Universidad Nacional
de San Luis

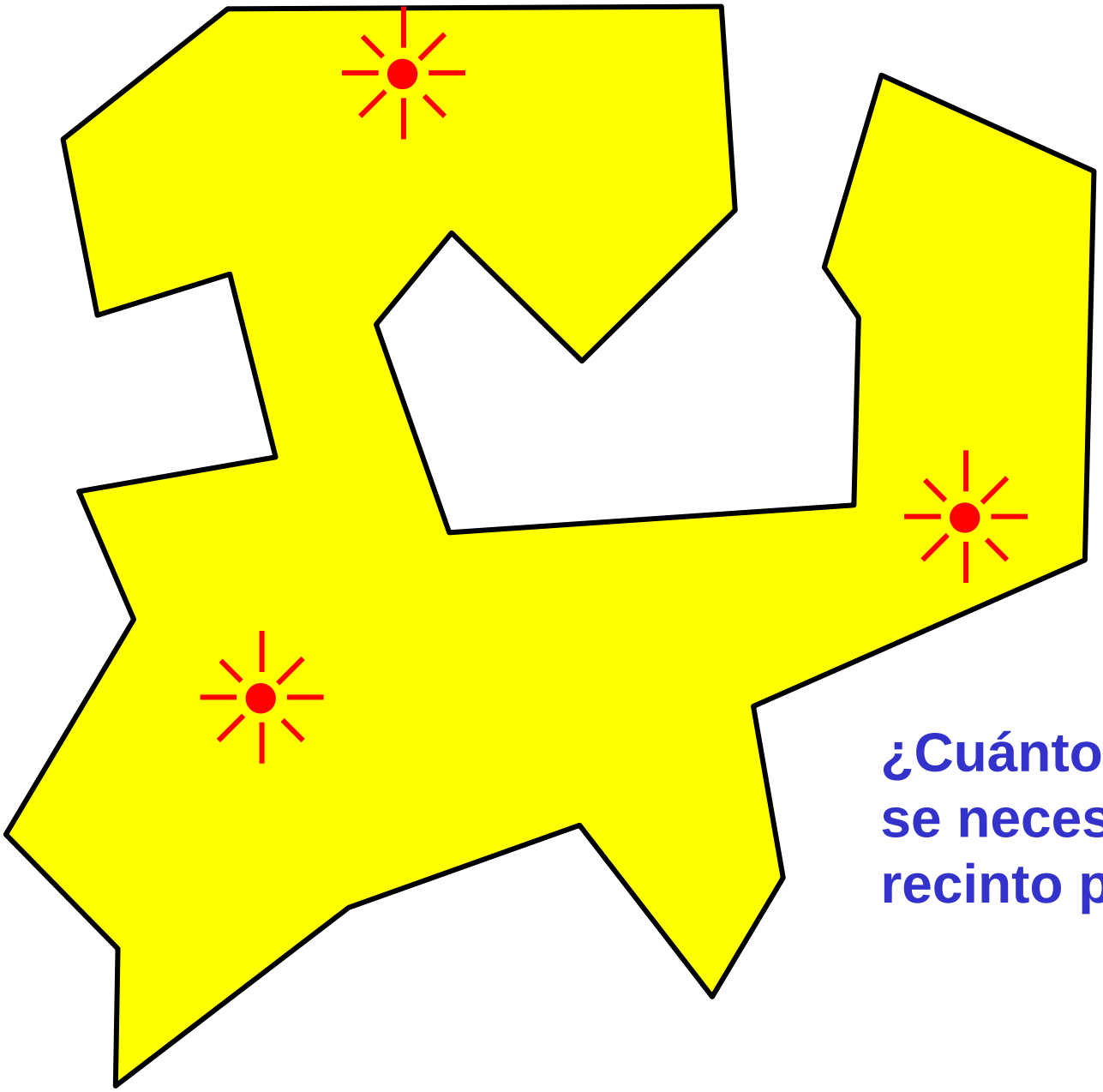
PROBLEMAS DE ILUMINACIÓN

Gregorio Hernández Peñalver

Universidad Politécnica de Madrid

19 octubre 2006

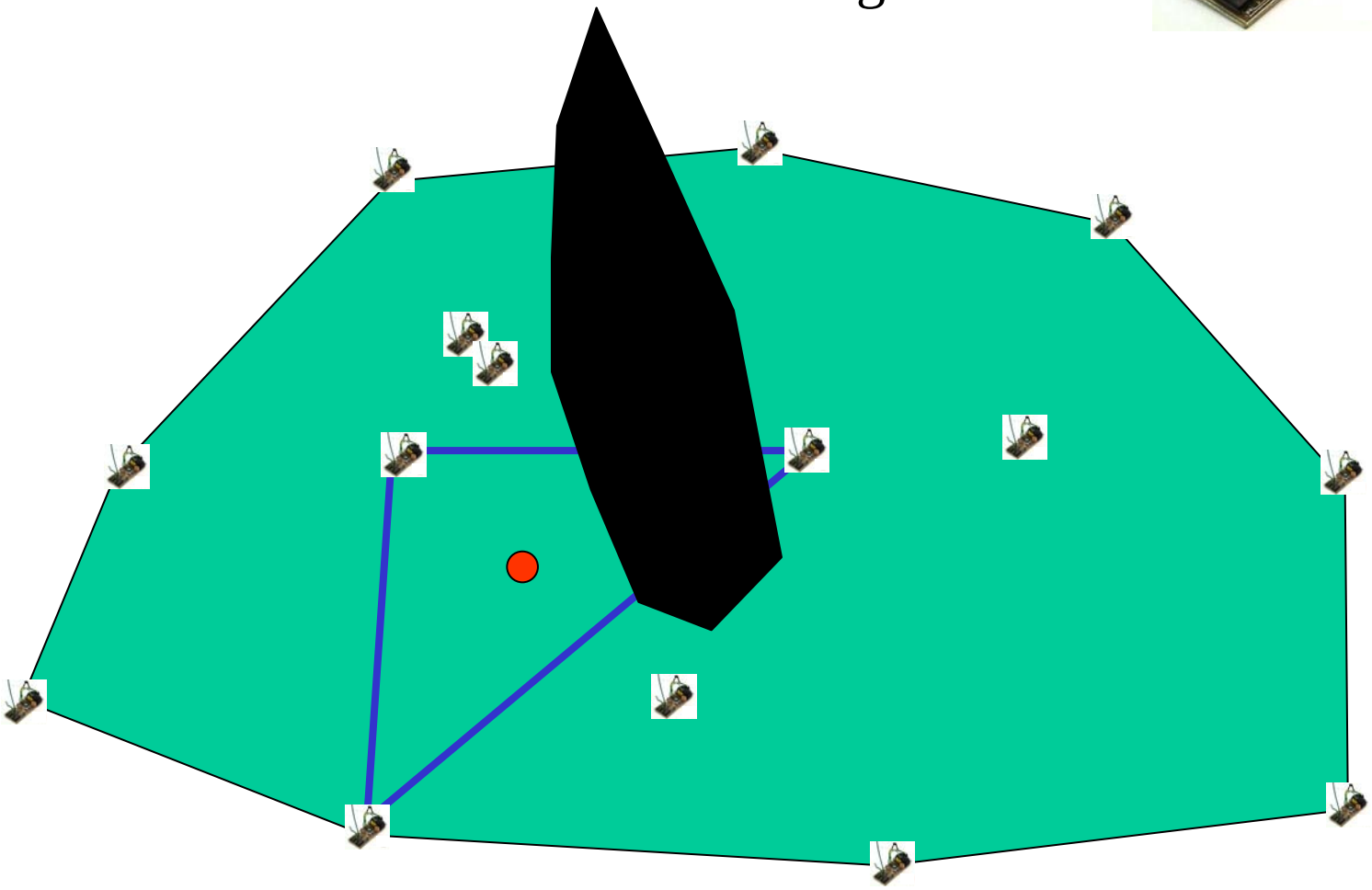
¿Cuántos vigilantes se necesitan?



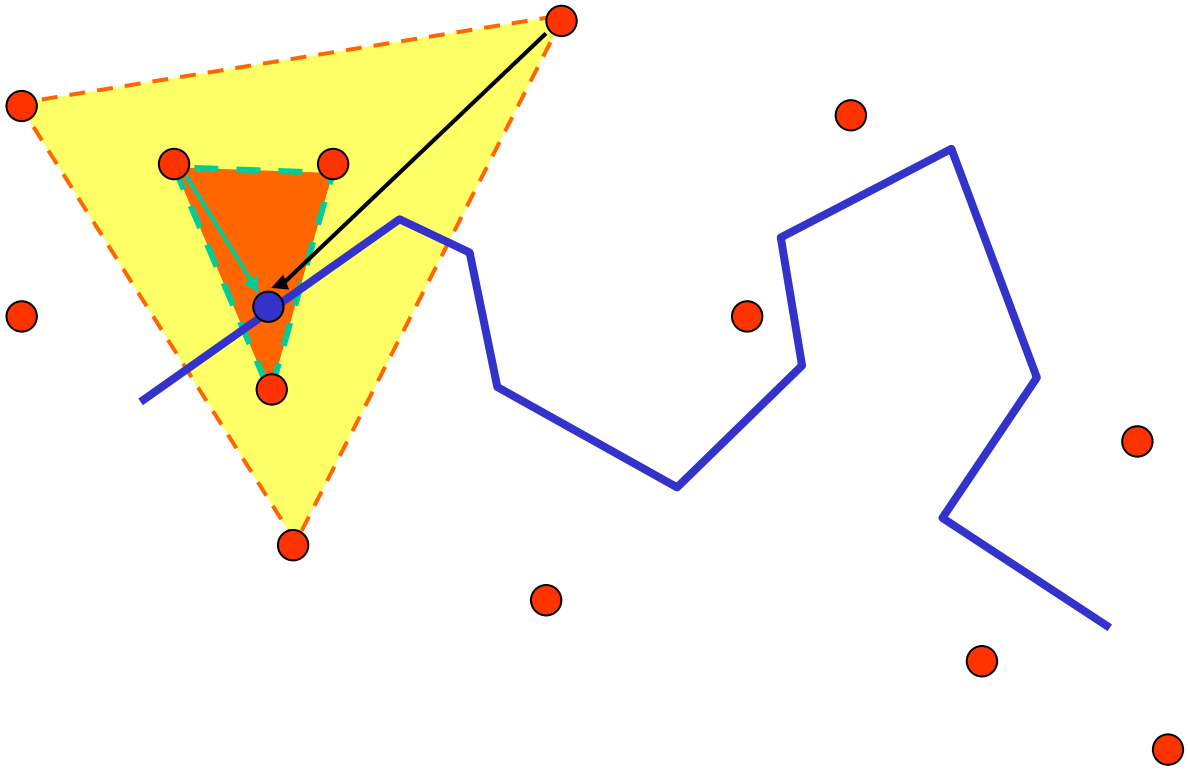
¿Cuántos vigilantes se necesitan en un recinto poligonal?

UBICANDO REDES DE SENSORES

Los sensores deben ver “bien” toda la región

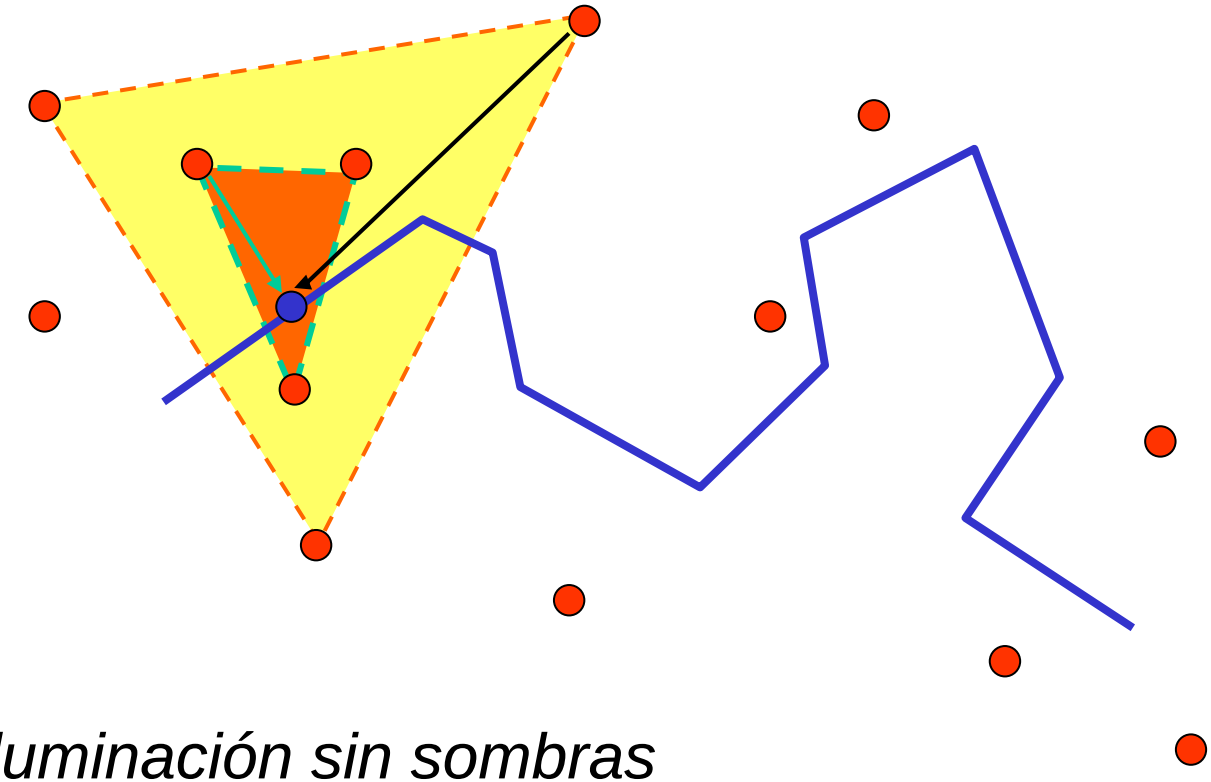


ILUMINANDO BIEN UNA TRAYECTORIA



Iluminar cada punto con un triángulo de focos minimizando la potencia empleada

ILUMINANDO BIEN UNA TRAYECTORIA



- *Iluminación sin sombras*
- *Buena cobertura por radiofrecuencia*
- *Localización geográfica con sensores*

Sumario

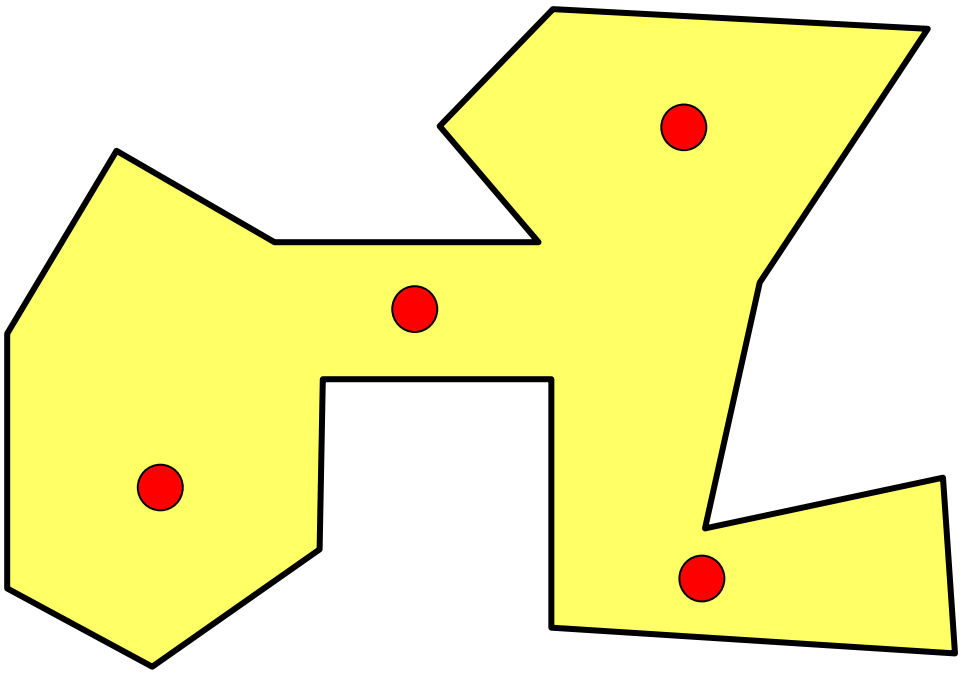
- Resolvamos “El Problema de Galerías de Arte”
- Algunas variantes
- Soluciones aproximadas

Iluminación de calidad

- Criterios
- Alcance limitado + Buena iluminación

Ubicación de redes de sensores
Iluminación de trayectorias

Galerías de Arte

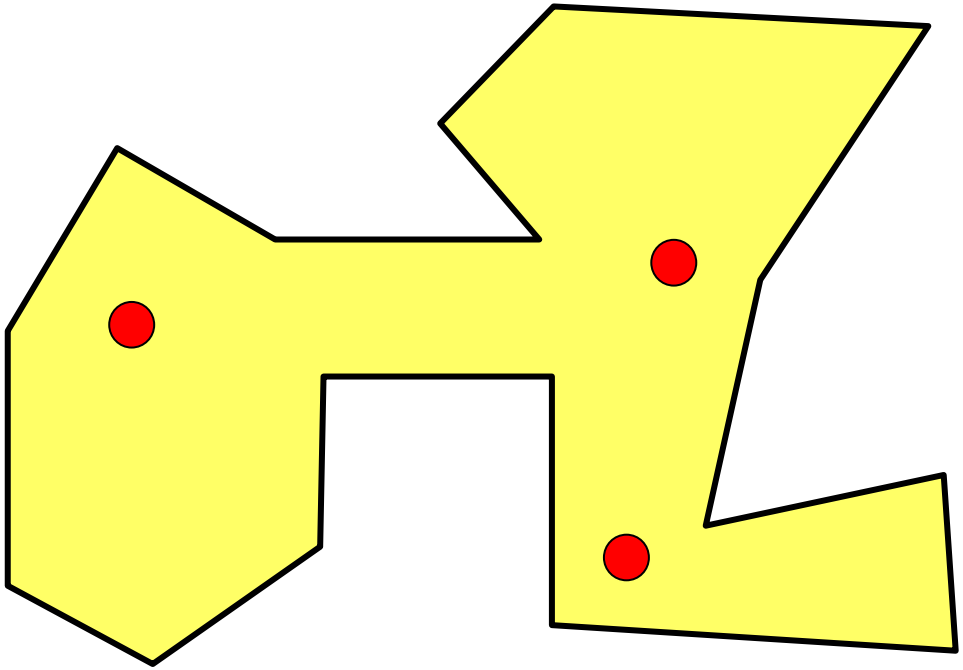


Victor Klee, 1973

¿Cuántas luces?
¿Cuántos guardias?

PROBLEMA DE LAS GALERÍAS DE ARTE

Galerías de Arte

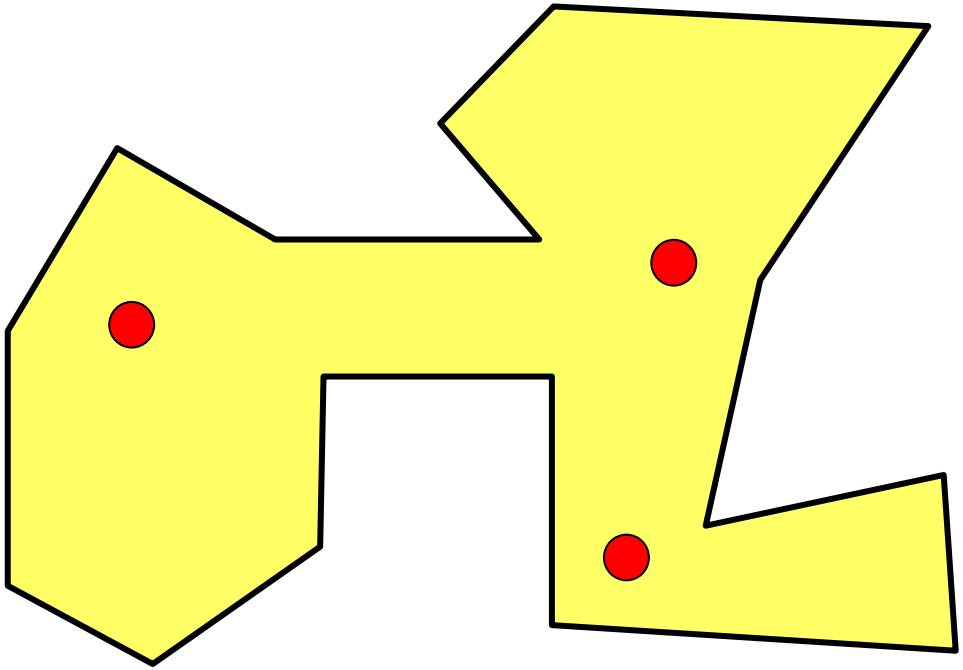


PROBLEMA ALGORÍTMICO

... es NP-completo
Lee-Lin, 1979

Dado un polígono P de n lados, decidir cuántos guardias son necesarios para vigilar P y dónde se deben ubicar.

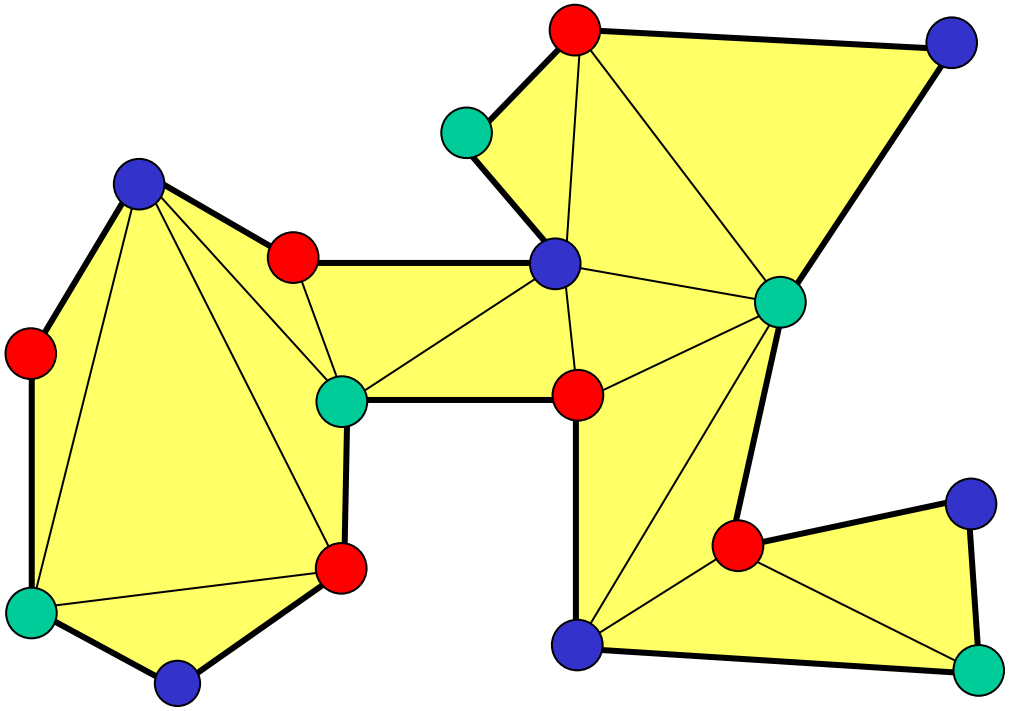
Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Dado n, ¿cuál es el número de guardias suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados?

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Chvátal, 1975

Fisk, 1978

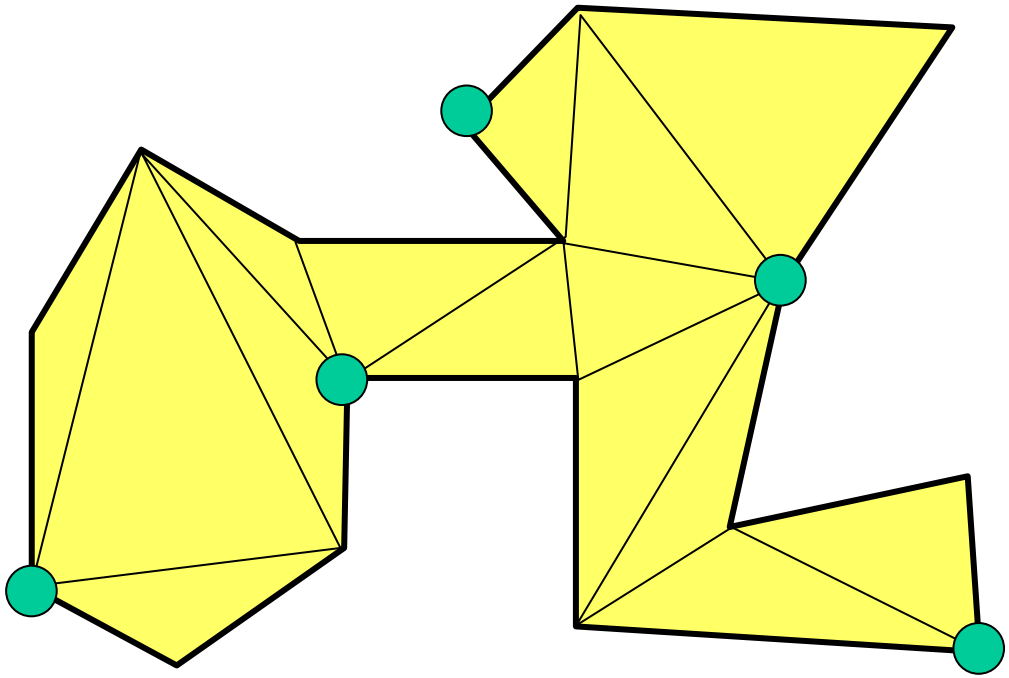
R + A + V = n

1) Triangular el polígono

2) Colorear el grafo con tres colores

3) Colocar guardias en el color menos utilizado

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Chvátal, 1975

Fisk, 1978

$$R + A + V = n$$

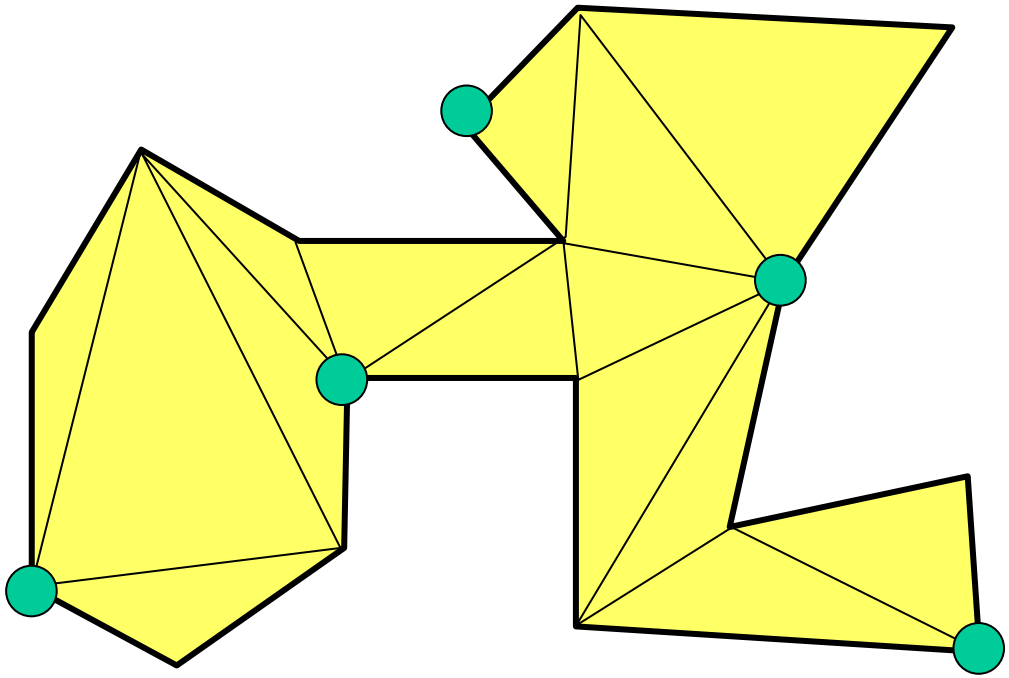
$$V \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

1) Triangular el polígono

2) Colorear el grafo con tres colores

3) Colocar guardias en el color menos utilizado

Galerías de Arte



PROBLEMA COMBINATORIO

Chvátal, 1975

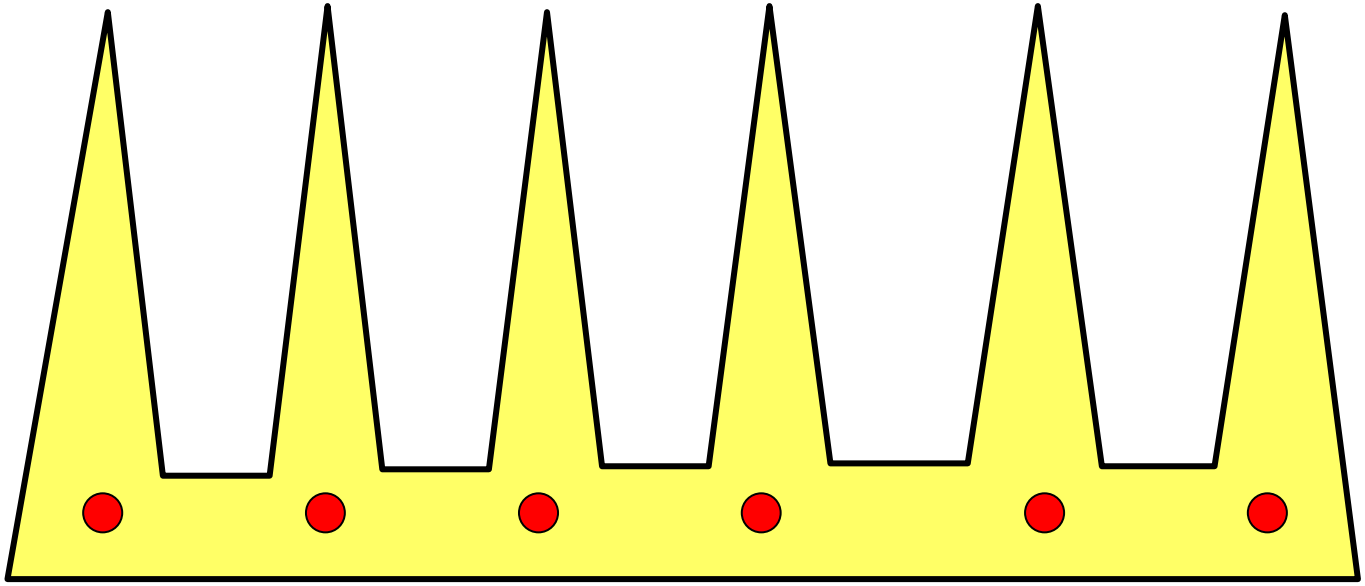
Fisk, 1978

$$R + A + V = n$$

$$V \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

"Todo polígono de n lados puede vigilarse con $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardias"

Galerías de Arte



Teorema

$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

Galerías de Arte

VARIANTES

En el objeto a vigilar o iluminar

- polígonos ortogonales, monótonos, ..., con agujeros
- interior o exterior
- configuraciones de objetos

En la forma de vigilar o iluminar

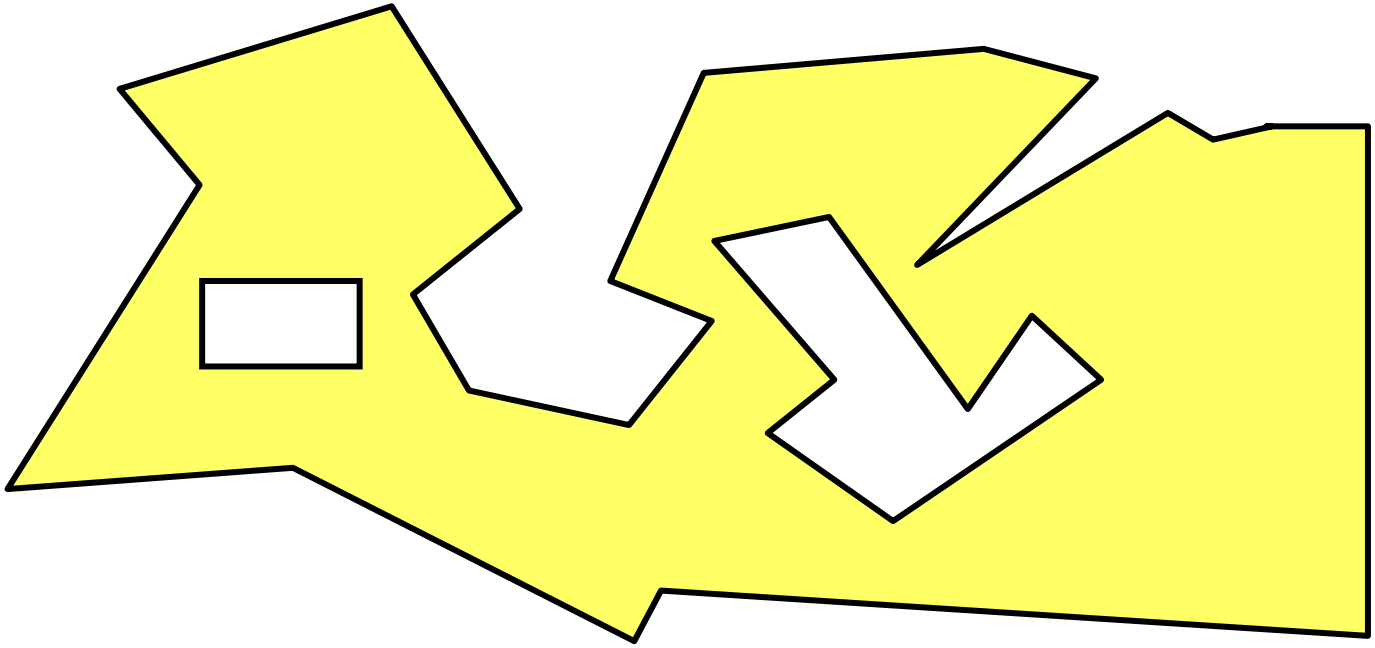
- desde vértices o puntos interiores
- guardias móviles
- reflectores de amplitud limitada
- reflectores de alcance limitado

Rutas de vigilancia

Galerías de Arte

Polígonos con agujeros

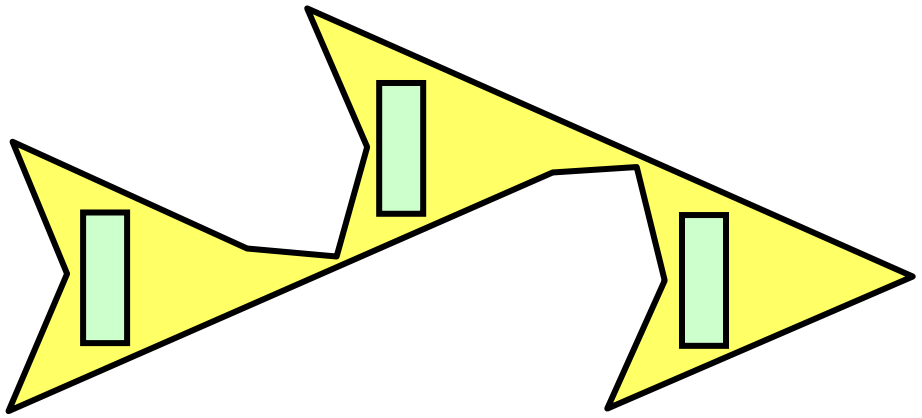
Hoffman, Kaufman, Kriegel
Björling, Souvaine, 1991



Galerías de Arte

Polígonos con agujeros HKK, BS, 1991

$\lceil (n+h)/3 \rceil$ guardias-punto siempre son suficientes y, a veces, necesarios para vigilar cualquier polígono de n vértices y h agujeros

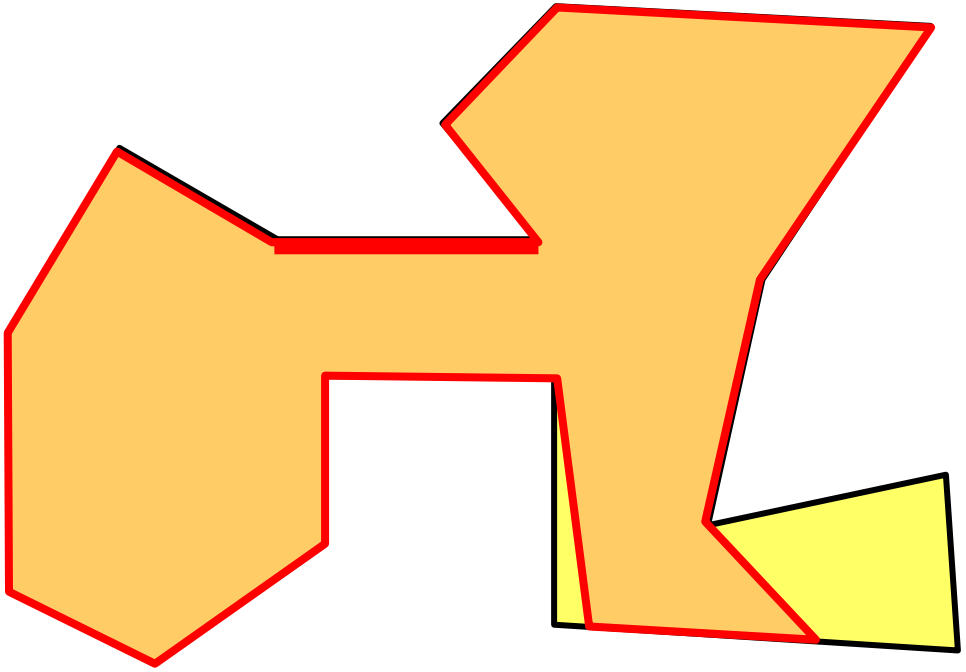


¿Qué sucede si los guardias se colocan en los vértices?

..... abierto!

Galerías de Arte

Guardias-lado



Conjetura (Toussaint, 1981)

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

Galerías de Arte

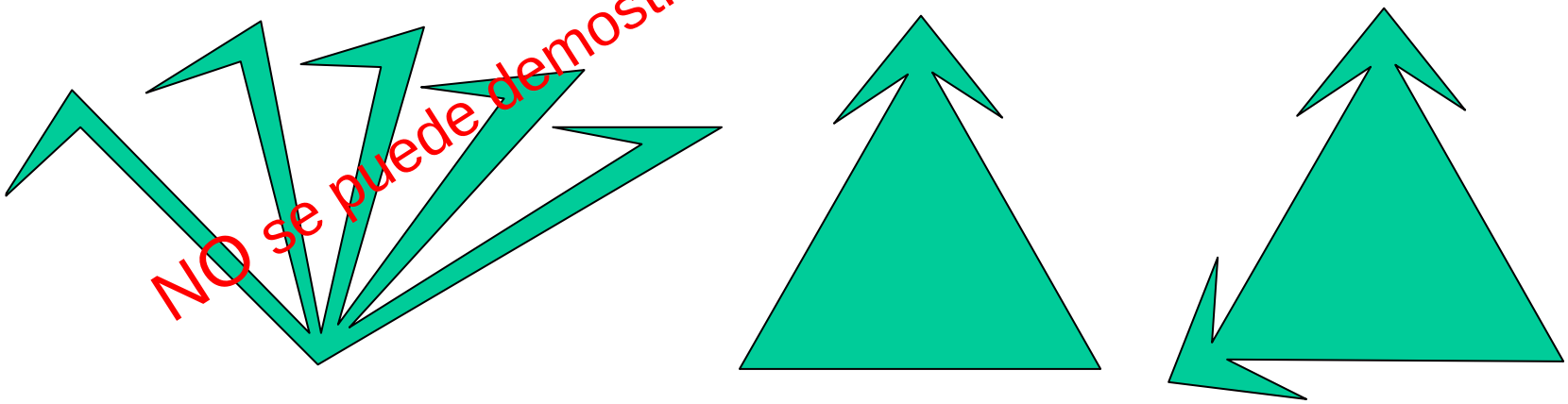
Guardias-lado

Conjetura (Toussaint, 1981)

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

NO se puede demostrar triangulando

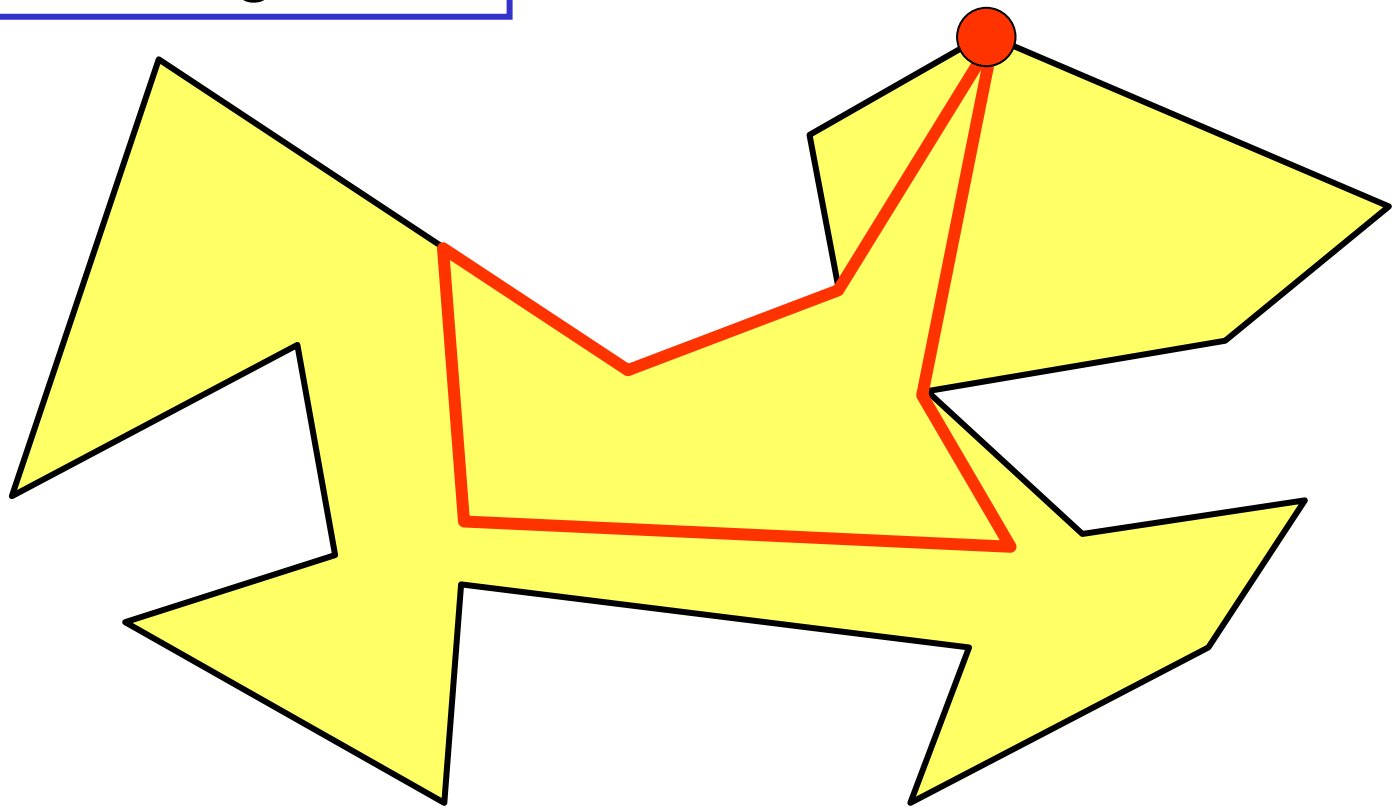
... salvo estos ejemplos



Galerías de Arte

Rutas de vigilancia

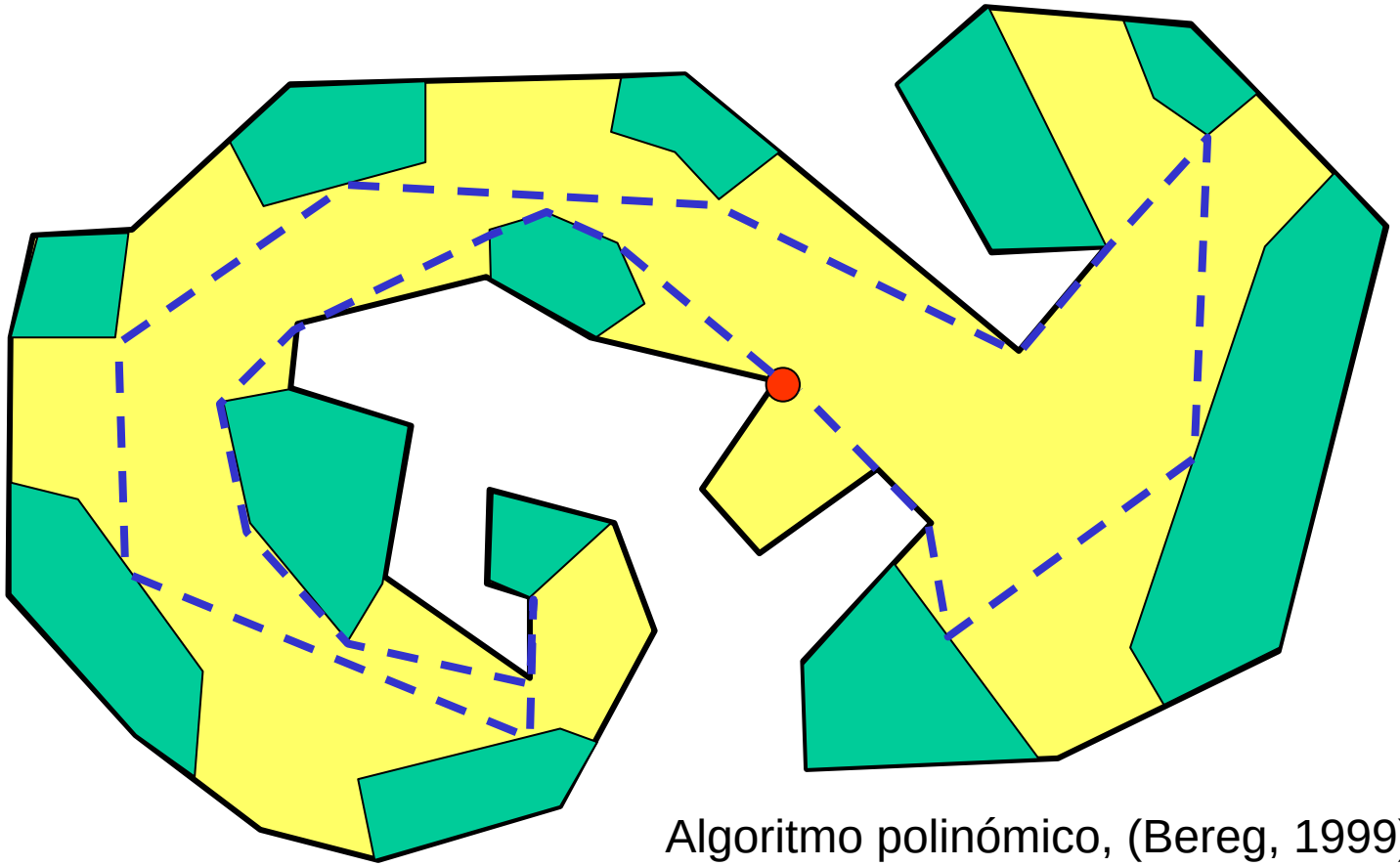
Chin, Ntafos, 1988



Algoritmo polinómico, (Chin, Ntafos, 1992)
NP-duro si hay agujeros

Galerías de Arte

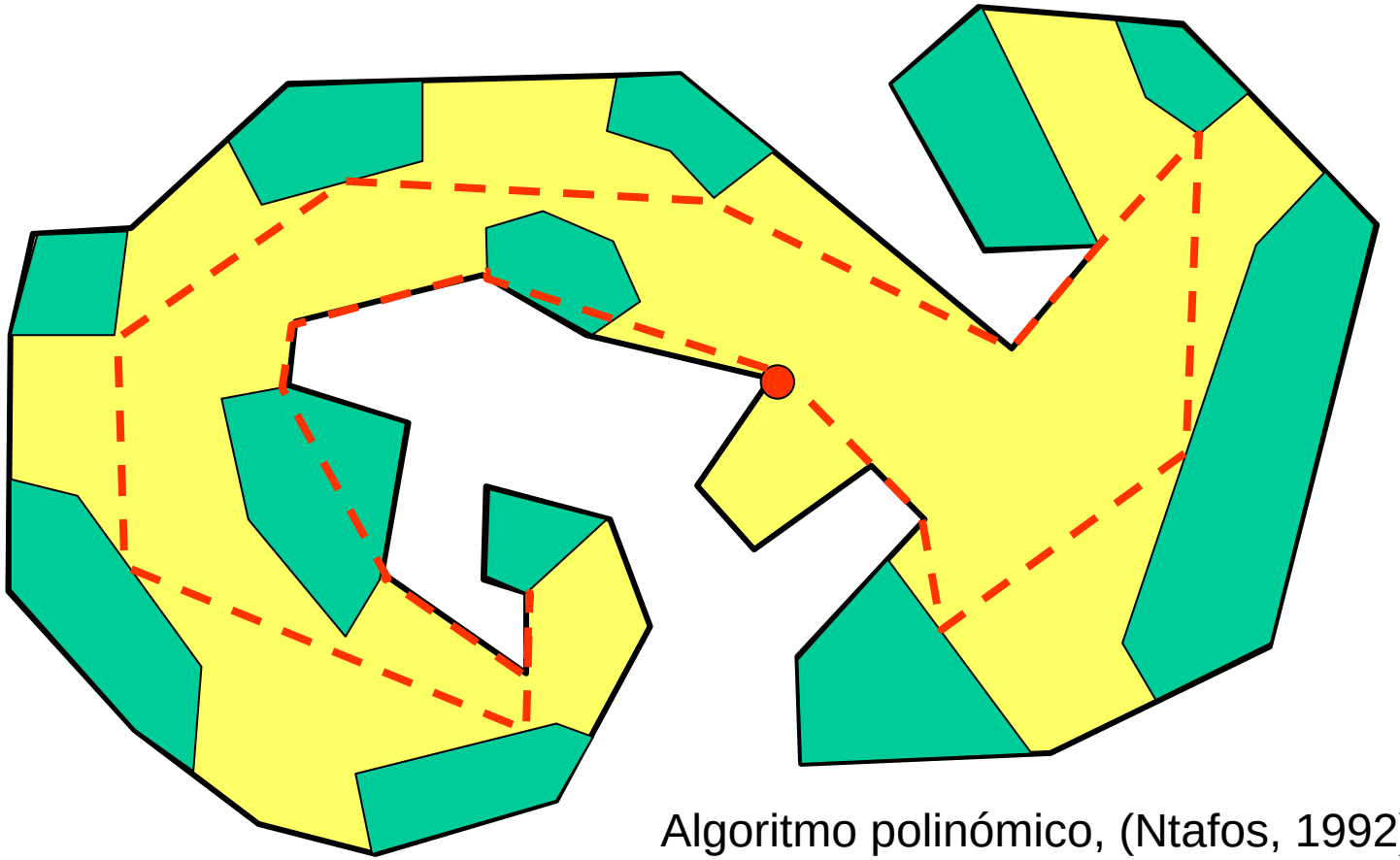
PROBLEMA DEL ZOO



Algoritmo polinómico, (Bereg, 1999)
NP-duro si las jaulas están en el interior

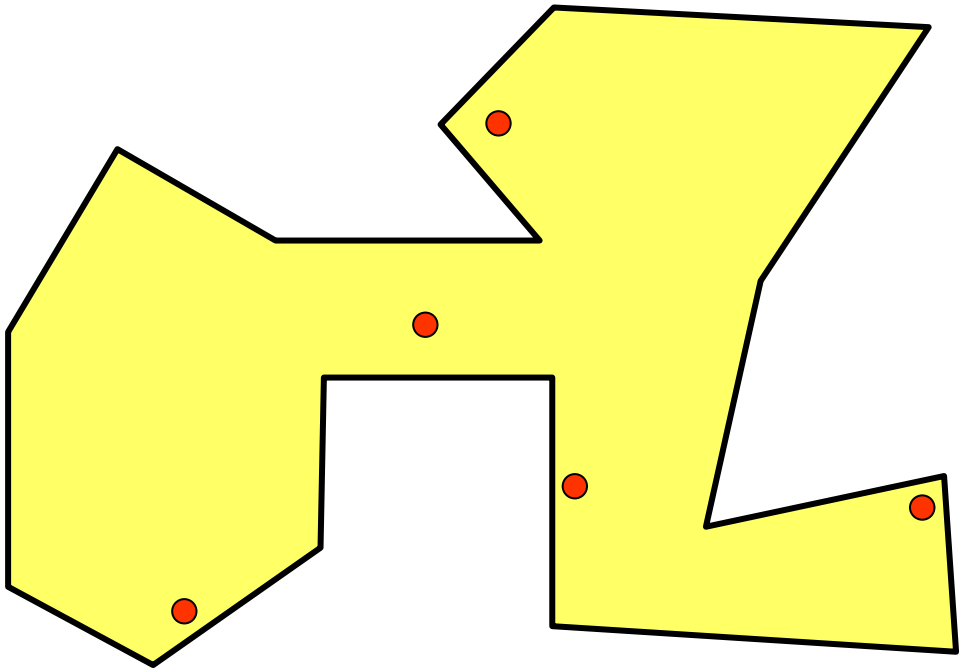
Galerías de Arte

PROBLEMA DEL SAFARI



Algoritmo polinómico, (Ntafos, 1992)
NP-duro si las zonas son interiores

Galerías de Arte



Problema inverso

ESCONDER PUNTOS

Dado P, ¿cuántos puntos podemos esconder?
¿cuántos vértices podemos esconder?

NP-duros

Galerías de Arte

ALGORITMOS APROXIMADOS

MINIMIZAR el número de guardias necesario para vigilar un polígono dado P, es un problema NP-completo en casi todas las variantes de vigilancia

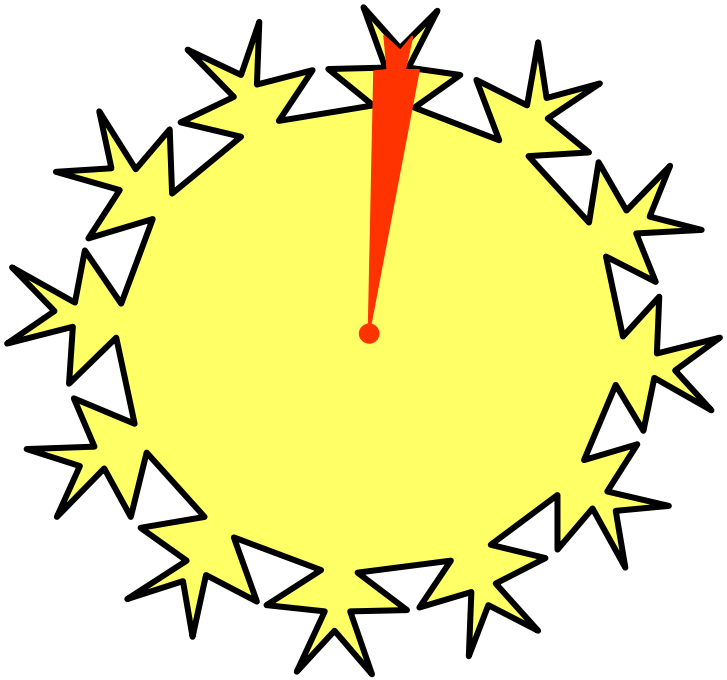
Ghosh, 1987
Algoritmo tipo “voraz”, de complejidad $O(n^5 \log n)$ que encuentra un conjunto de guardias-vértice (-lado) en un polígono sin(con) agujeros de tamaño a lo más $O(\log n)$ veces el óptimo.

Un algoritmo aproximado A para un problema de minimización es de razón c si $sol(A) \leq c\ sol(\text{óptima})$

Galerías de Arte

ALGORITMOS APROXIMADOS

MINIMIZAR el número de guardias necesario para vigilar un polígono dado P, es un problema NP-completo en casi todas las variantes de vigilancia



La estrategia “ávida” o “voraz” consigue una 4-aproximación

Galerías de Arte

ALGORITMOS APROXIMADOS

Resultados de inaproximabilidad, Eidenbenz, 2000

- Polígonos sin agujeros con guardias vértice/lado/punto es APX-duro

  Existe $\varepsilon>0$ tal que ningún algoritmo mejora la razón $1+\varepsilon$

  Por reducción desde Max-5-Ocurrence-3-Sat

- Polígonos con agujeros con guardias vértice/lado/punto es (logn)-duro

  No existe algoritmo que alcance razón mejor que O(logn)

  El problema es (logn)-completo para vértice/lado

ALGORITMOS APROXIMADOS

Resultados de inaproximabilidad, Eidenbenz, 2000

- Construir el máximo conjunto de vértices/puntos ocultos es APX-duro
- El mejor algoritmo aproximado alcanza una razón O(n)

Dado P, ¿cuántos puntos podemos esconder?
¿cuántos vértices podemos esconder?

NP-duros

Galerías de Arte

ALGORITMOS APROXIMADOS

Efrat, Har-Peled, 2002

- Algoritmo $O(nc^2 \log^4 n)$ que garantiza un conjunto de guardias- vértice de cardinal $O(\log c)$ veces el óptimo c

Cheong, Efrat, Har-Peled, 2003

- Maximizan el área vista por un punto. Algoritmo aleatorizado
  Si M es el área máxima, para cada $\delta>0$ encuentran un guardia que vigila un área $(1-\delta)M$ en tiempo $O(n^2/\delta^4)\log^3(n/\delta))$
- Con un algoritmo tipo "voraz" encuentran k "buenos guardias" en tiempo $O(k^3\, n^2/\delta^4)\log^3(n/\delta))$

Galerías de Arte

ALGORITMOS APROXIMADOS

Canales, 2004 (Abellanas, Alba, H., ’06)

- Metaheurísticas: Recocido simulado y algoritmos genéticos
- Dado un polígono P, hallar el punto x que maximiza Vis(x,P)
- Dado un polígono P, hallar k puntos en P, $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, que maximicen $\cup Vis(x_j,P)$
- Dado un polígono P, minimizar el número de guardias que lo vigilan

Galerías de Arte

ALGORITMOS APROXIMADOS

Canales, 2004 (Abellanas, Alba, H., ’06)

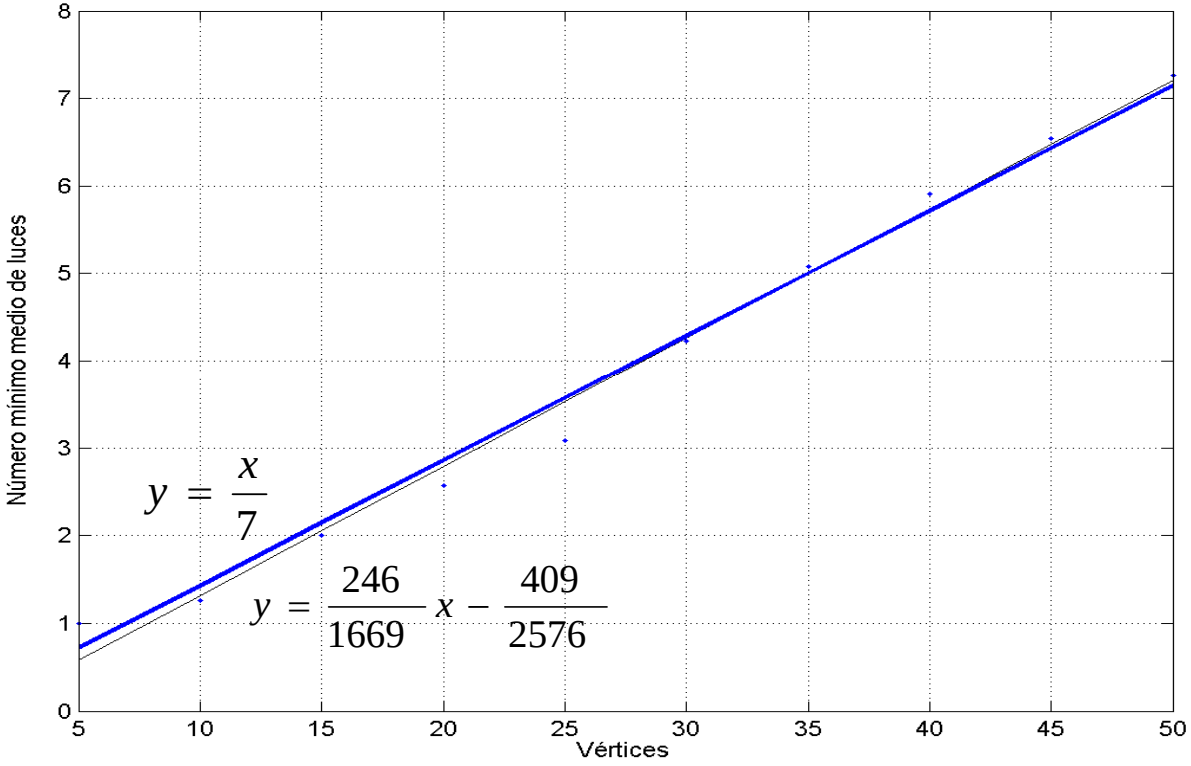
- Metaheurísticas: Recocido simulado y algoritmos genéticos

Resultados

- Recocido simulado obtiene mejores resultados, aunque la convergencia es buena en ambas estrategias
- En media, el nº mínimo de guardias necesarios para vigilar un polígono de n vértices es, aproximadamente, $n / 7$

Galerías de Arte

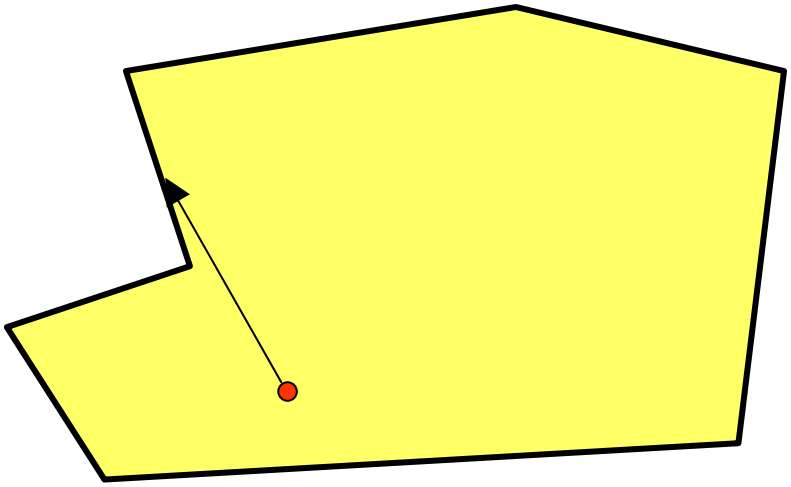
ALGORITMOS APROXIMADOS



$$y = \frac{246}{1669}x - \frac{409}{2576} \approx \frac{x}{6.78} - 0.15 \approx \frac{x}{7}$$

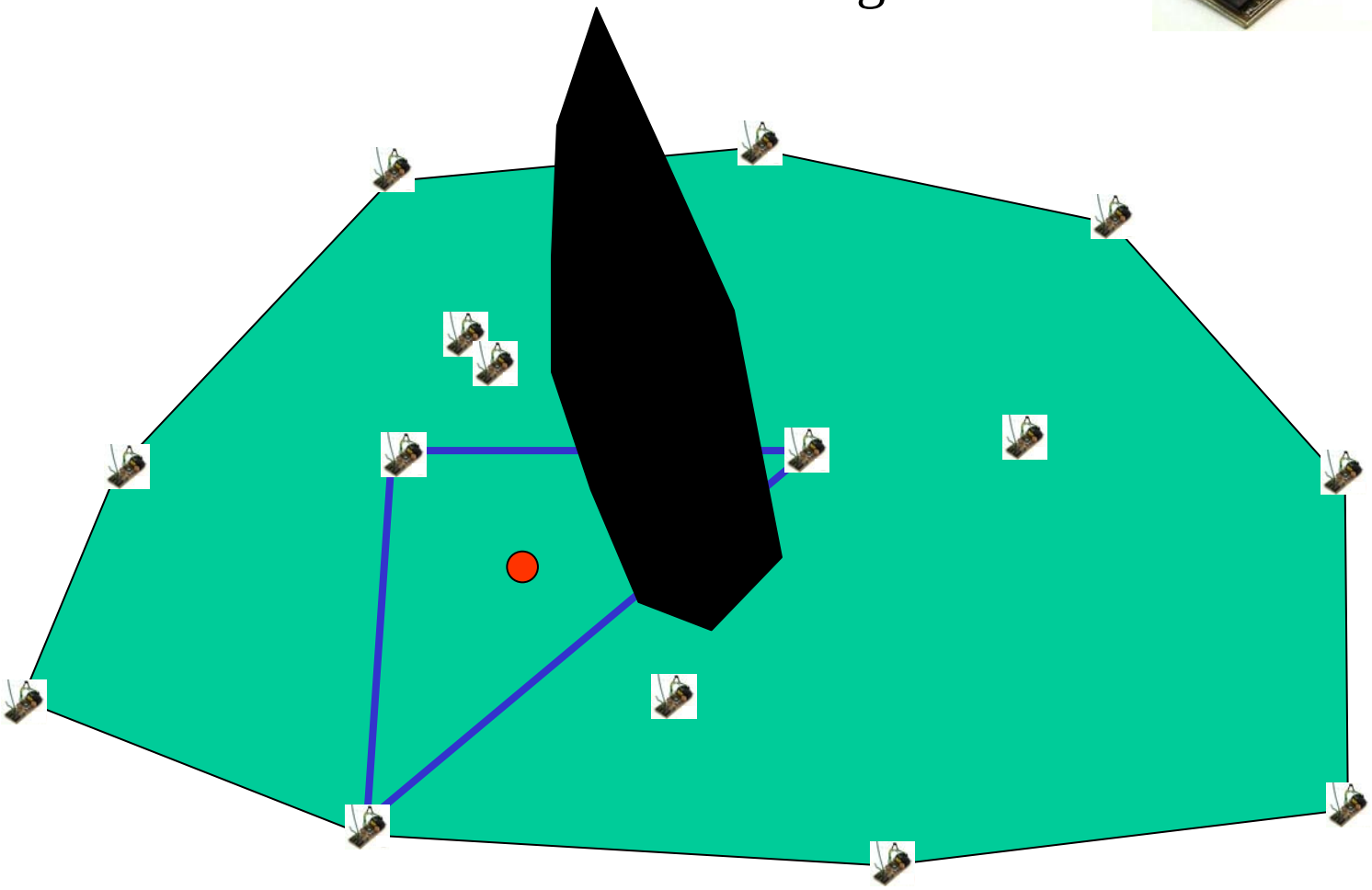
ILUMINACIÓN DE CALIDAD

- ÁNGULO DE ILUMINACIÓN
- ALCANCE LIMITADO DE LOS FOCOS
- ILUMINACIÓN ALREDEDOR DEL OBJETO



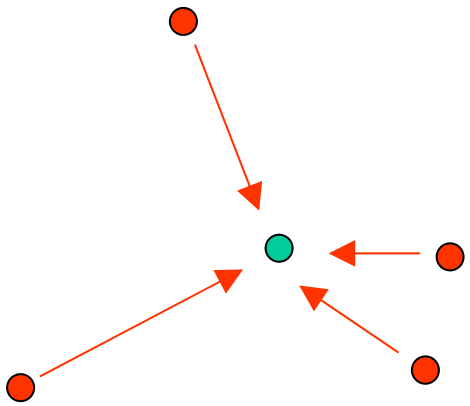
UBICANDO REDES DE SENSORES

Los sensores deben ver “bien” toda la región



BUENA ILUMINACIÓN

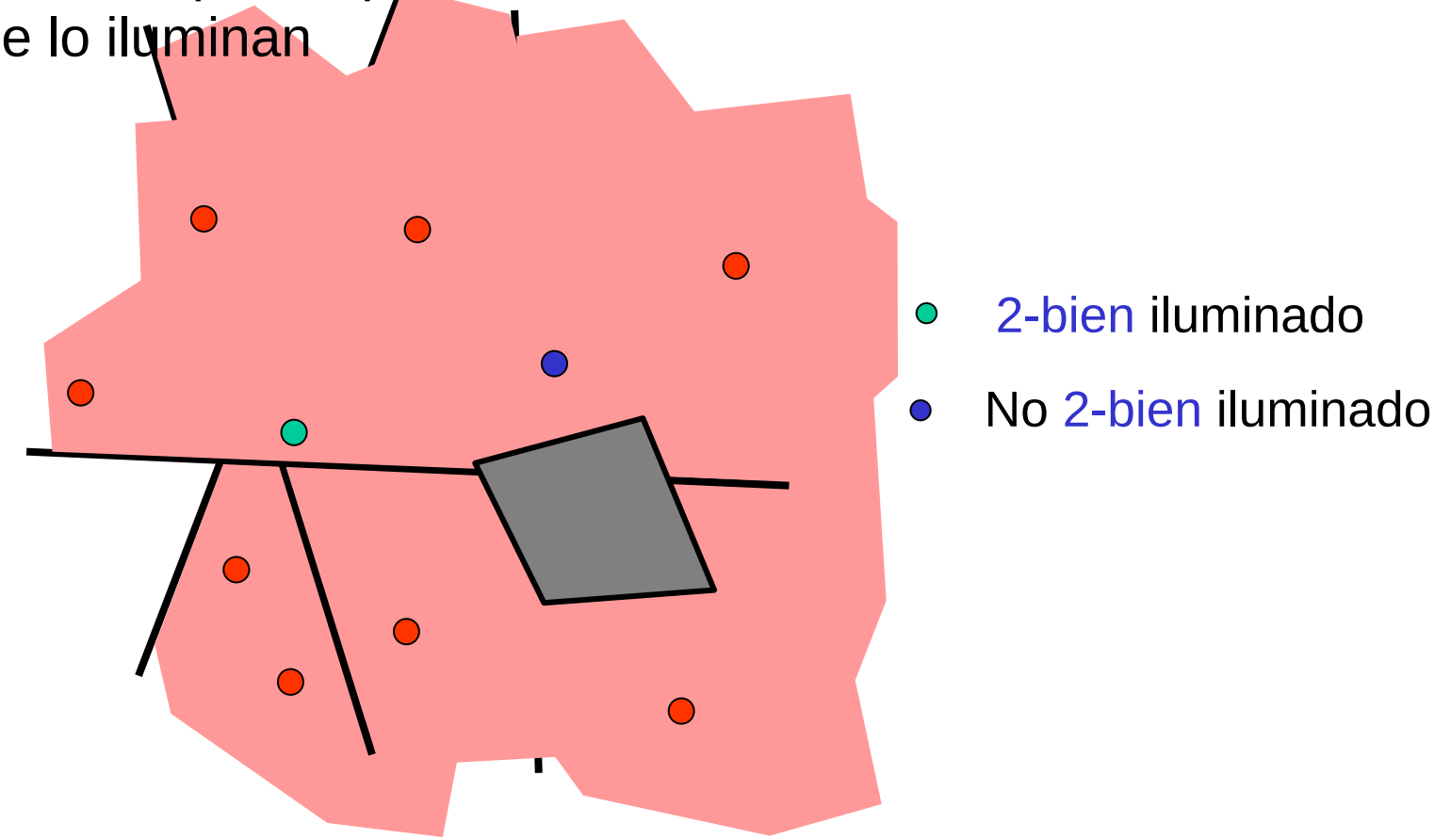
Se desea iluminar con luces que rodeen el objeto



Canales, Abellanas, H, ‘04

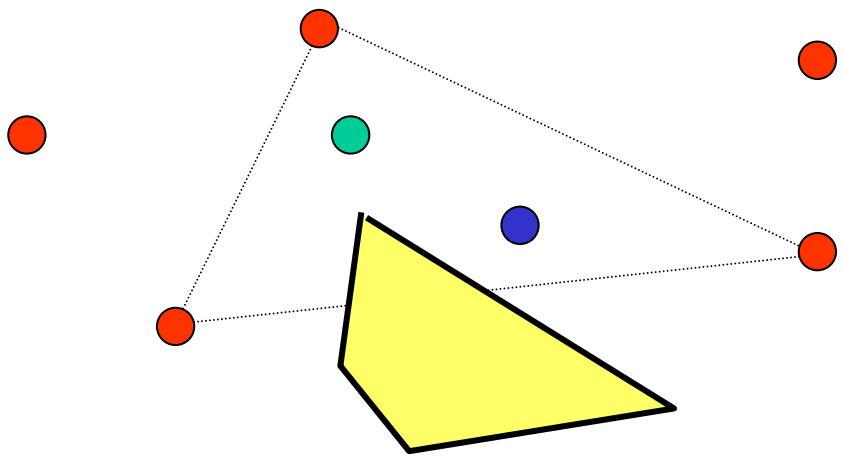
BUENA ILUMINACIÓN

Un punto *x* está t-bien iluminado por un conjunto S de focos si cada semiplano que contiene a *x* también contiene a t focos de S que lo iluminan



BUENA ILUMINACIÓN

Un punto *x* está t-bien iluminado por un conjunto S de focos si cada semiplano que contiene a *x* también contiene a t focos de S que lo iluminan



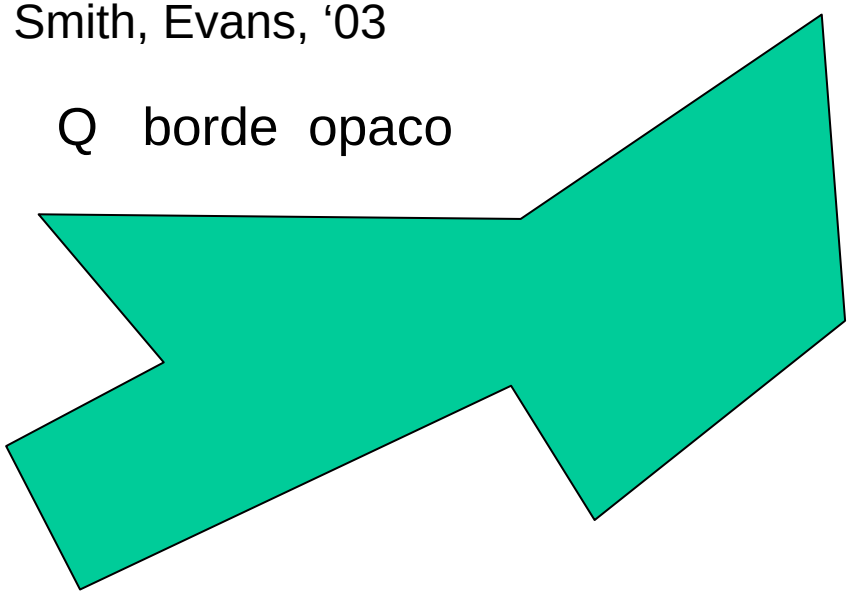
Un punto está 1-bien iluminado si está contenido en un triángulo de focos que lo iluminan (Δ-iluminación)

Δ - ILUMINACIÓN

Un punto *x* está Δ-iluminado (o Δ-guardado) por un conjunto S de focos si *x* está contenido en un triángulo de vértices en S.

Smith, Evans, '03

Q borde opaco



Decidir si k focos en vértices de Q pueden Δ-iluminar Q es NP-duro

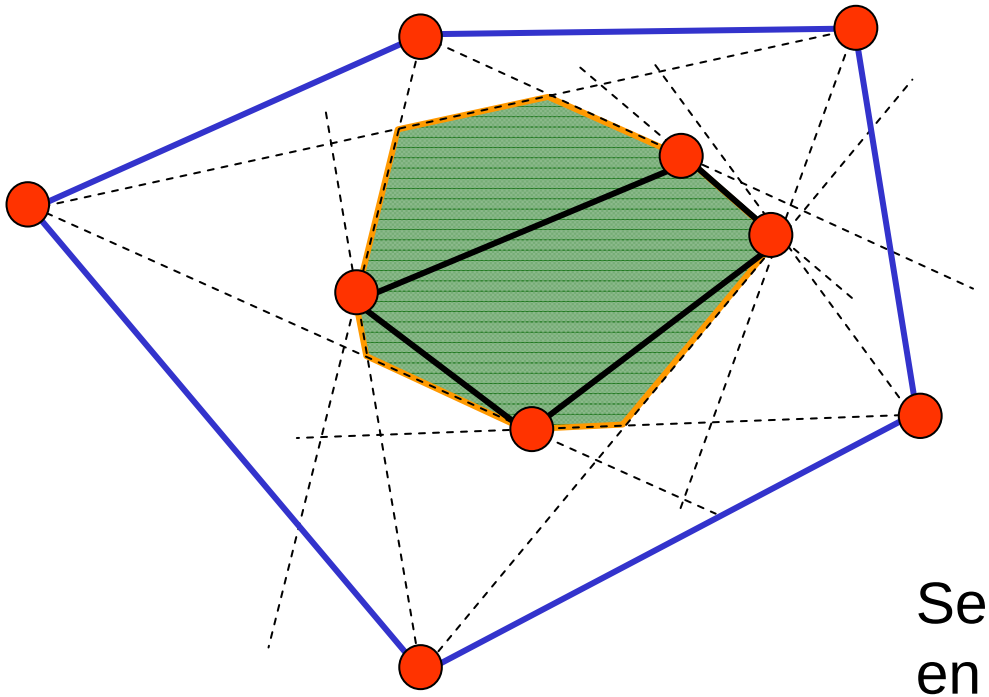
Algoritmo aproximado

Efrat, Har-Peled, Mitchell, '04

BUENA ILUMINACIÓN

- Buena iluminación sin obstáculos

Zona 1-bien iluminada



Zona 2-bien iluminada

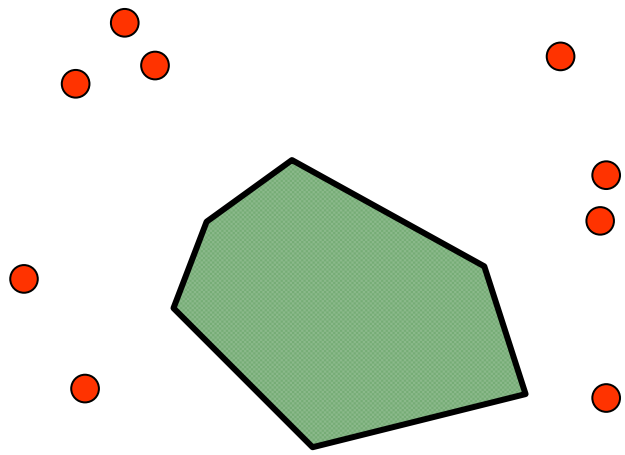
O(nlogn)

Se calculan todos los niveles en $O(n^2)$ Claverol, '04

La zona t-bien iluminada es el nivel t de separabilidad lineal.

BUENA ILUMINACIÓN

- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘04
- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘05

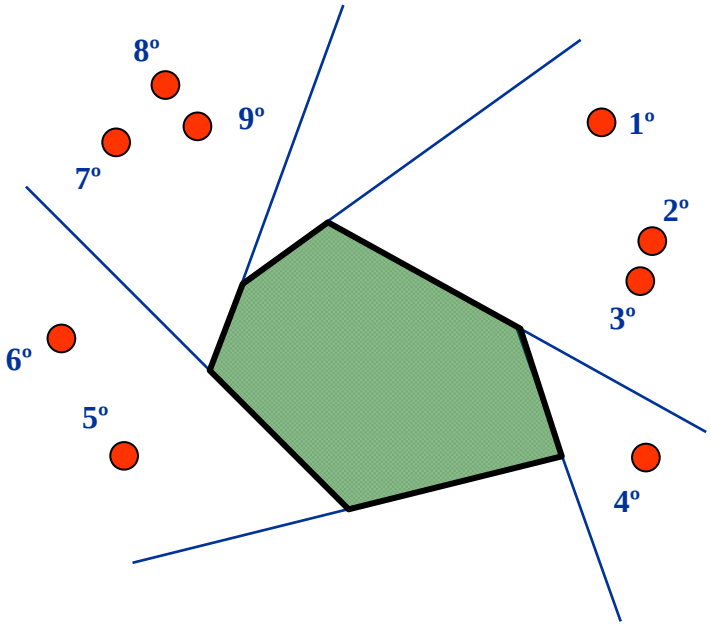


¿Cuál es la zona bien iluminada?

n focos, k vértices

BUENA ILUMINACIÓN

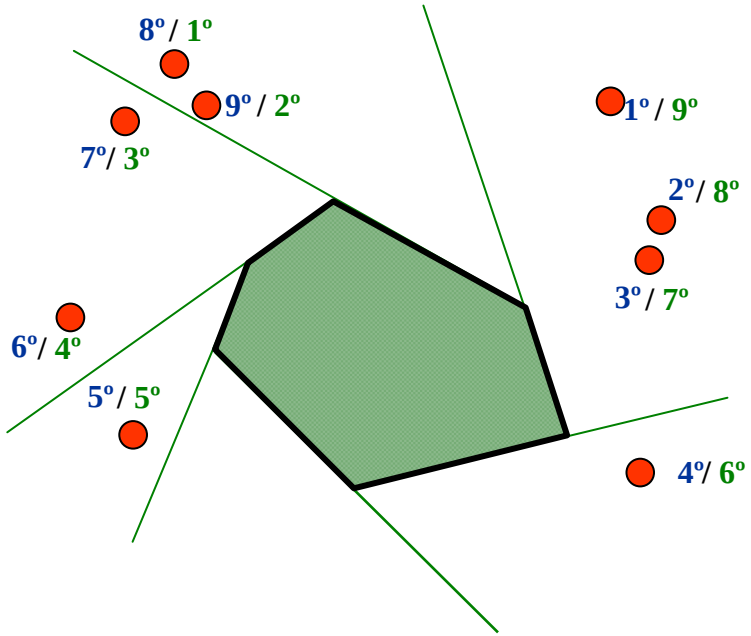
- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘04



(1) Ordenación angular

BUENA ILUMINACIÓN

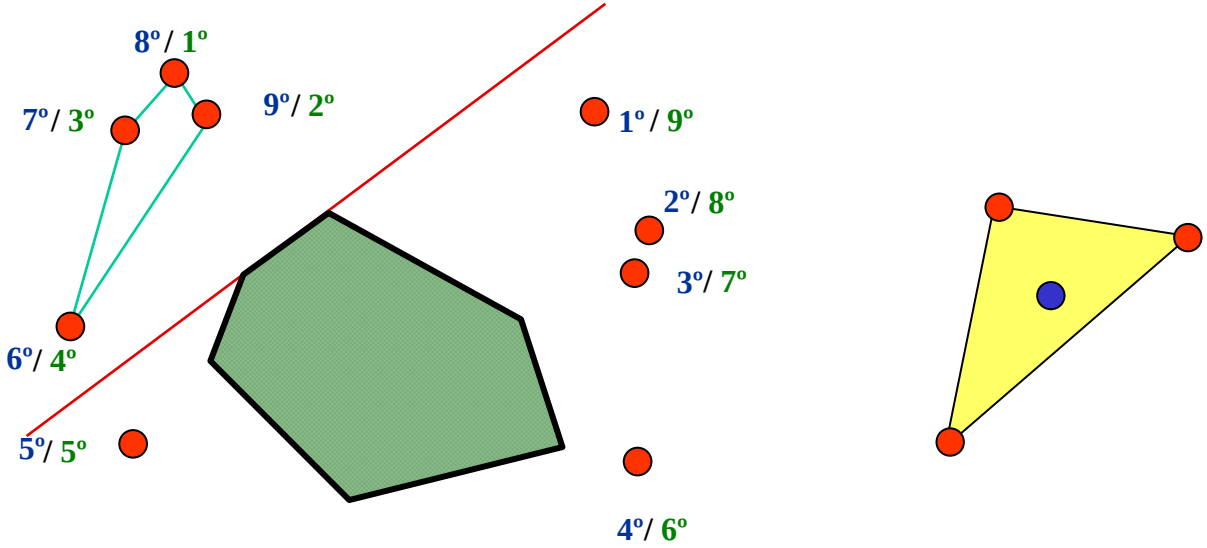
- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘04



(1) Ordenación angular

BUENA ILUMINACIÓN

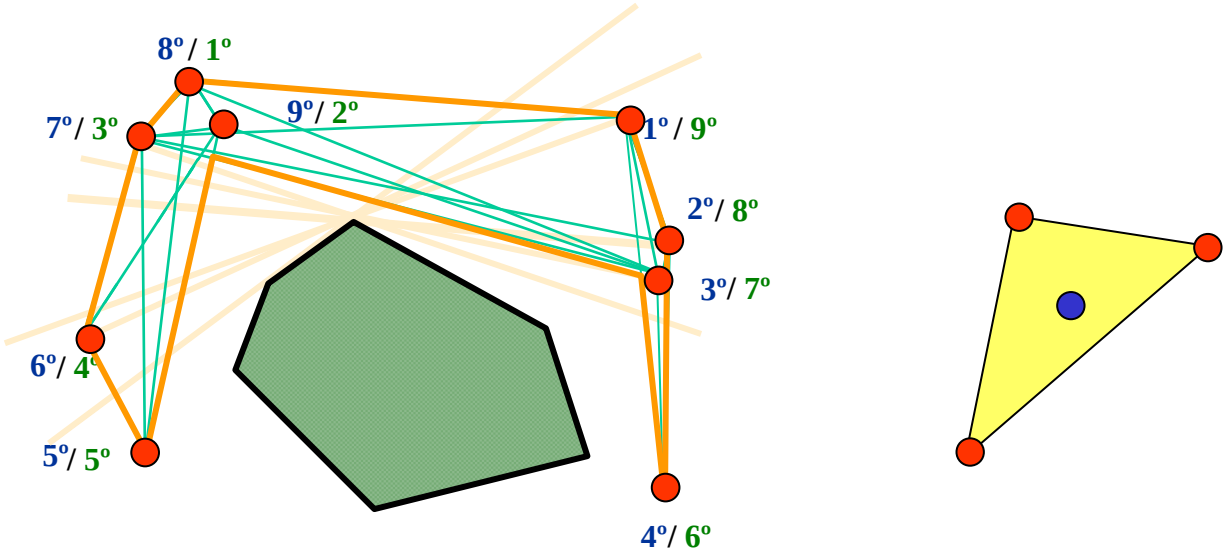
- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘04



(2) 1- buena iluminación desde puntos visibles

BUENA ILUMINACIÓN

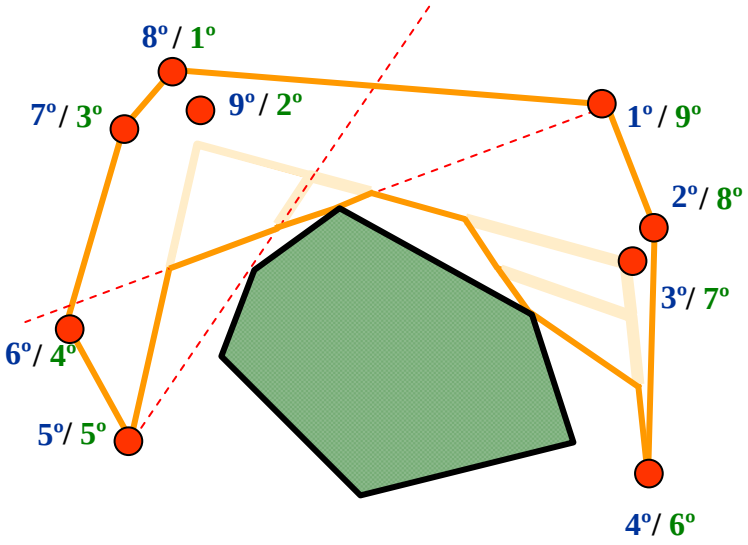
- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘04

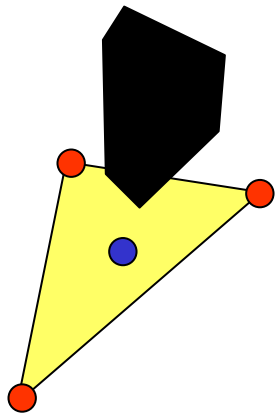


(2) 1- buena iluminación desde puntos visibles

BUENA ILUMINACIÓN

- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘04





(3) 1- buena iluminación desde puntos no visibles

BUENA ILUMINACIÓN

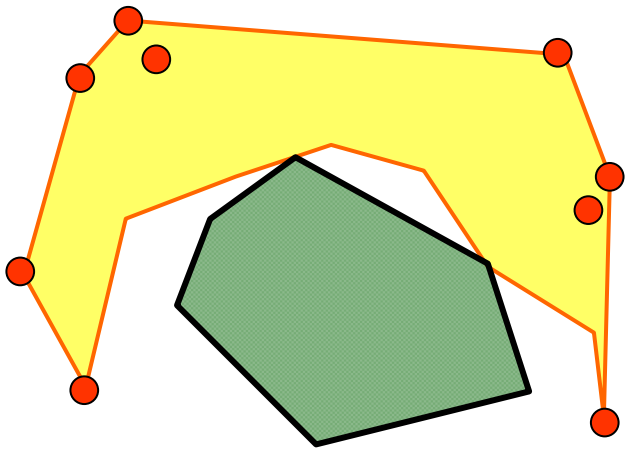
- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, ‘04

Complejidad

(1) O(n log k) + O(n log n)

(2) O(n log n)

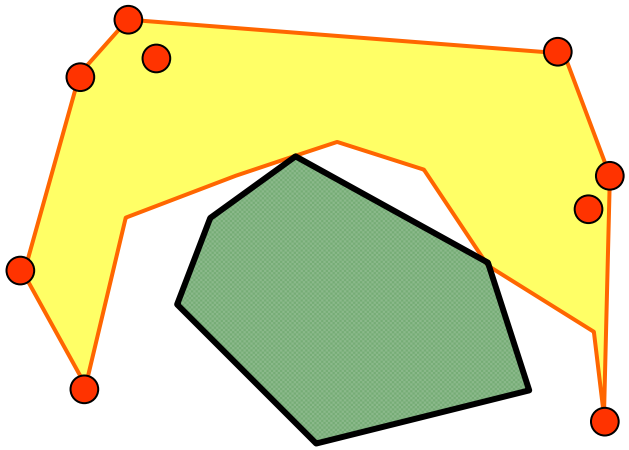
(3) O(n + k)



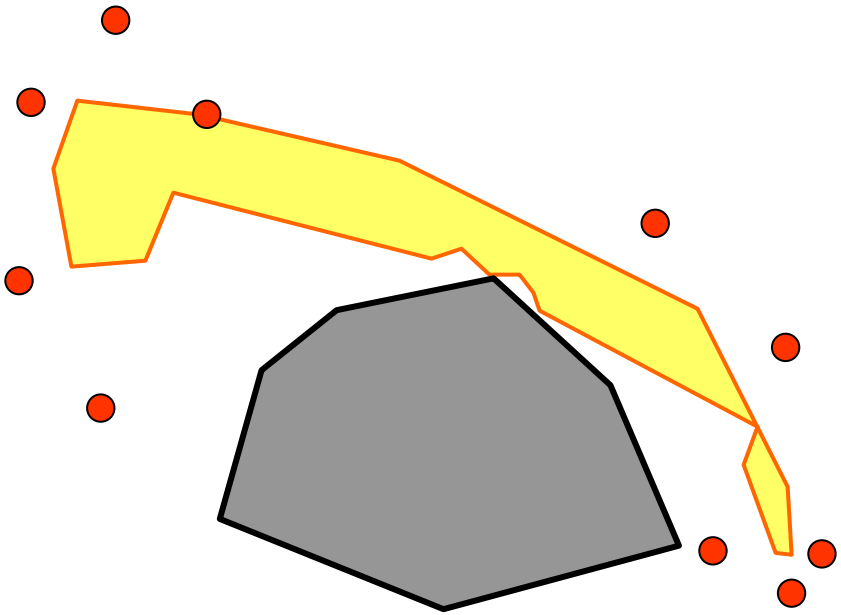
Complejidad total O(n log(kn) + k)

BUENA ILUMINACIÓN

1-buena iluminación
O(n log(kn) + k)

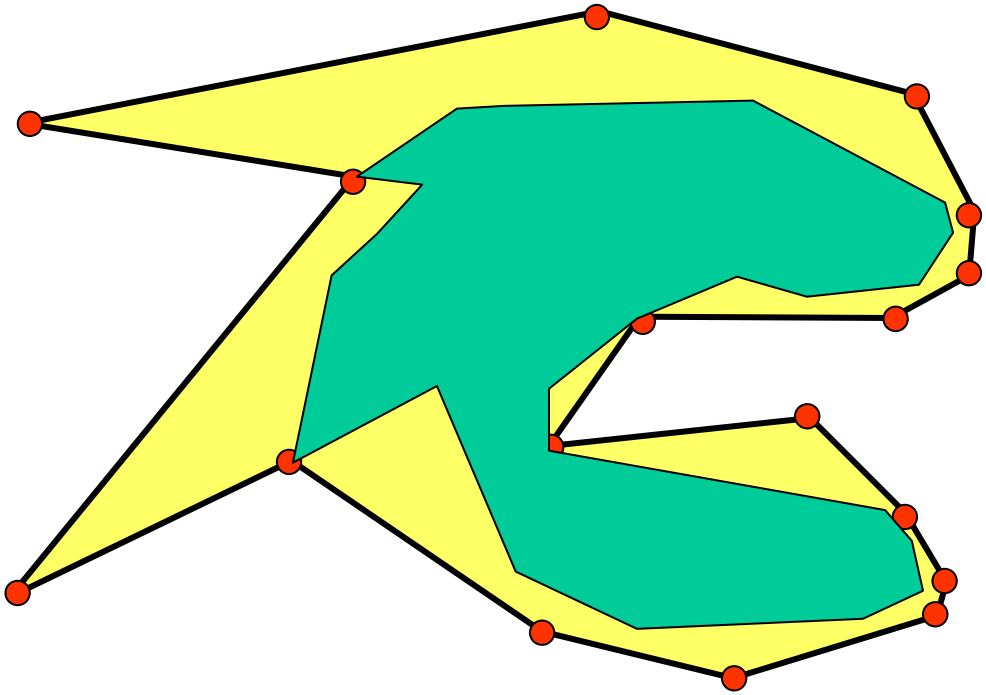


2-buena iluminación
O(n log(kn) + k)



BUENA ILUMINACIÓN EN POLÍGONOS

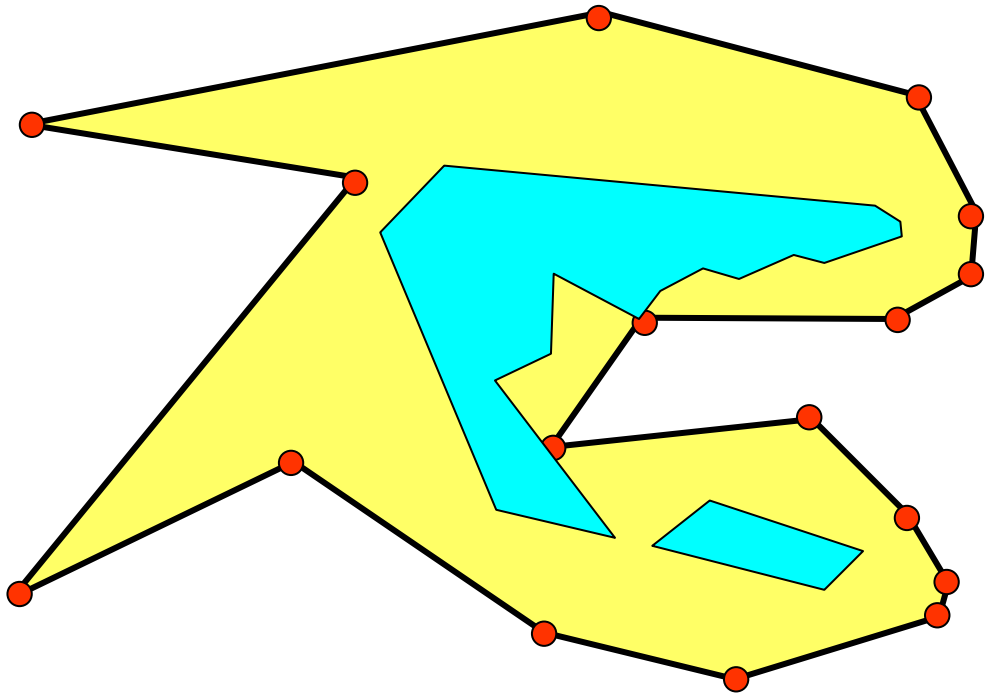
- 2-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, ‘04



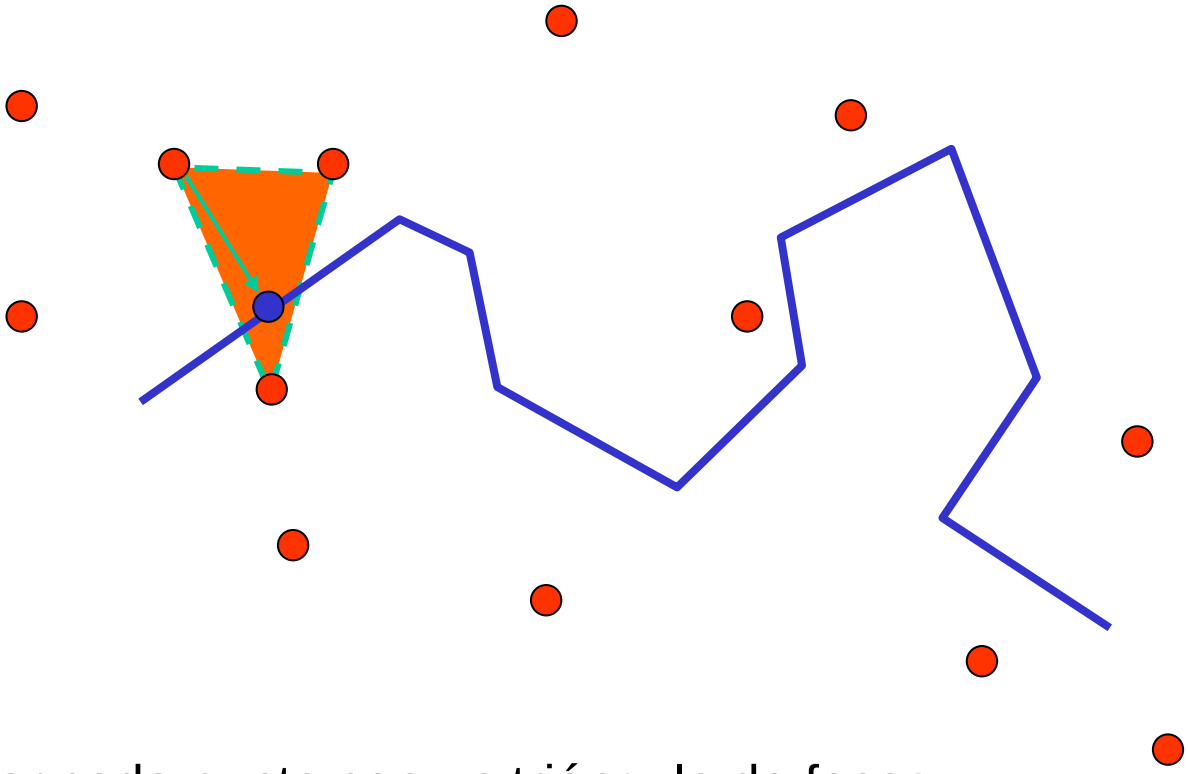
$O(n^2)$

BUENA ILUMINACIÓN EN POLÍGONOS

- 2-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, ‘04
- 3-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, ‘05



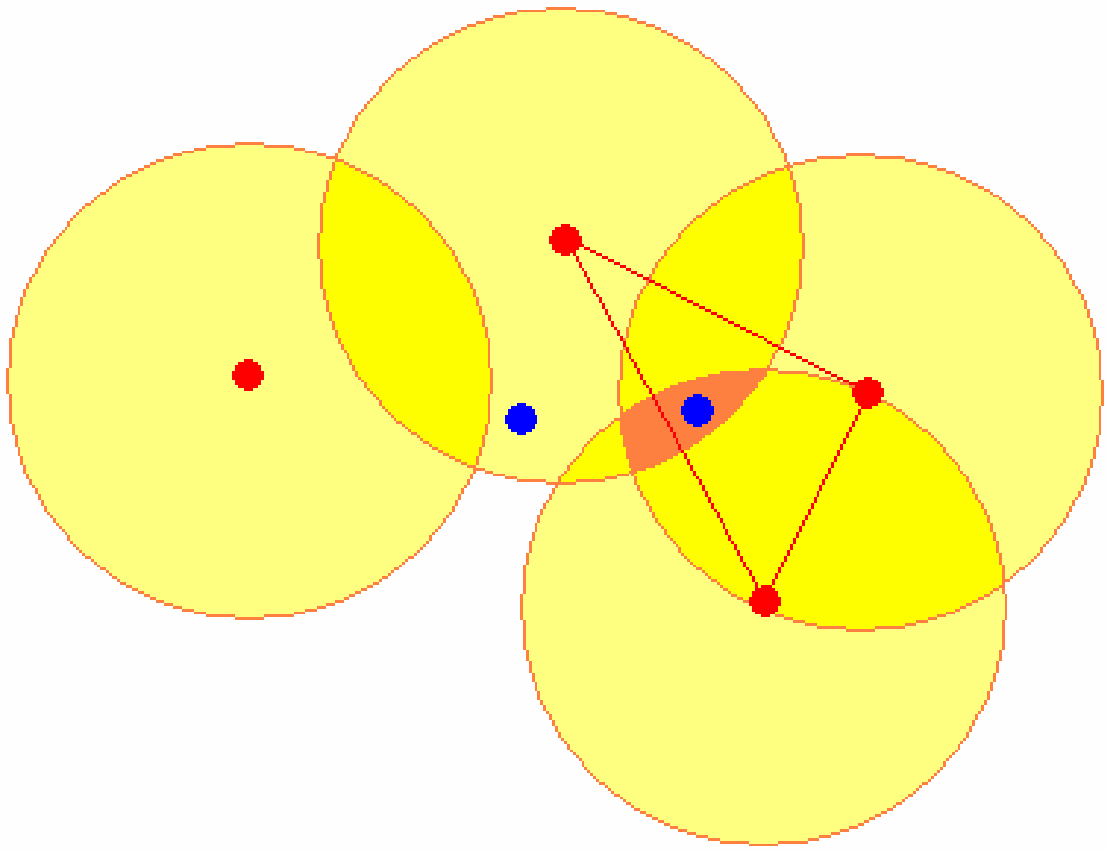
ILUMINANDO BIEN UNA TRAYECTORIA



Iluminar cada punto con un triángulo de focos minimizando la potencia empleada

BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

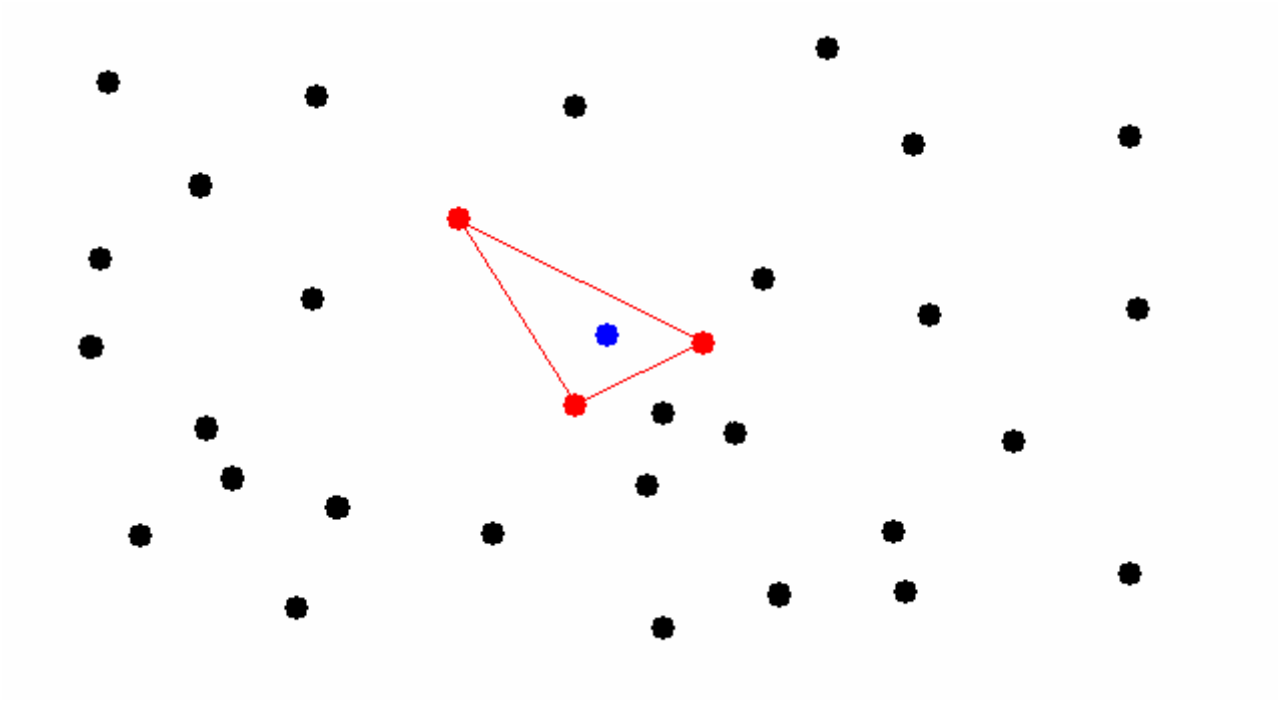


Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?

BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Problema

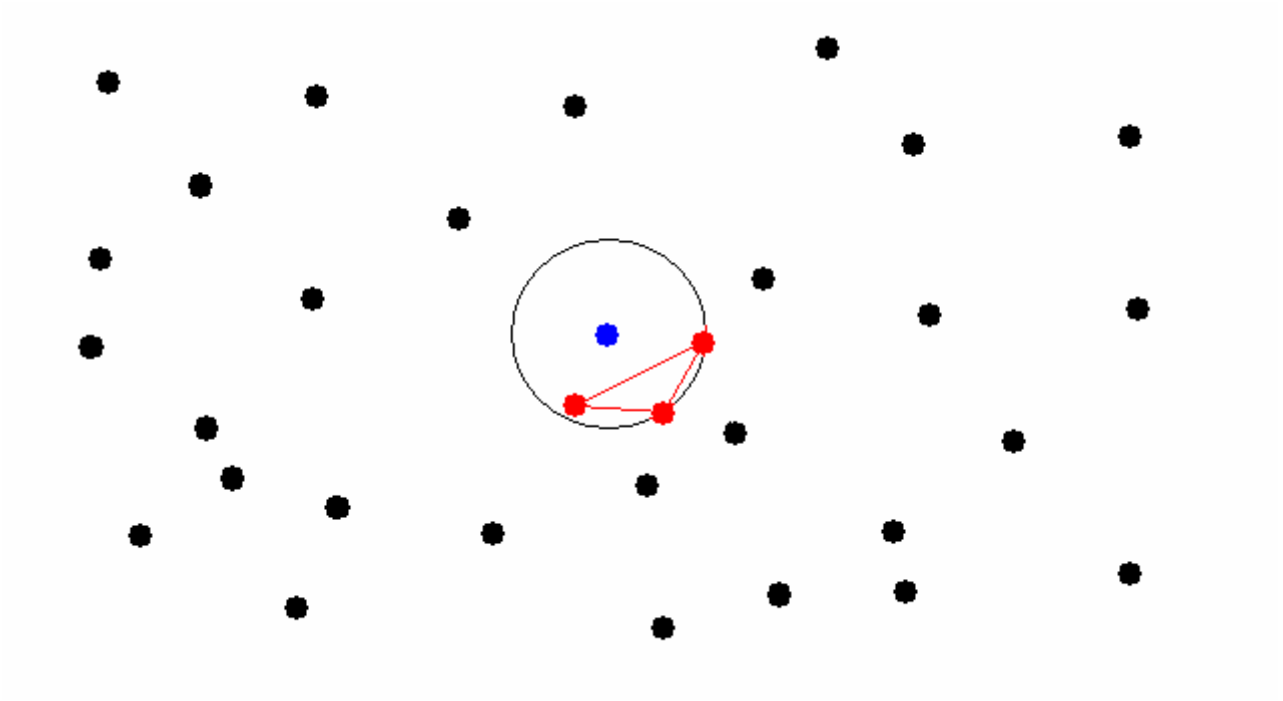
Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Problema

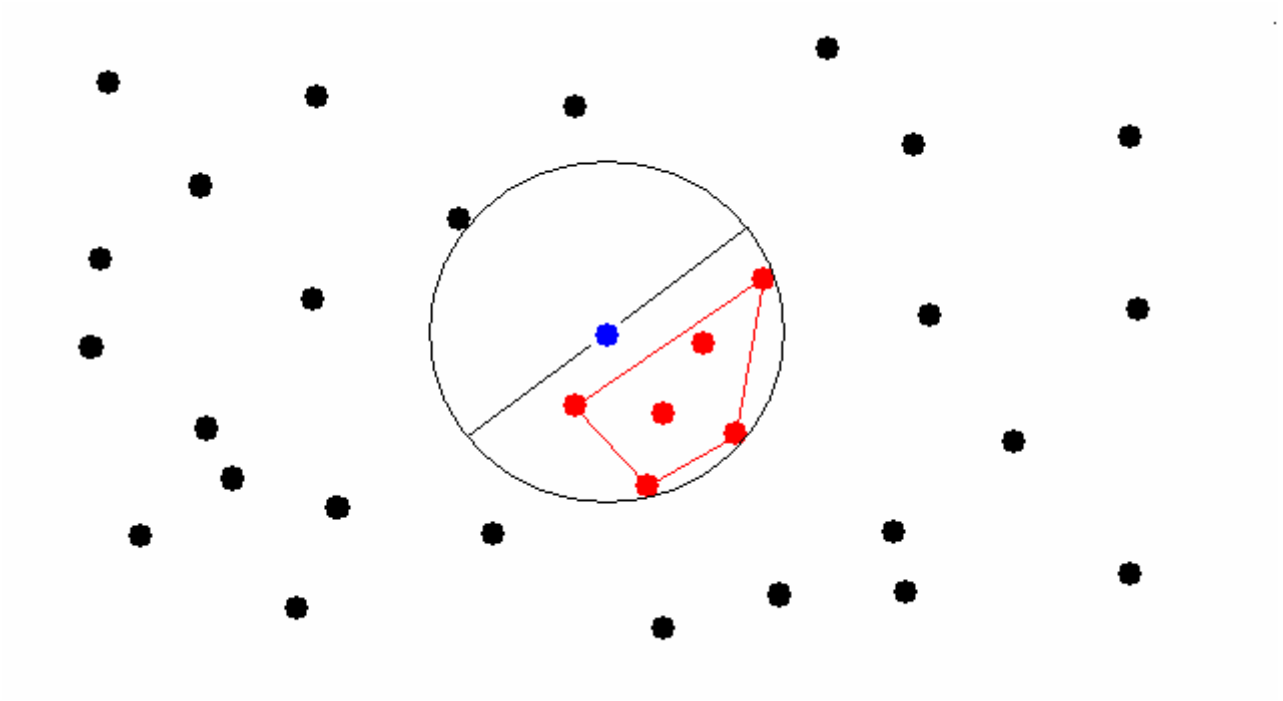
Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Problema

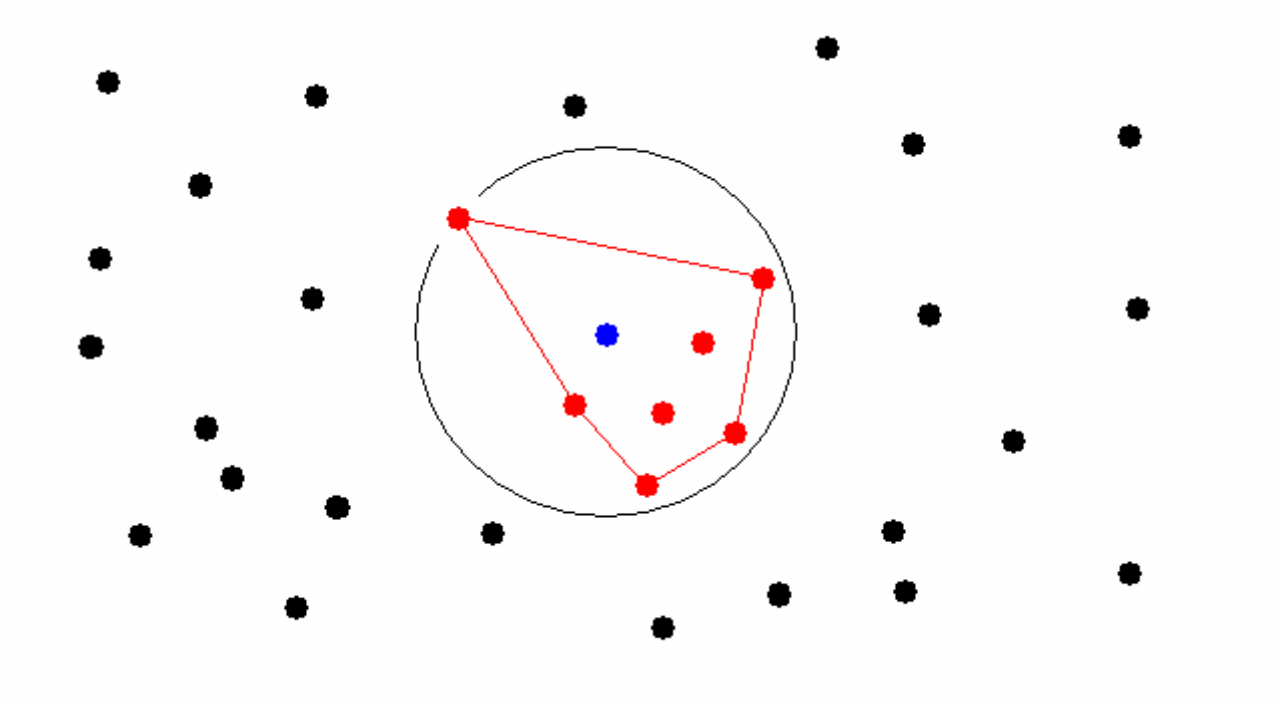
Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Problema

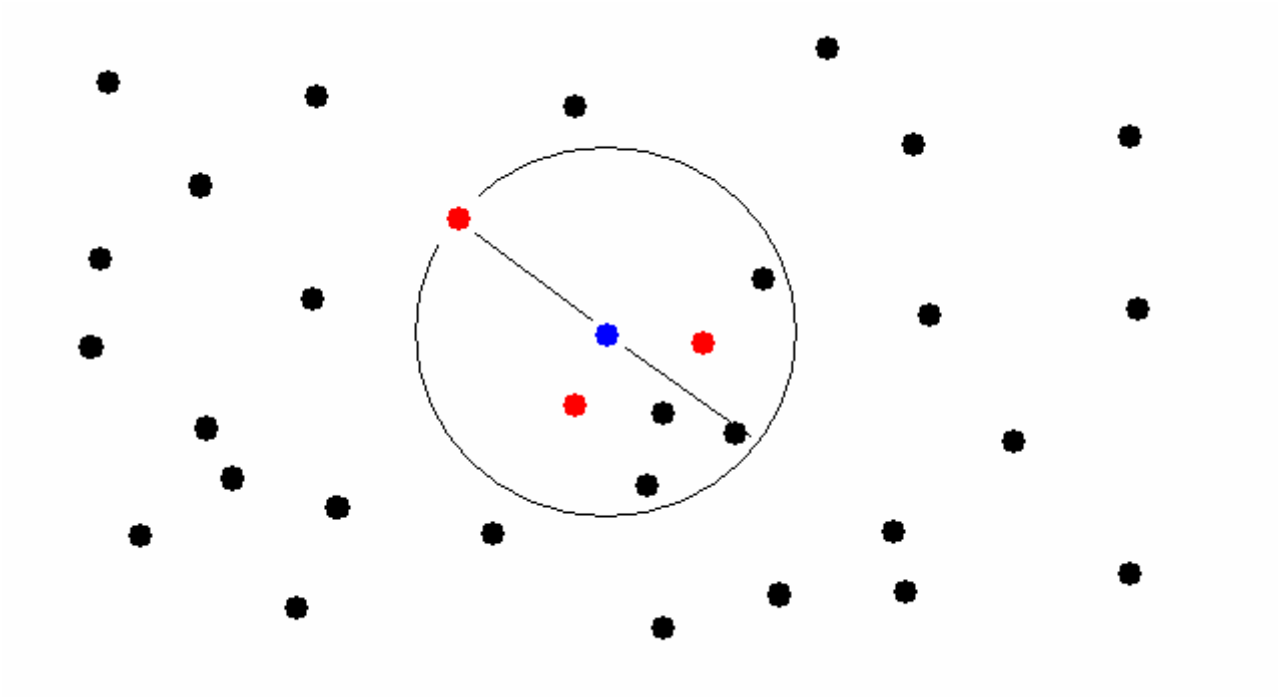
Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Problema

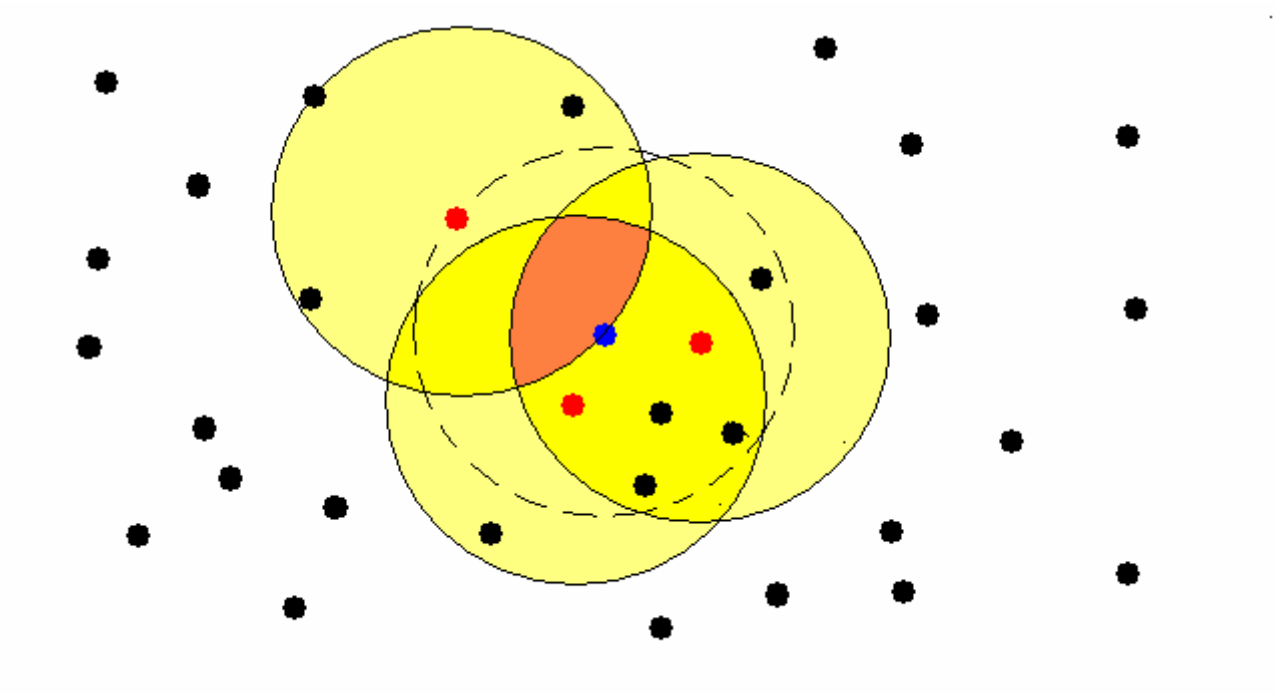
Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Problema

Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?



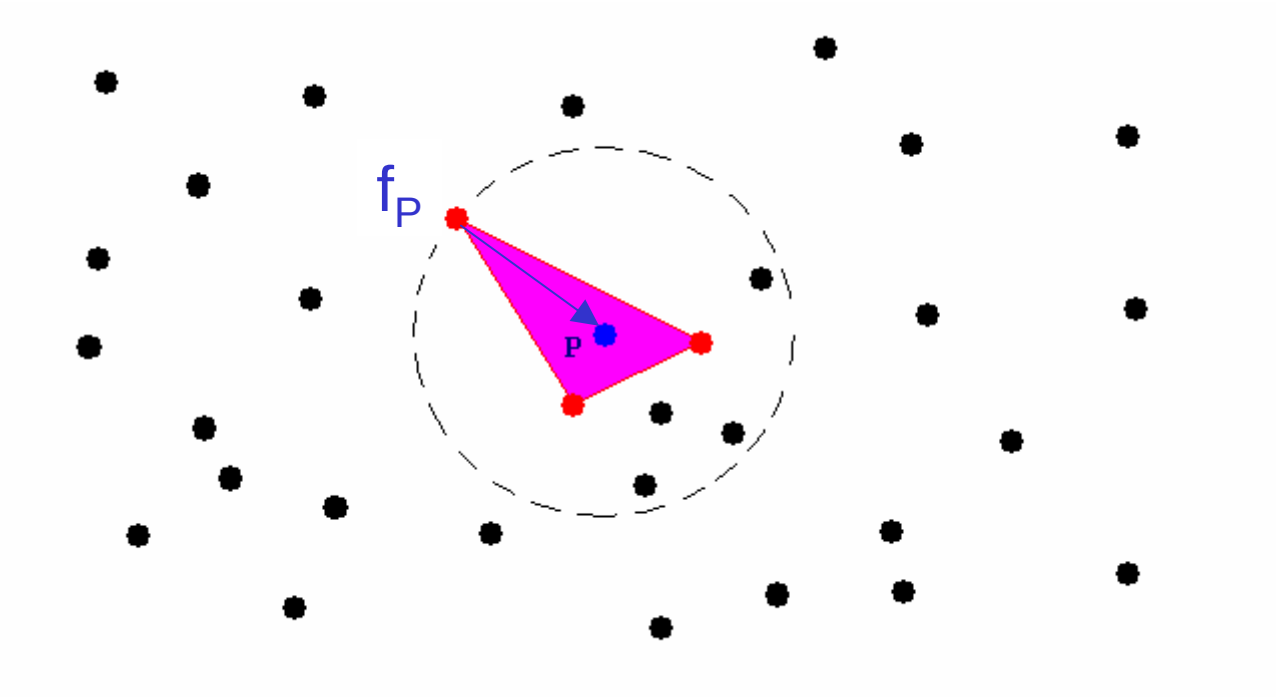
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Problema Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo rango necesario para 1-bien iluminar P?

Minimum Embracing Range point MER-point f_P

O(n)

ABHHMP, '05



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

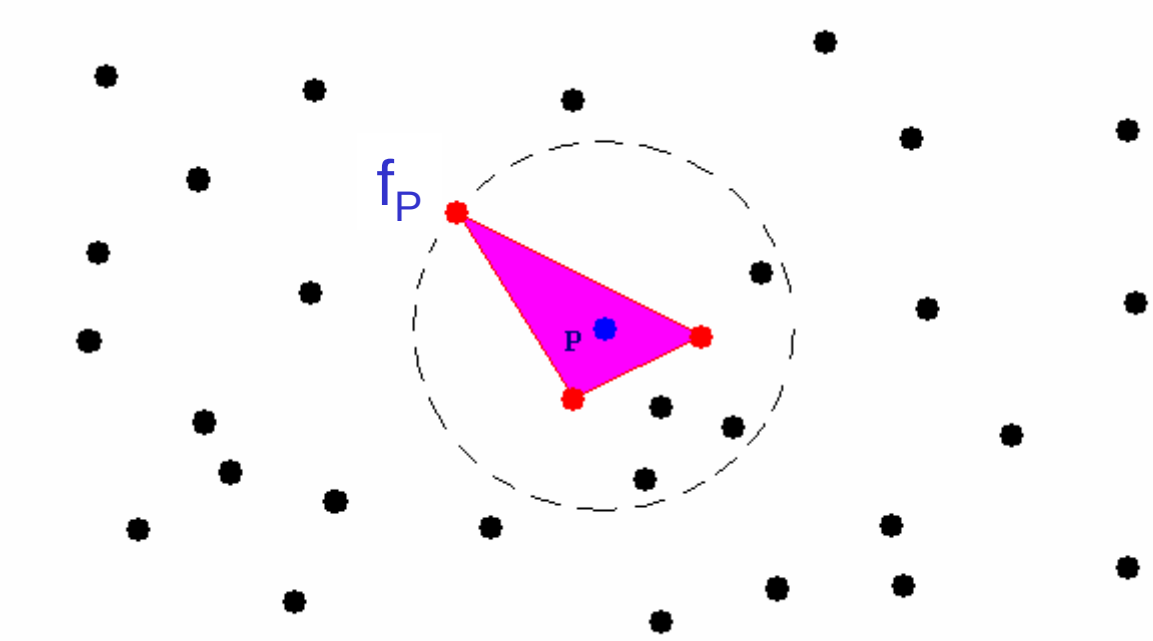
Problema 2 Dado un punto P, encontrar un conjunto minimal de luces que 1-bien iluminen P con la menor potencia posible

Minimum Embracing Range point MER-point f_P

Closest Embracing Triangle CET-triangle

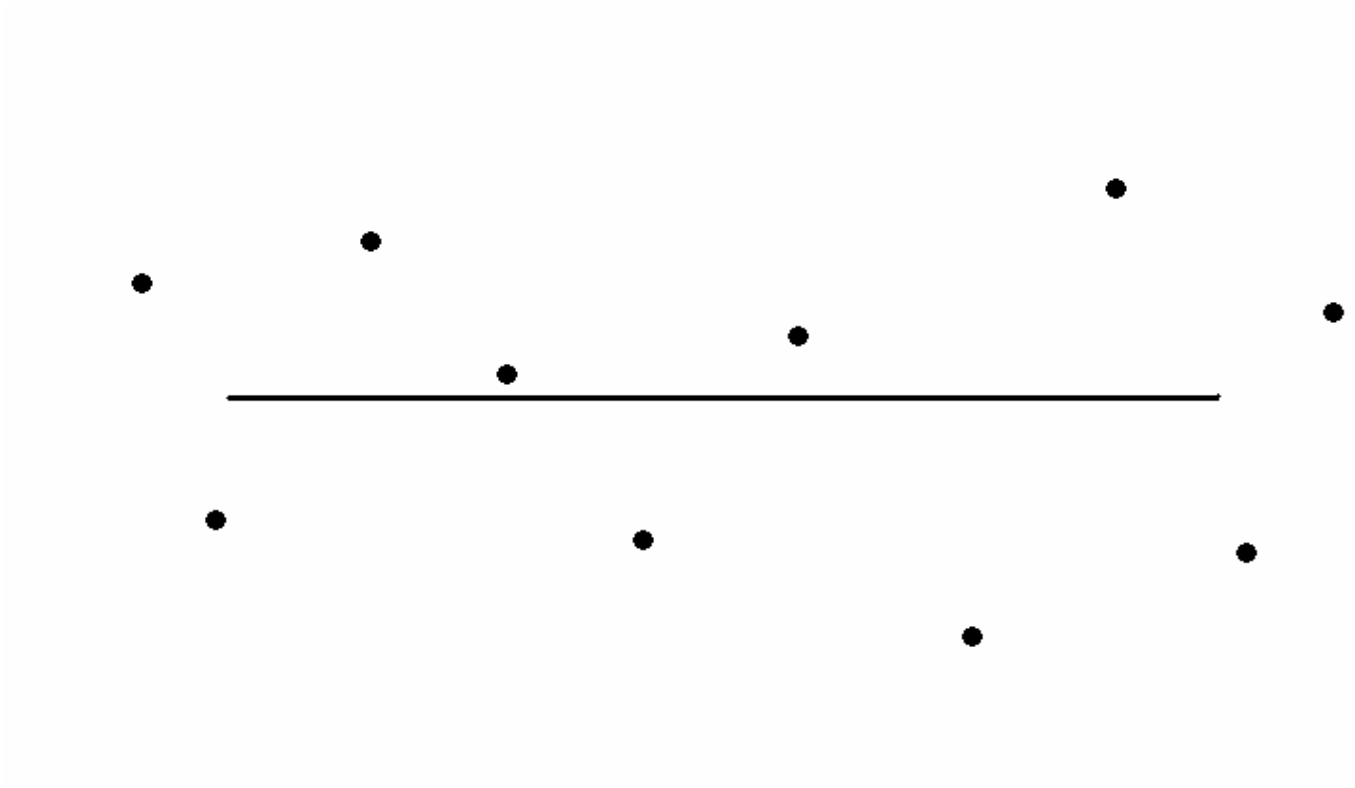
O(n)

ABHHMP, '05



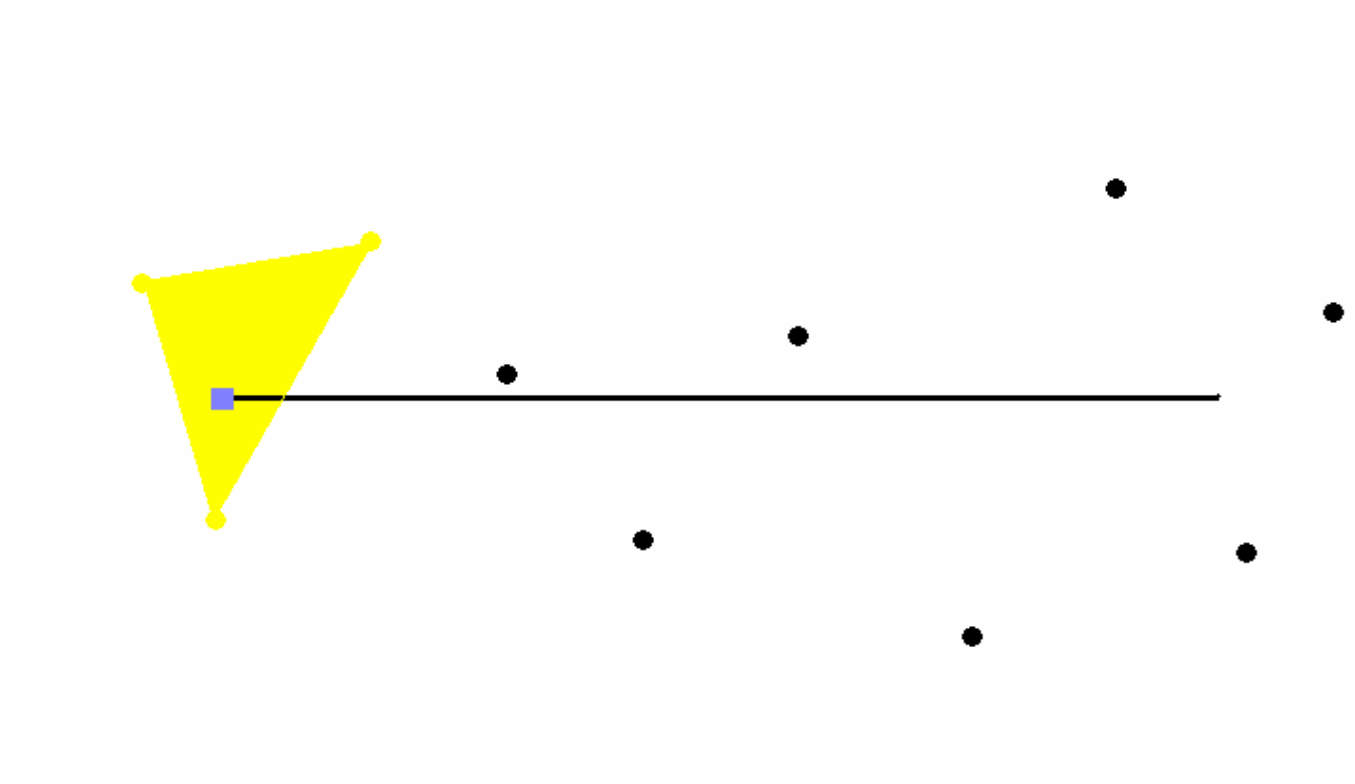
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



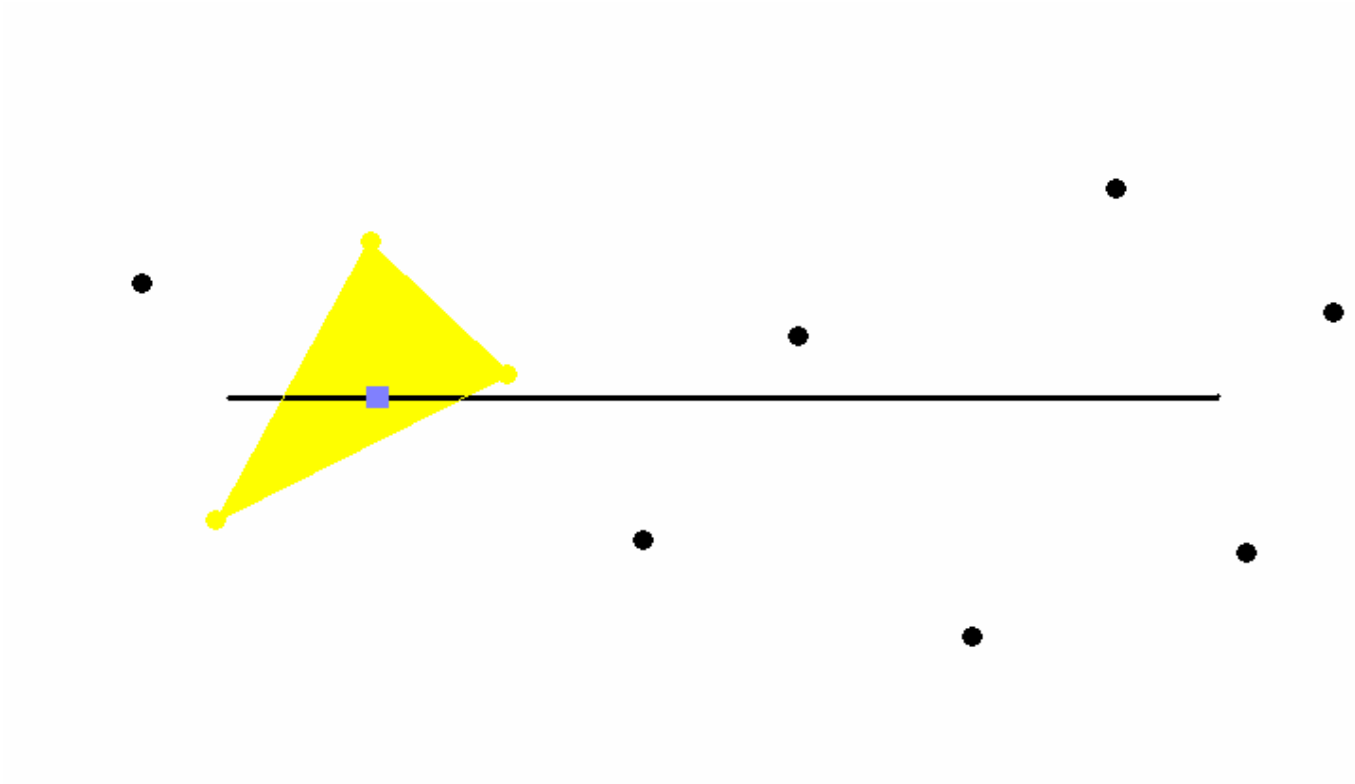
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



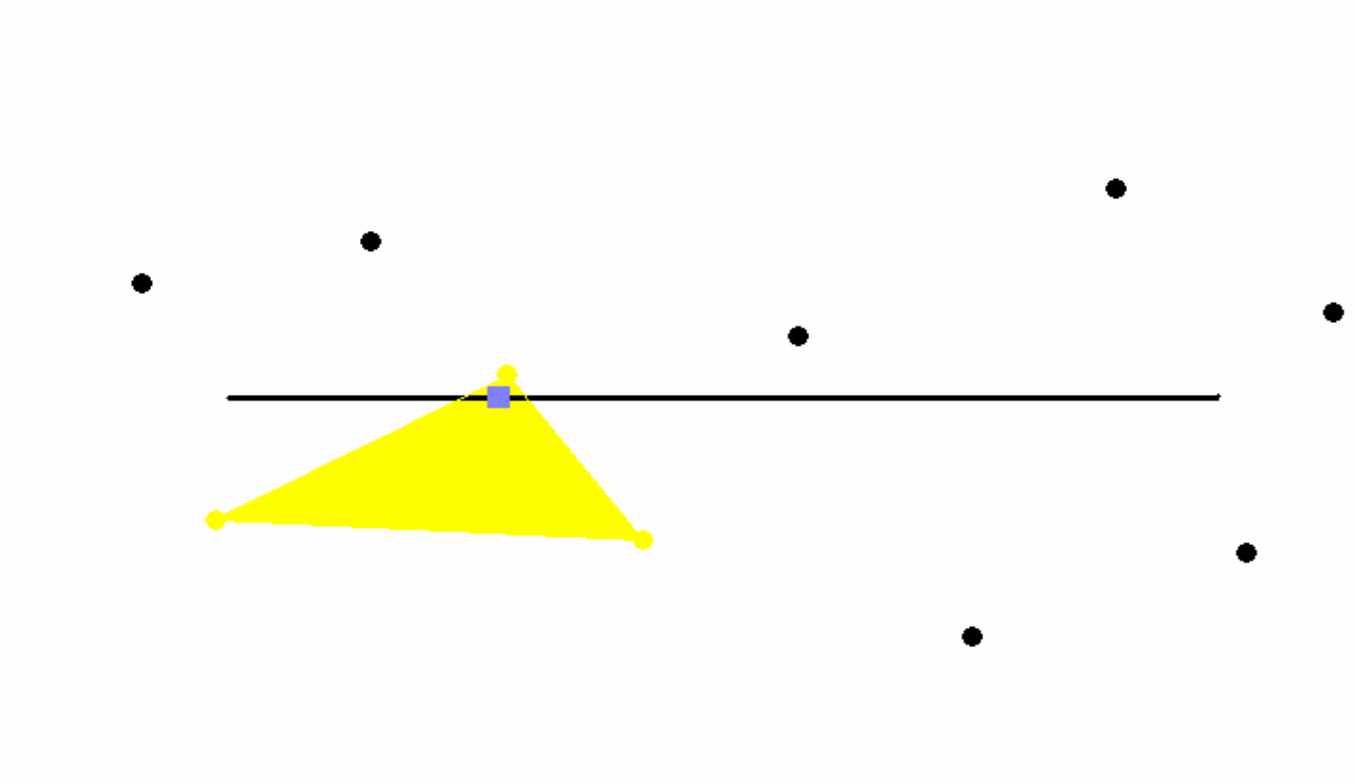
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



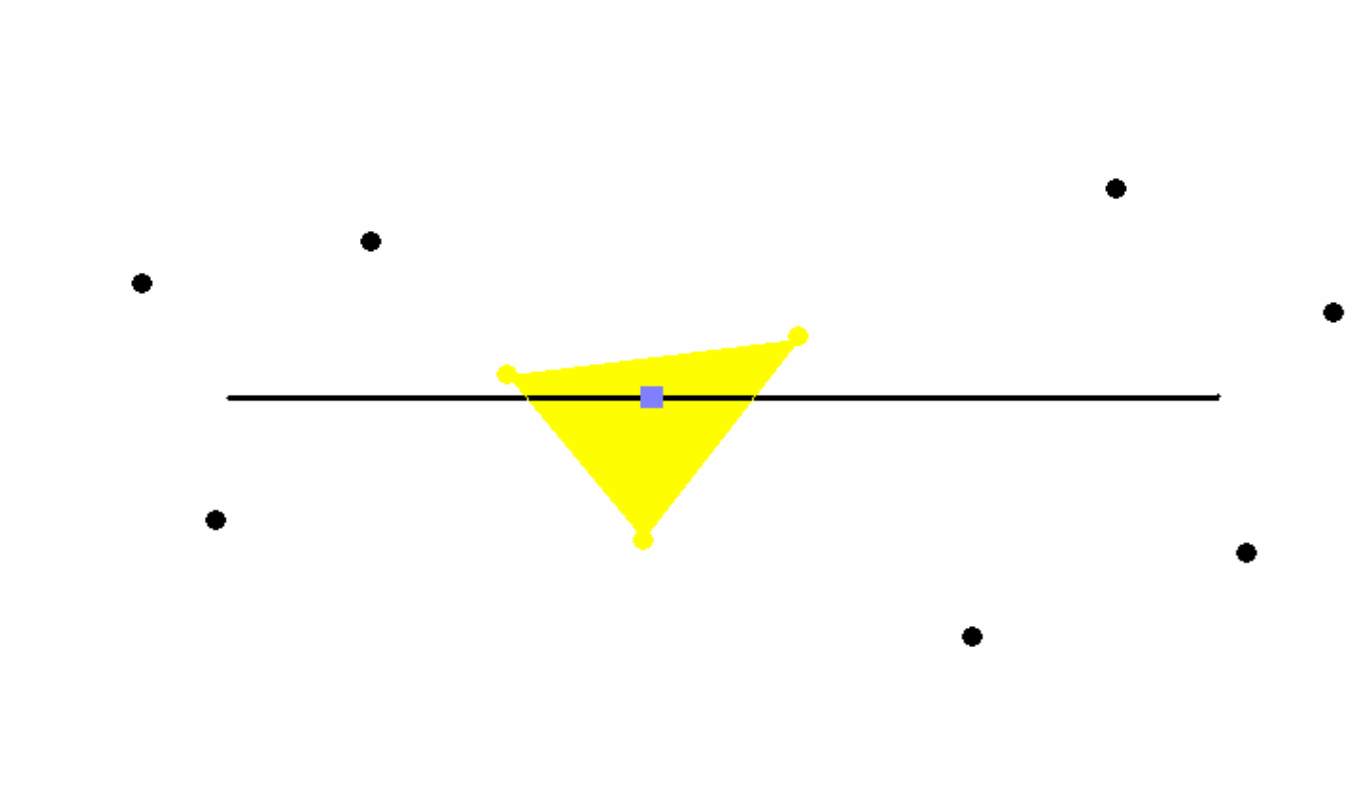
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



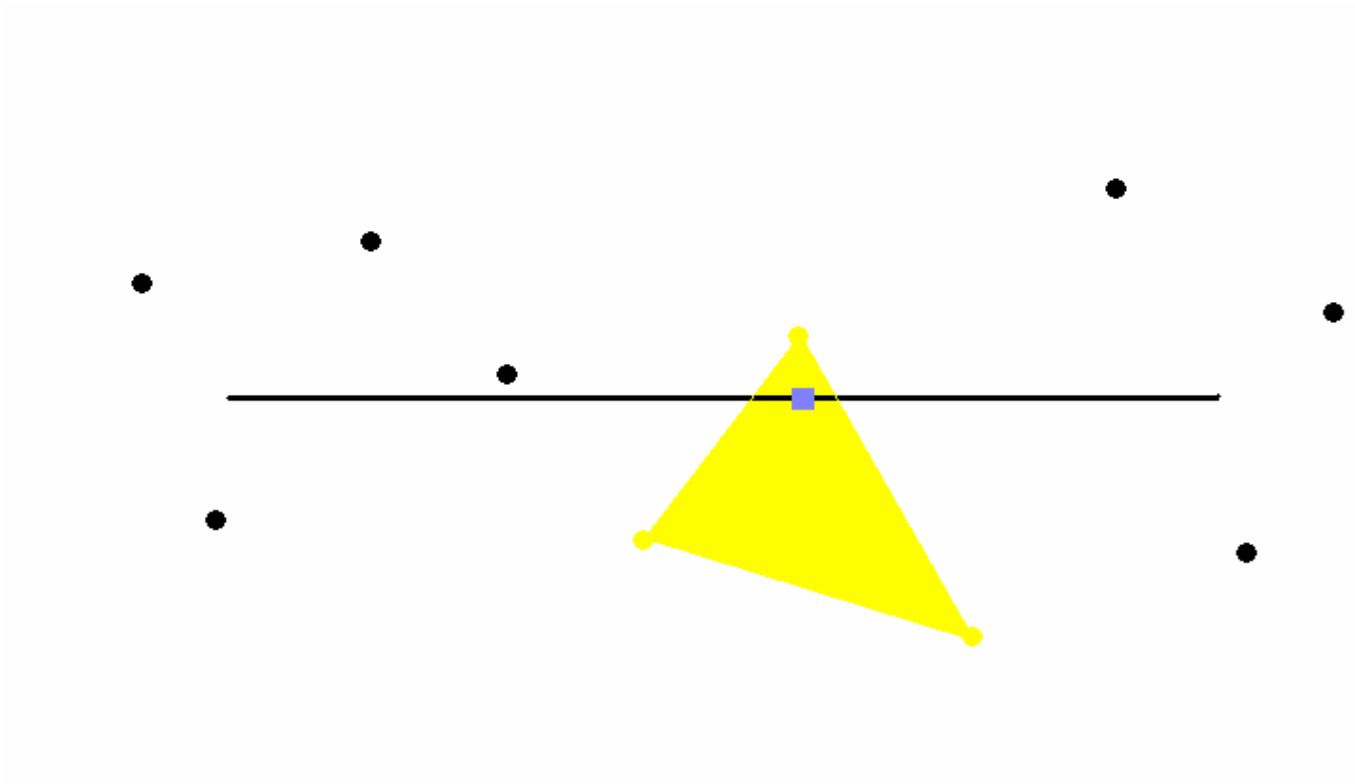
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



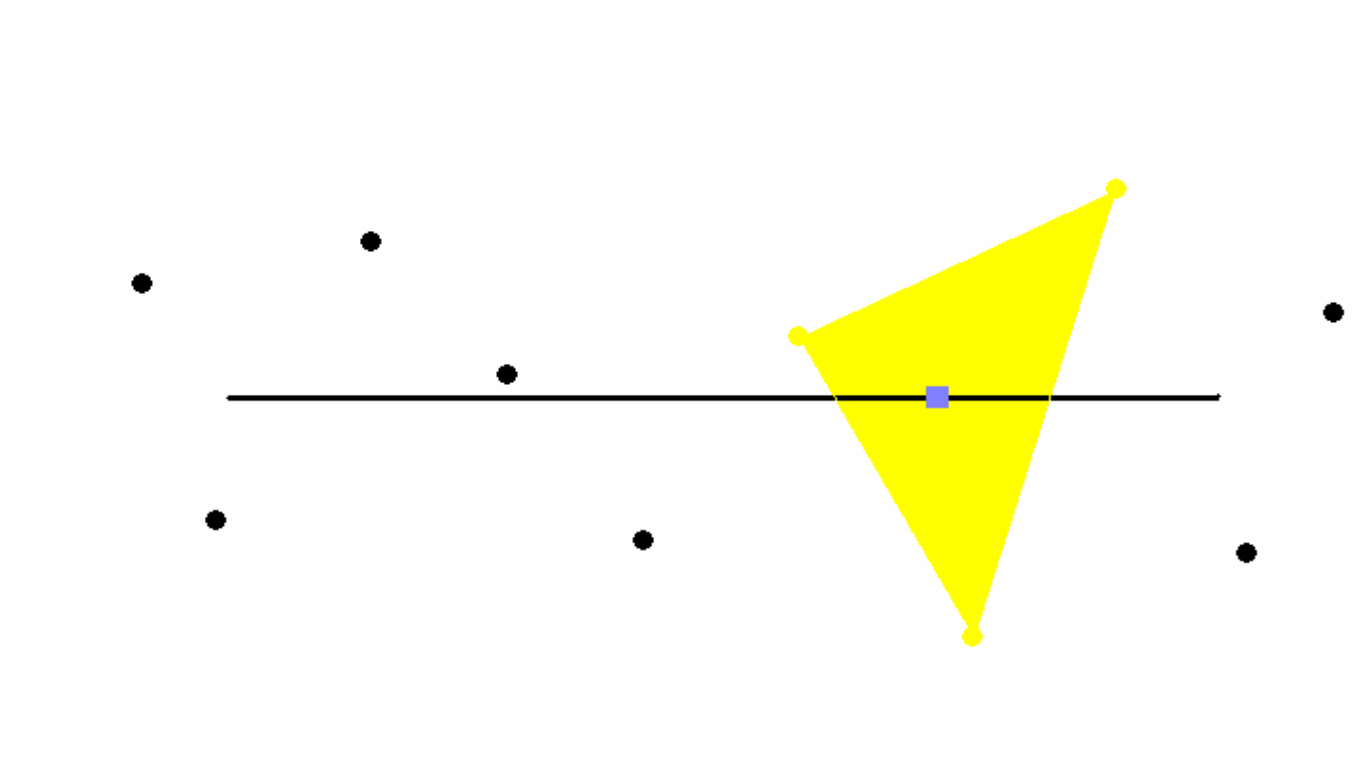
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



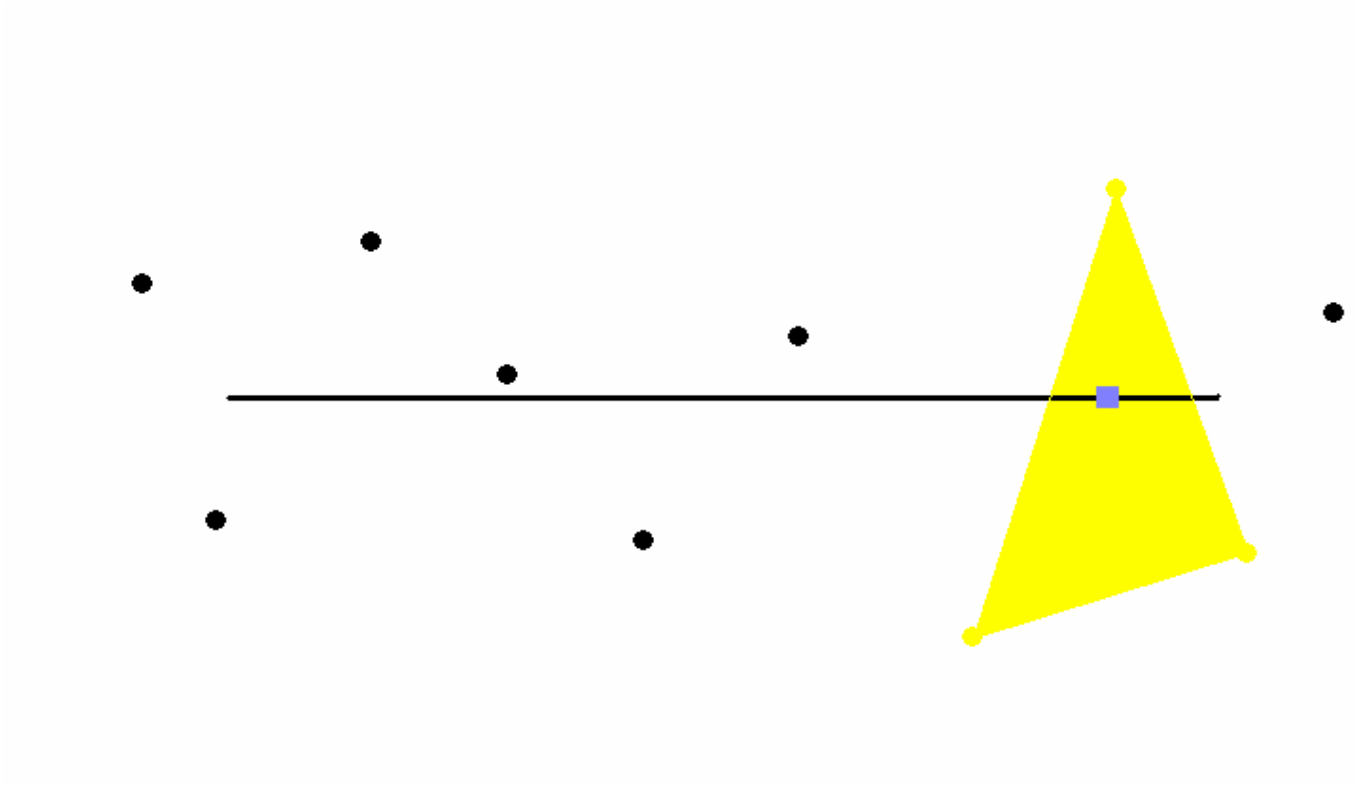
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



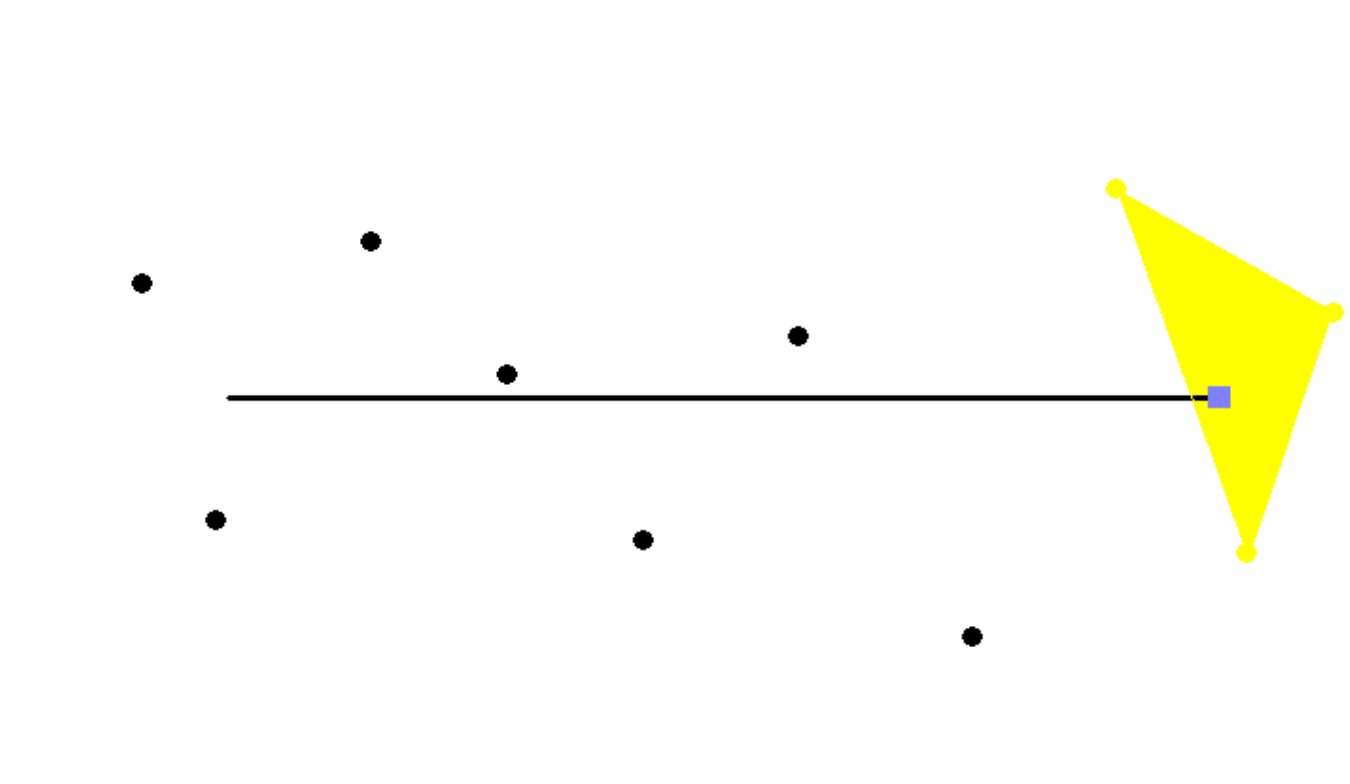
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

Cobertura de una ruta

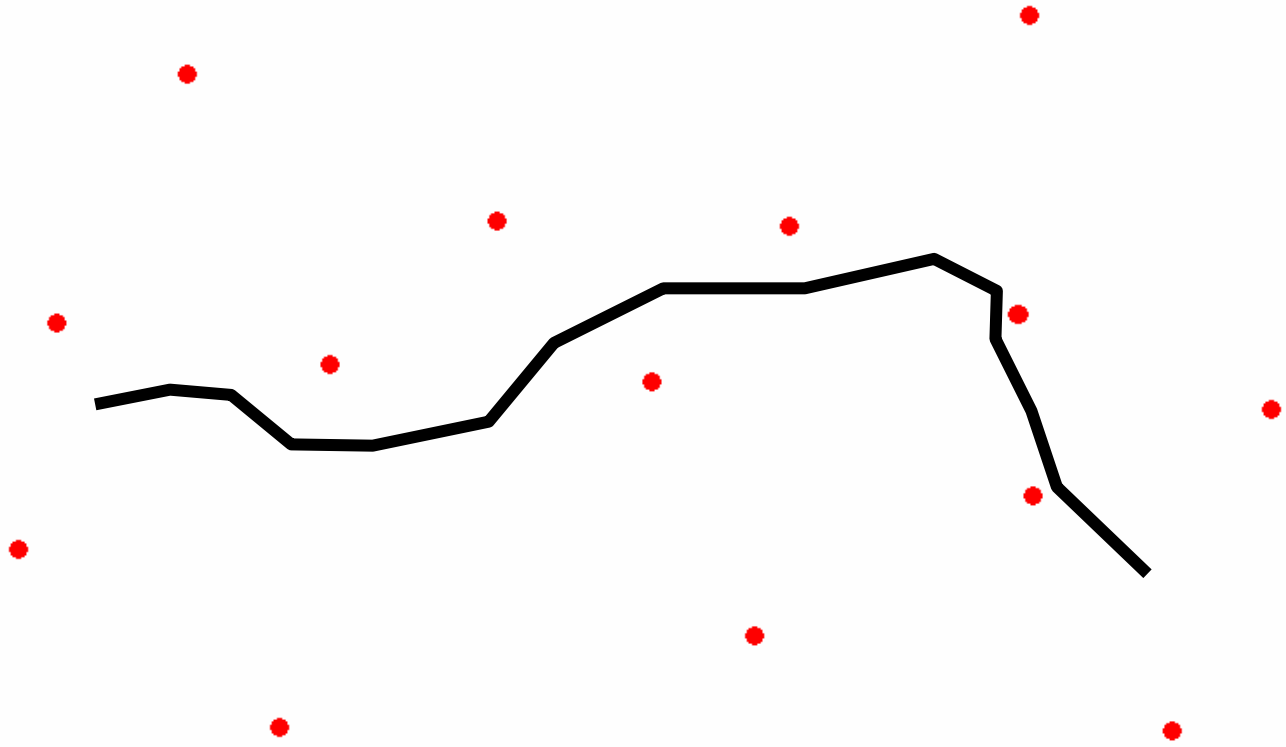
1) Calcular el mínimo rango para 1-bien iluminar un segmento s

ABHHMP, ’06 $O(n^2)$

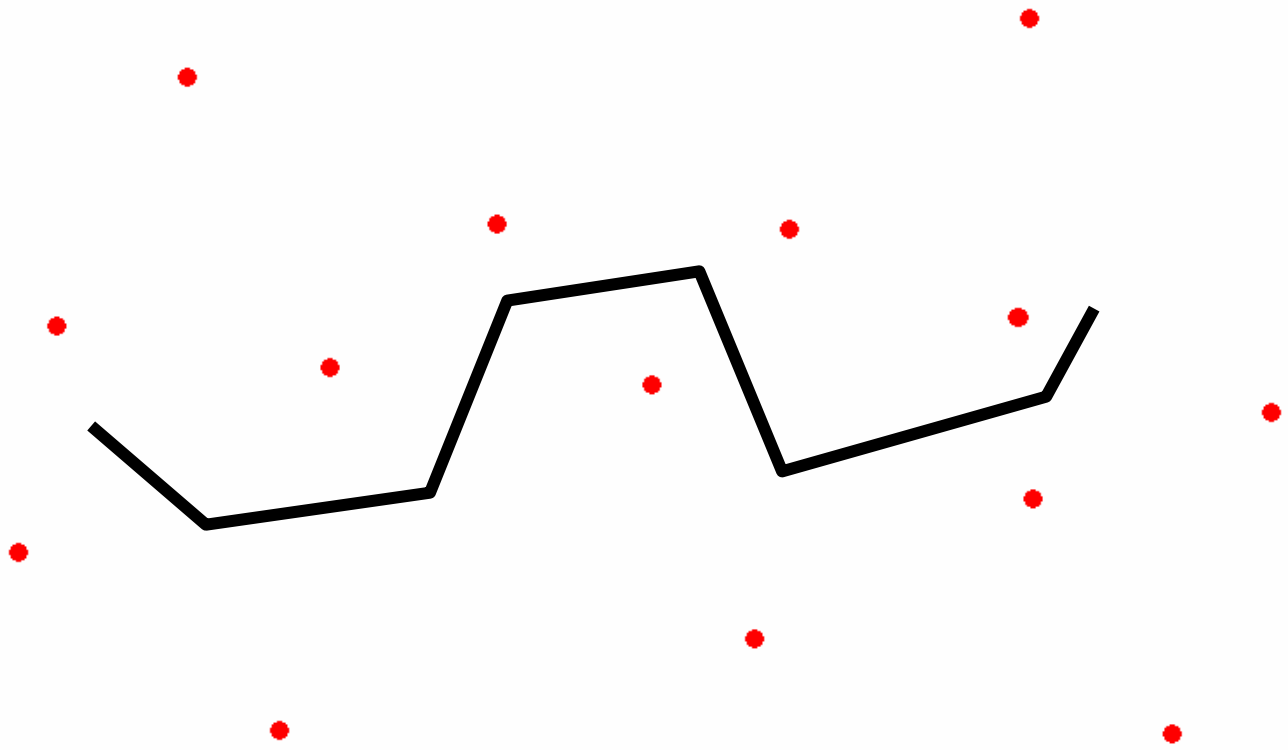
2) Calcular el MER-point para cada punto del segmento s y los diferentes CET- triangles

ABHM, ’05 $O(n^2 \log n)$

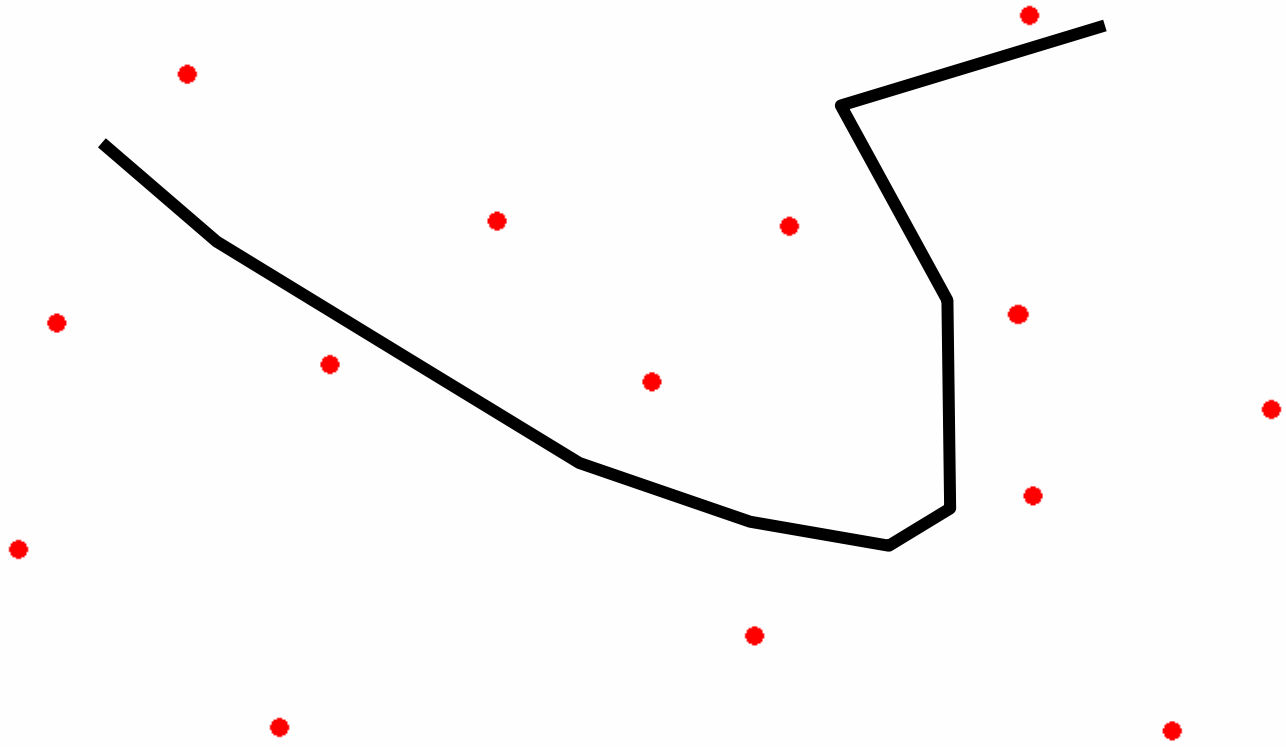
Minimum Illumination Range Voronoi Diagram



Minimum Illumination Range Voronoi Diagram



Minimum Illumination Range Voronoi Diagram

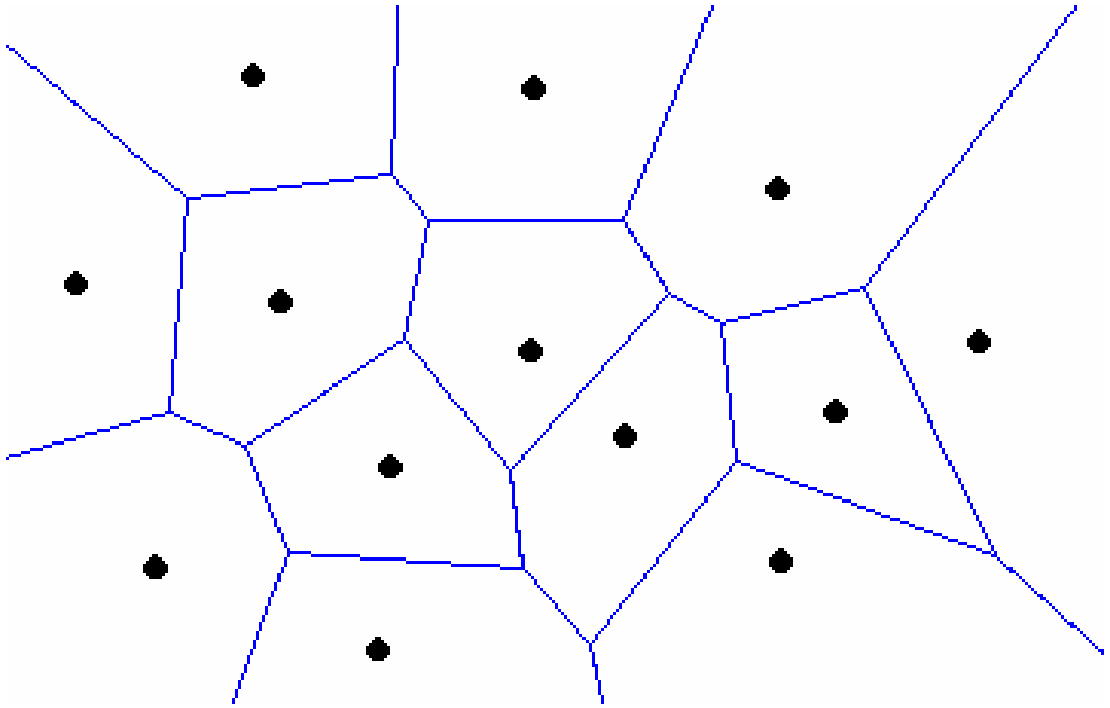


BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

- ABHMP, ’05 *Minimum Illumination Range Voronoi Diagrams*

Un conjunto de focos F

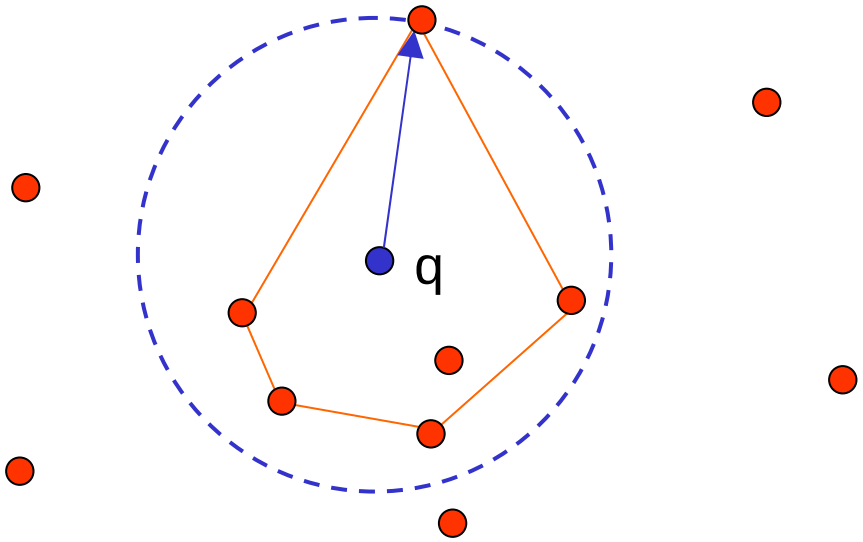
Un nuevo Diagrama de Voronoi **MIRVD**



Minimum Illumination Range Voronoi Diagram

Un conjunto de focos F

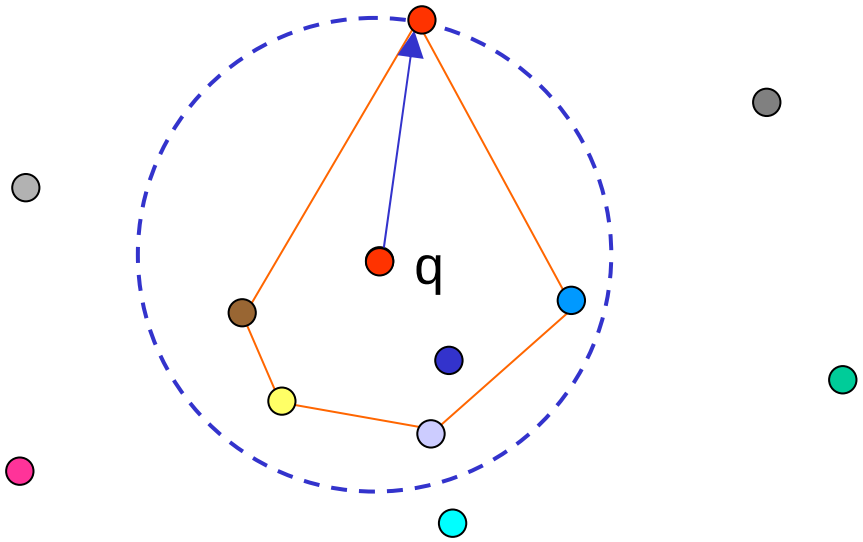
a cada punto q del plano se le asocia su MER-point en F



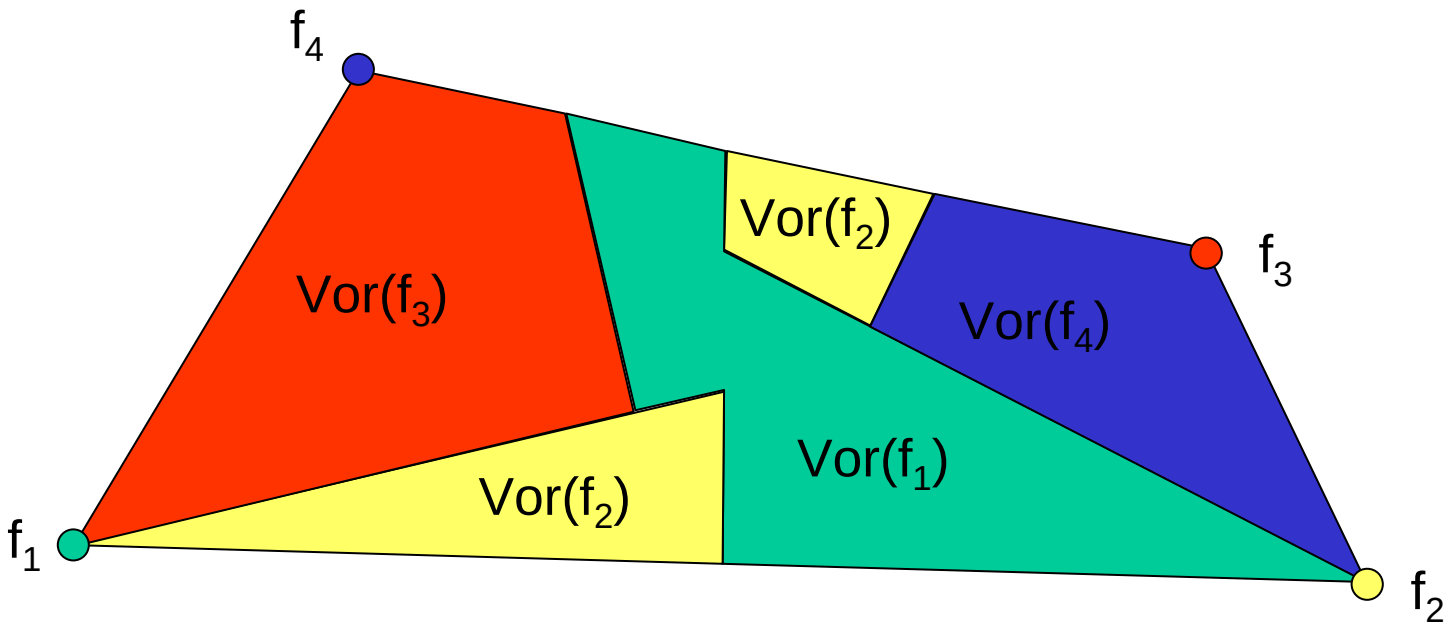
Minimum Illumination Range Voronoi Diagram

Un conjunto de focos F

a cada punto q del plano se le asocia su MER-point en F



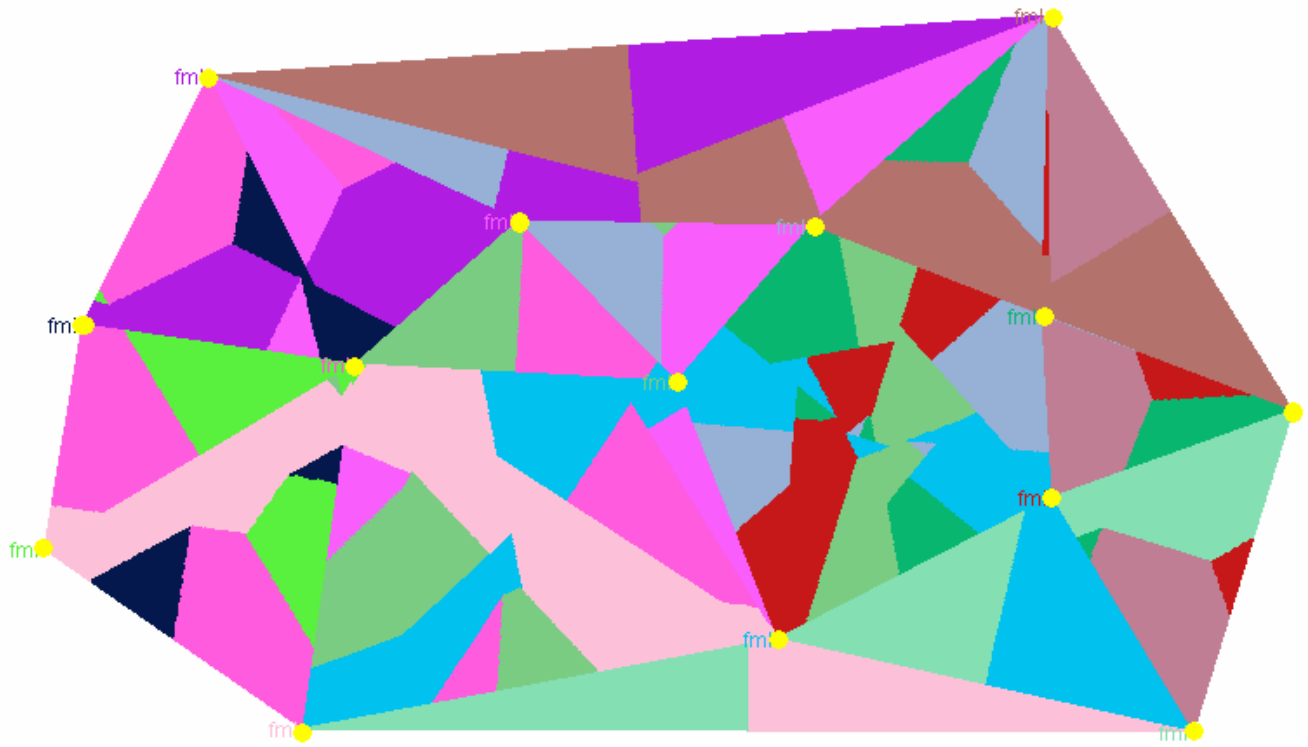
Minimum Illumination Range Voronoi Diagram



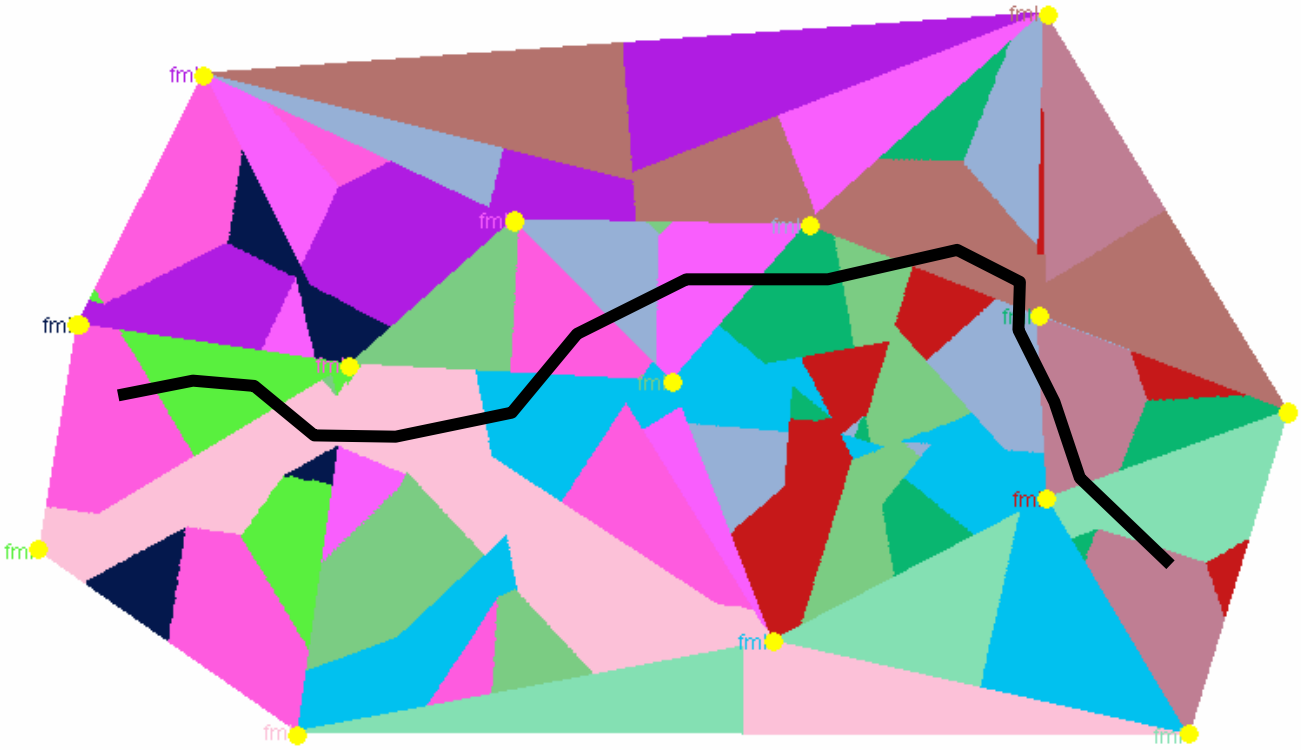
La región de un foco, Vor(f), puede ser no conexa

La región de un foco, Vor(f), puede ser no convexa

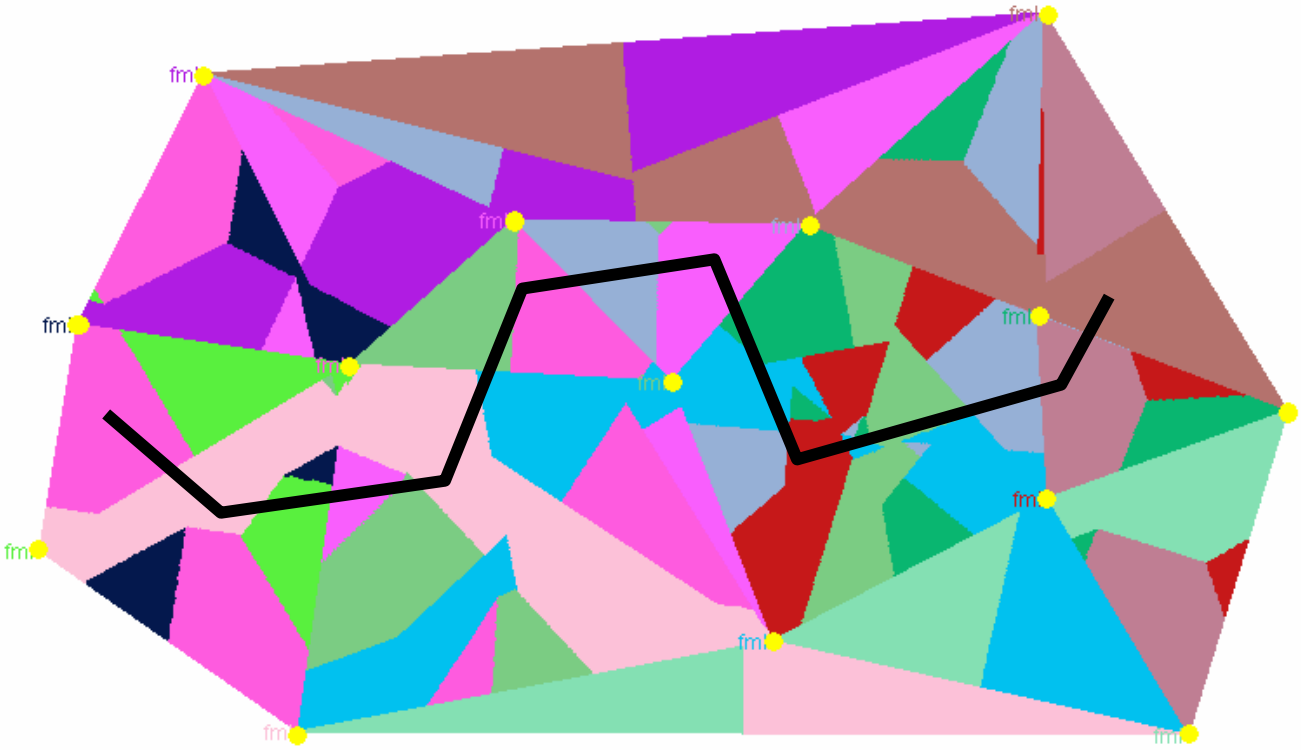
Minimum Illumination Range Voronoi Diagram



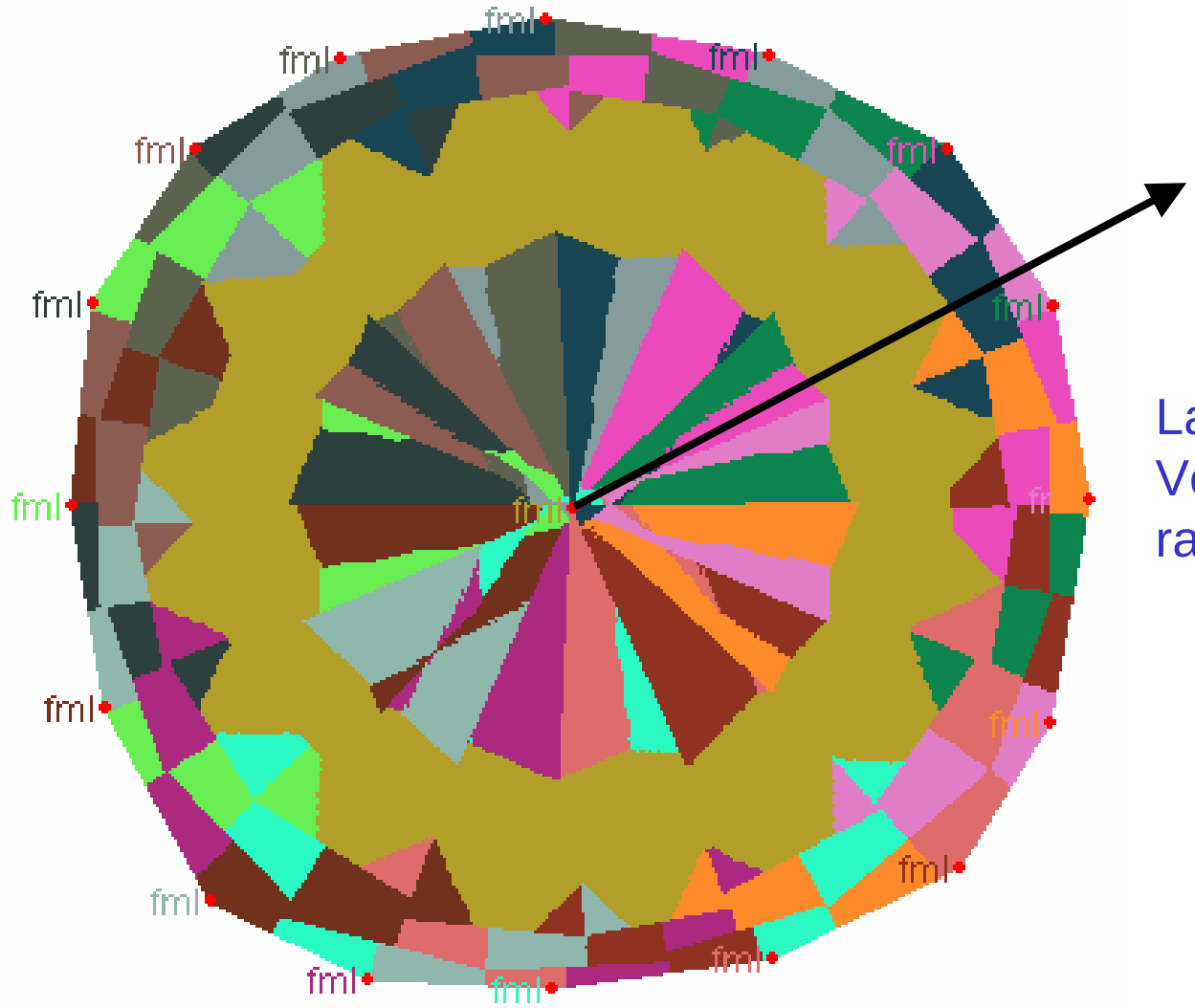
Minimum Illumination Range Voronoi Diagram



Minimum Illumination Range Voronoi Diagram



Minimum Illumination Range Voronoi Diagram

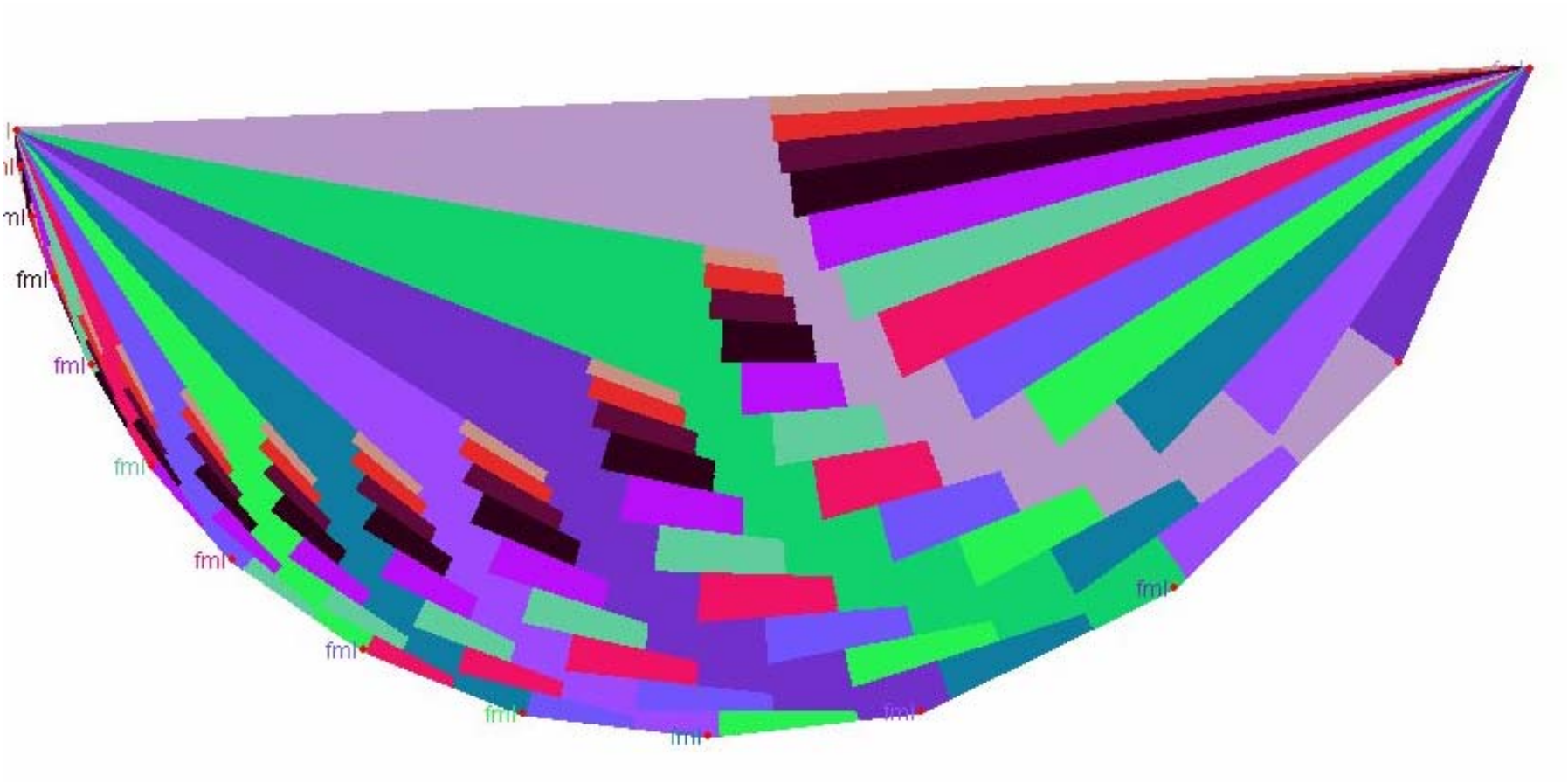


La región de un foco, Vor(f), es siempre radialmente monótona

Minimum Illumination Range Voronoi Diagram

Complejidad combinatoria

Cota inferior $\Omega(n^2)$



Una región puede tener O(n) componentes conexas

Minimum Illumination Range Voronoi Diagram

Propiedades

- Descomposición del cierre convexo de F
- Puede haber regiones no conexas y no convexas
- Los focos interiores a CH(F) son vértices cóncavos de su región de Voronoi
- Vor(f) es radialmente monótono
- Complejidad combinatoria cuadrática
- Una cantidad lineal de regiones pueden tener O(n) componentes conexas
- Construcción en $O(n^4)$

Referencias básicas para Galerías de Arte

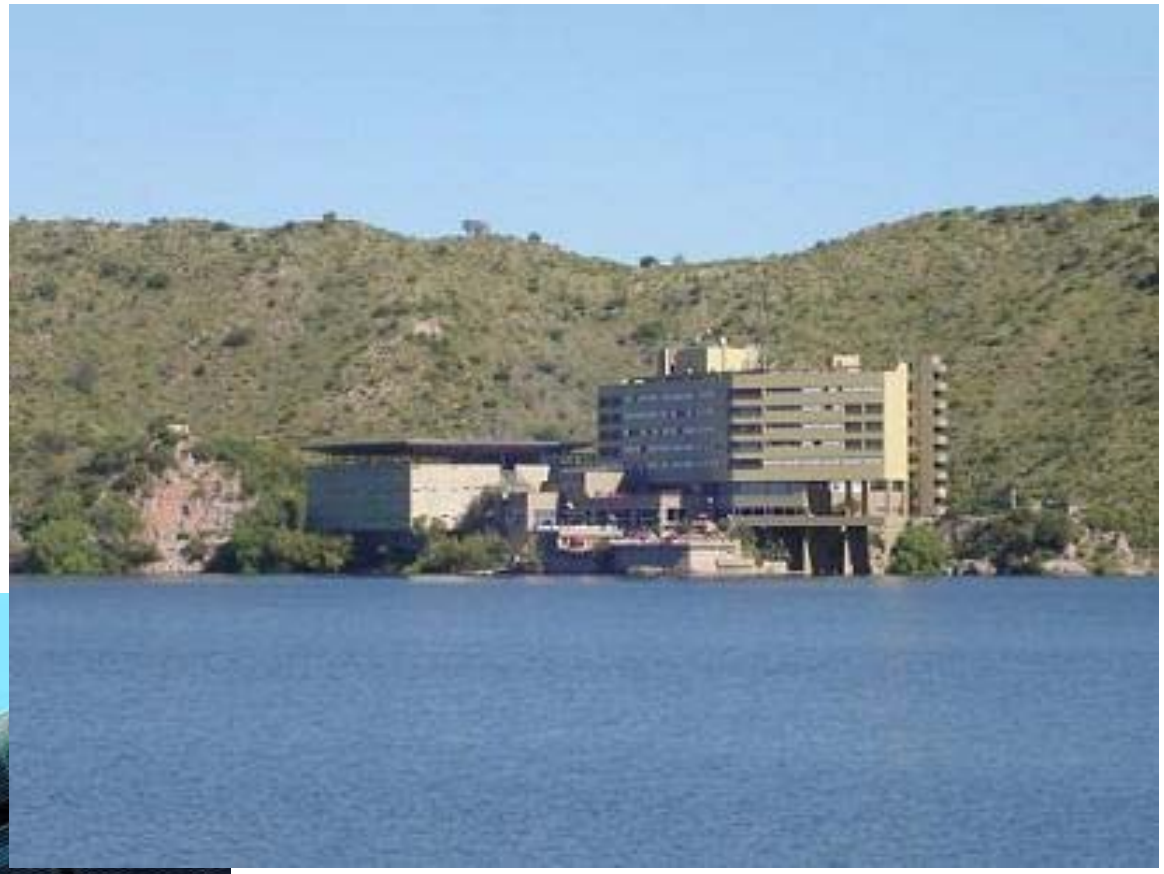
- J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, Handbook on Computational Geometry, (J.-R. Sack, J. Urrutia, ed.) Elsevier, 2000
- J. O'Rourke, *Art Gallery*, *Theorems and Algorithms*, Oxford, 1987

Geometría Computacional

- Geometry Algorithms
  http://geometryalgorithms.com
- Grupo de Geometría Computacional de Madrid
  http://www.dma.fi.upm.es/research/geocomp

REFERENCIAS

- [AACH] M. Abellanas, E. Alba, S. Canales, G. Hernández, *Solving the Illumination Problem with Heuristics*, Proc. NM&A '06, Bulgaria, 2006
- [ABHMP] M. Abellanas, A. Bajuelos, G. Hernández, I. Matos, B. Palop, *Minimum Illumination Range Voronoi Diagrams*, Int. Symp. Voronoi Diagrams in Science and Engineering, Corea, 2005
- [ABHHMP] M. Abellanas, A. Bajuelos, G. Hernández, F. Hurtado, I.Matos, B. Palop, *Good Illumination of Minimum Range*, preprint, 2006
- [ACH04] M. Abellanas, S. Canales, G. Hernández, *Buena iluminación*, Actas IV JMDA, pág. 239-246, Cercedilla, 2004
- [ACH05] M. Abellanas, S. Canales, G. Hernández, *Más resultados sobre buena iluminación*, Actas XI EGC'05, Santander, 2005
- [C] S. Canales, *Métodos heurísticos en problemas geométricos: Visibilidad, iluminación y vigilancia*, Tesis Doctoral, Madrid, 2004
- [EHM] A. Efrat, S. Har-Peled, J. Mitchell, *Approximation algorithms for two optimal location problems in sensor networks*, 14th WCG, MIT, 2004
- [E] S. Eidenbenz, *(In)-Aproximability of Visibility Problems on Polygons and Terrains*, Tesis Doctoral, ETH, Zürich, 2000
- [SE] J. Smith, W. Evans, *Triangle Guarding*, Proc. CCCG'03, 2003



GRACIAS POR SU ATENCIÓN