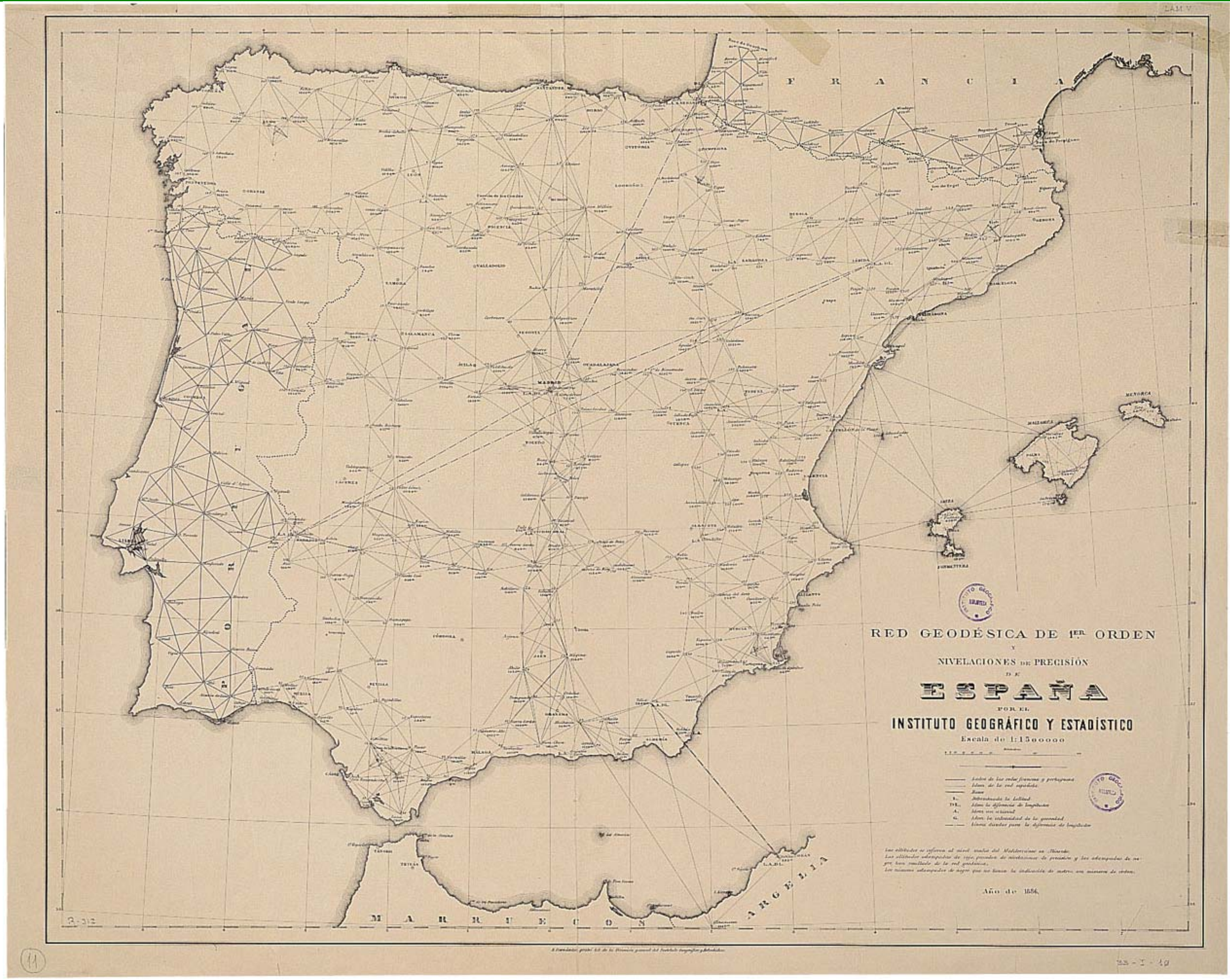
- 1792 Delambre y Mechain comienzan la medición del meridiano de París entre Dunkerque y Barcelona.
- 1798 última medición latitud del Panteón
- 1799 Proclamación del metro como unidad legal de medida

El metro es la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.
Equivale 443,296 líneas de la toesa del Perú

Triangulaciones



Triangulaciones



Sumario

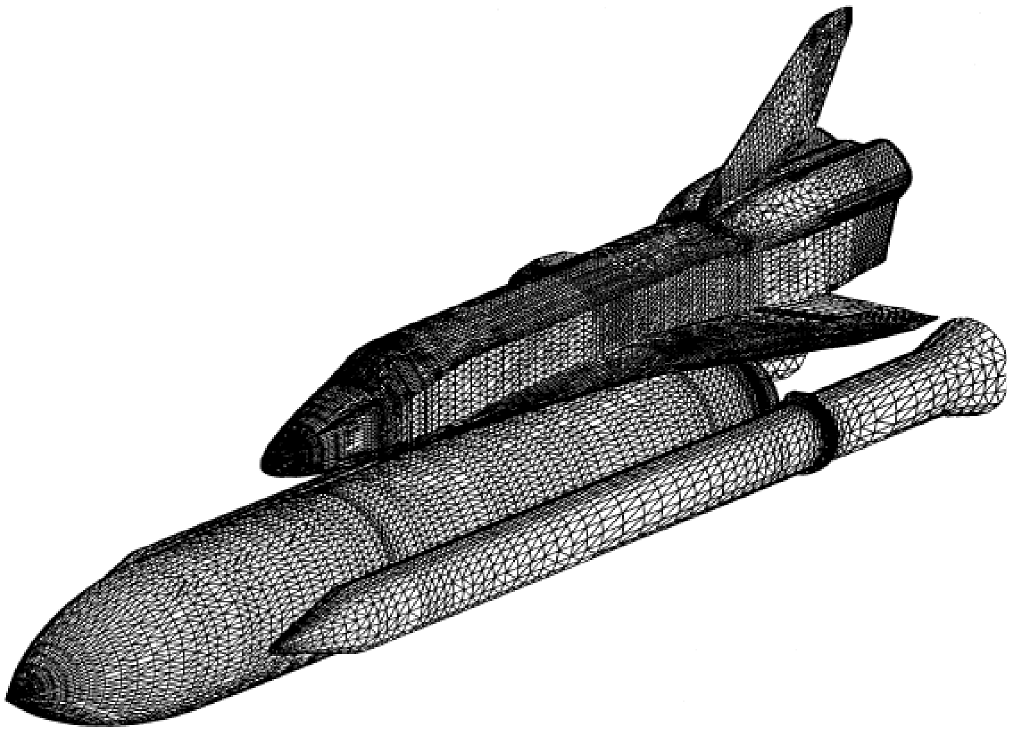
- Triángulo

- **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - **Triangulaciones y Geometría Computacional.**
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

- Problemas de Galerías de Arte

- Pseudotriangulaciones
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

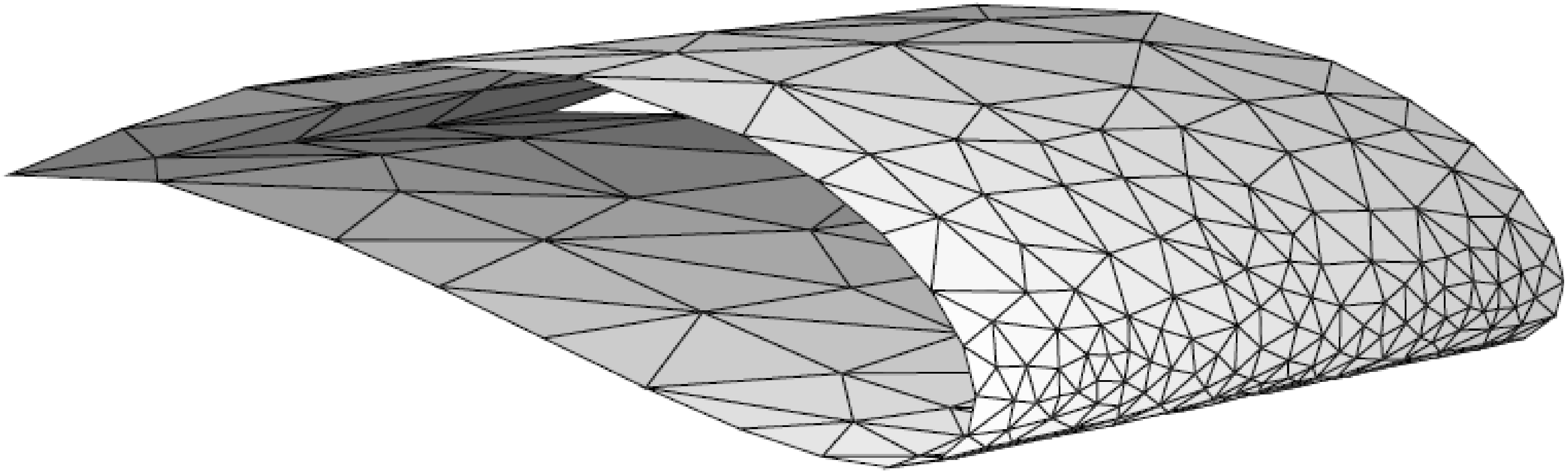
Triangulaciones



Ahora tenemos miles o millones de objetos geométricos, nos introducimos en la Geometría Computacional

Triangulaciones

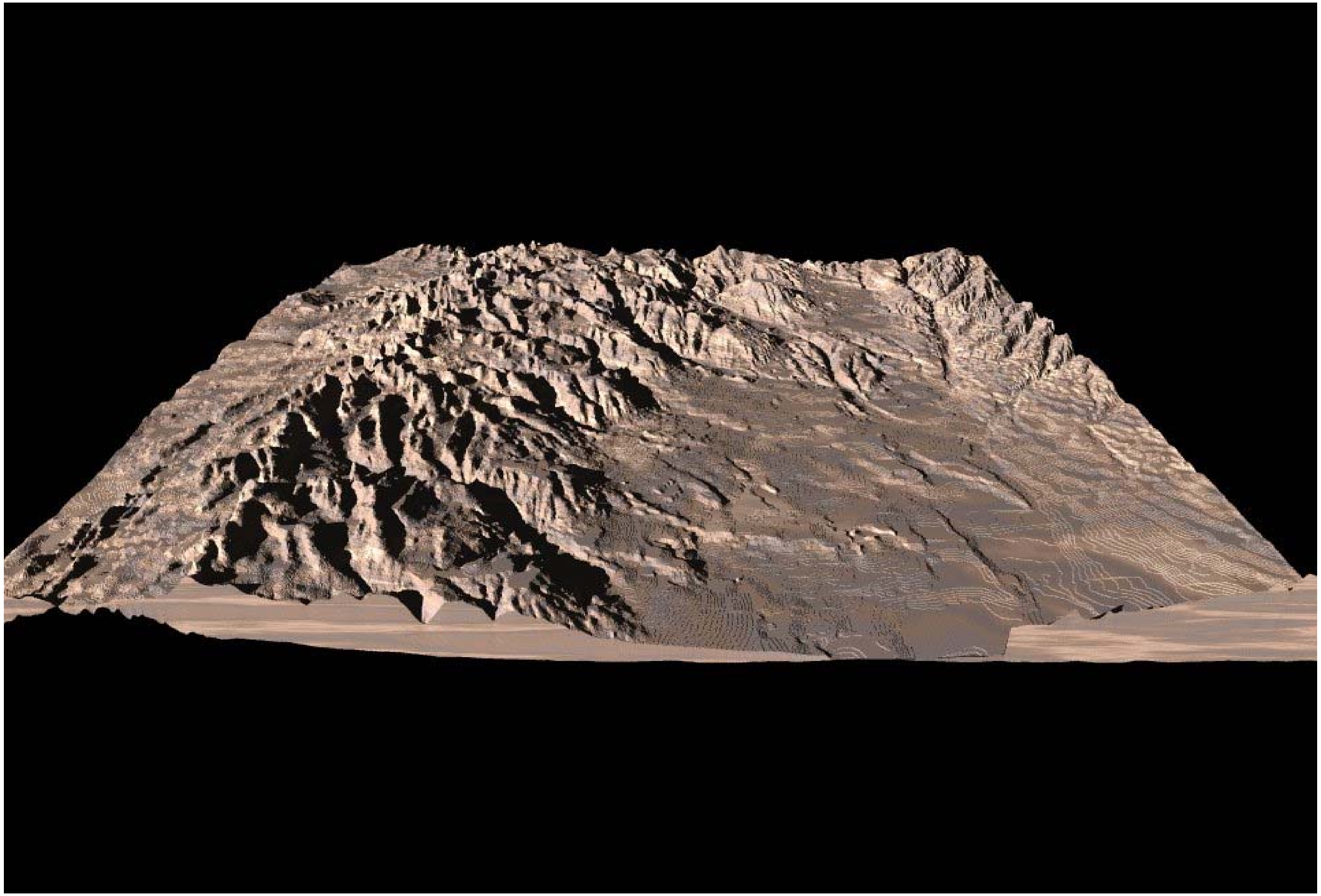
Diseño asistido por ordenador CAD



Ahora tenemos miles o millones de objetos geométricos,
nos introducimos en la Geometría Computacional

Triangulaciones

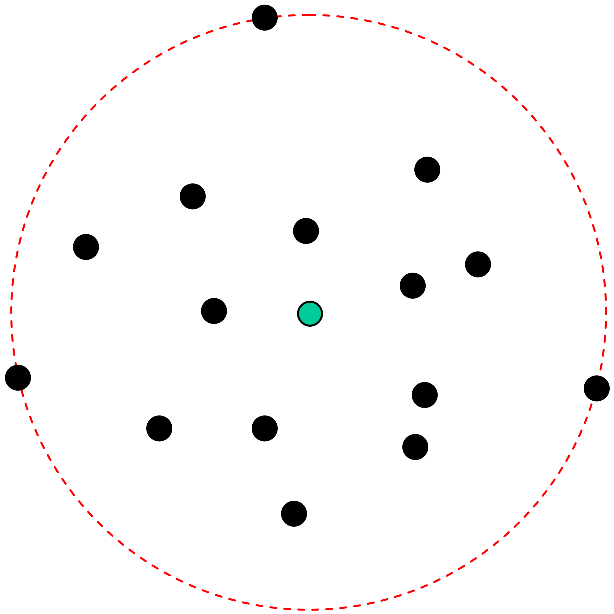
Representación digital de terrenos geográficos GIS



Geometría Computacional

La Geometría Computacional estudia el diseño y análisis de algoritmos eficientes para resolver problemas geométricos.

Ubicación óptima de servicios de urgencia

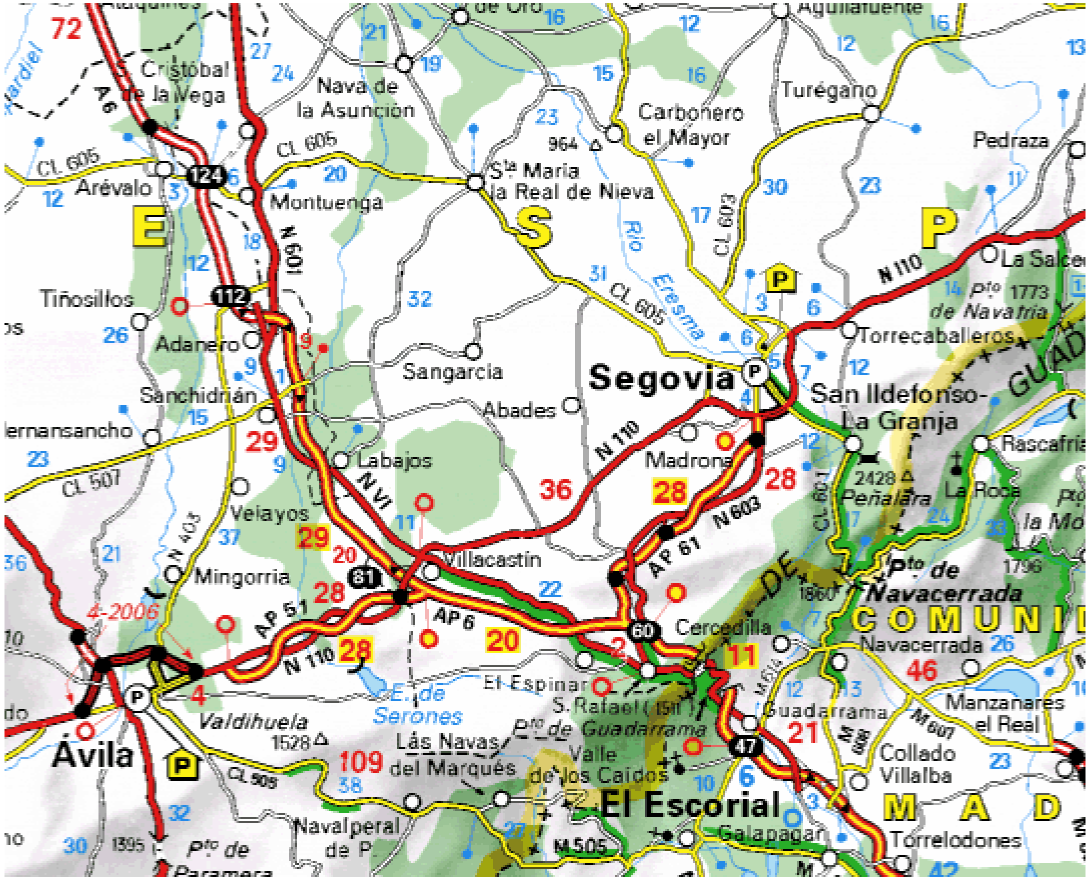


Círculo recubridor mínimo

Triangulaciones

¿Cómo modelizar una zona de la superficie terrestre?   GIS

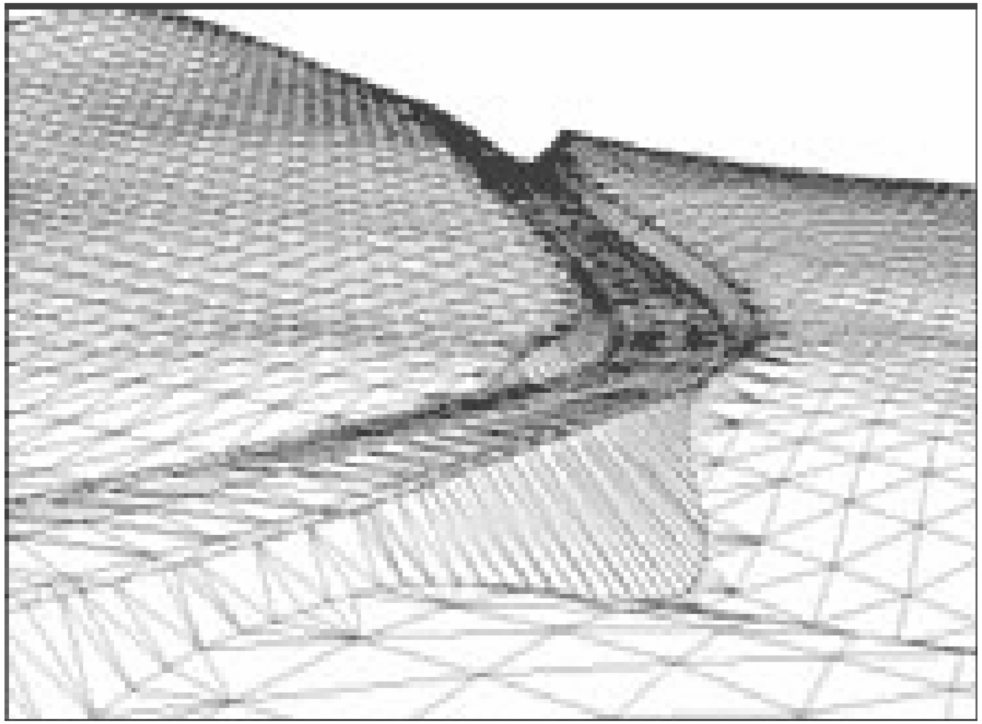
- Con un mapa



Triangulaciones

¿Cómo modelizar una zona de la superficie terrestre?   GIS

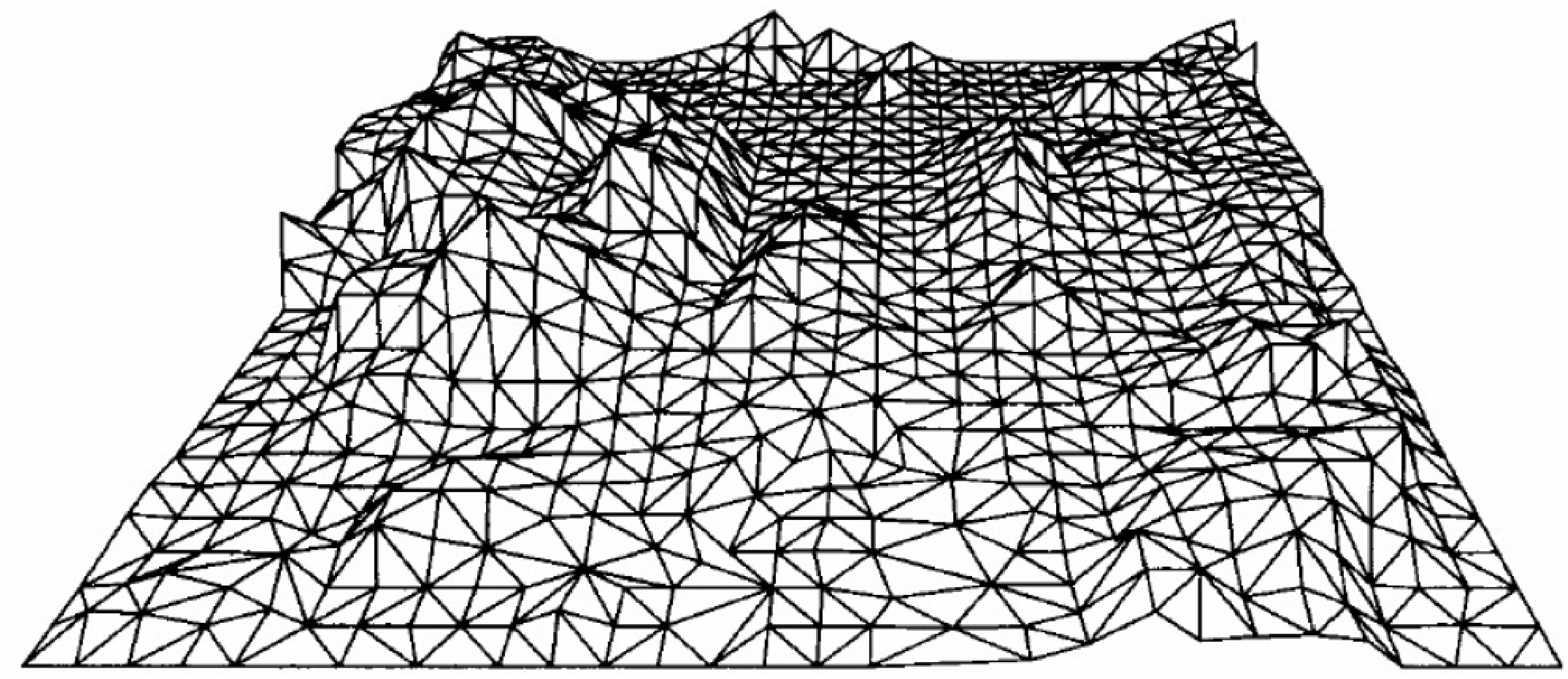
• Modelos digitales del terreno



Triangulaciones

¿Cómo modelizar una zona de la superficie terrestre? GIS

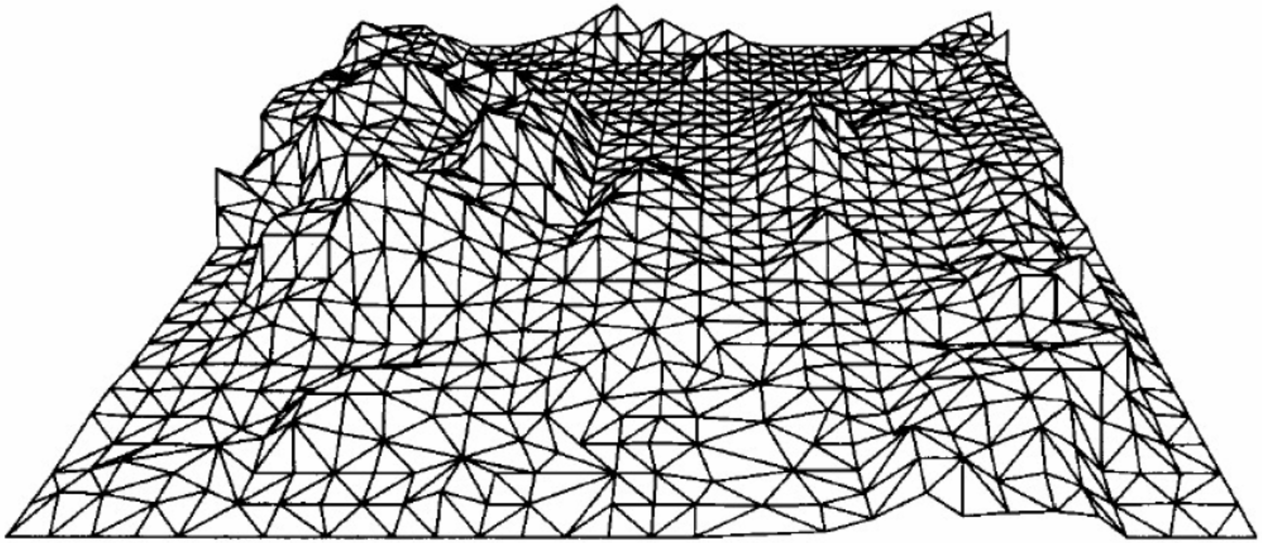
• Con un poliedro terreno (terrain)



Triangulaciones

¿Cómo modelizar una zona de la superficie terrestre? GIS

• Con un poliedro terreno (terrain)



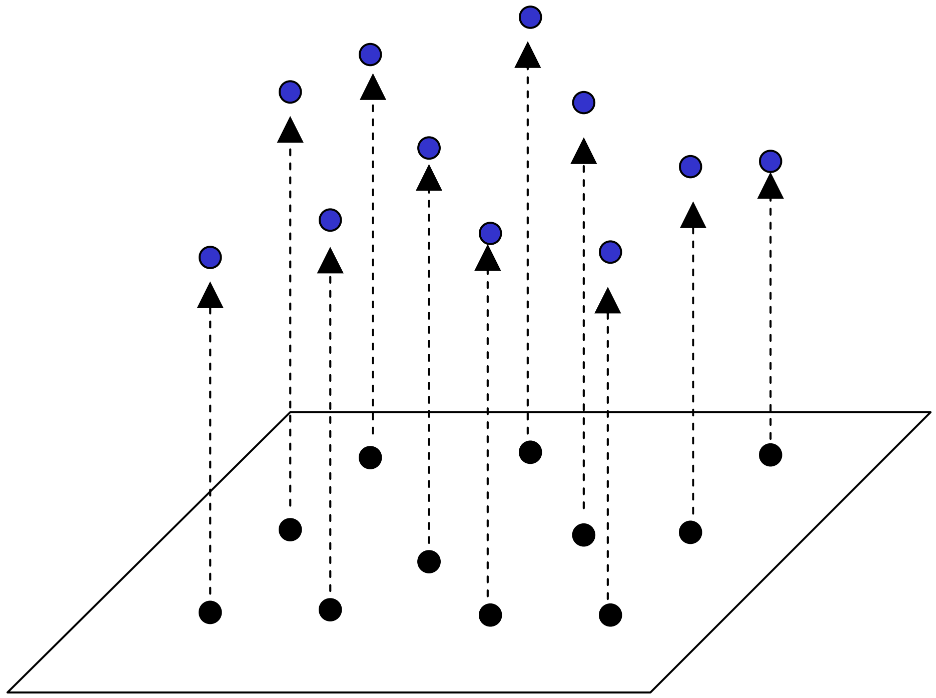
Gráfica de la función $h : A \subset R^2 \to R$

$p \mapsto alt(p)$

Triangulaciones

- Con un poliedro terreno (terrain)

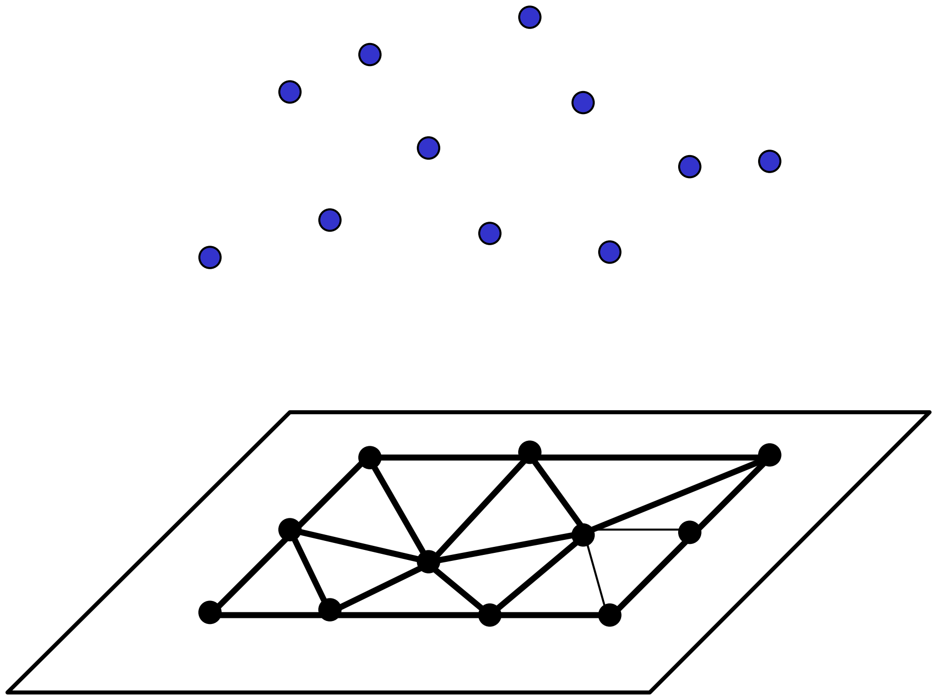
Sólo se mide alt(p) para unos cuantos puntos



Triangulaciones

- Con un poliedro terreno (terrain)

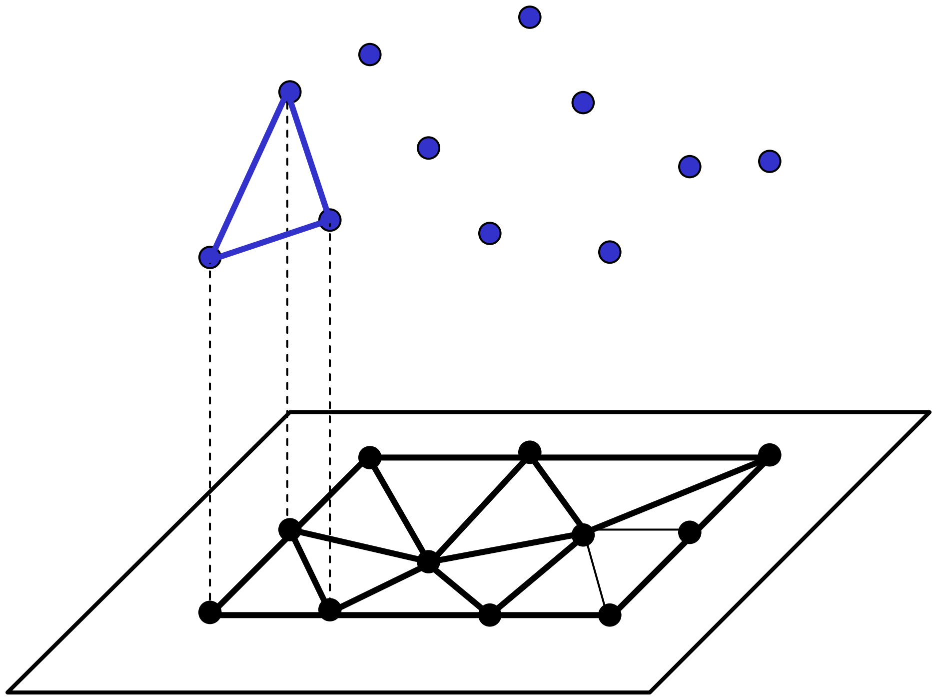
Se triangula en el plano



Triangulaciones

• Con un poliedro terreno (terrain)

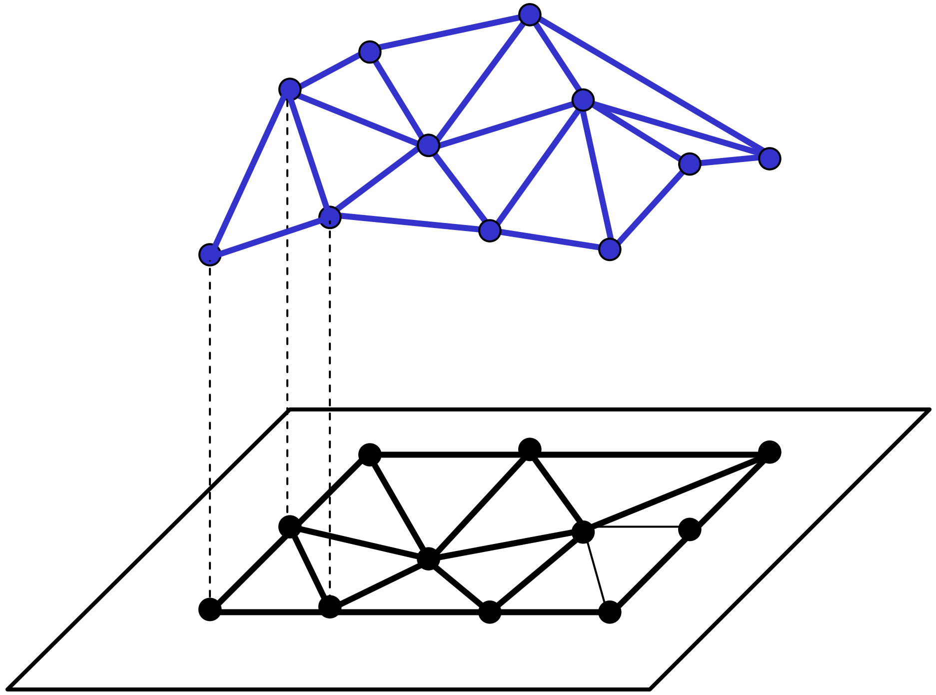
Y se levanta cada triángulo al espacio



Triangulaciones

- Con un poliedro terreno (terrain)

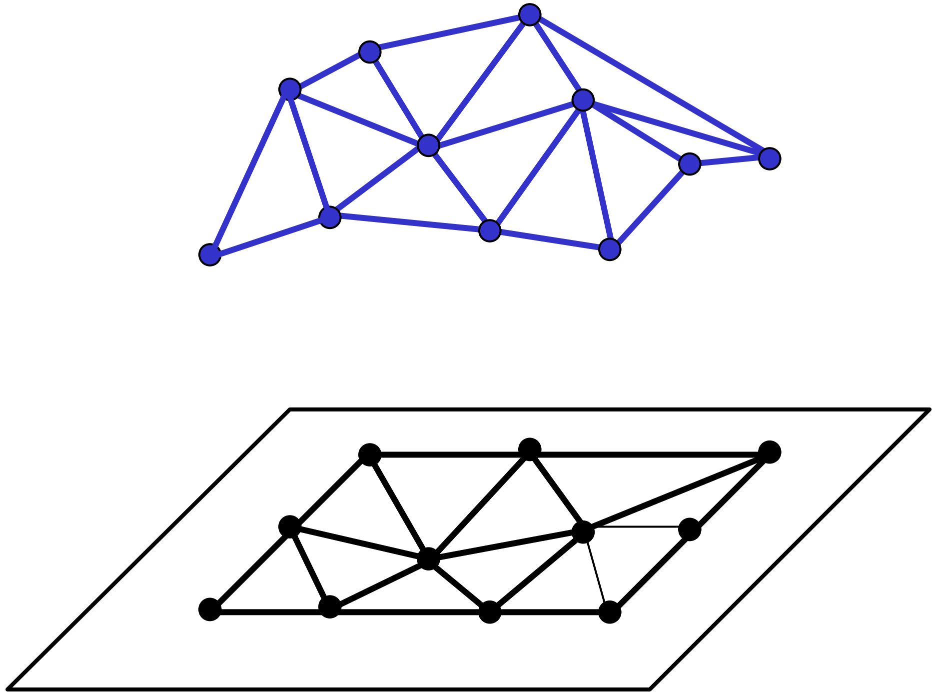
  Y se levanta cada triángulo al espacio



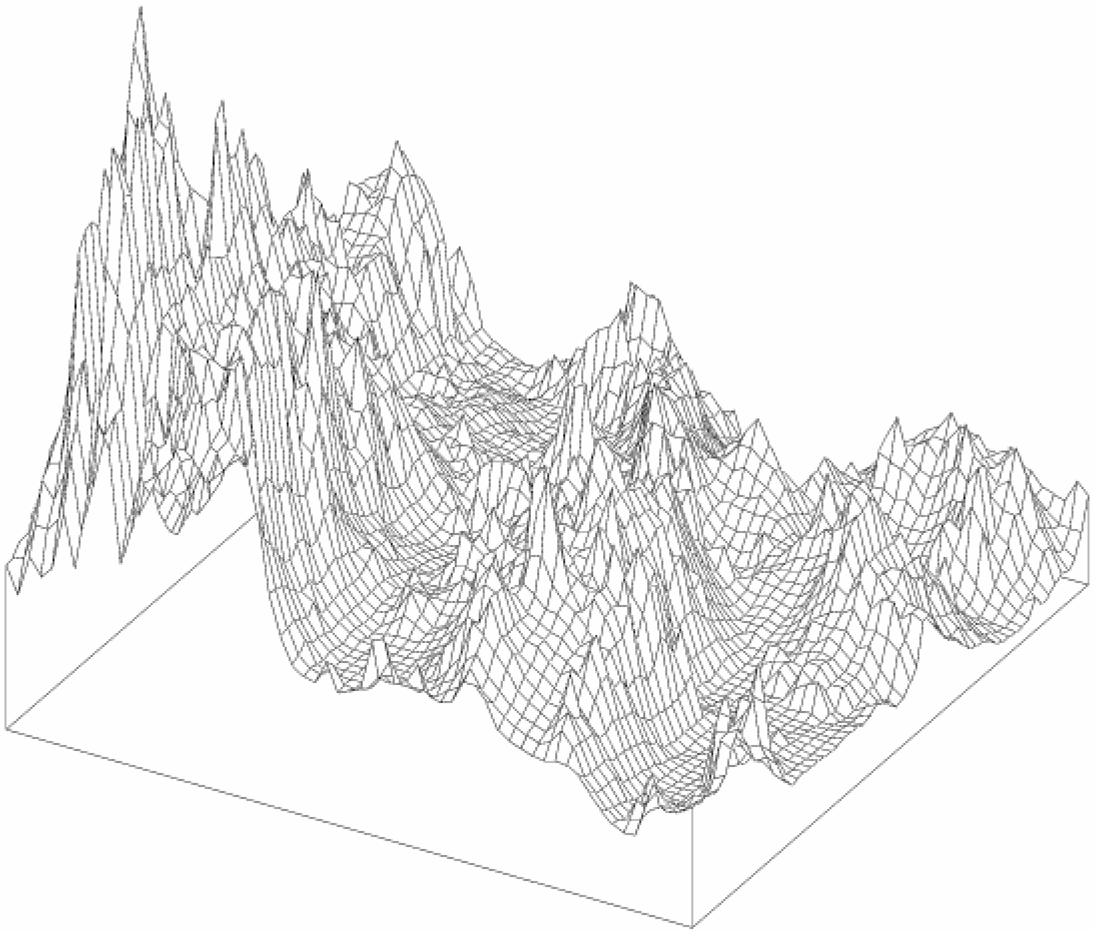
Triangulaciones

- Con un poliedro terreno (terrain)

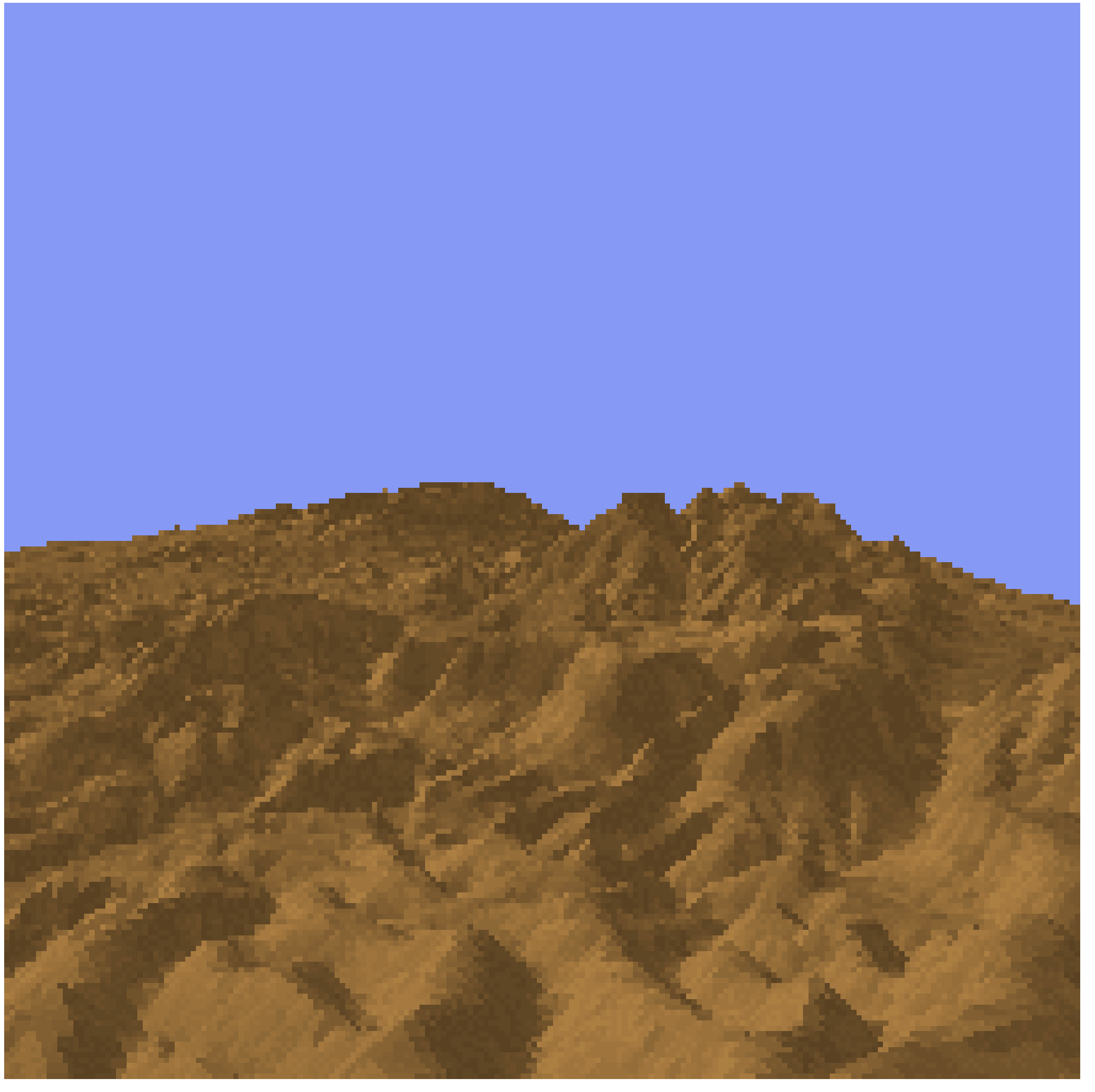
  Y se levanta cada triángulo al espacio



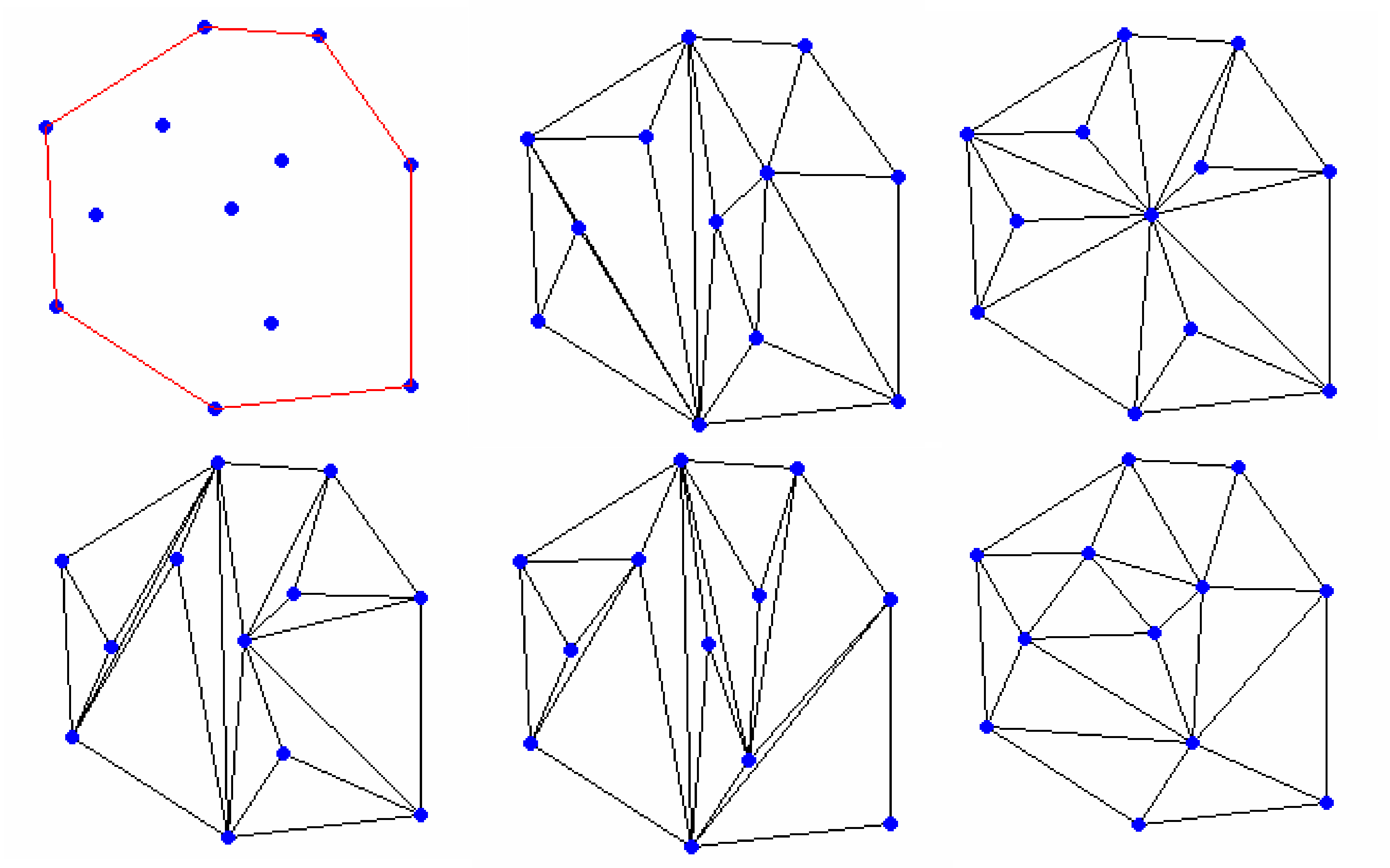
Triangulaciones



Triangulaciones



Triangulaciones



Triangulaciones

Definición

Dado un conjunto S de puntos en el plano, una triangulación de S es una descomposición de la envolvente convexa de S en triángulos cuyos vértices son los de S y tal que cada par de triángulos de la descomposición tiene sus interiores disjuntos.

Dado un conjunto S de puntos en el plano, una triangulación de S es un grafo geométrico maximal sin cortes sobre S.

Sumario

- **Triángulo**

- **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - **Combinatoria. Números de Catalan.**
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

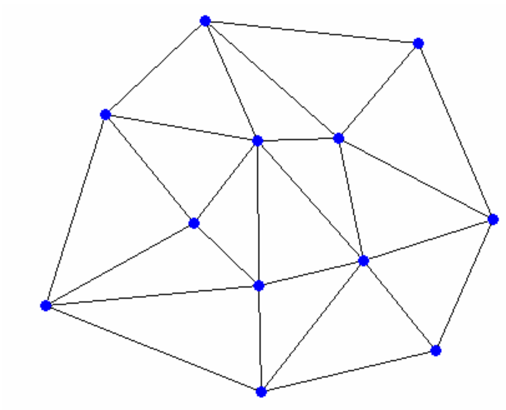
- **Problemas de Galerías de Arte**

- **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

Triangulaciones COMBINATORIA

FÓRMULA DE EULER $n - q + r = 2$

n vértices
q aristas
r regiones
k vértices en el
cierre convexo

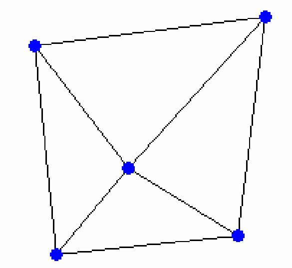


$n = 12$
$q = 26$
$r = 16$
$k = 7$

$12 - 26 + 16 = 2$

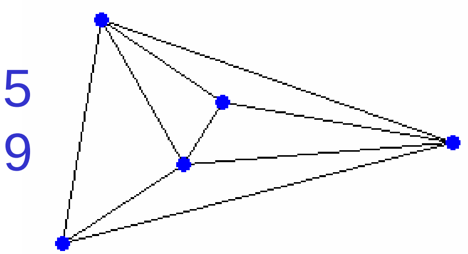
Dado S conjunto de n puntos en el plano, una triangulación T(S) de S
¿cuántos triángulos, cuántas aristas tiene T(S)?

$t = 4$
$q = 8$



.... depende de la posición !!

$t = 5$
$q = 9$

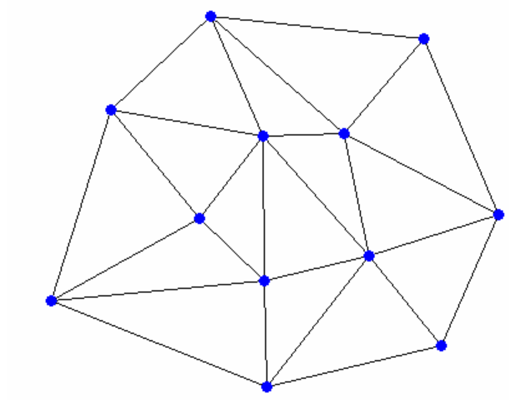


Triangulaciones

n puntos, ¿cuántos triángulos, cuántas aristas?

$n - q + r = 2$

$r = t + 1$
$3t = 2q - k$



$2n - 2q + 2r = 4 \quad \Rightarrow \quad 2n - (3t + k) + 2t + 2 = 4 \quad \Rightarrow$

$2n - t - k = 2$

$t = 2n - k - 2$

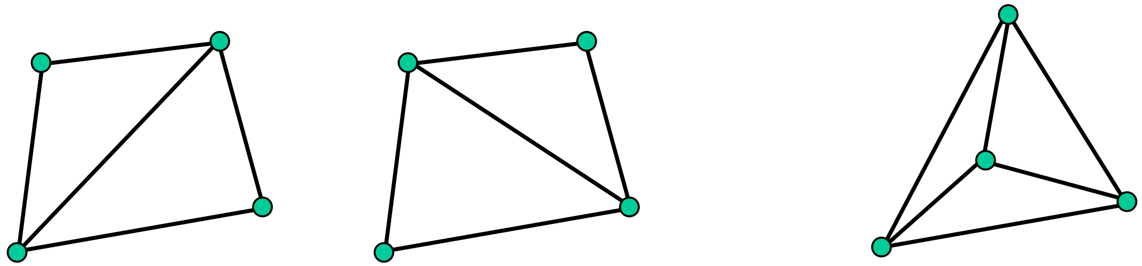
$q = 3n - k - 3$

Triangulaciones

COMBINATORIA

Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

n=4



2 formas

sólo una

.... depende de la posición relativa de los puntos !

Triangulaciones

COMBINATORIA

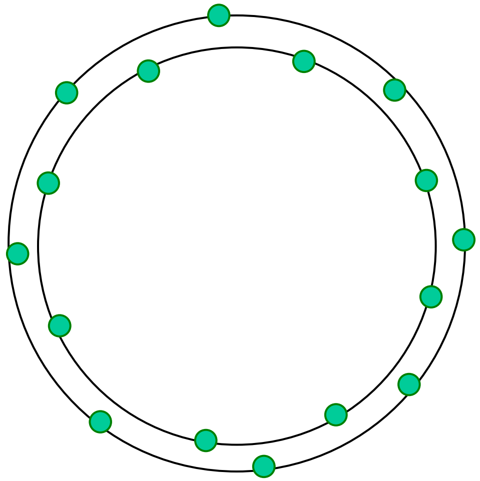
Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

$$\boxed{2{,}63^n \leq tr(S)}$$

¿Conjunto con menor número de triangulaciones?

Conjetura
"Doble círculo"

$$\sim \sqrt{12}^n$$



Triangulaciones

COMBINATORIA

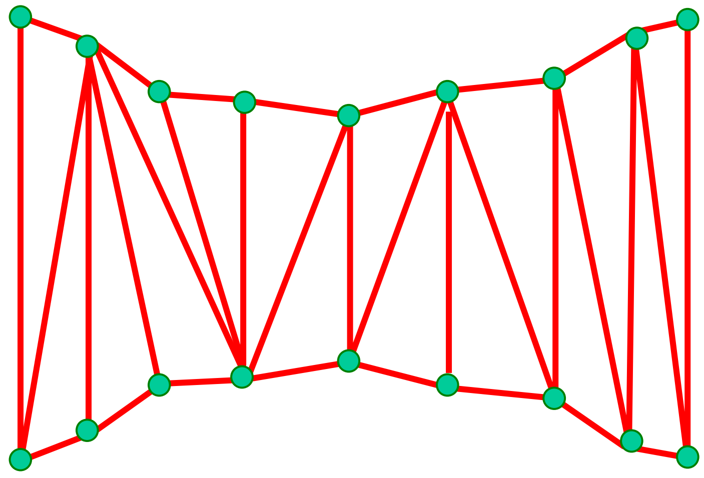
Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

$$\boxed{tr(S) \leq 43^n}$$

¿Conjunto con mayor número de triangulaciones?

"Doble cadena en zigzag"

$$\sim \sqrt{72}^{\,n}$$



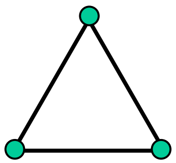
Triangulaciones

COMBINATORIA

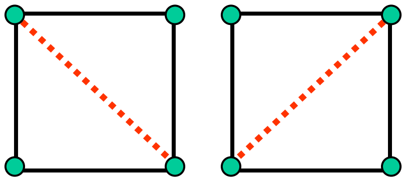
Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

Sólo hay respuesta exacta cuando los puntos son los vértices de un polígono convexo

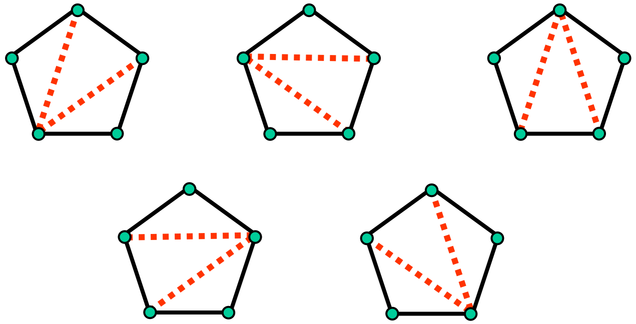
$t_3 = 1$



$t_4 = 2$



$t_5 = 5$



Triangulaciones

Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

Sólo hay respuesta exacta cuando los puntos son los vértices de un polígono convexo

$$t_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} \approx 4^n \frac{1}{n^{3/2}}$$

$t_3 = 1$ $t_4 = 2$ $t_5 = 5$

1, 2, 5, 14, 42, 132, ... **Números de Catalan**

$$c_n = t_{n+2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

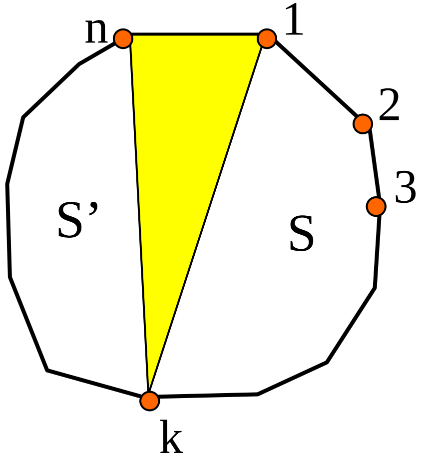
Números de Catalan

1,2,5,14,42,132,429,... números de Catalan $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

1,1,2,3,5,8,13,21,34, ... números de Fibonacci

Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $F_1 = 1, F_2 = 1$

Triangulaciones $t_n = t_2\, t_{n-1} + t_3\, t_{n-2} + \dots + t_k t_{n-k-1} \dots + t_{n-1}\, t_2$ $(t_2=1)$



S polígono de k vértices
S' polígono de $n-k-1$ vértices

Utilizando el triángulo $\{1kn\}$
hay $t_k \cdot t_{n-k-1}$ triangulaciones

Números de Catalan

1,2,5,14,42,132,429,... números de Catalan $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

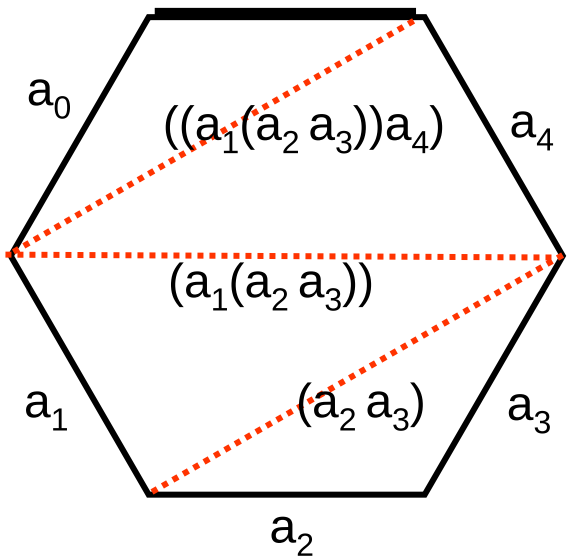
1,1,2,3,5,8,13,21,34, ... números de Fibonacci

- Triangulaciones de un polígono convexo de n+2 vértices
- Formas de colocar paréntesis en un producto de n+1 factores
- Caminos monótonos en una malla desde (0,0) a (n,n) sin sobrepasar la diagonal
- Árboles plantados binarios con n+1 hojas
- ....
- .... más de 60 estructuras

Números de Catalan

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices

n = 4



$(a_0((a_1 a_2)(\, a_3\, a_4)))$

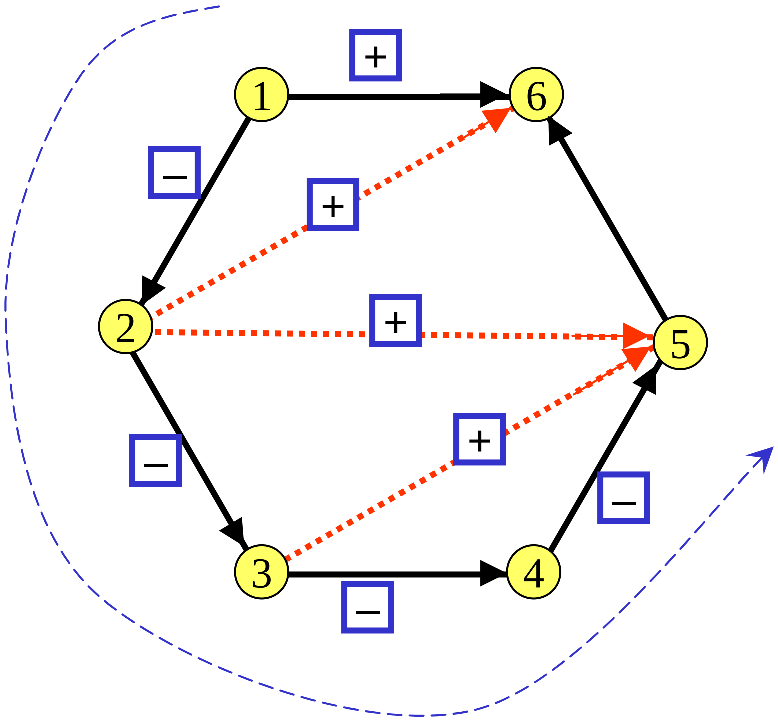
$(a_0((a_1(a_2\, a_3))\, a_4))$

Paréntesis para n+1 factores

Números de Catalan

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices

n = 4



$+ - + + - + - -$

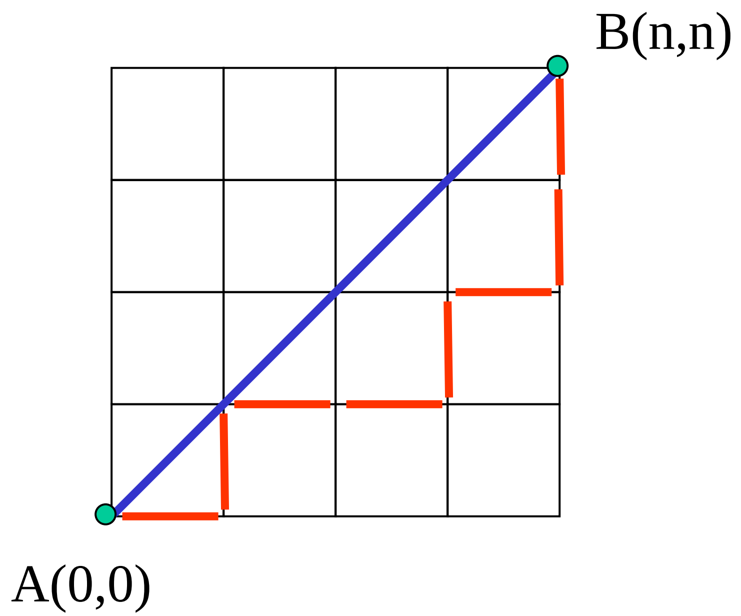
Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

Números de Catalan

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

+ − + + − + − −

n = 4



Caminos en la cuadrícula n×n de A
hasta B sin sobrepasar la diagonal

Sumario

- ❖ **Triángulo**

- ❖ **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

- ❖ **Problemas de Galerías de Arte**

- ❖ **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

Algoritmos para construir triangulaciones

- abanico
- incremental
- voraz

Complejidad

	log n	**n**	**n^2**	**2^n**	**n!**
2	1	2	4	4	2
8	3	8	64	256	40320
32	5	32	1024	$4,3\times10^9$	$2,6\times10^{35}$
100	6	100	10^4	$1,2\times10^{27}$	$9,3\times10^{177}$

Un siglo tiene $3,1\times10^9$ segundos

Si la edad del Universo es de 15000 millones de años, el big-bang ocurrió hace $4,5\times10^{17}$ segundos

Sumario

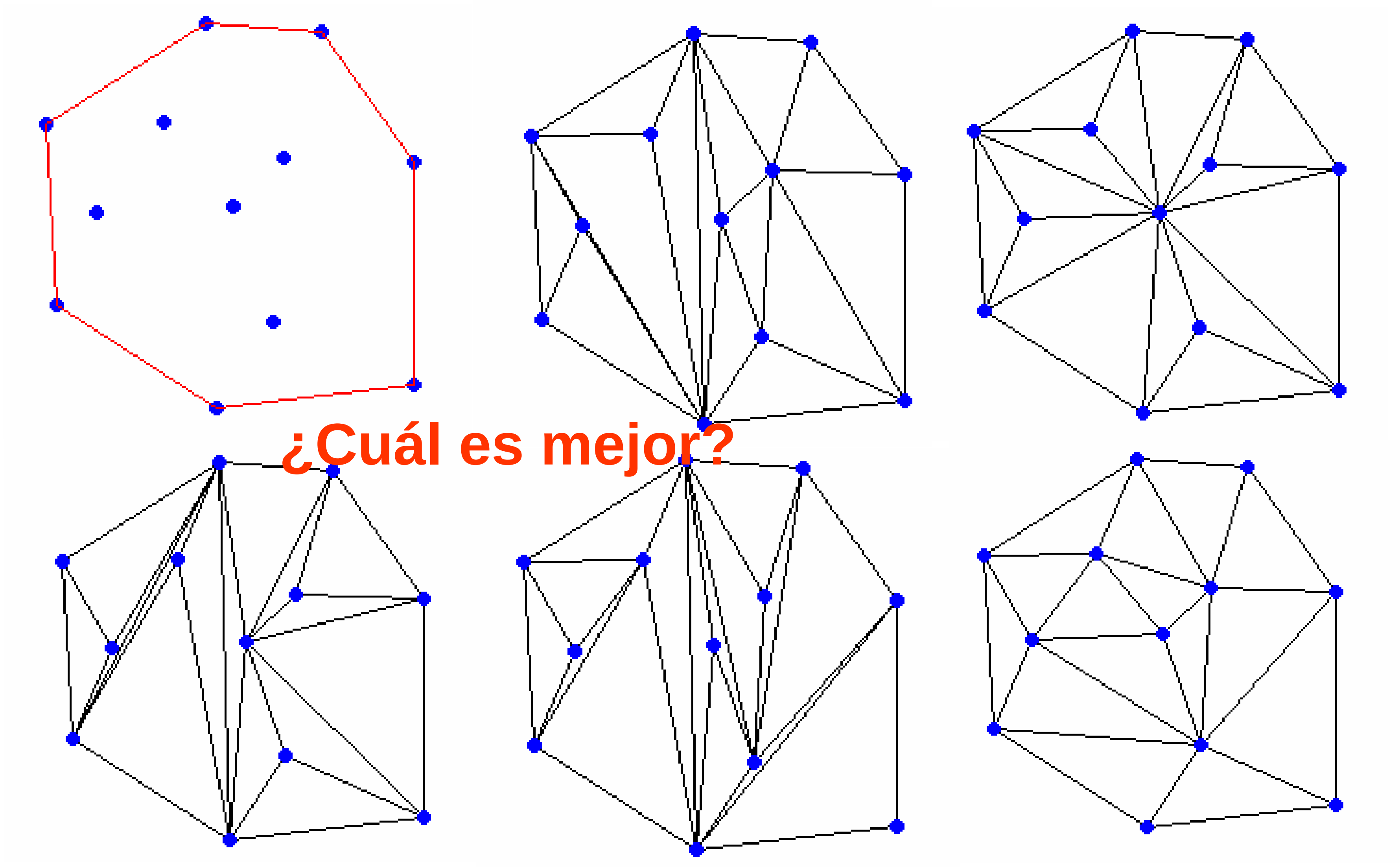
- ❖ **Triángulo**

- ❖ **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - **Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.**
  - 3 D

- ❖ **Problemas de Galerías de Arte**

- ❖ **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

Triangulaciones

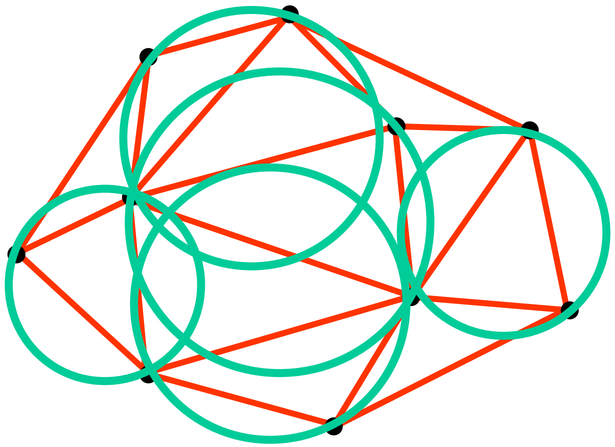


¿Cuál es mejor?

Triangulaciones CALIDAD

Será mejor aquella triangulación que

- Todos los triángulos tengan su círculo circunscrito vacío de puntos



Maximiza el ángulo mínimo de los triángulos

Minimiza el mayor círculo circunscrito

Regularidad de los triángulos

TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY

Triangulaciones CALIDAD

Será mejor aquella triangulación que

- La suma de las longitudes de todas sus aristas sea menor.

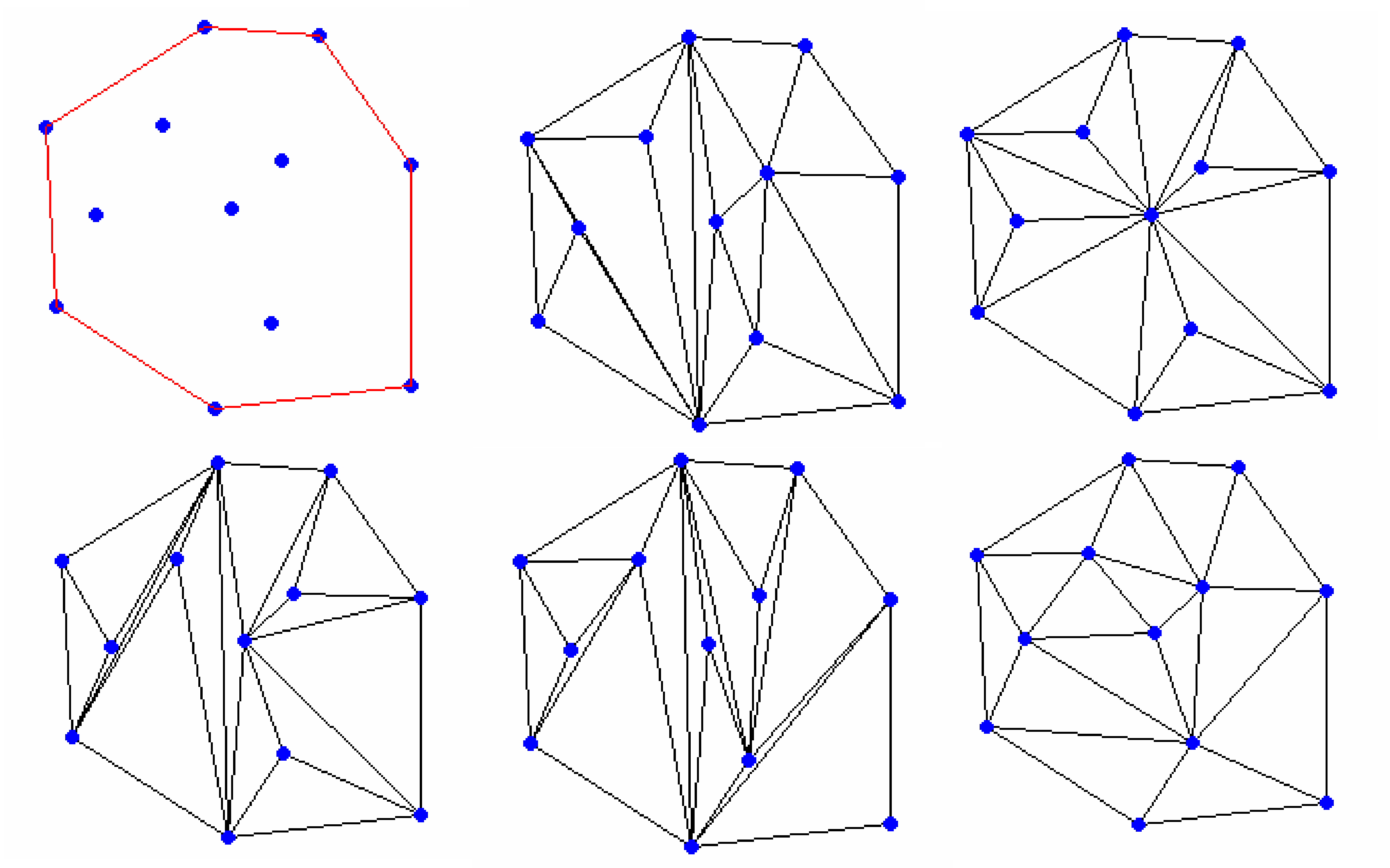
TRIANGULACIÓN DE PESO MÍNIMO MWT

Dado S, hallar MWT(S) es un problema NP-duro

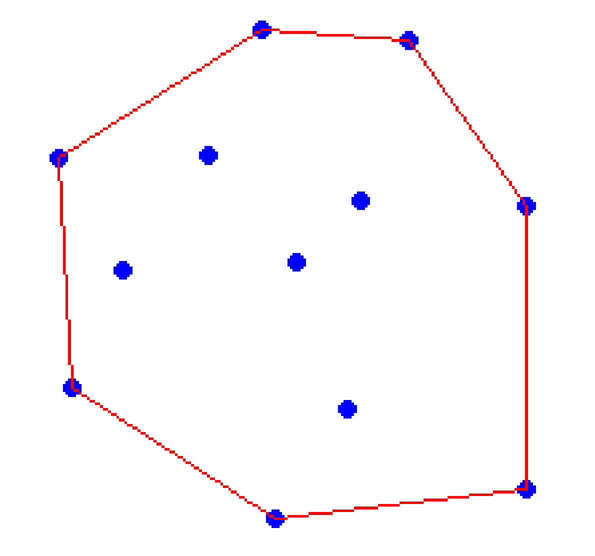
- Minimice la arista más larga.

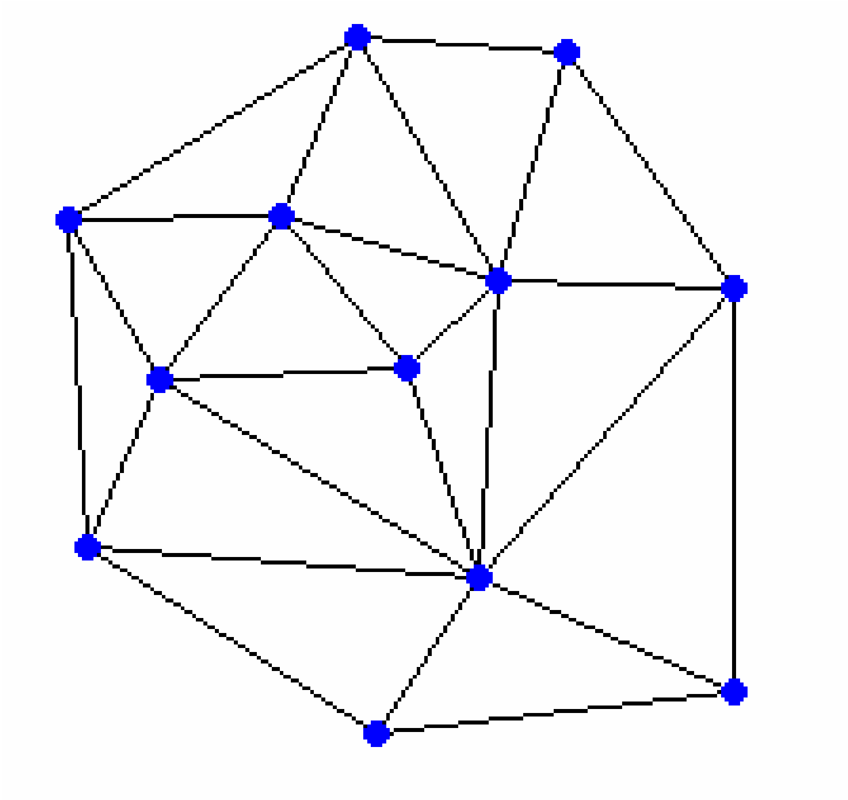
- Minimice el ángulo máximo de todos los triángulos.

Triangulaciones T. DELAUNAY



Triangulaciones T. DELAUNAY





TRIANGULACION DE DELAUNAY

Triangulaciones T. DELAUNAY

TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY

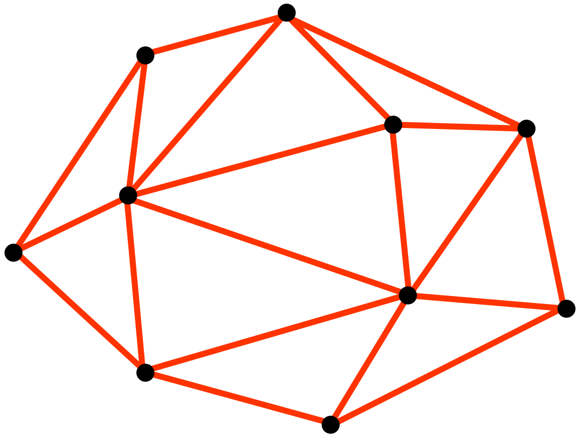


DIAGRAMA DE VORONOI

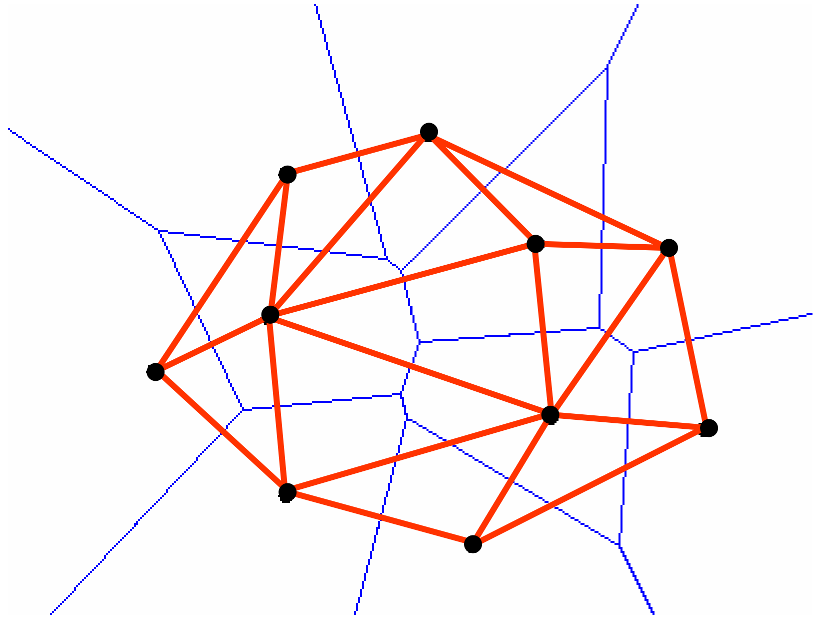
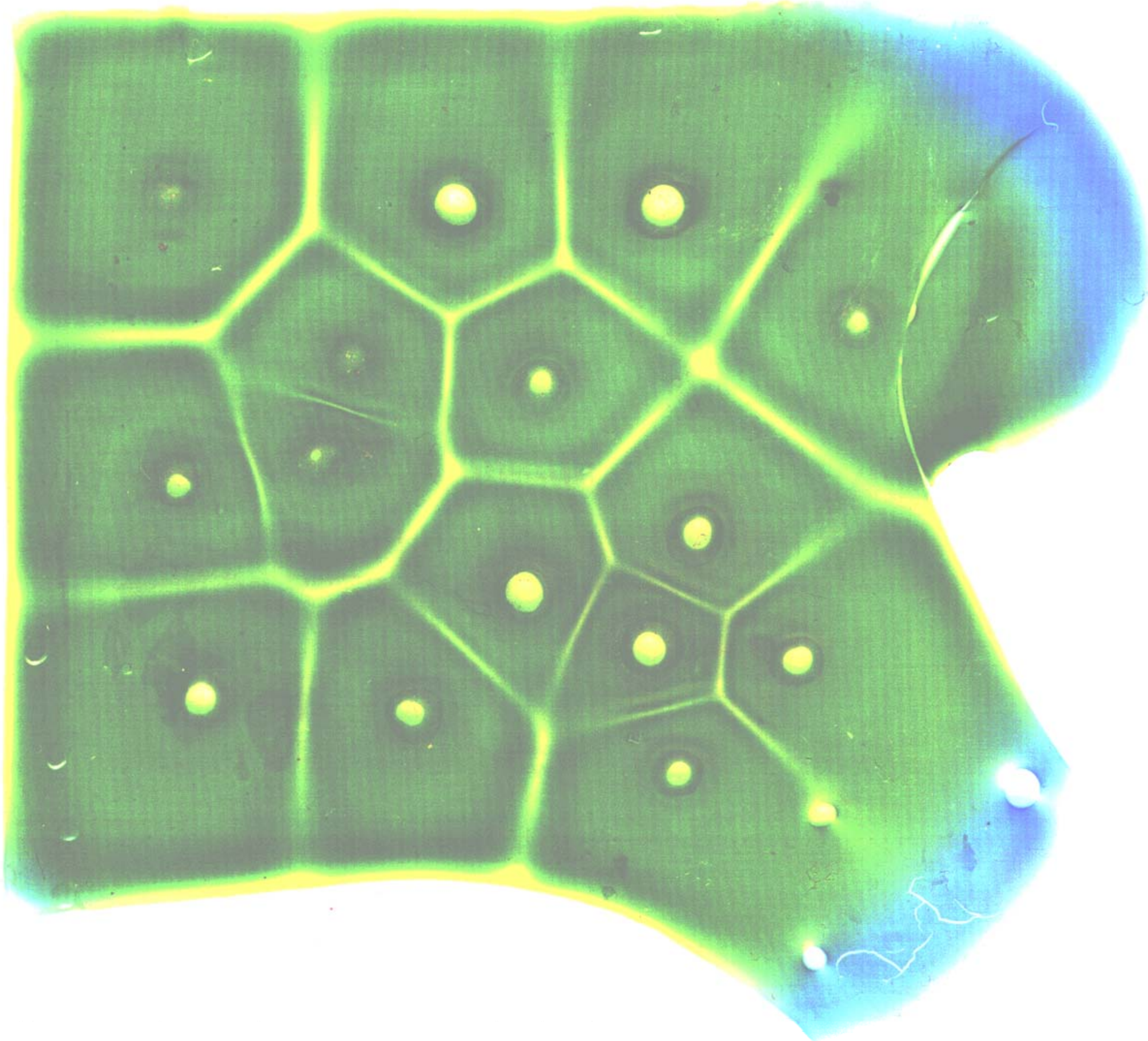


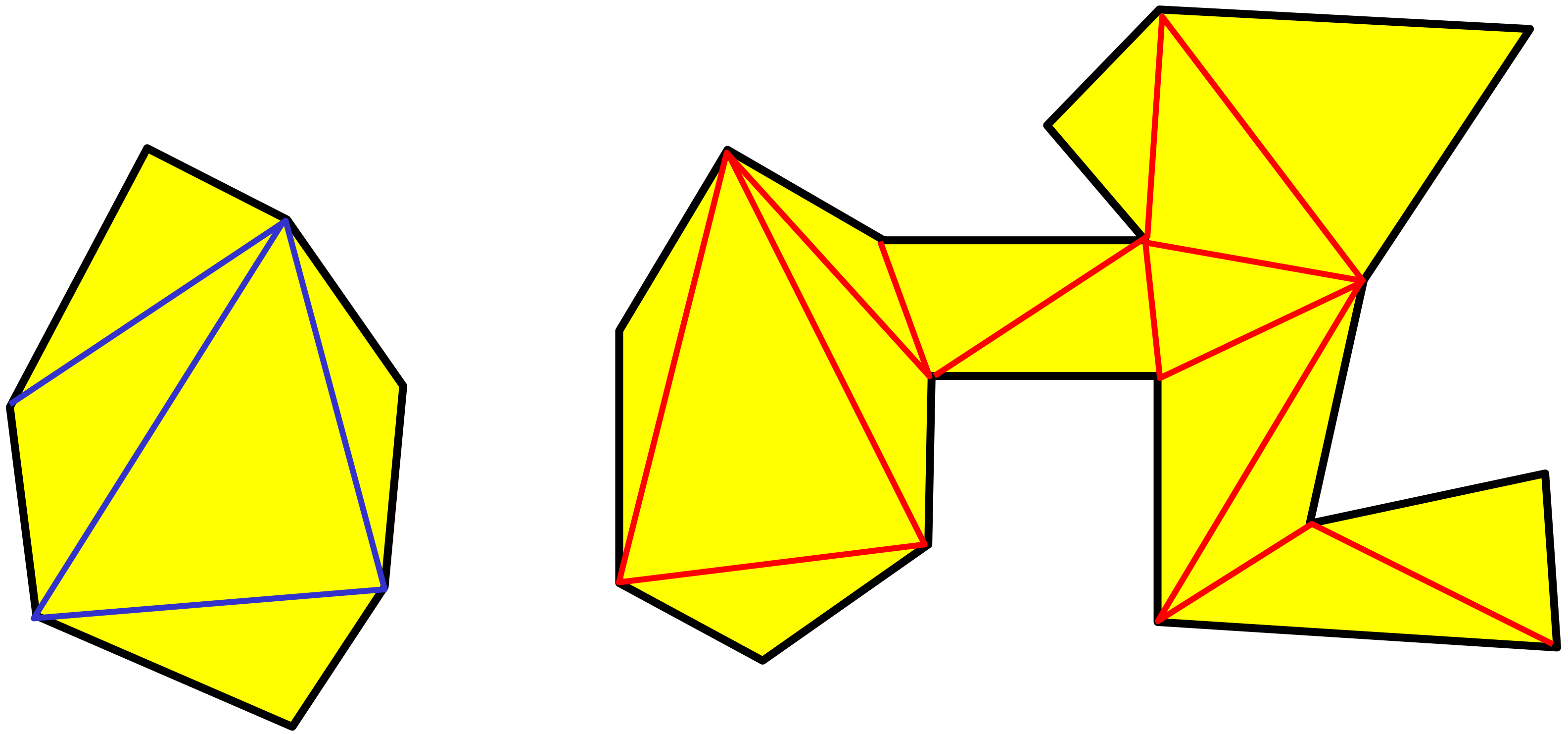
DIAGRAMA DE VORONOI

DIAGRAMA DE VORONOI



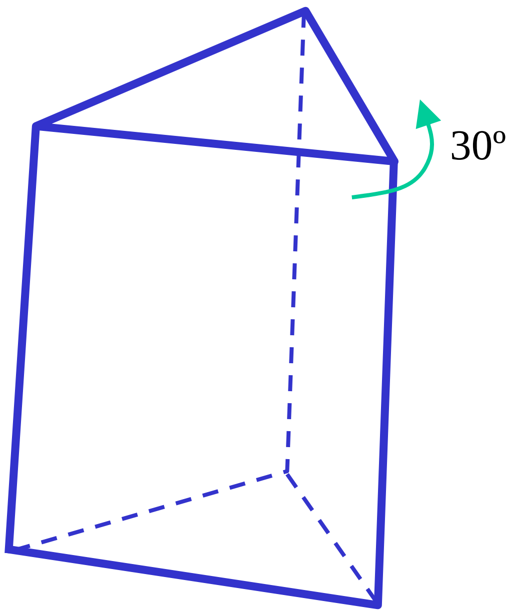
Triangulaciones 2D $\rightarrow$ 3D

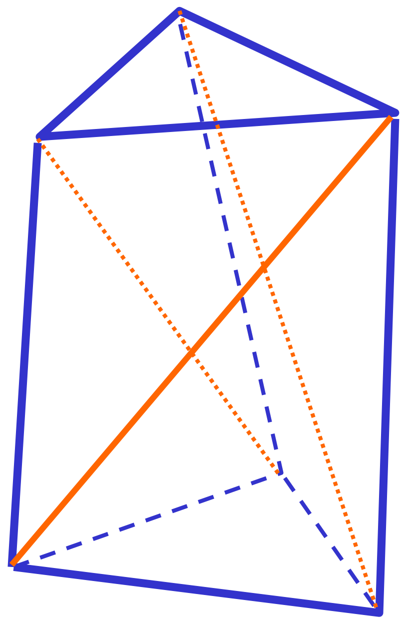
Todo polígono se puede triangular



Triangulaciones 2D $\rightarrow$ 3D

No siempre es posible descomponer un poliedro en tetraedros

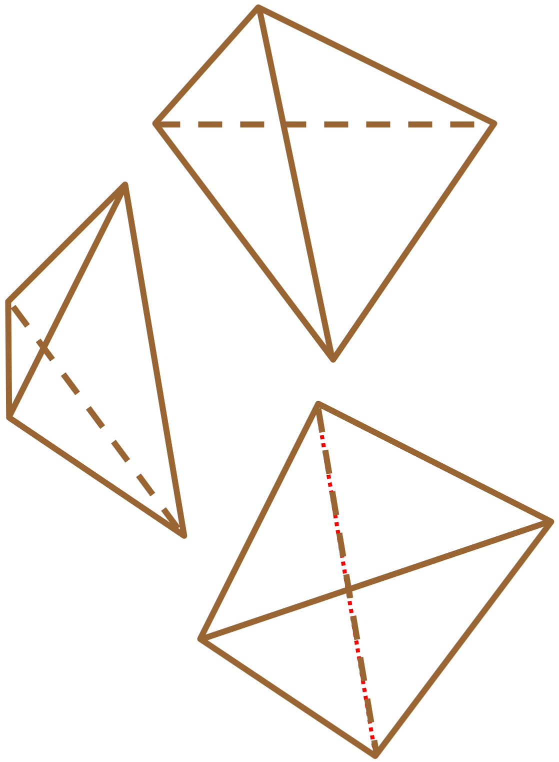


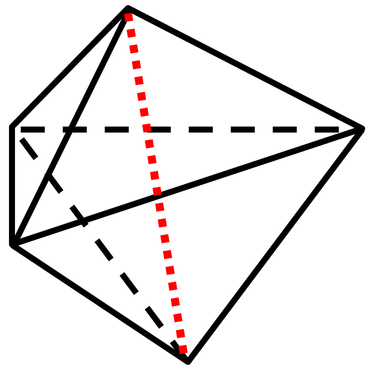


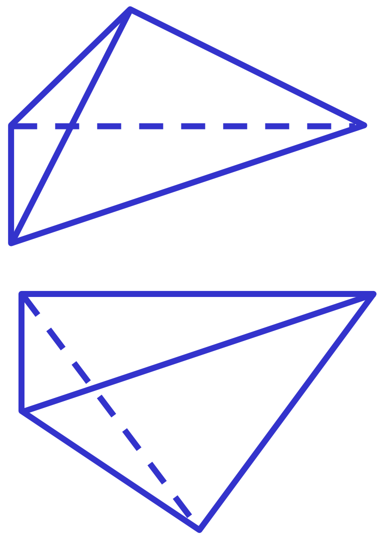
Octaedro de Schönhardt

Triangulaciones 3D

Si hay descomposición el número de tetraedros no es siempre el mismo.







2 tetraedros

3 tetraedros

Sumario

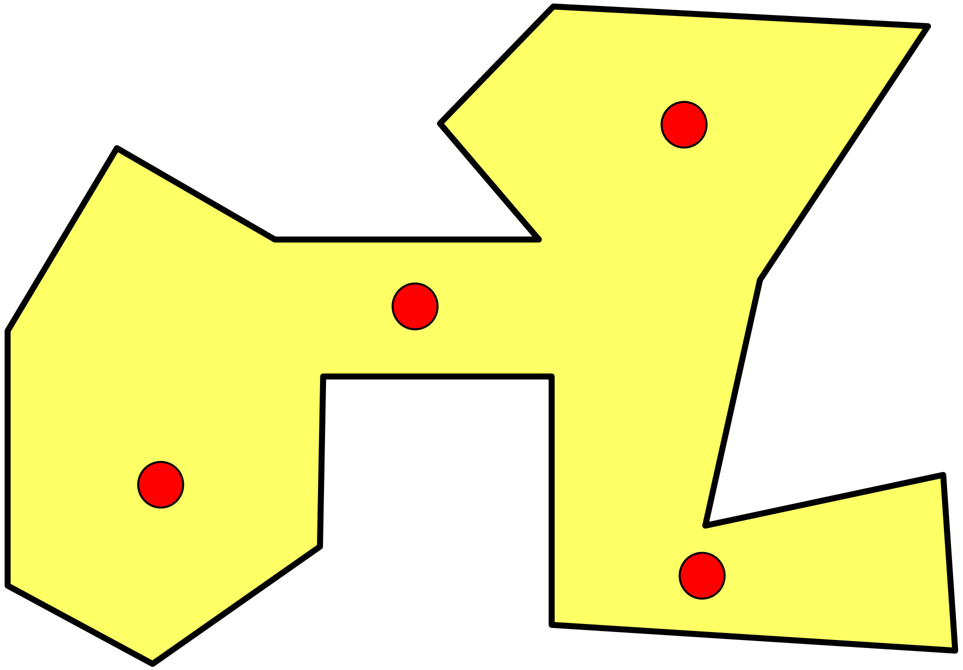
- **Triángulo**

- **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

- **Problemas de Galerías de Arte**

- **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

Galerías de Arte

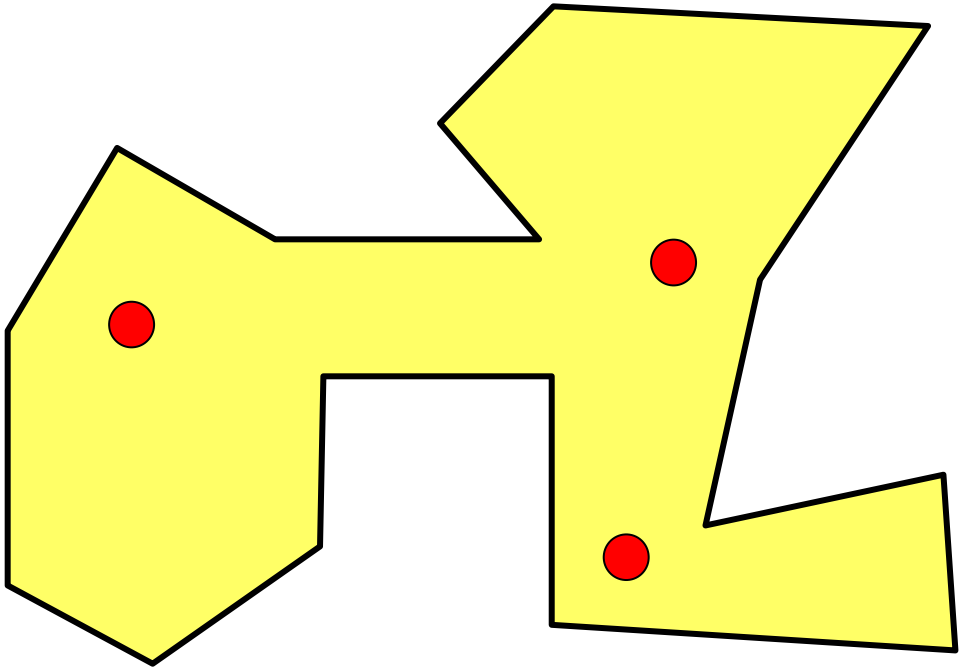


Victor Klee, 1973

¿Cuántas luces?
¿Cuántos guardias?

PROBLEMA DE LAS GALERÍAS DE ARTE

Galerías de Arte

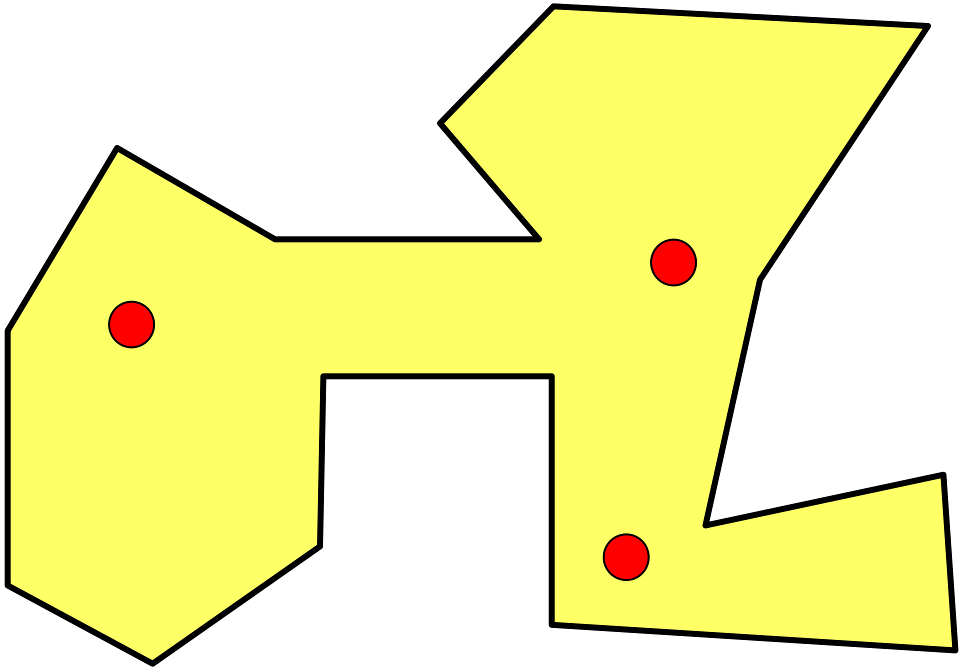


PROBLEMA ALGORÍTMICO

... es NP-completo
Lee-Lin, 1979

Dado un polígono P decidir cuántos guardias son necesarios para vigilar P y dónde se deben ubicar.

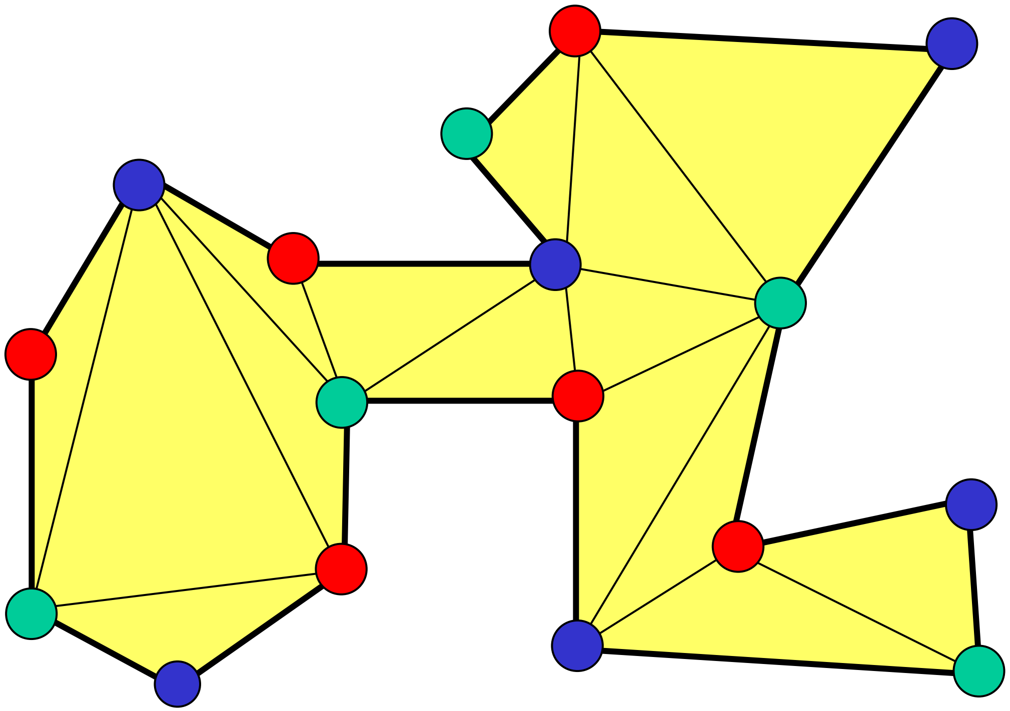
Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Dado n, ¿cuál es el número de guardias suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados?

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Chvátal, 1975

Fisk, 1978

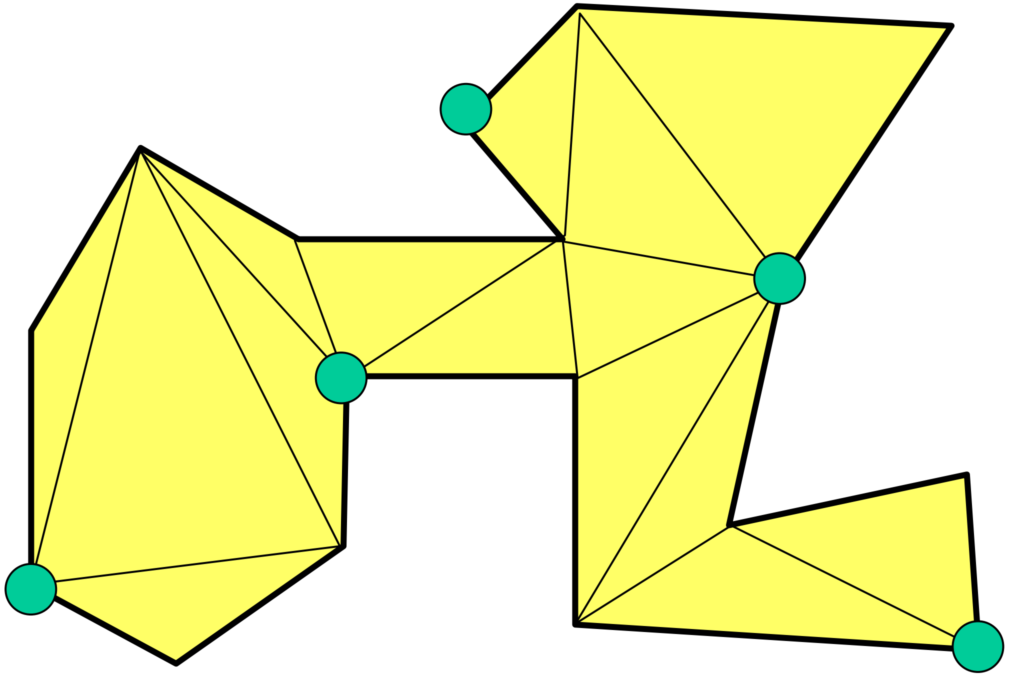
R + A + V = n

1) Triangular el polígono

2) Colorear el grafo con tres colores

3) Colocar guardias en el color menos utilizado

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Chvátal, 1975

Fisk, 1978

R + A + V = n

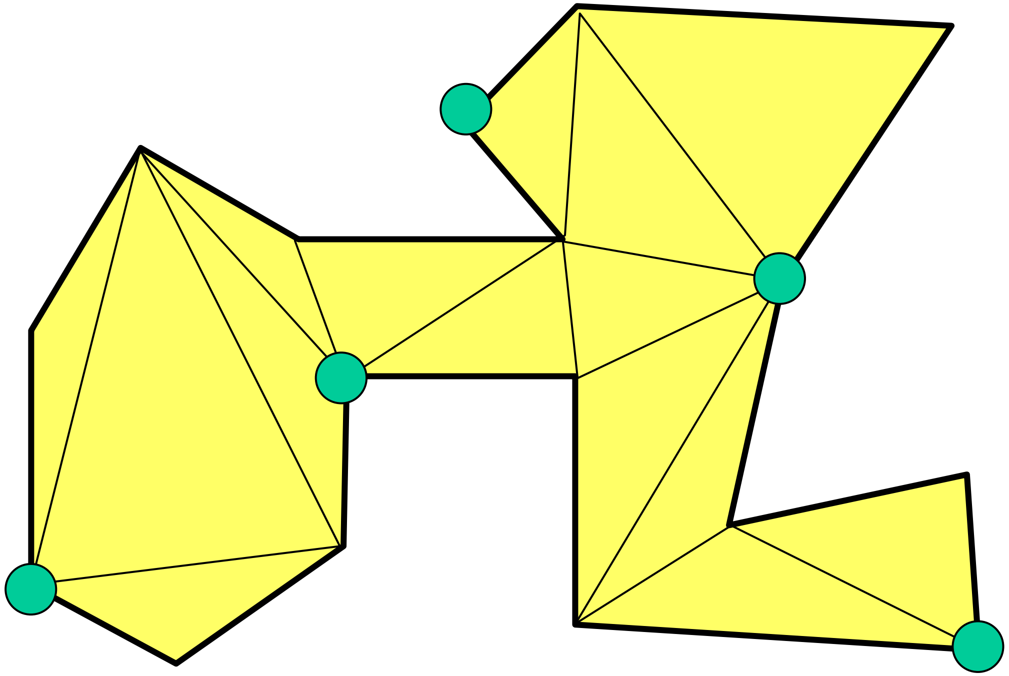
$$V \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

1) Triangular el polígono

2) Colorear el grafo con tres colores

3) Colocar guardias en el color menos utilizado

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Chvátal, 1975

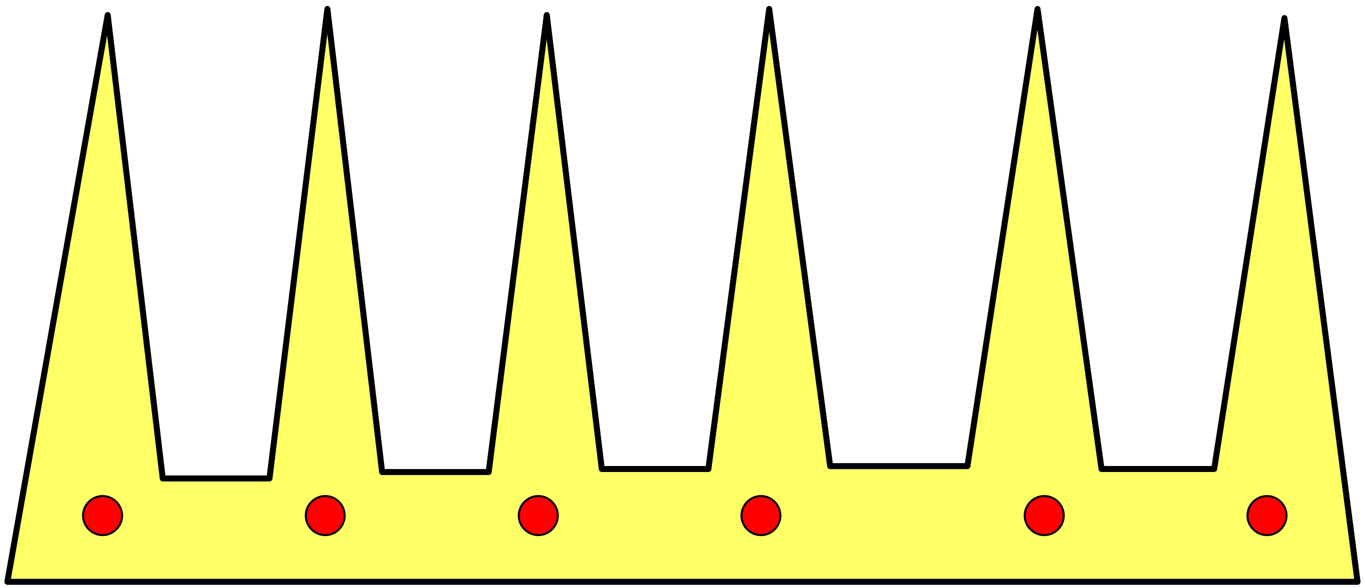
Fisk, 1978

R + A + V = n

$$V \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

"Todo polígono de n lados puede vigilarse con $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardias"

Galerías de Arte



Teorema

$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

Galerías de Arte

VARIANTES

En el objeto a vigilar o iluminar

- polígonos ortogonales, monótonos, ..., con agujeros
- interior o exterior
- configuraciones de objetos

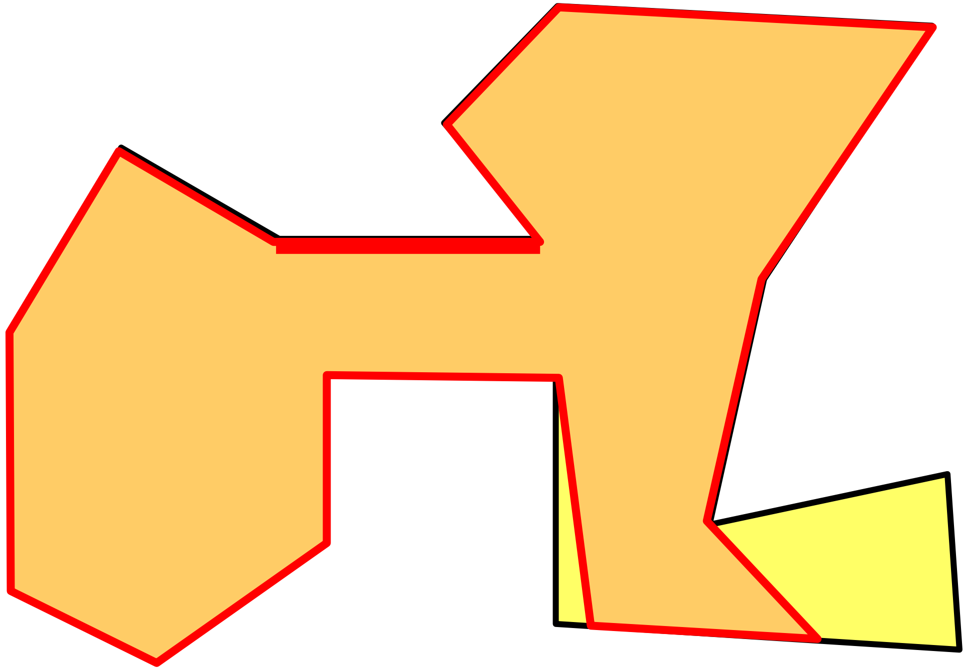
En la forma de vigilar o iluminar

- desde vértices o puntos interiores
- guardias móviles
- reflectores de amplitud limitada
- reflectores de alcance limitado

Rutas de vigilancia

Galerías de Arte

Guardias-lado



Conjetura (Toussaint, 1981)

⌊n/4⌋ guardias-lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

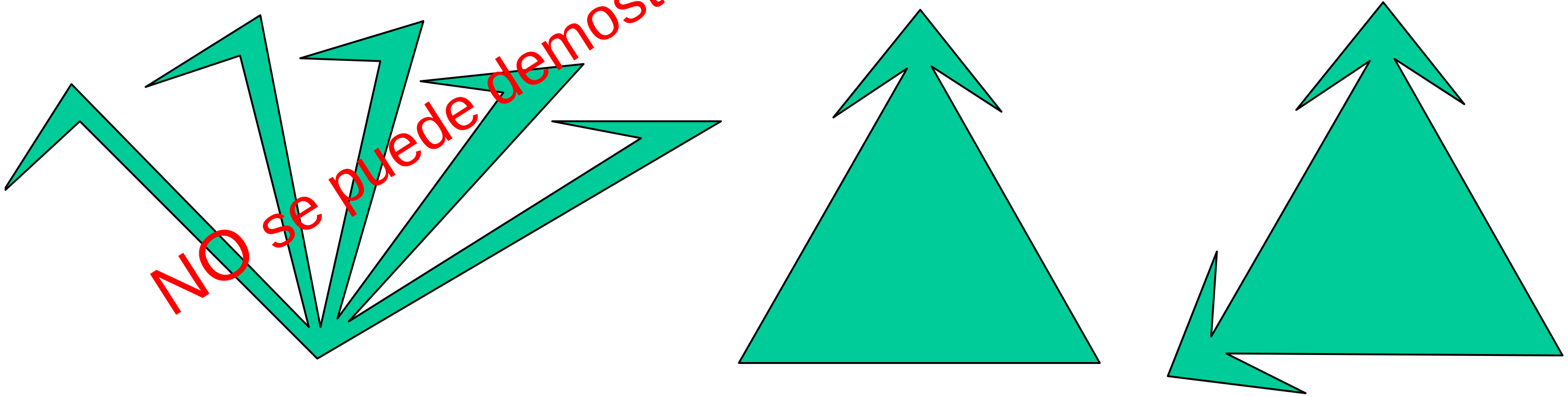
Galerías de Arte

Guardias-lado

Conjetura (Toussaint, 1981)

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

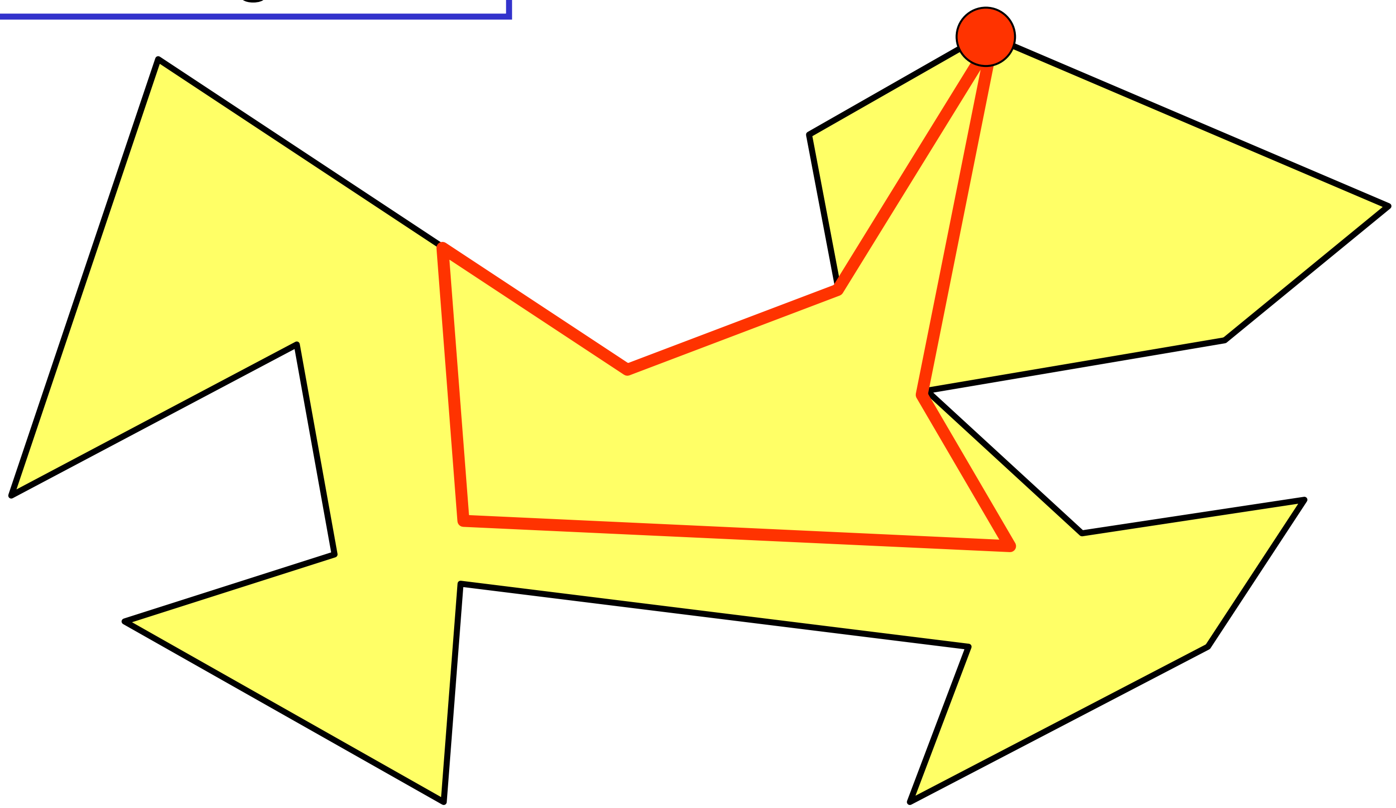
... salvo estos ejemplos



Galerías de Arte

Rutas de vigilancia

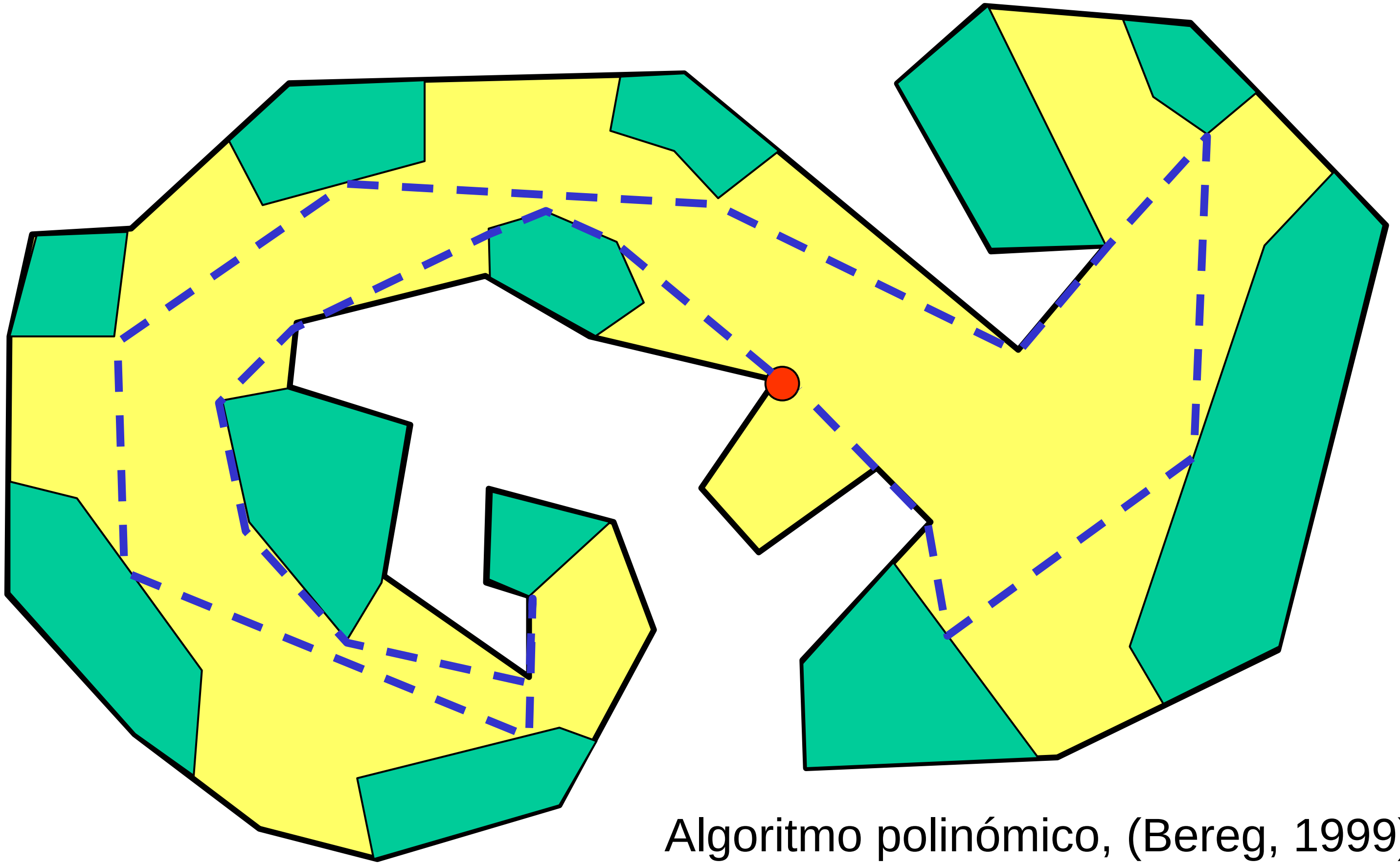
Chin, Ntafos, 1988



Algoritmo polinómico, (Chin, Ntafos, 1992)

Galerías de Arte

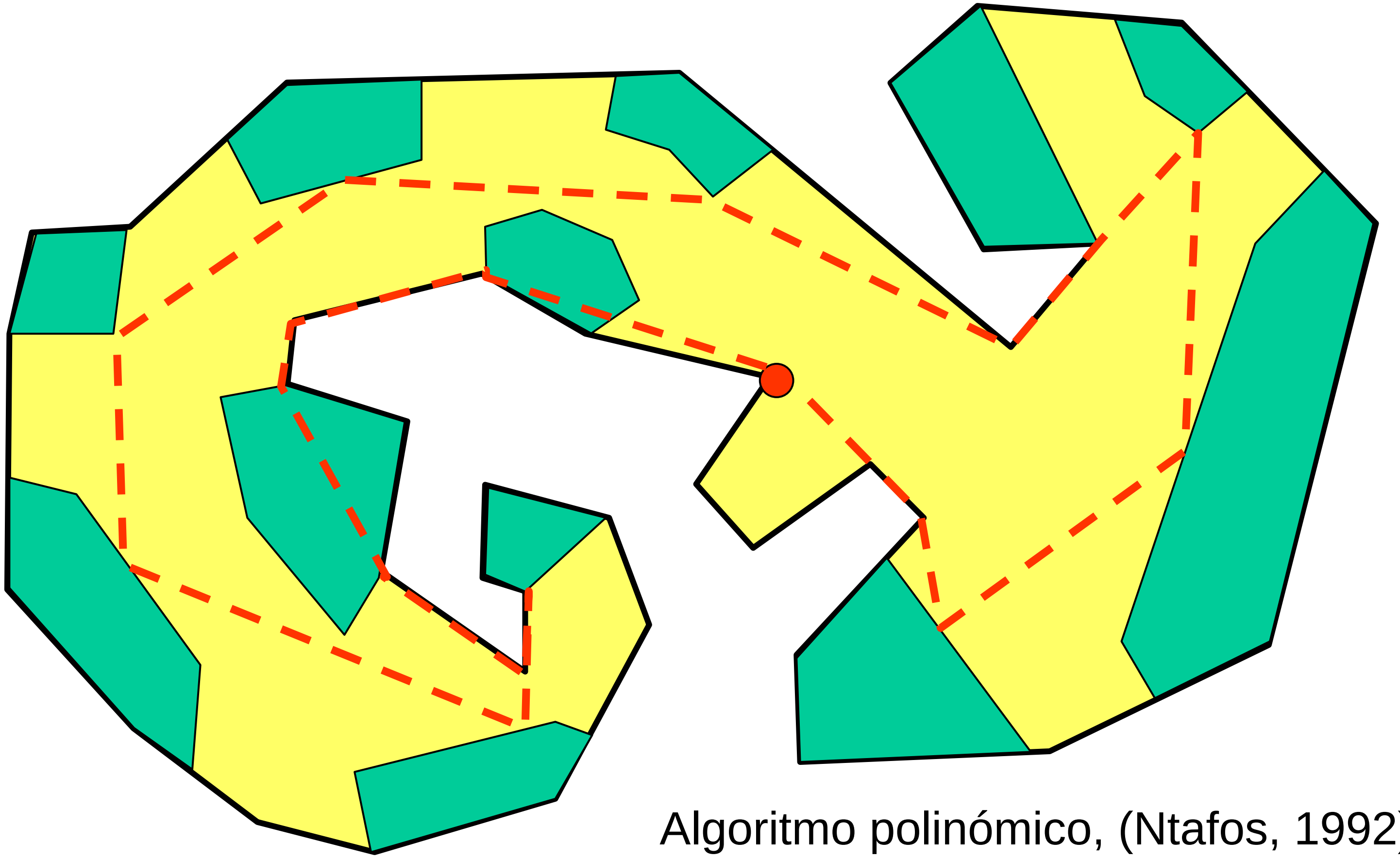
PROBLEMA DEL ZOO



Algoritmo polinómico, (Bereg, 1999)

Galerías de Arte

PROBLEMA DEL SAFARI



Algoritmo polinómico, (Ntafos, 1992)

Sumario

- **Triángulo**

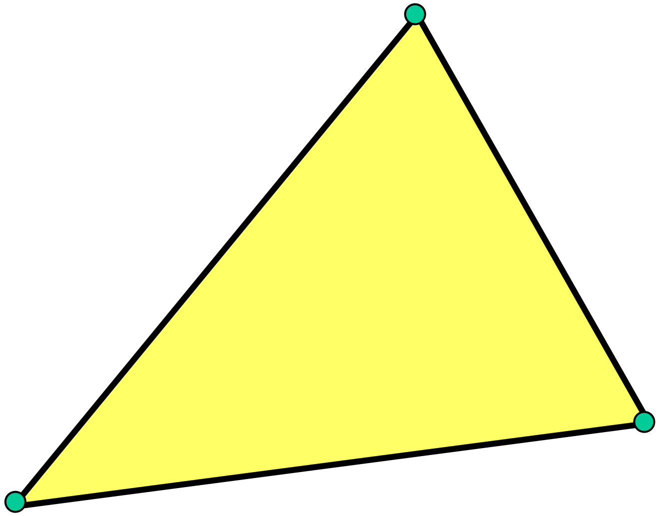
- **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

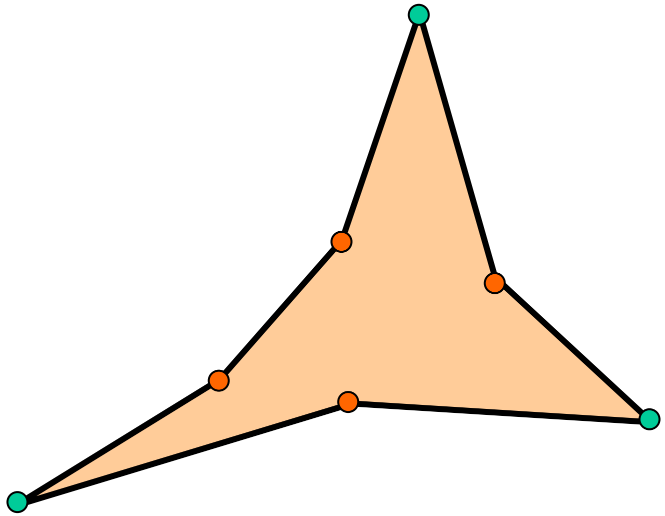
- **Problemas de Galerías de Arte**

- **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - Problema de la regla de carpintero.

Pseudotriangulaciones

De triángulo ... a pseudotriángulo



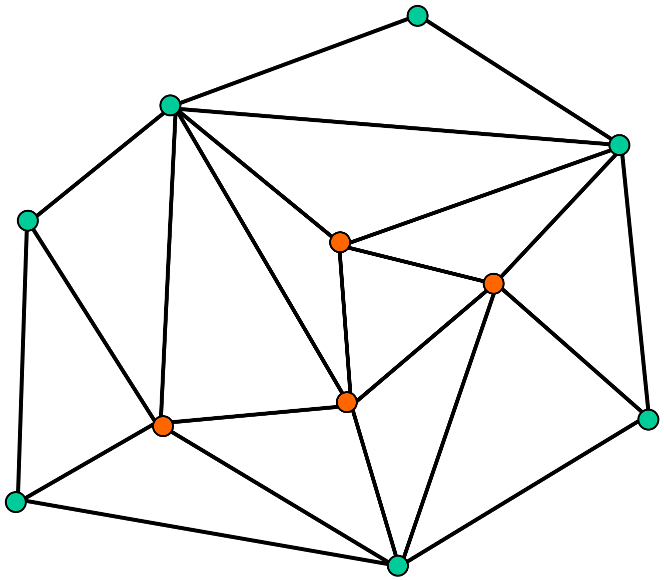


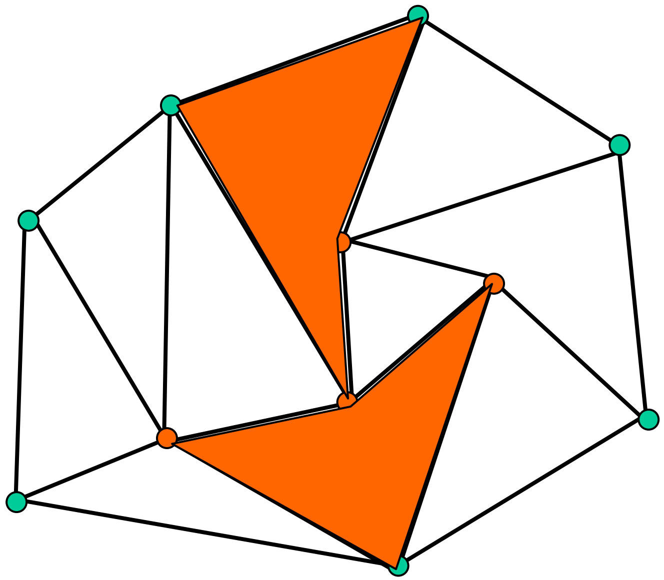
Tres vértices

... convexos (< π)
... el resto cóncavos

Pseudotriangulaciones

De triangulación ... a pseudotriangulación

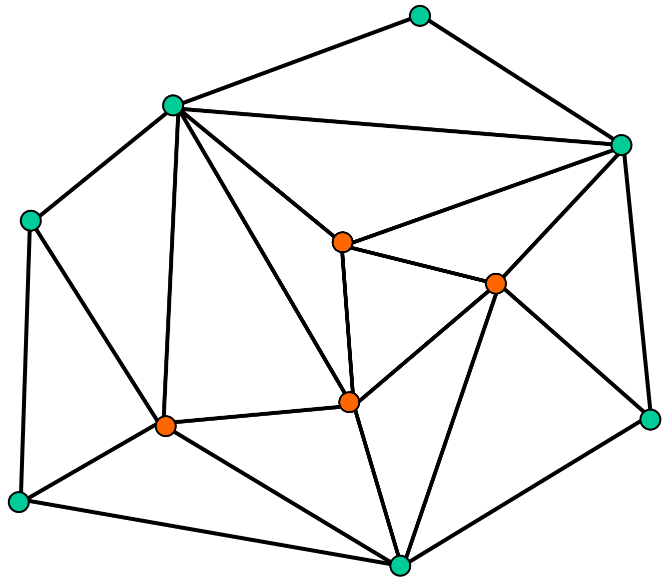


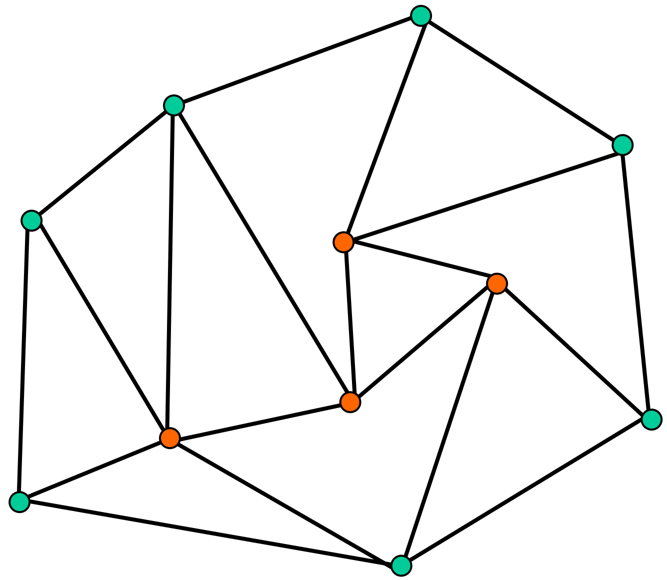


Pseudotriangulación sobre S:
Descomposición del cierre convexo de S en pseudotriángulos

Pseudotriangulaciones

De triangulación ... a pseudotriangulación

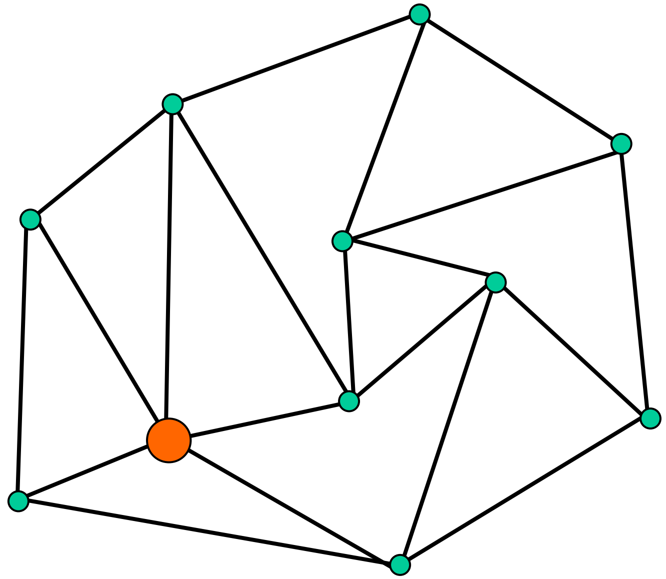




Triangulación = Pseudotriangulación máxima

¿Cuál tiene menos aristas?

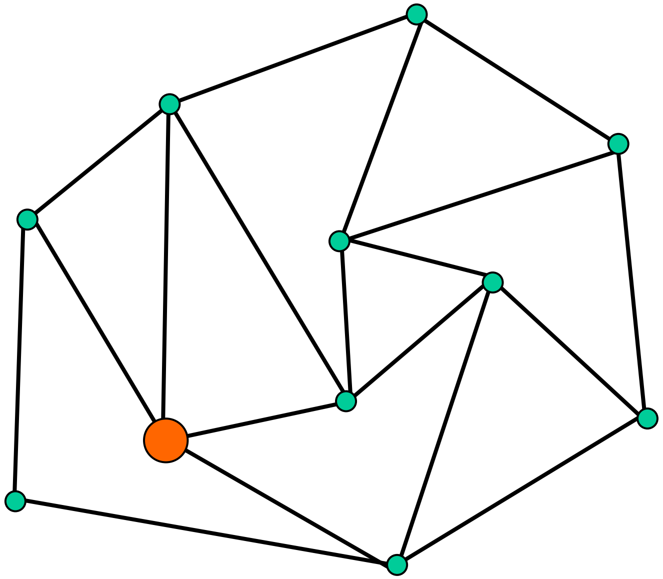
Pseudotriangulaciones



¿Pseudotriangulación mínima?

Vértice puntiagudo si tiene un ángulo incidente > π

Pseudotriangulaciones



¿Pseudotriangulación mínima?

Vértice puntiagudo si tiene un ángulo incidente > π

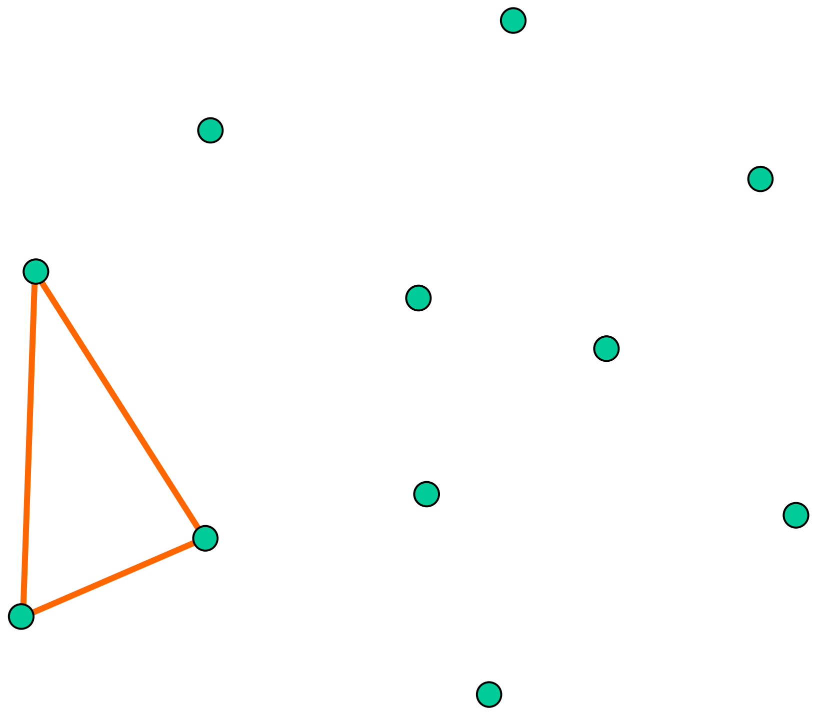
Pseudotriangulación puntiaguda: todos los vértices puntiagudos

Pseudotriangulación mínima = puntiaguda

$q = 2n - 3 + a$ $\quad$ a vértices no puntiagudos

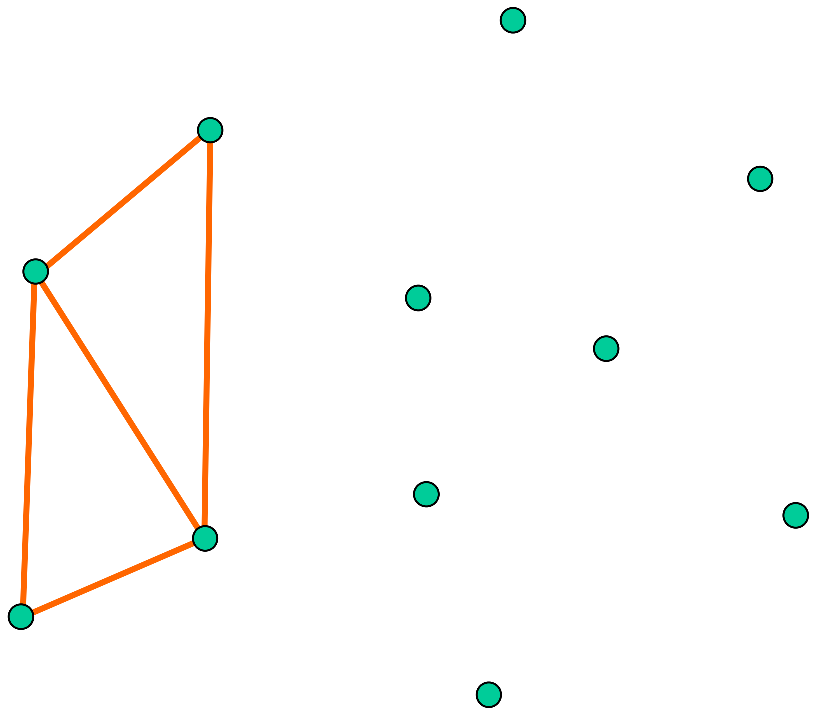
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



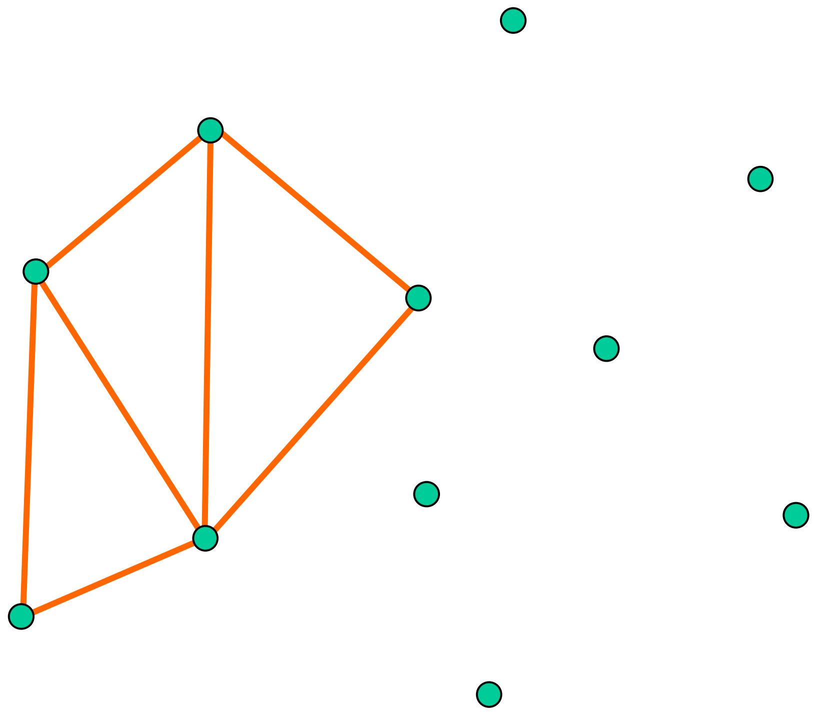
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



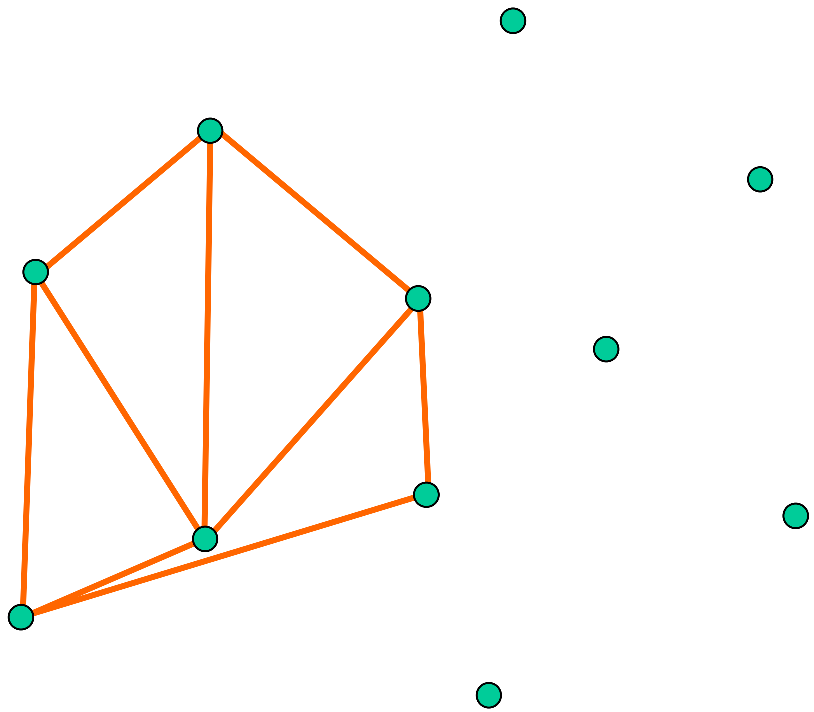
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



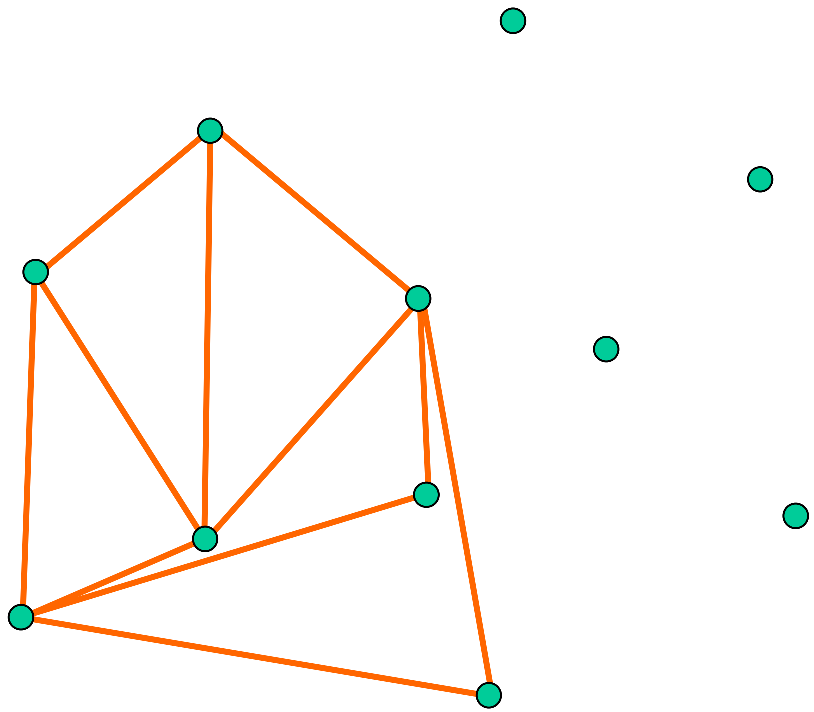
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



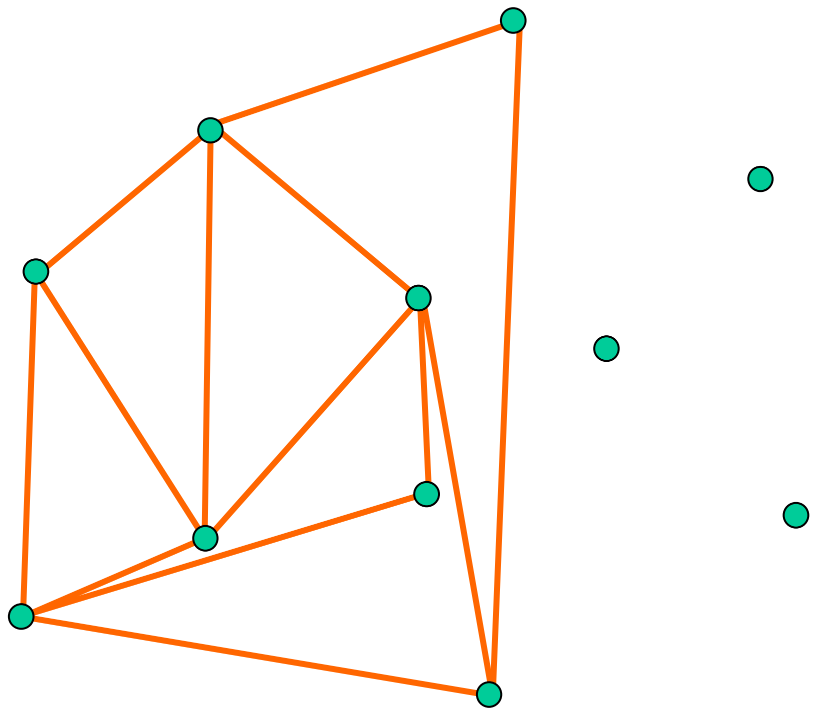
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



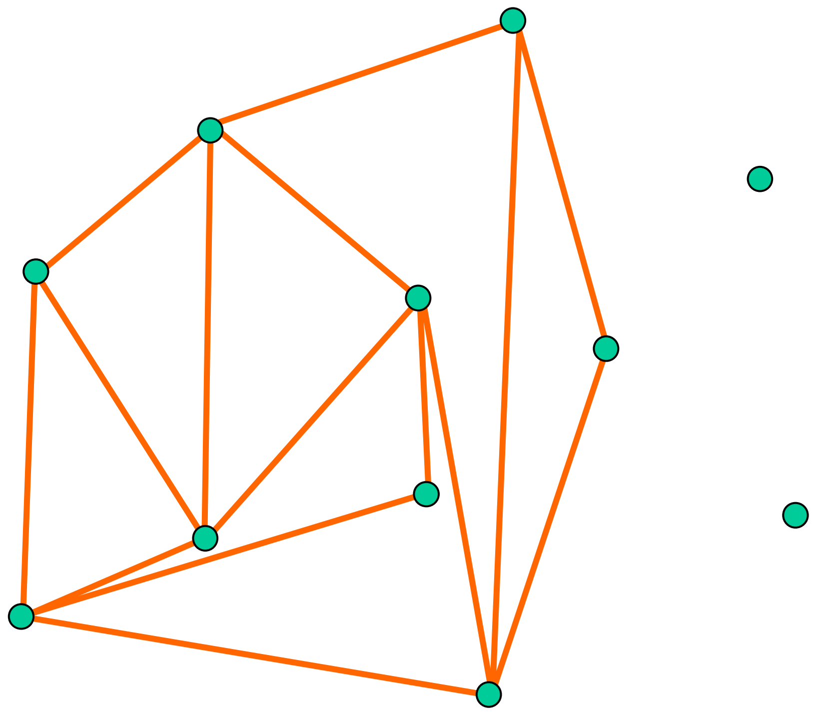
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



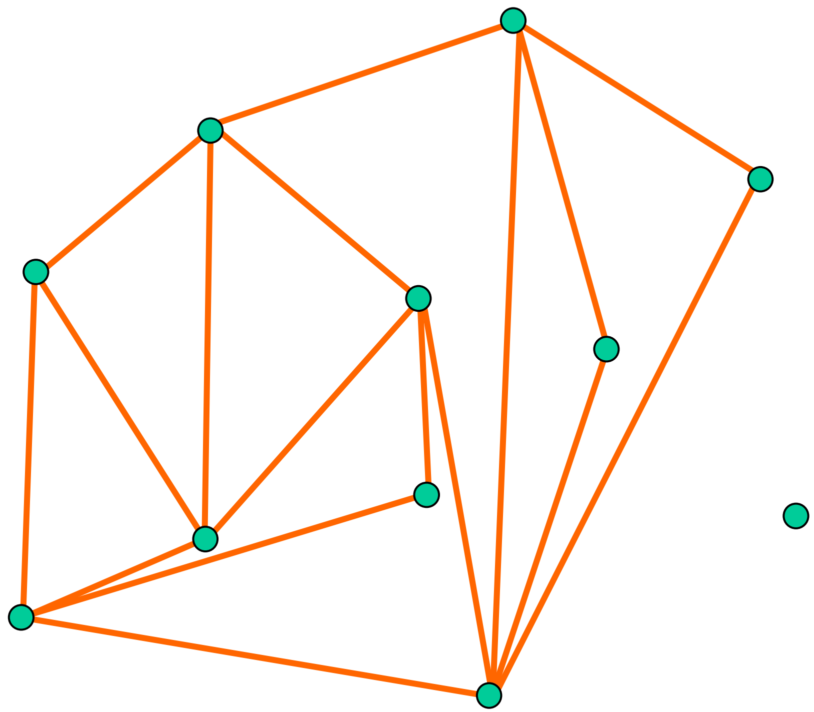
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



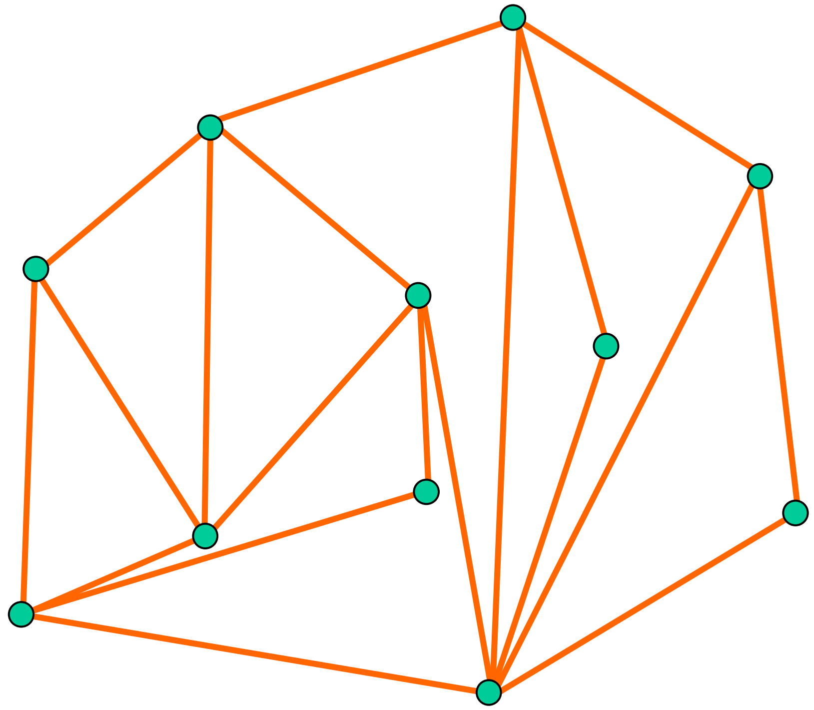
Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



Pseudotriangulaciones

Todo conjunto de puntos admite una pseudotriangulación puntiaguda



Sumario

- **Triángulo**

- **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

- **Problemas de Galerías de Arte**

- **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - **Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.**
  - Problema de la regla de carpintero.

RIGIDEZ

POLIEDROS

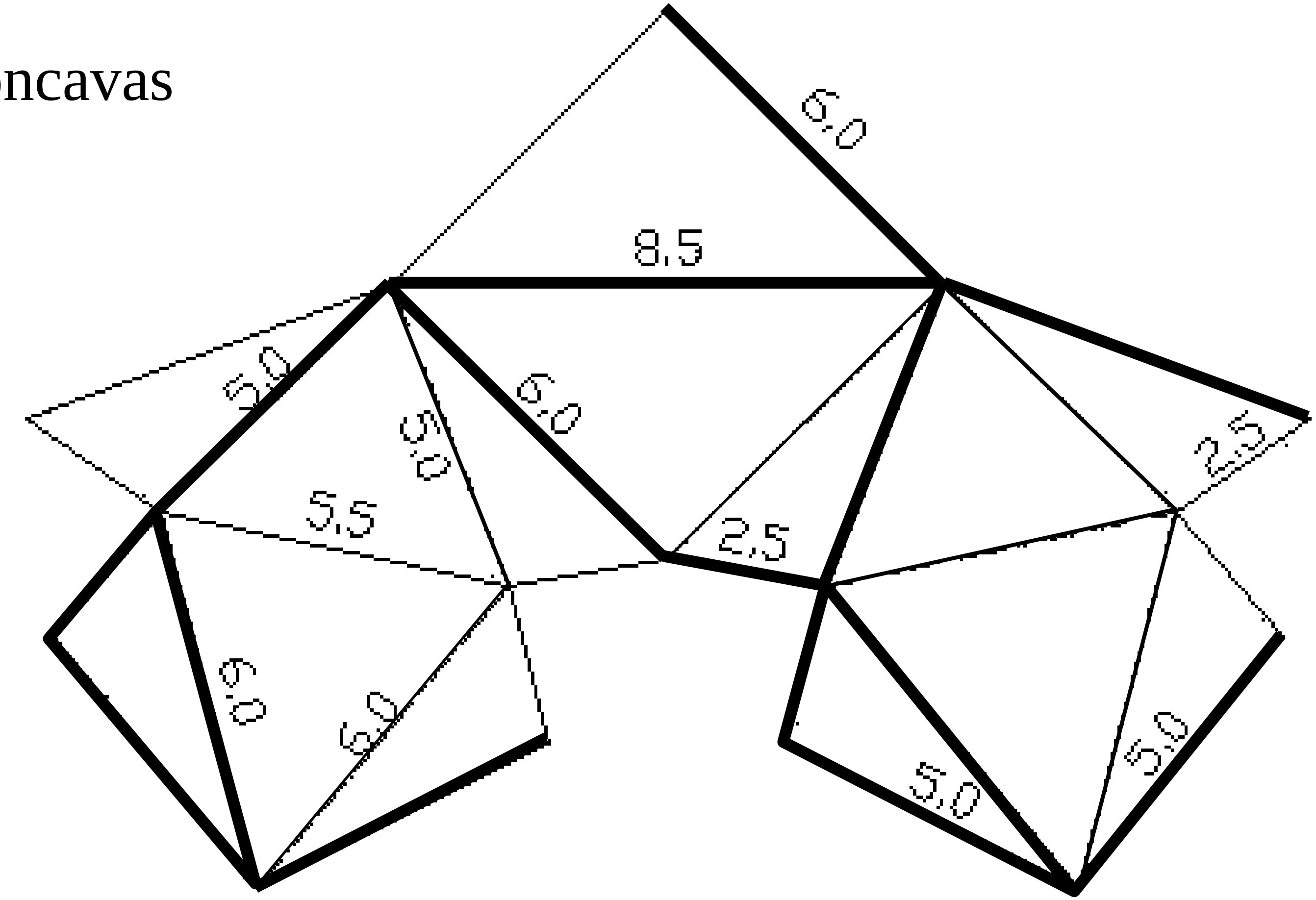
- 1766 Euler propone la conjetura de rigidez
  “Todos los poliedros son rígidos”
  (no admiten una deformación continua manteniendo sus caras planas y congruentes)
- 1813 Cauchy demuestra el teorema de rigidez para poliedros convexos
- 1977 Connelly encuentra un contraejemplo de la conjetura de Euler: un poliedro no convexo, con 18 caras y 11 vértices que es ***flexible***
- 1980 Steffen encuentra un contraejemplo simétrico con 14 caras y 9 vértices.

RIGIDEZ

POLIEDROS

Convexas

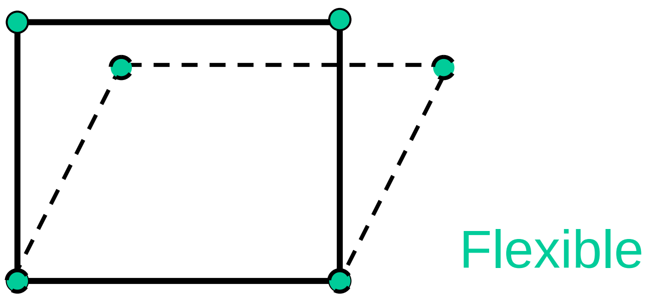
Cóncavas

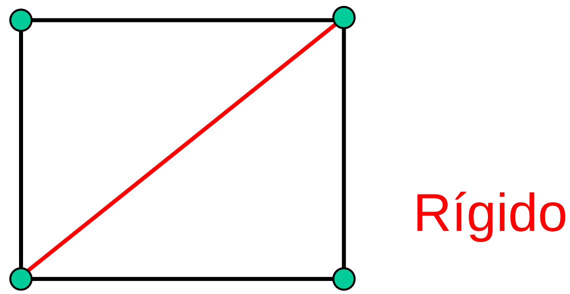


RIGIDEZ

Estructura de barras rígidas $\longrightarrow$ GRAFO

Barras rígidas = aristas Junturas = vértices

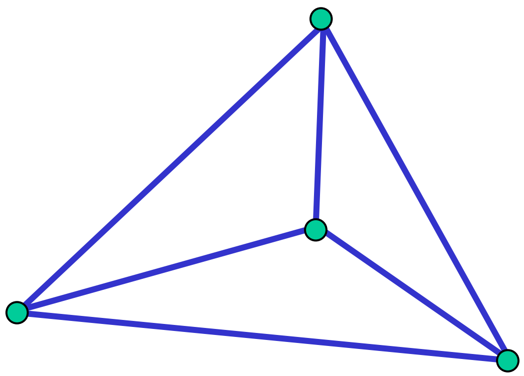




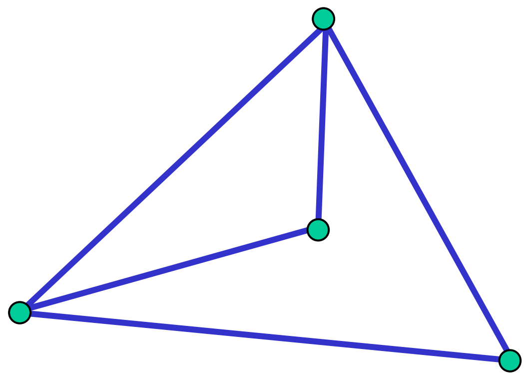
La inmersión es rígida si la estructura sólo permite traslaciones y rotaciones

RIGIDEZ

GRAFOS



Rígido



Minimalmente rígido

Teorema (Streinu ’00)
Toda estructura plana minimalmente rígida se puede representar como una pseudotriangulación puntiaguda.

Teorema (Orden, Santos, Servatius ’03)
Dado un grafo plano G, son equivalentes
(1) G es rígido
(2) G tiene una inmersión como pseudotriangulación en R^2

NO se conoce una caracterización de la rigidez en 3D

Sumario

- **Triángulo**

- **Triangulaciones**
  - Medida del meridiano.
  - Triangulaciones y Geometría Computacional.
  - Combinatoria. Números de Catalan.
  - Construcción.
  - Calidad. Triangulación de Delaunay. Diagrama de Voronoi.
  - 3 D

- **Problemas de Galerías de Arte**

- **Pseudotriangulaciones**
  - Propiedades.
  - Rigidez en poliedros. Rigidez en grafos.
  - **Problema de la regla de carpintero.**

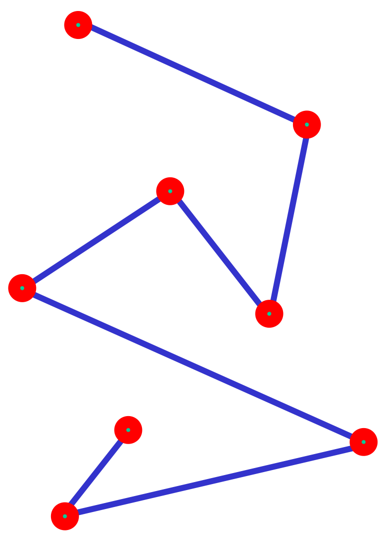
Problema de la “regla de carpintero”

Una poligonal plana, ¿puede rectificarse siempre?

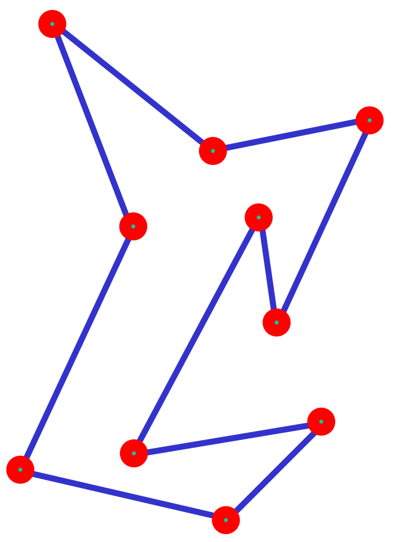
Problema de la “regla de carpintero”

ARMAZÓN (linkage, framework)

ARISTAS barras rígidas
VÉRTICES conexión entre los extremos de las barras



poligonal
cadena

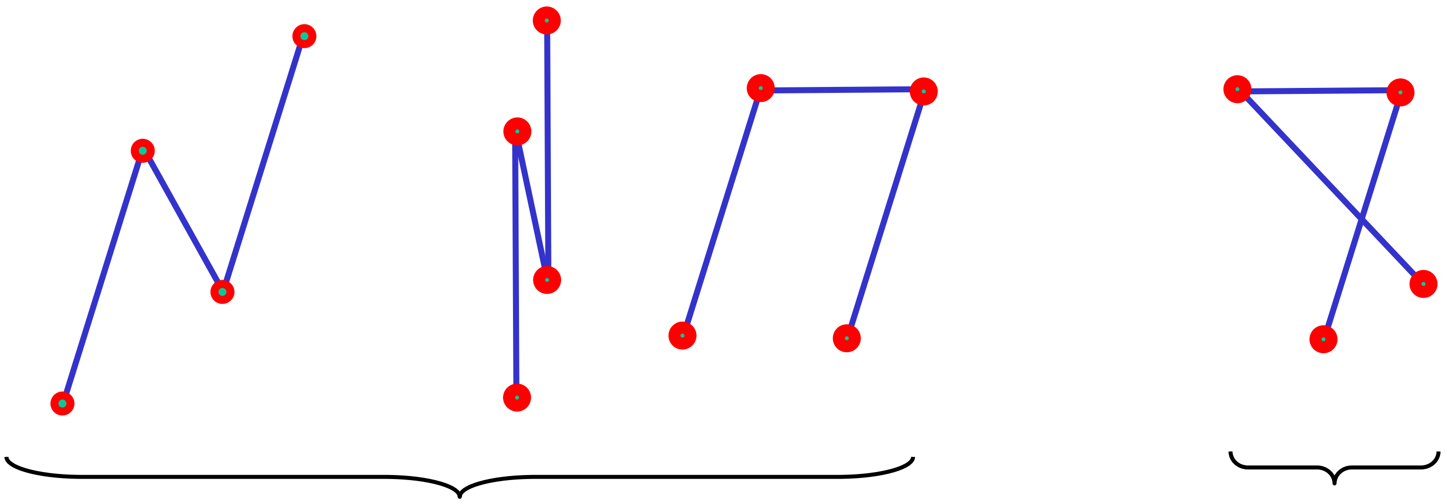


polígono

Problema de la “regla de carpintero”

Configuración   Posición de los vértices que conservan las longitudes de las aristas

Interesan las configuraciones sin cortes (sin autointersecciones)

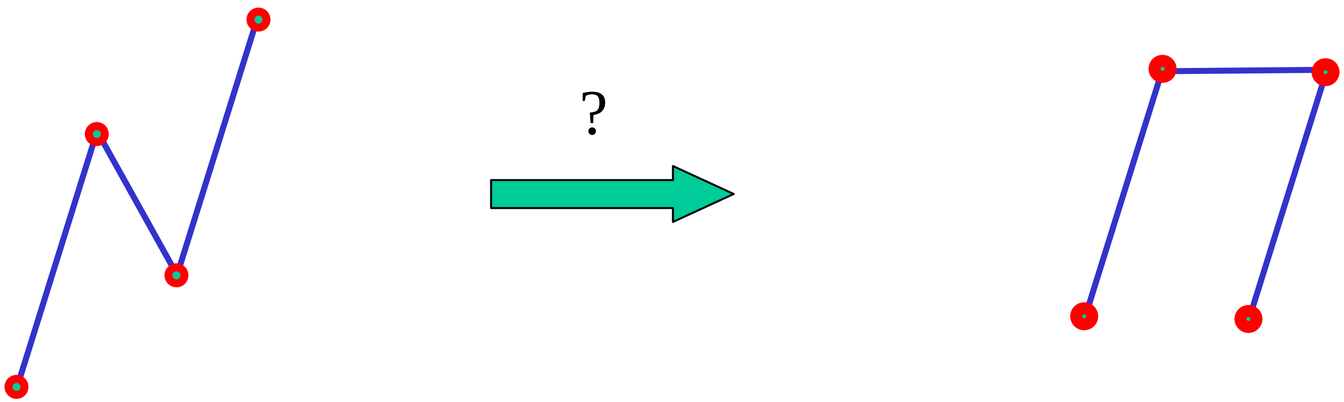


configuraciones sin cortes

autointersección

Problema de la “regla de carpintero”

(1) ¿Podemos mover un armazón entre dos configuraciones sin cortes



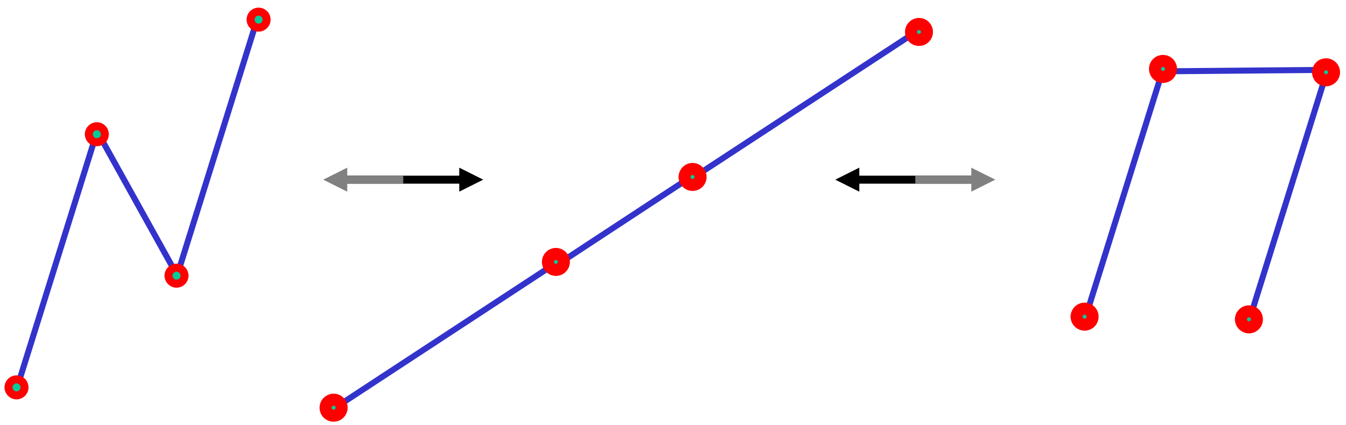
Problema de la “regla de carpintero”

(1) ¿Podemos mover un armazón entre dos configuraciones sin cortes

(2) ¿Toda configuración sin cortes puede desplegarse?

Moverse a una configuración canónica

- Las preguntas son equivalentes



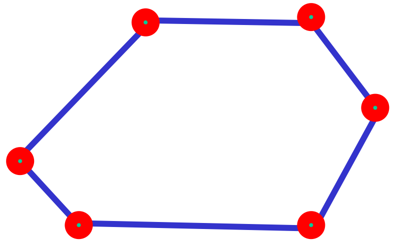
Problema de la “regla de carpintero”

Configuraciones canónicas

Cadena poligonal

rectilínea

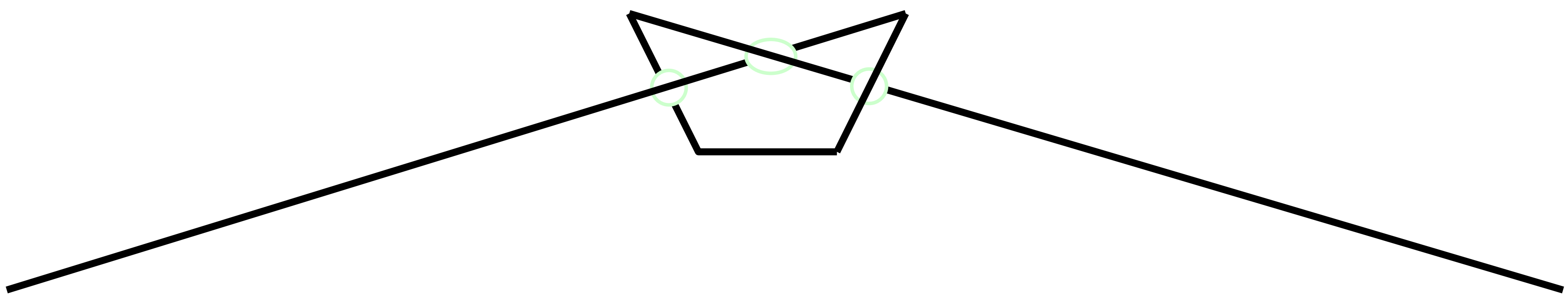
Polígono



convexo

Problema de la “regla de carpintero”

En 3D hay cadenas bloqueadas, no se pueden rectificar.



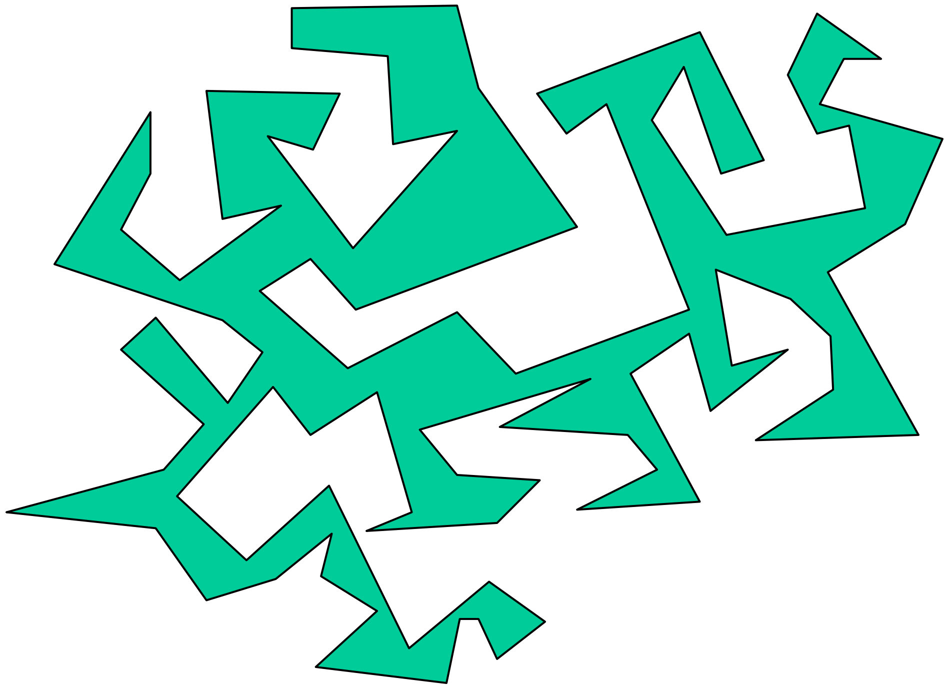
Problema de la "regla de carpintero"

- ¿Toda cadena es rectificable?
- ¿Todo polígono puede desplegarse a posición convexa?

	Cadenas	Polígonos
2D	Sí	Sí
3D	No	No
4D +	Sí	Sí

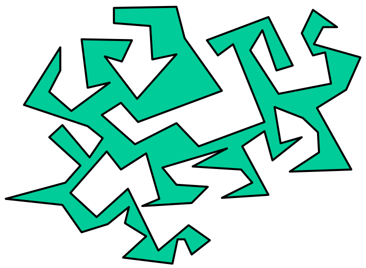
Problema de la “regla de carpintero”

En 2D toda cadena poligonal puede rectificarse y todo polígono puede desplegarse a posición convexa sin solapamientos o autointersecciones.



Problema de la “regla de carpintero”

Dado cualquier polígono simple en R^2 ¿puede desplegarse, sin solapamientos, a posición convexa?

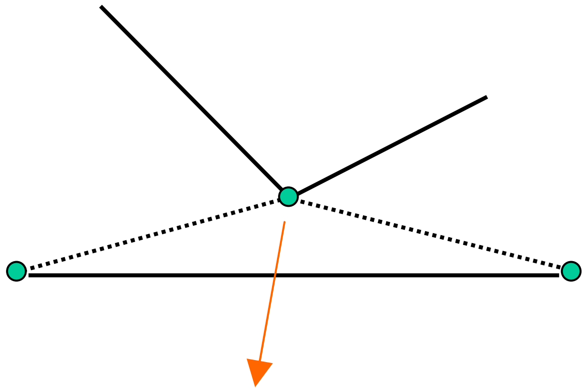


2000 Connelly, Demaine, Rote
Streinu (solución algorítmica)

Ideas clave

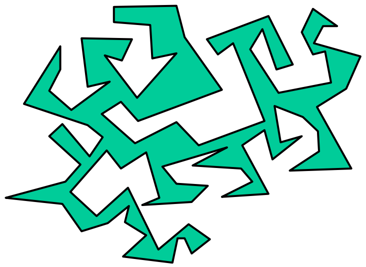
- MOVIMIENTOS EXPANSIVOS
La distancia entre vértices no disminuye

¡no se producen cortes!



Problema de la “regla de carpintero”

Dado cualquier polígono simple en R^2 ¿puede desplegarse, sin solapamientos, a posición convexa?



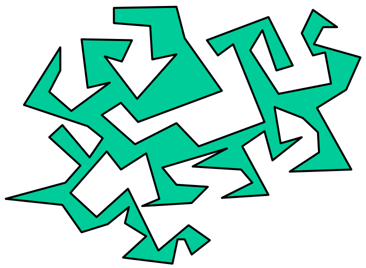
2000 Connelly, Demaine, Rote
Streinu (solución algorítmica)

Ideas clave

- MOVIMIENTOS EXPANSIVOS
  La distancia entre vértices no disminuye
- PSEUDOTRIANGULACIONES PUNTIAGUDAS

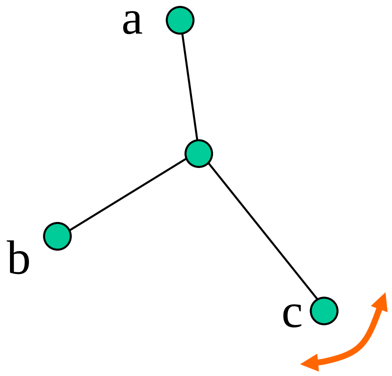
Problema de la “regla de carpintero”

Dado cualquier polígono simple en R^2 ¿puede desplegarse, sin solapamientos, a posición convexa?



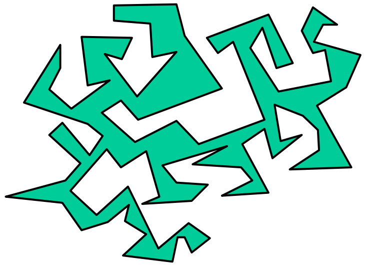
Un grafo no tiene movimientos expansivos si:

(1) Tiene un vértice no puntiagudo



Problema de la “regla de carpintero”

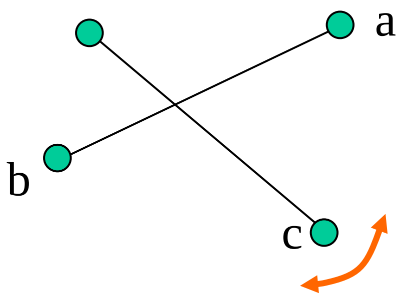
Dado cualquier polígono simple en R^2 ¿puede desplegarse, sin solapamientos, a posición convexa?



Un grafo no tiene movimientos expansivos si:

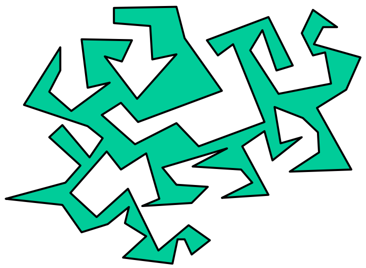
(1) Tiene un vértice no puntiagudo

(2) Hay cruce de aristas



Problema de la “regla de carpintero”

Dado cualquier polígono simple en R^2 ¿puede desplegarse, sin solapamientos, a posición convexa?

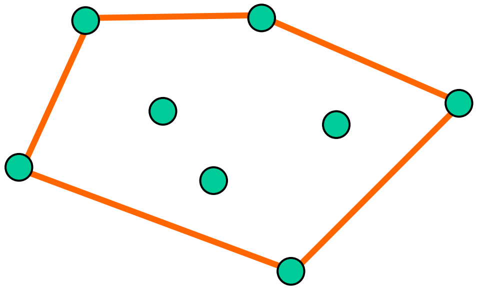


Un grafo no tiene movimientos expansivos si:

(1) Tiene un vértice no puntiagudo

(2) Hay cruce de aristas

(3) Se usan todas las aristas del borde



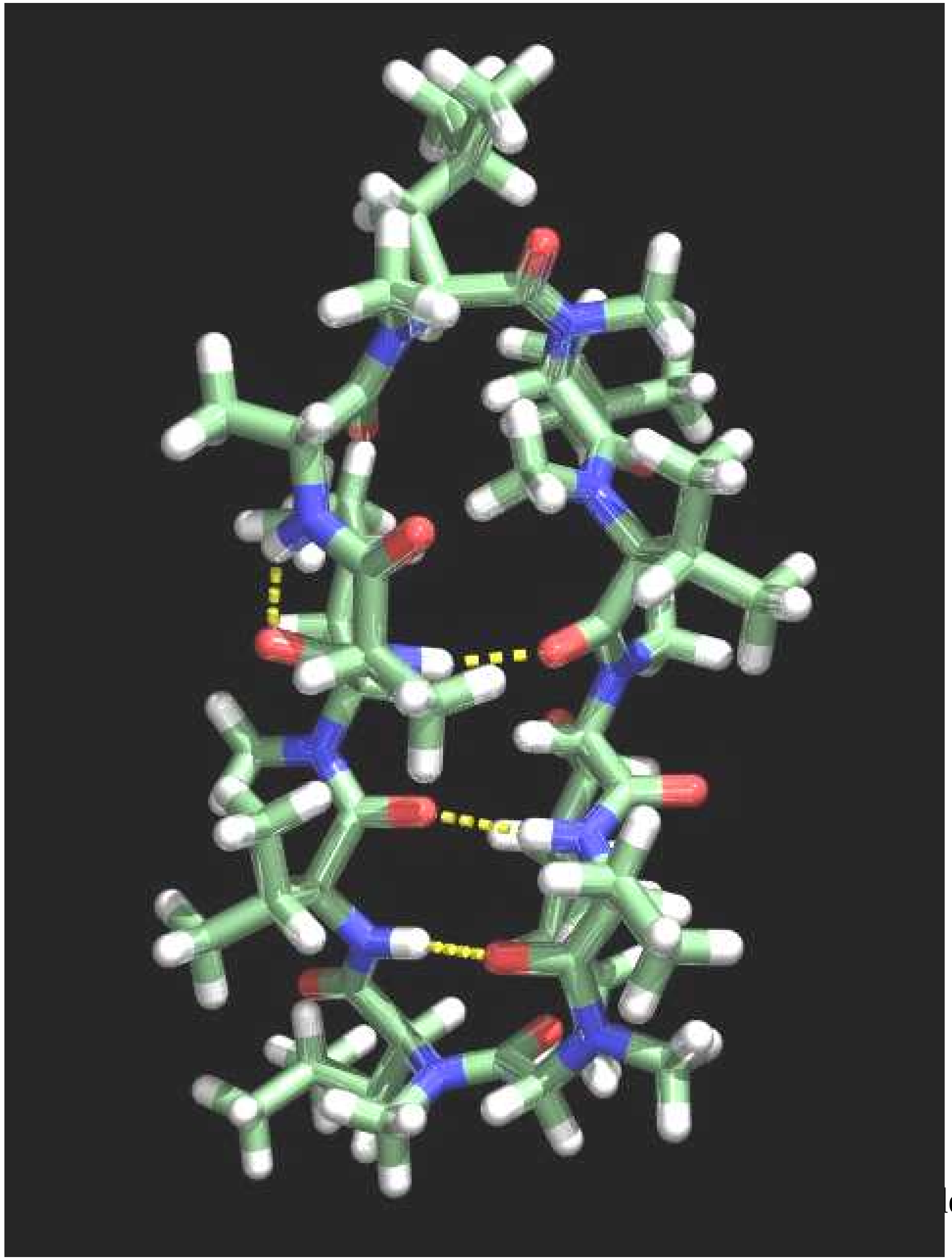
Problema de la “regla de carpintero”

Dado cualquier polígono simple en R^2 ¿puede desplegarse, sin solapamientos, a posición convexa?

ALGORITMO (Streinu ’00)

Dado un polígono simple no convexo

(1) Completar a una pseudotriangulación puntiaguda.
(2) Elegir y eliminar una arista del borde que no sea del polígono.
(3) Mover el mecanismo a lo largo de la trayectoria expansiva.
(4) Parar cuando el grafo no sea puntiagudo.
(5) Realizar un flip local para volver a grafo puntiagudo. Volver a (3).



Si pedimos que los ángulos también sean invariables ...

Grandes moléculas, polímeros, proteínas

Geometría Computacional

- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry*, Springer, 1997
- http://www.geometryalgorithms.com/
- http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomcomp/aplicaciones.html

Galerías de Arte

- J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, Handbook on Computational Geometry, (J.-R. Sack, J. Urrutia, ed.) Elsevier, 2000
- http://www.matem.unam.mx/~urrutia/ (Jorge Urrutia)

Pseudotriangulaciones

- http://theory.csail.mit.edu/~edemaine/linkage/ (Erik Demaine)
- http://www2.uah.es/ordend/ (David Orden)
- http://www.cs.smith.edu/~streinu (Ileana Streinu)