Universidad Politécnica de Madrid

VII Seminario de Matemática Discreta

Universidad de Valladolid

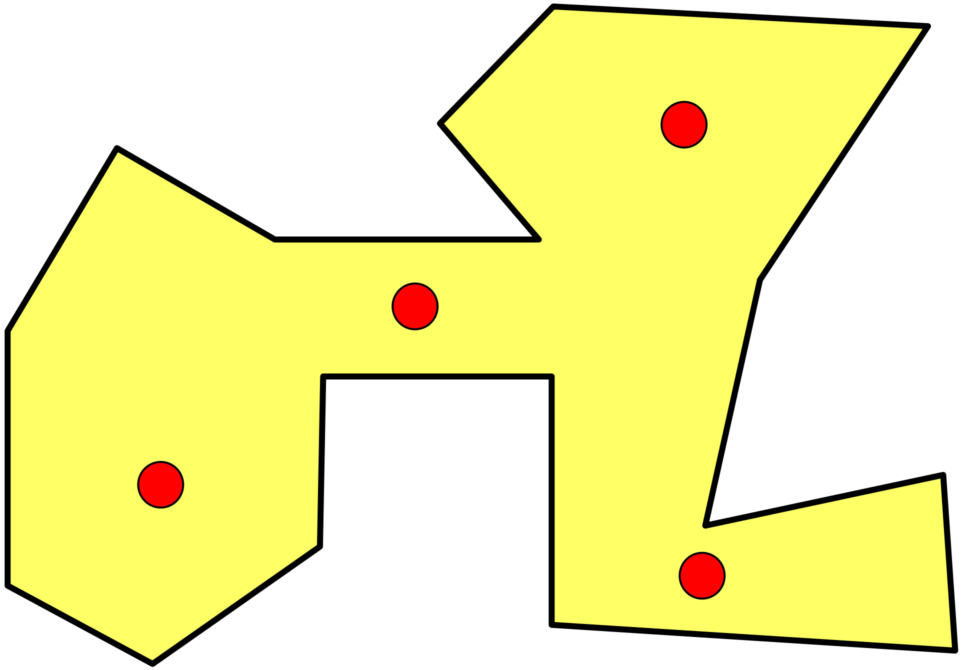
GALERÍAS DE ARTE
30 años después

Gregorio Hernández Peñalver
UPM

Valladolid 16-6-2005

GALERÍAS DE ARTE

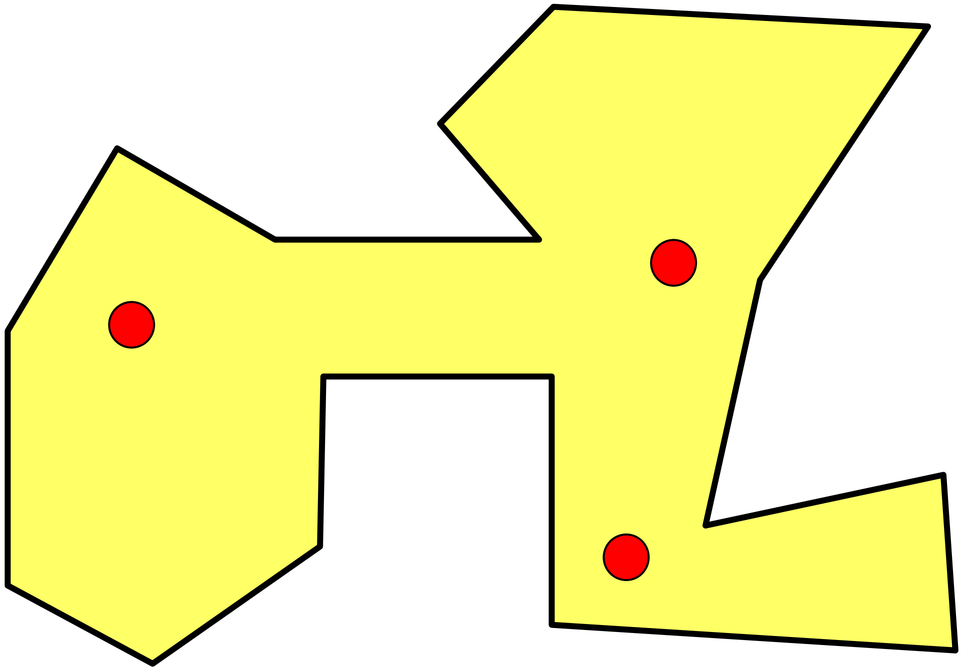
Victor Klee, 1973



¿Cuántas luces? ¿Cuántos guardias?

PROBLEMA DE LAS GALERÍAS DE ARTE

GALERÍAS DE ARTE



Colocar el menor nº de guardias en P

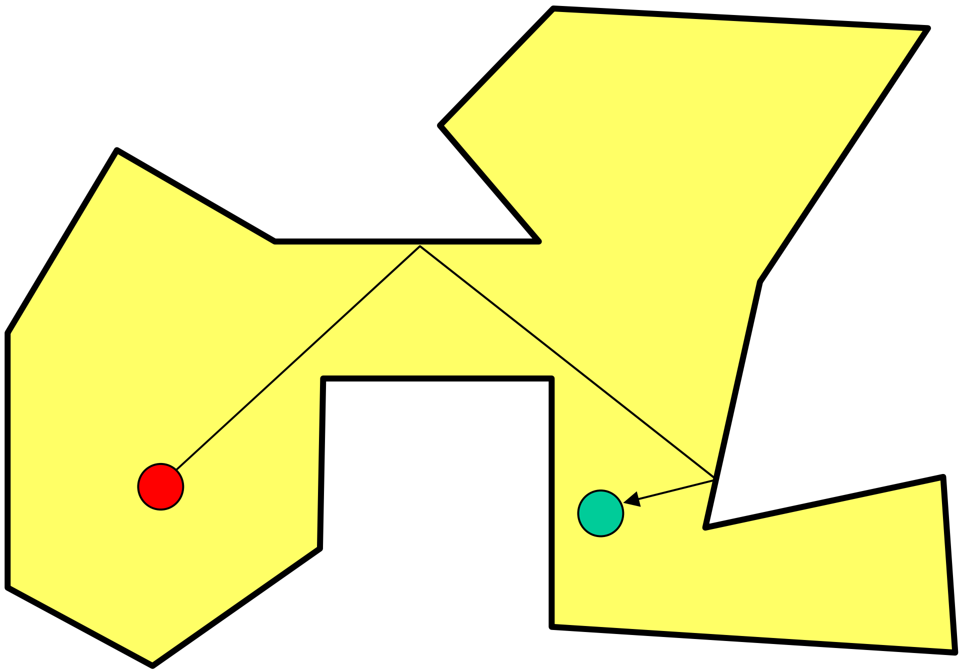
PROBLEMA ALGORÍTMICO

Dado n, hallar el nº de guardias suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados

PROBLEMA COMBINATORIO

GALERÍAS DE ARTE

¿Y si las paredes son espejos y
sólo hay una luz?

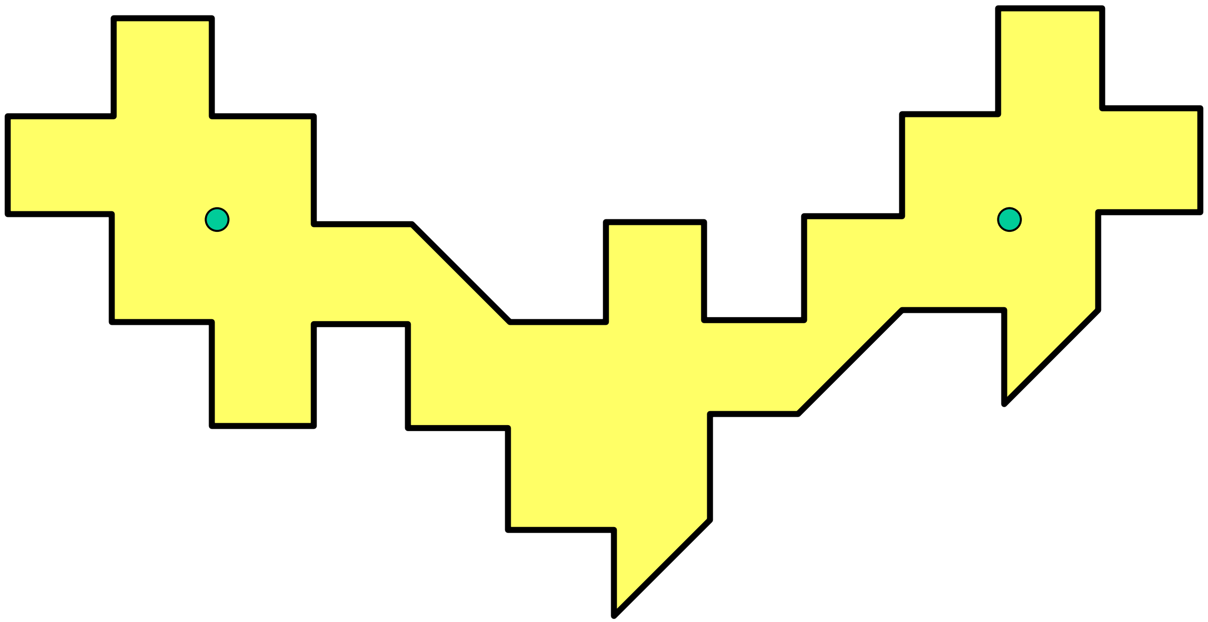


Ernst Strauss ~50
Victor Klee, 1969

¿Toda región poligonal se puede iluminar desde cada punto?
¿Siempre existe un punto desde el que se ilumina todo?

GALERÍAS DE ARTE

¿Y si las paredes son espejos y sólo hay una luz?



NO

Tokarski, 1996

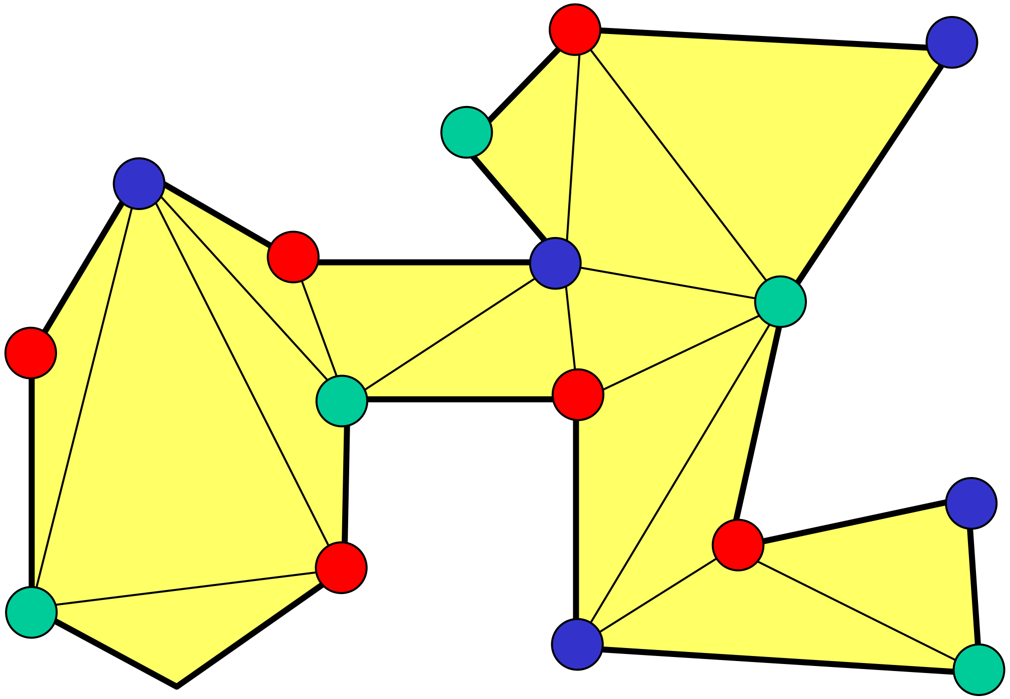
¿Toda región poligonal se puede iluminar desde cada punto?

¿Siempre existe un punto desde el que se ilumina todo?

Sumario

- Resolvamos “El Problema”
- Las múltiples variantes
- Técnicas de demostración
- Soluciones aproximadas

- Reflectores
- Alcance limitado
- Buena iluminación



GALERÍAS DE ARTE

PROBLEMA COMBINATORIO

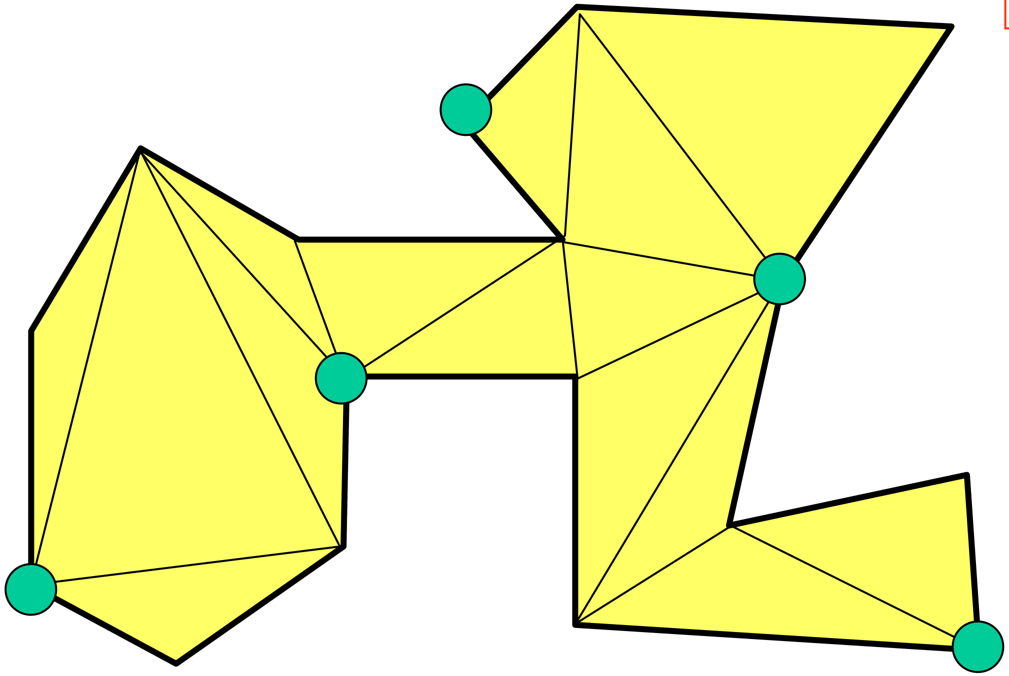
Chvátal, 1975

Fisk, 1978

1) TRIANGULAR

2) COLOREAR EL GRAFO CON 3 COLORES

GALERÍAS DE ARTE



PROBLEMA COMBINATORIO

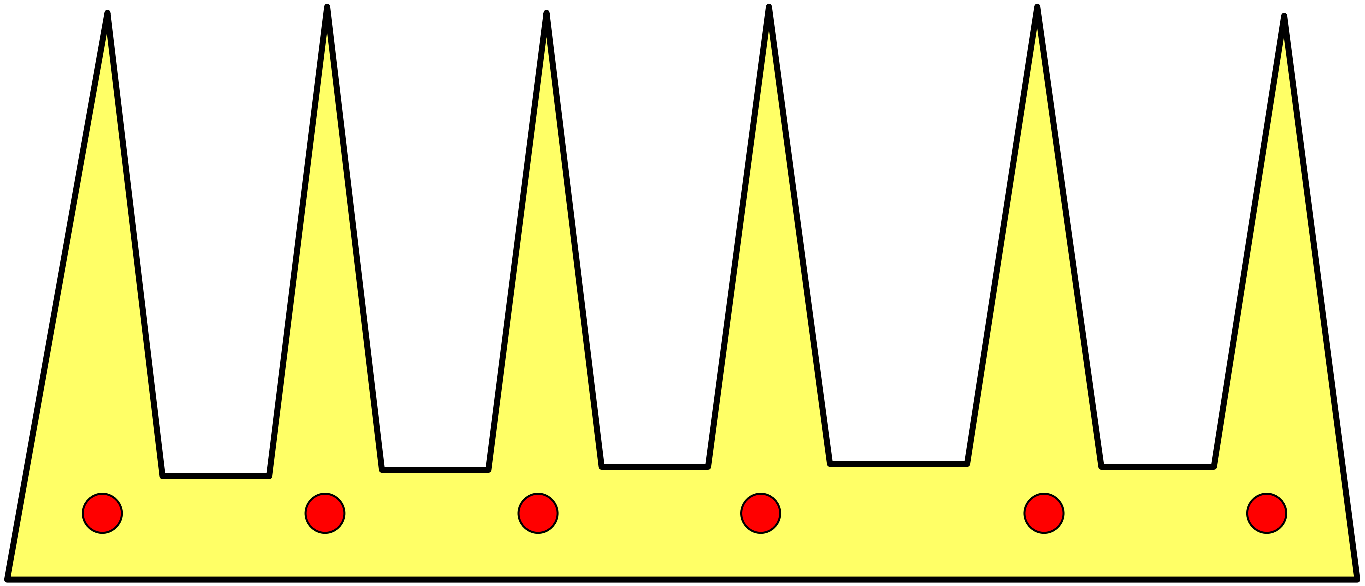
$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes

1) TRIANGULAR

2) COLOREAR EL GRAFO CON 3 COLORES

3) PONER GUARDIAS EN EL COLOR MENOS FRECUENTE

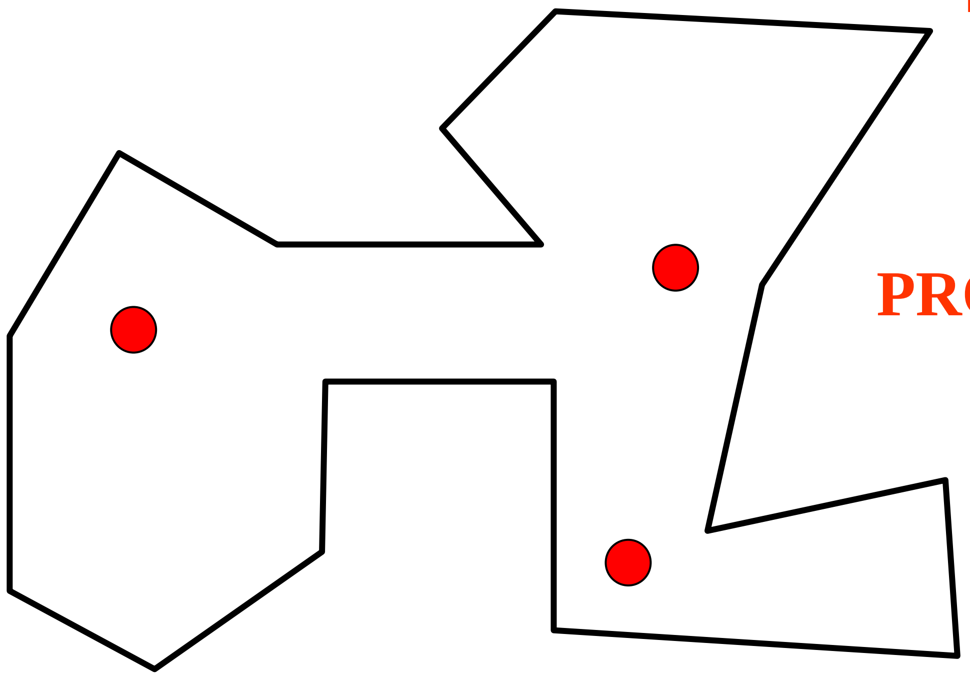
GALERÍAS DE ARTE



Teorema

$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

GALERÍAS DE ARTE

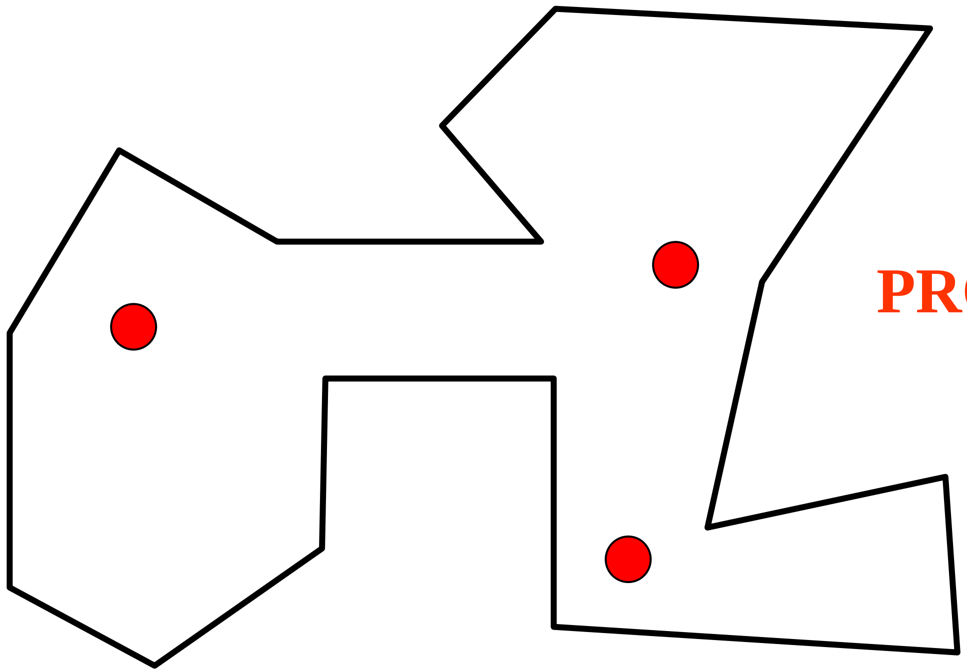


PROBLEMA ALGORÍTMICO

(1) Dado un polígono P de n lados, hallar el menor nº de guardias que lo vigilan

NP-completo, Lee, Lin, 1979

GALERÍAS DE ARTE



PROBLEMA ALGORÍTMICO

(2) Dado un polígono P de n lados, colocar los $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias que con seguridad lo vigilan.

Hay algoritmos polinómicos (lineales tras triangulación)

VARIANTES

➡ En el objeto a vigilar o iluminar

- polígonos ortogonales, monótonos, ..., con agujeros
- interior o exterior
- configuraciones de objetos

➡ En la forma de vigilar o iluminar

- desde vértices o puntos interiores
- guardias móviles
- reflectores de amplitud limitada
- reflectores de alcance limitado
- con “calidad”

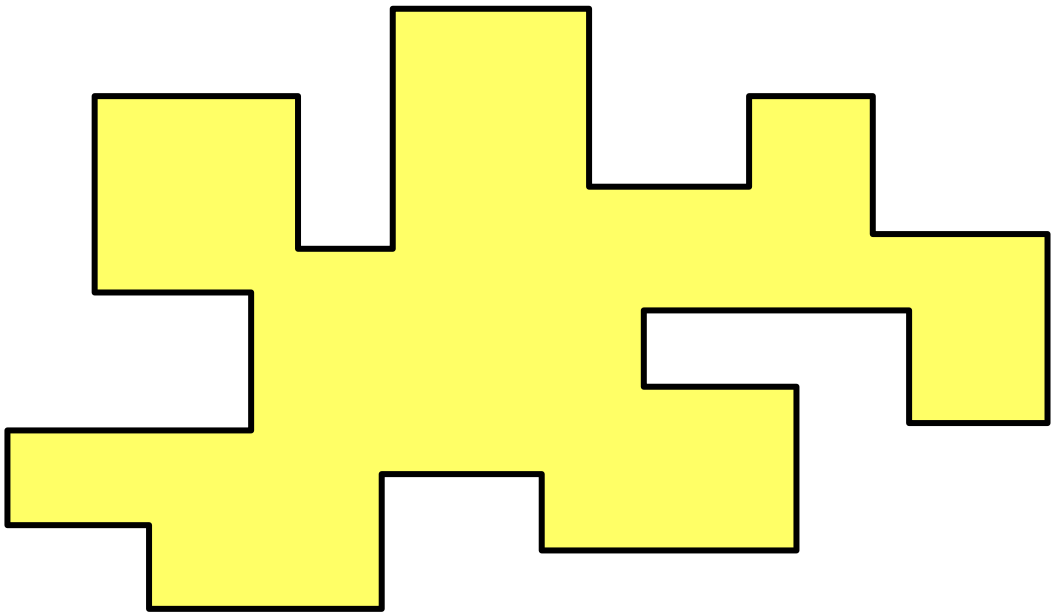
➡ Rutas de vigilancia

GALERÍAS DE ARTE

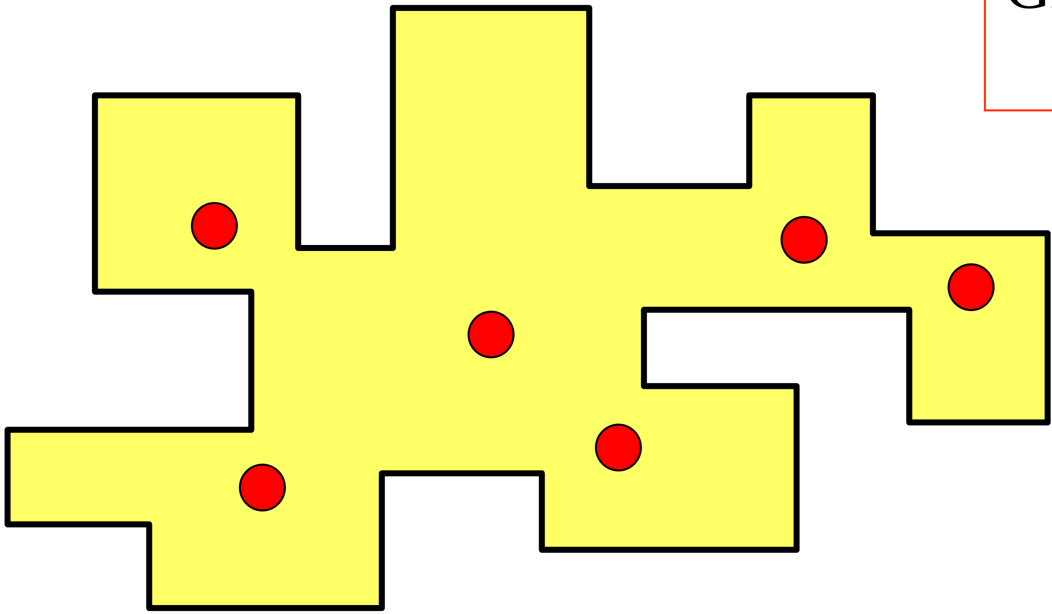
VARIANTES

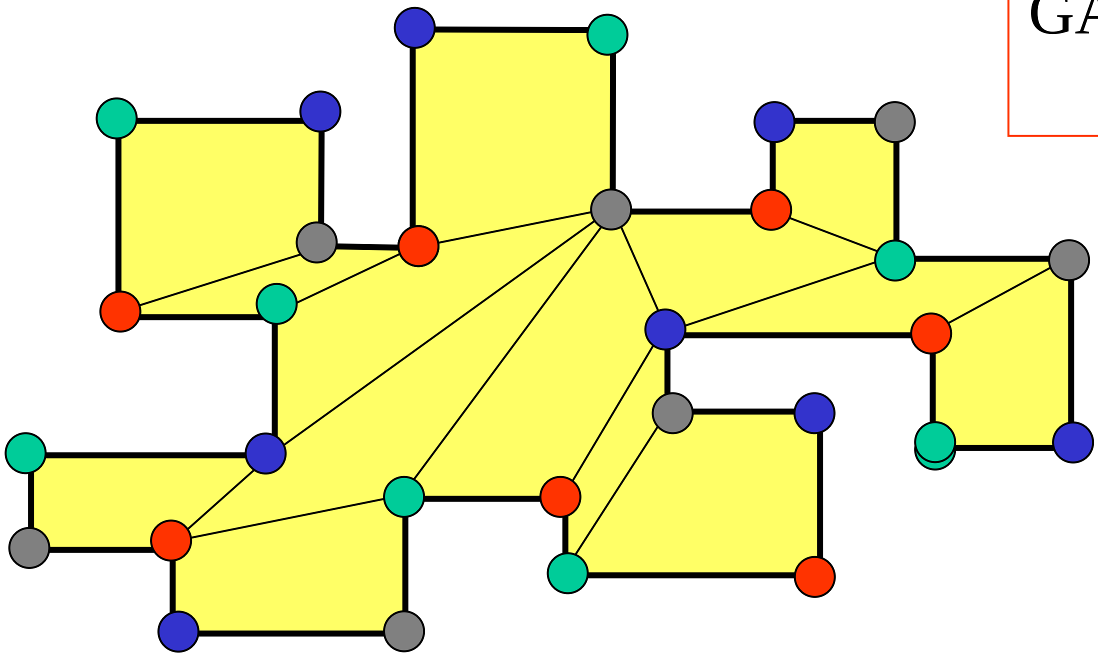
Polígonos ortogonales KKK, 1983

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal de n lados



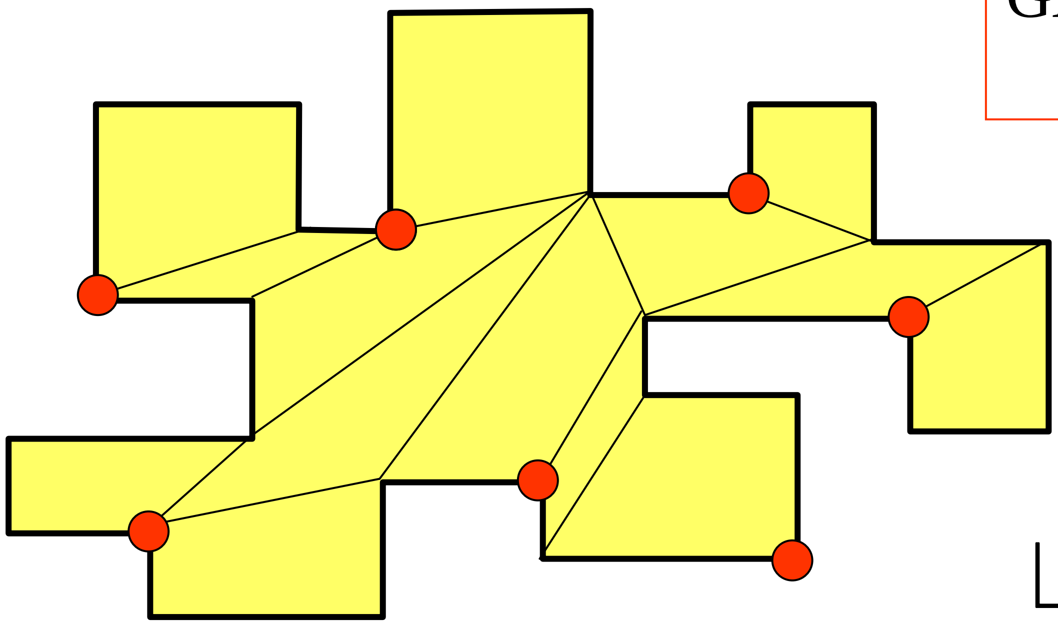
GALERÍAS DE ARTE ORTOGONALES





GALERÍAS DE ARTE ORTOGONALES

1. CUADRANGULAR
2. COLOREAR CON 4 COLORES

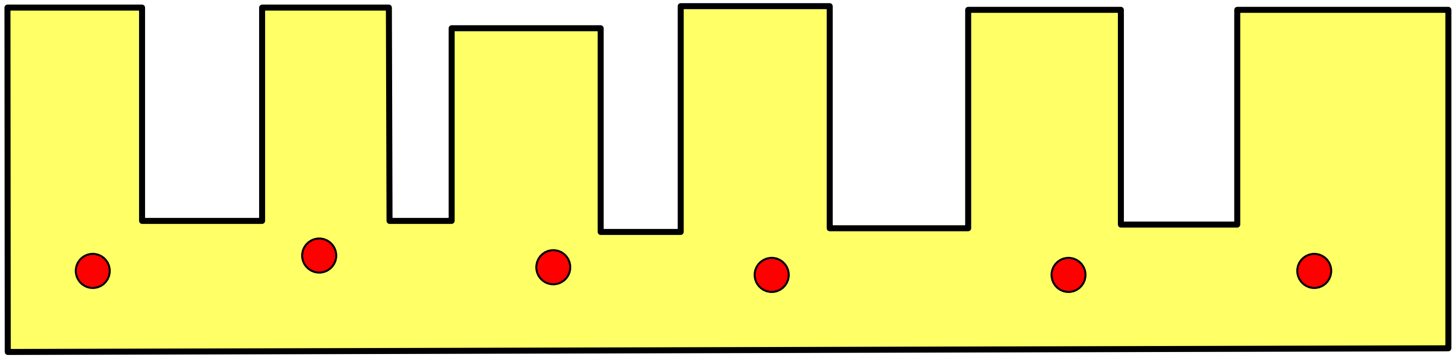


GALERÍAS DE ARTE ORTOGONALES

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias siempre son suficientes

1. CUADRANGULAR
2. COLOREAR CON 4 COLORES
3. PONER GUARDIAS EN EL COLOR MENOS USADO

GALERÍAS DE ARTE ORTOGONALES



Teorema

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

GALERÍAS DE ARTE

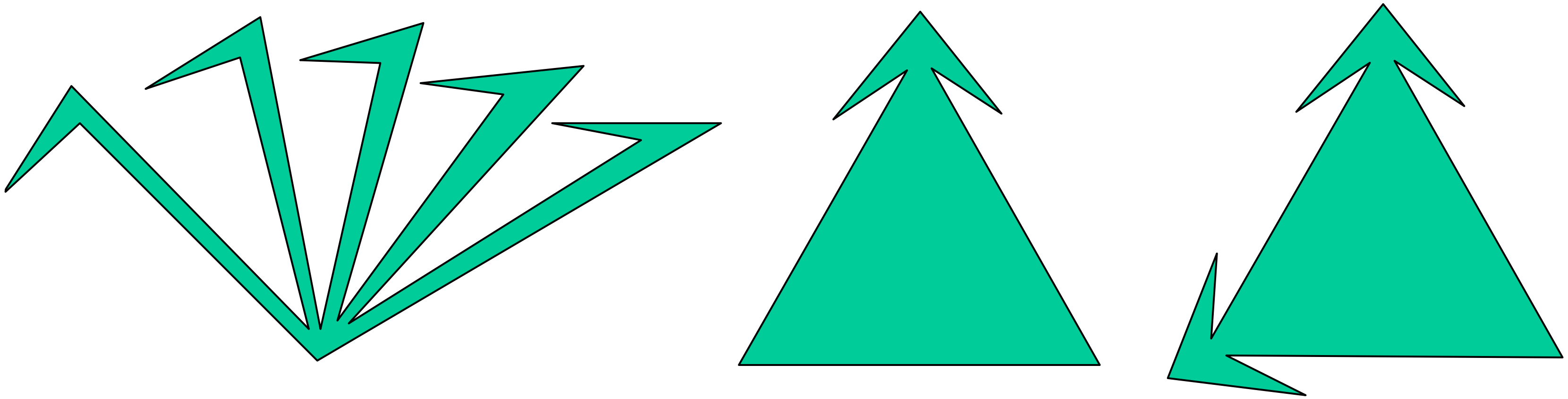
VARIANTES

Guardias-lado

Conjetura de Toussaint 1981

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

... salvo estos ejemplos

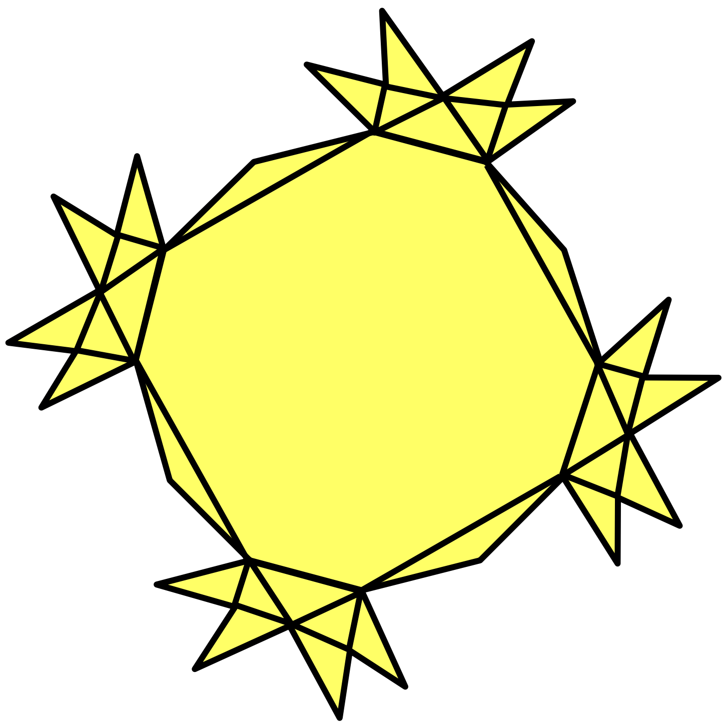


GALERÍAS DE ARTE

VARIANTES

→ Guardias-lado   Conjetura de Toussaint, 1981

No se puede demostrar por triangulación !!



Cualquier conjunto de aristas que cubra todos los triángulos contiene al menos $\lfloor 3n/10 \rfloor$ aristas

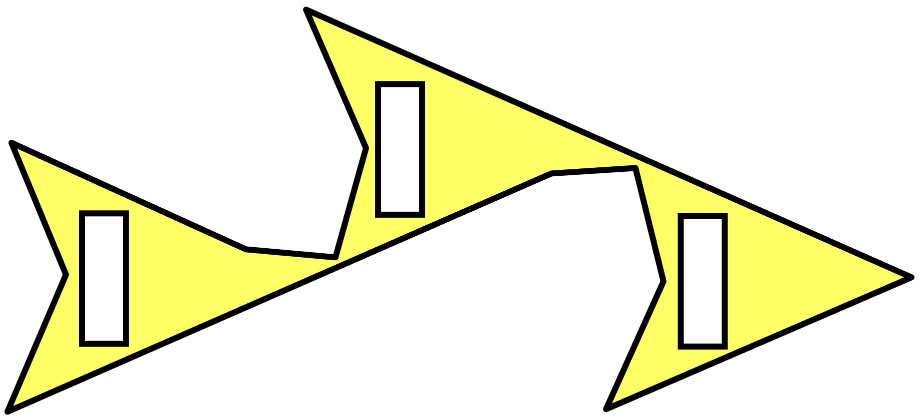
Teorema Shermer 1994
$\lfloor 3n/10 \rfloor$ guardias-lado son siempre suficientes y, a veces, necesarios para vigilar cualquier triangulación de n vértices, salvo tres grafos.

VARIANTES

GALERÍAS DE ARTE

Polígonos con agujeros HKK, BS, 1991

$\lceil (n+h)/3 \rceil$ guardias-punto siempre son suficientes y, a veces, necesarios para vigilar cualquier polígono de n vértices y h agujeros



¿Qué sucede si los guardias se colocan en los vértices?

...... abierto!

VARIANTES

Polígonos ortogonales con agujeros

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-punto siempre son suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal de n lados y h agujeros

Hoffman, 90

¿Y guardias-vértice?

Todo grafo planar bipartido puede completarse a un grafo planar maximal que se puede 3-colorear

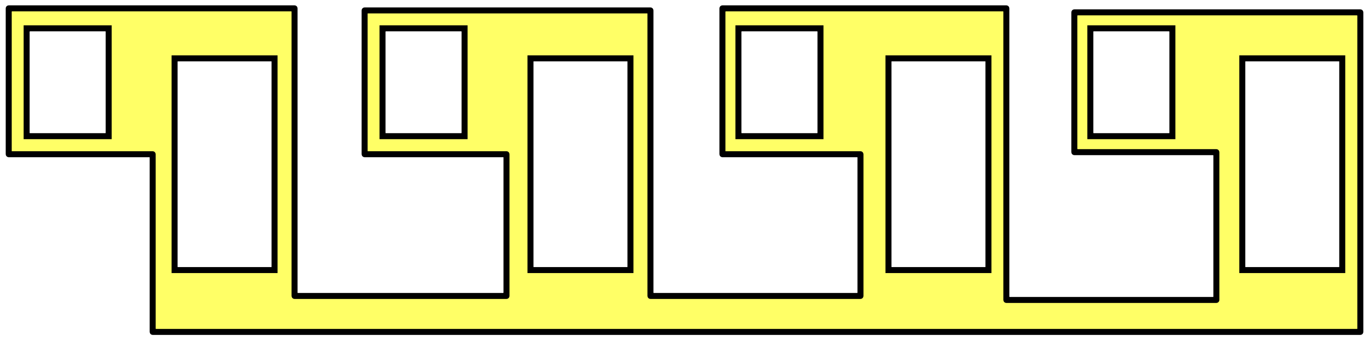
VARIANTES

Polígonos ortogonales con agujeros

$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias-vértice siempre son suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal de n lados y h agujeros

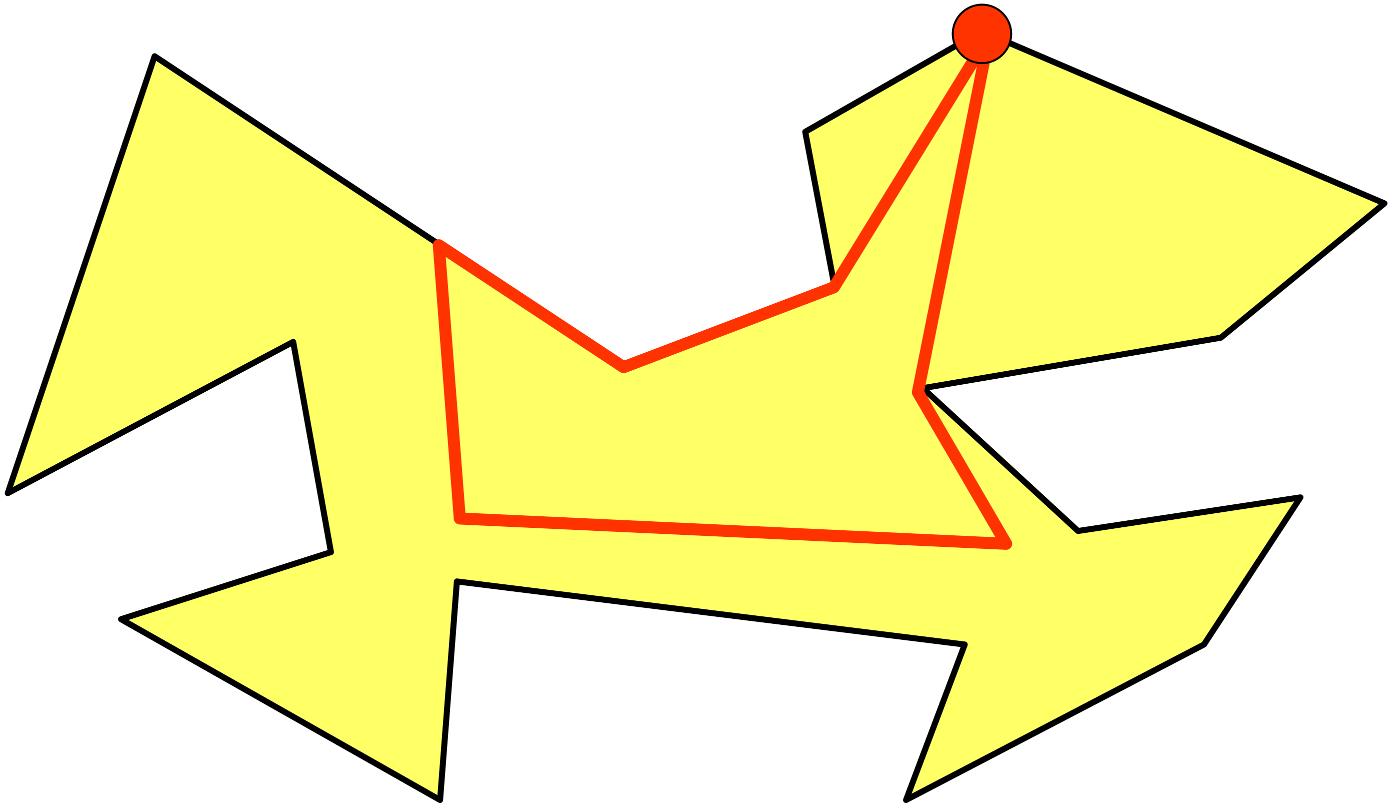
Hoffman, Kriegel, 93

¿La cota anterior se puede rebajar a $\lfloor 2n/7 \rfloor$?



Rutas de vigilancia

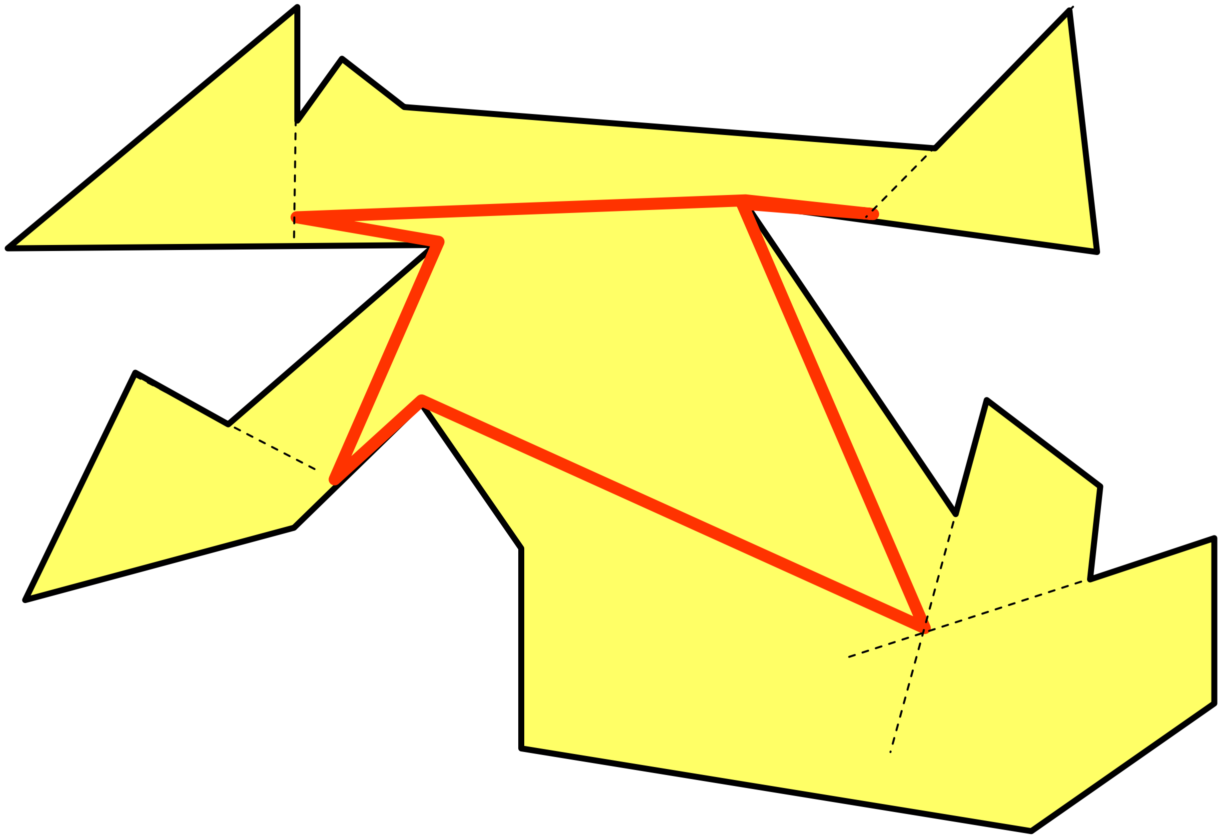
Chin, Ntafos, 1988



Chin, Ntafos, 1992 $O(n^4)$

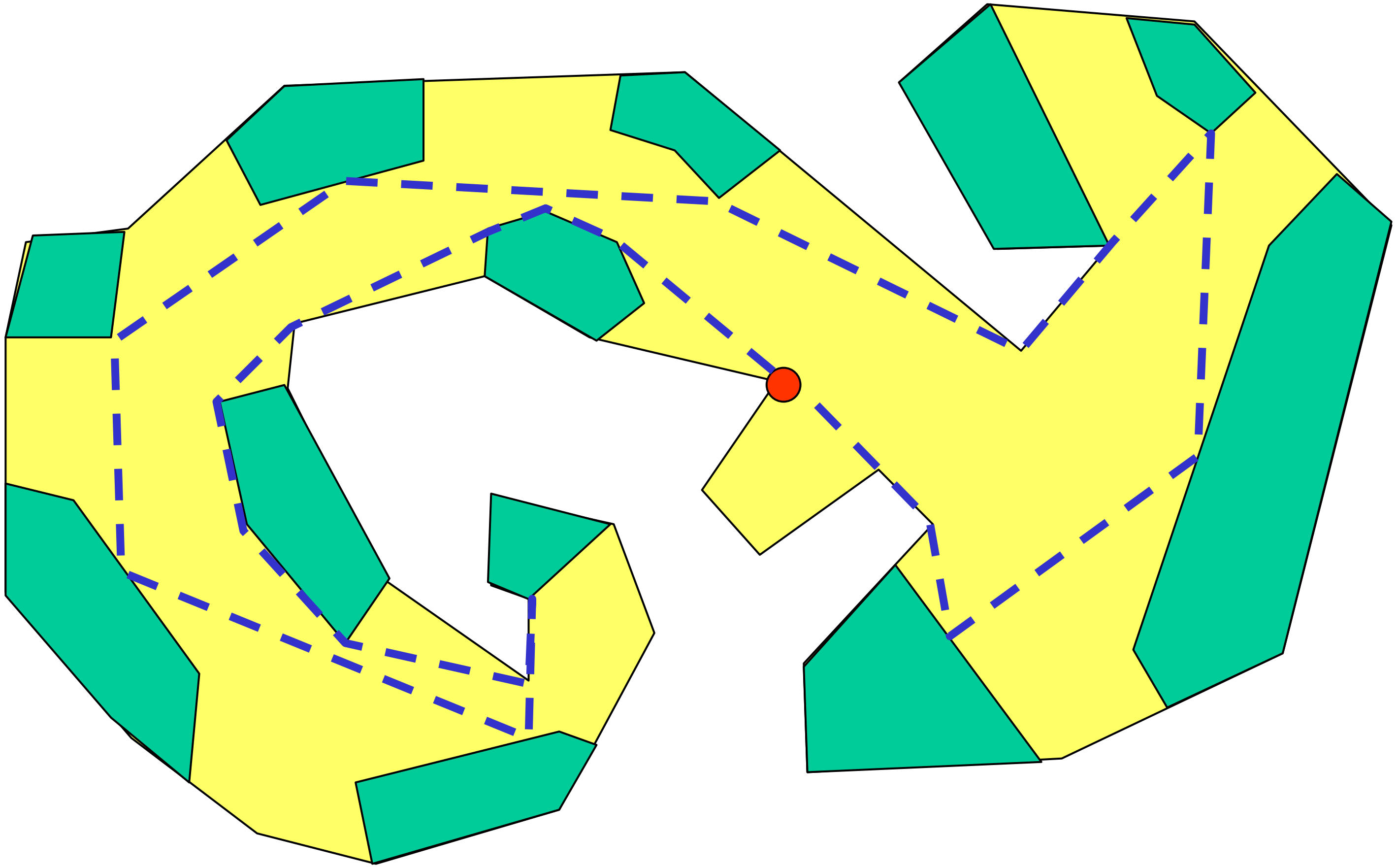
1988 NP-duro si hay agujeros

Rutas de vigilancia



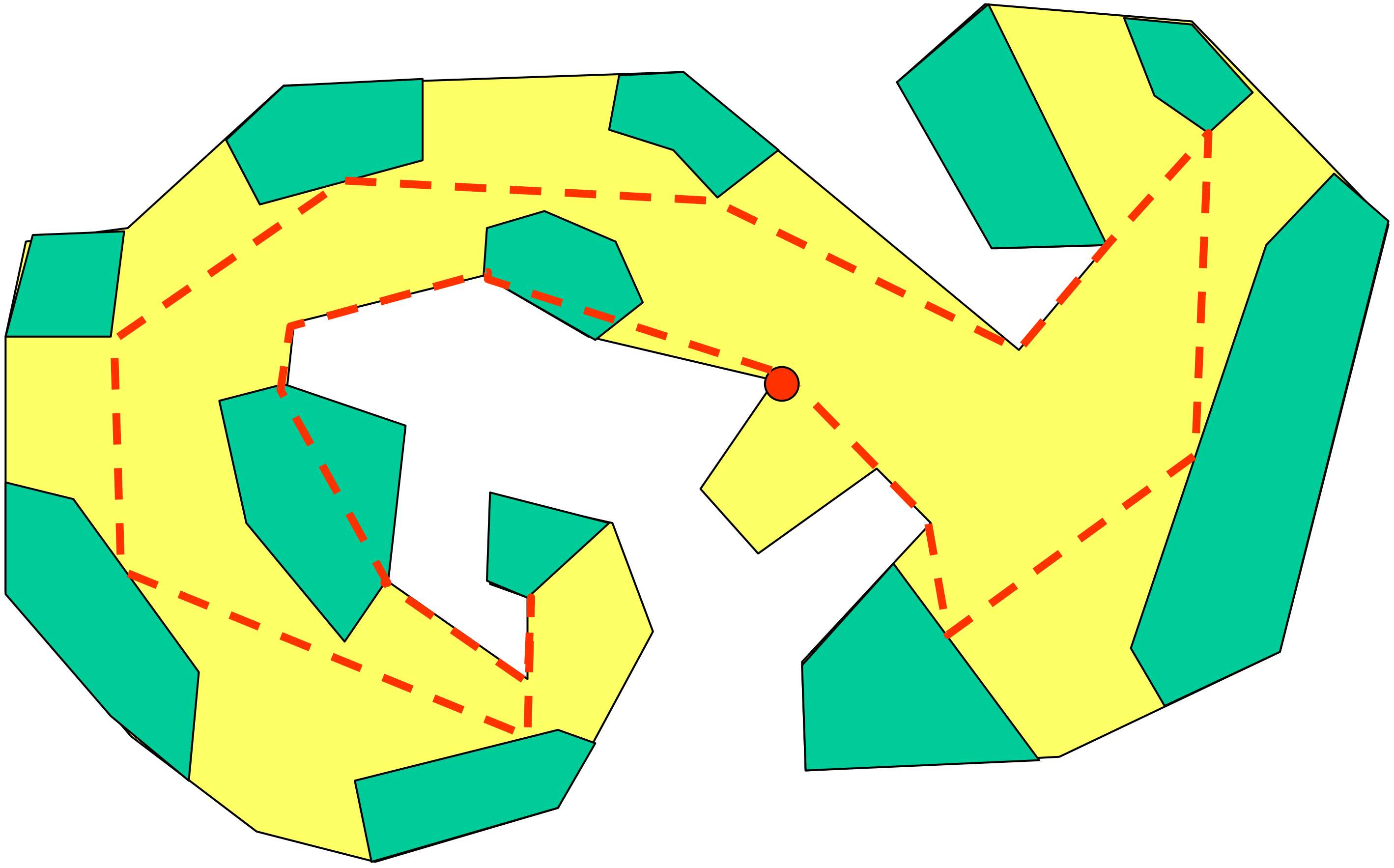
Carlsson y otros, 1999 $O(n^6)$

PROBLEMA DEL ZOO



NP-duro si las jaulas no están en el borde, Chin, Ntafos
O(nlogn) Bespamyatnikh, 99

PROBLEMA DEL SAFARI



NP-duro si las zonas no están en el borde Chin, Ntafos

O(n^3) Ntafos, 92

GALERÍAS DE ARTE

ALGORITMOS APROXIMADOS

MINIMIZAR el número de guardias necesario para vigilar un polígono dado P, es un problema NP-completo en casi todas las variantes de vigilancia

Ghosh, 1987
Algoritmo $O(n^5 \log n)$ que encuentra un conjunto de guardias-vértice (-lado) en un polígono sin(con) agujeros de tamaño a lo más $O(\log n)$ veces el óptimo.

Un algoritmo aproximado A para un problema de minimización es de razón c si $sol(A) \leq c\ sol(\text{óptima})$

GALERÍAS DE ARTE

ALGORITMOS APROXIMADOS

Resultados de inaproximabilidad, Eidenbenz, 2000

- Polígonos sin agujeros con guardias vértice/lado/punto es APX-duro

  Existe ε>0 tal que ningún algoritmo alcanza razón 1+ ε

  Por reducción desde Max-5-Ocurrence-3-Sat

- Polígonos con agujeros con guardias vértice/lado/punto es (logn)-duro

  No existe algoritmo que alcance razón mejor que O(logn)

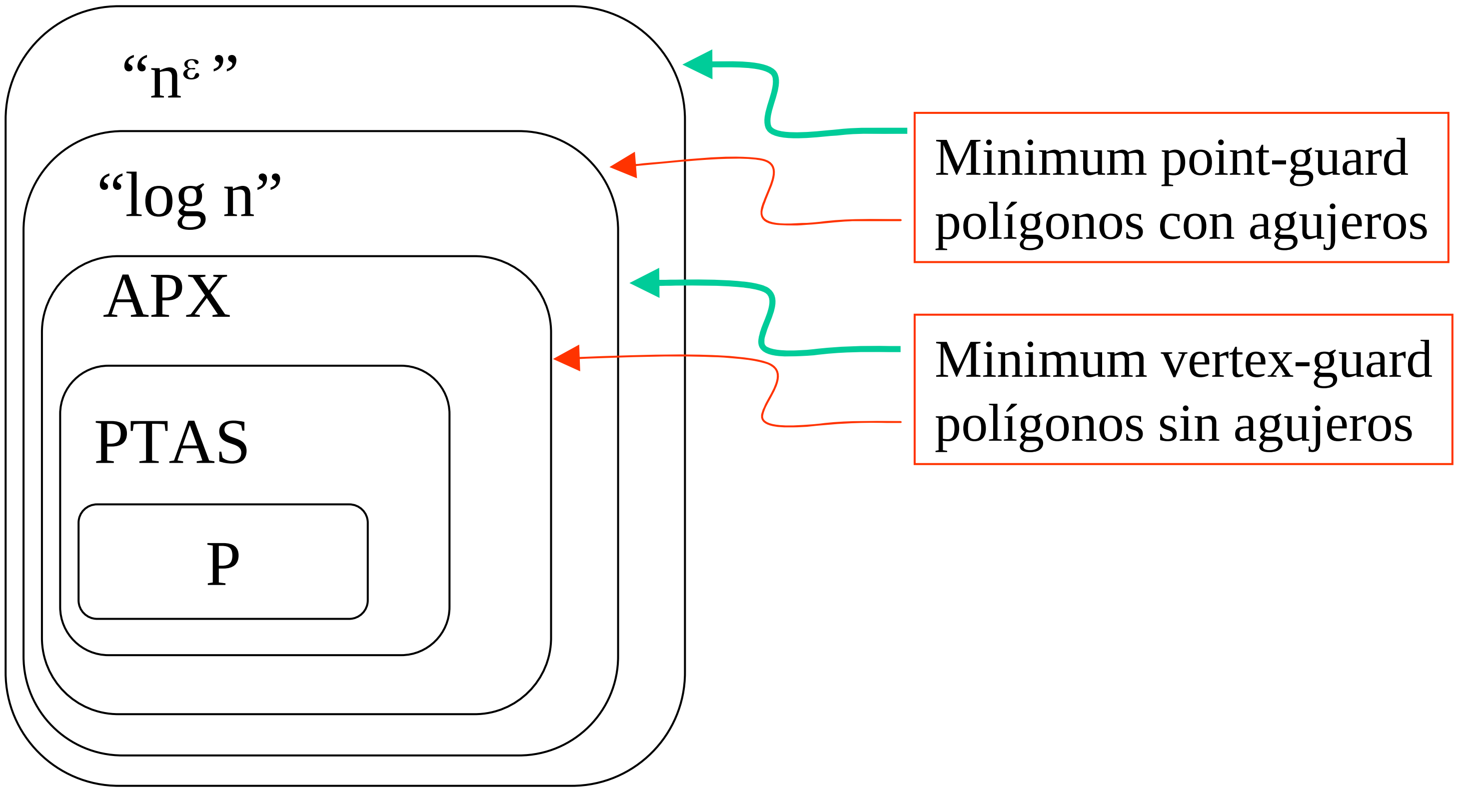
  El problema es (logn)-completo para vértice/lado

ALGORITMOS APROXIMADOS

GALERÍAS DE ARTE

Resultados de inaproximabilidad, Eidenbenz, 2000

Clases de aproximación para OPTIMIZACIÓN



ALGORITMOS APROXIMADOS

Efrat, Har-Peled, 2002

- Algoritmo $O(nc^2\log^4 n)$ que garantiza un conjunto de guardias-vértice de cardinal $O(\log c)$ veces el óptimo c

- Algoritmo exacto de complejidad $O((nc)^{3(2c+1)})$, utilizando técnicas de geometría algebraica real, para guardias-punto.

- Con guardias en una malla (arbitrariamente densa)
  - Algoritmo $O(nc^2\log n)\log(nc)\log^2\Delta)$ que garantiza un conjunto de guardias en la malla de razón $O(\log c)$
  - Si el polígono tiene h agujeros, el algoritmo aproximado es de razón $O(\log n \log(c \log h))$
- Resultados similares para vigilancia de terrenos.

ALGORITMOS APROXIMADOS

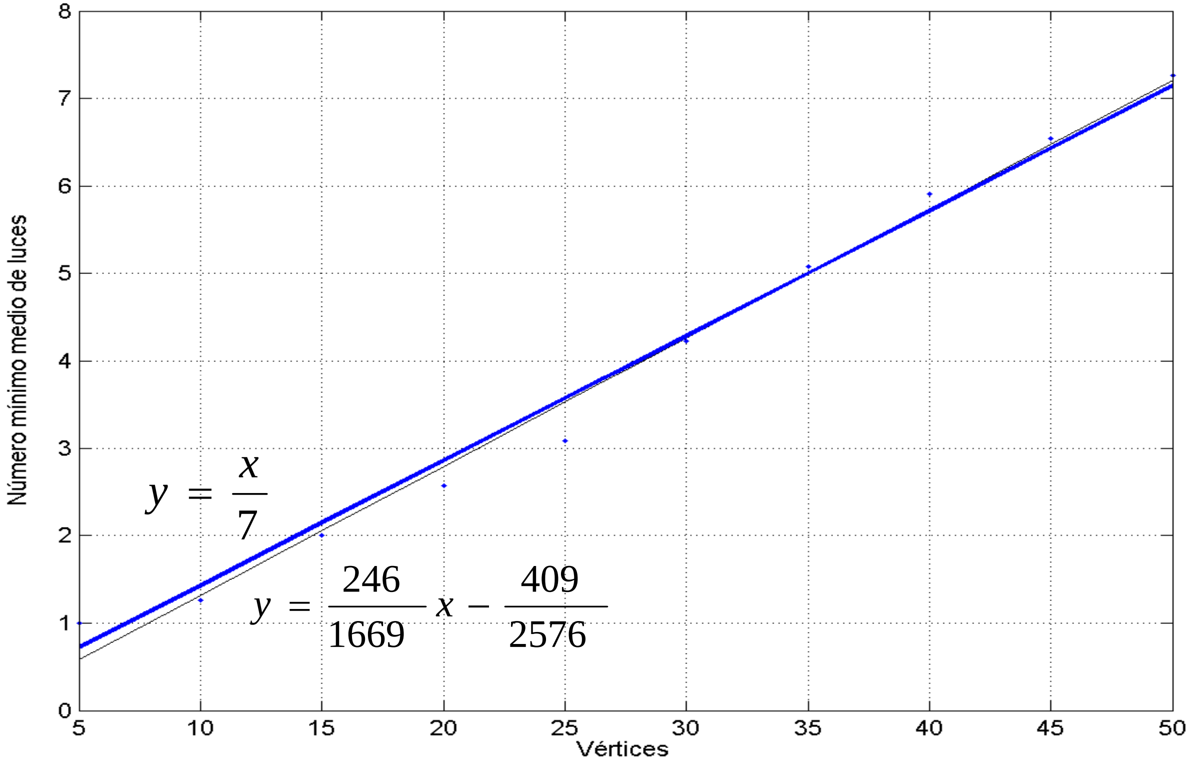
Cheong, Efrat, Har-Peled, 2003

- Maximizan el área vista por un punto. Algoritmo aleatorizado
  Si M es el área máxima, para cada $\delta>0$ encuentran un guardia que vigila un área $(1-\delta)M$ en tiempo $O(n^2/\delta^4)\log^3(n/\delta))$
- Con un algoritmo tipo "voraz" encuentran k "buenos guardias" en tiempo $O(k^3\, n^2/\delta^4)\log^3(n/\delta))$

Canales, 2004

- Metaheurísticas: Recocido simulado y algoritmos genéticos
- En media, el nº mínimo de guardias necesarios para vigilar un polígono de n vértices es, aproximadamente, n/7

ALGORITMOS APROXIMADOS



$$y = \frac{246}{1669}x - \frac{409}{2576} \approx \frac{x}{6.78} - 0.15 \approx \frac{x}{7}$$

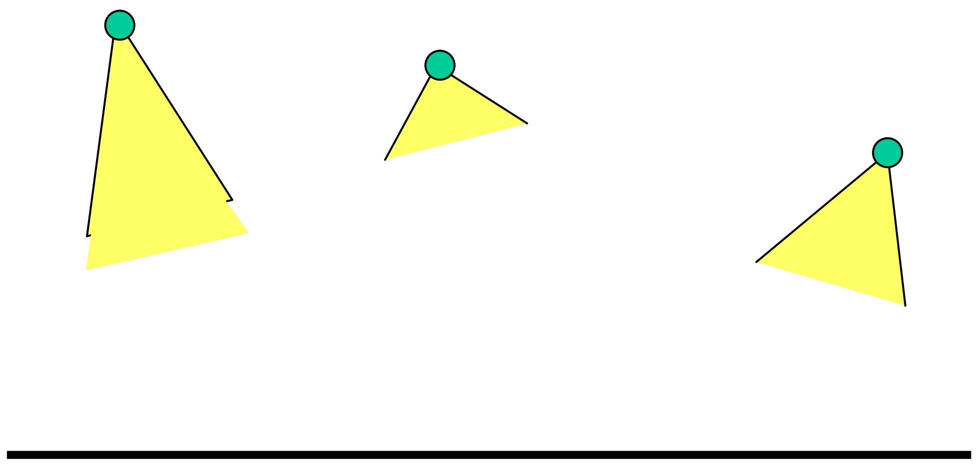
ILUMINACIÓN CON REFLECTORES

El ángulo de apertura de cada foco es limitado y fijo

- ILUMINACIÓN DE ESTRADOS
- ILUMINANDO EL PLANO
- ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS
- ILUMINANDO CON π-REFLECTORES
- ILUMINANDO CON (π/2)-REFLECTORES

ILUMINACIÓN DE ESTRADOS

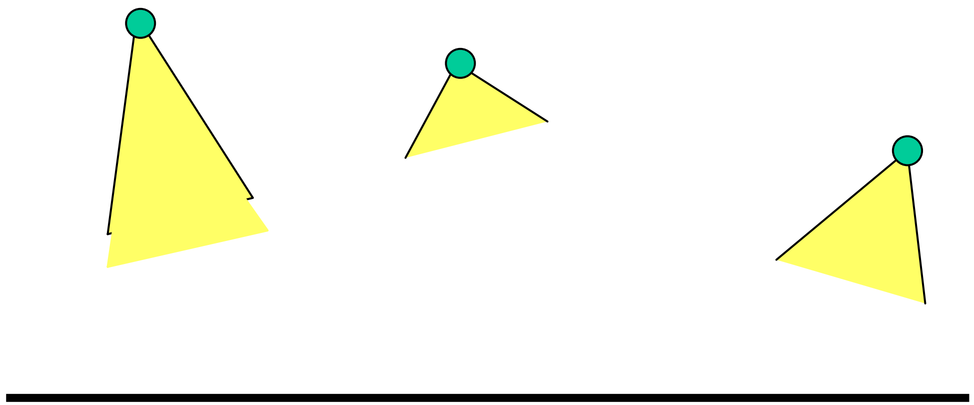
Urrutia, 1992



Dados L y los reflectores R_1, R_2, ... , R_n de amplitudes α_1, α_2, ... , α_n, ¿es posible girar los reflectores de forma que se ilumine todo el segmento L?

NP-completo [IUY], 1998

ILUMINACIÓN ÓPTIMA DE ESTRADOS

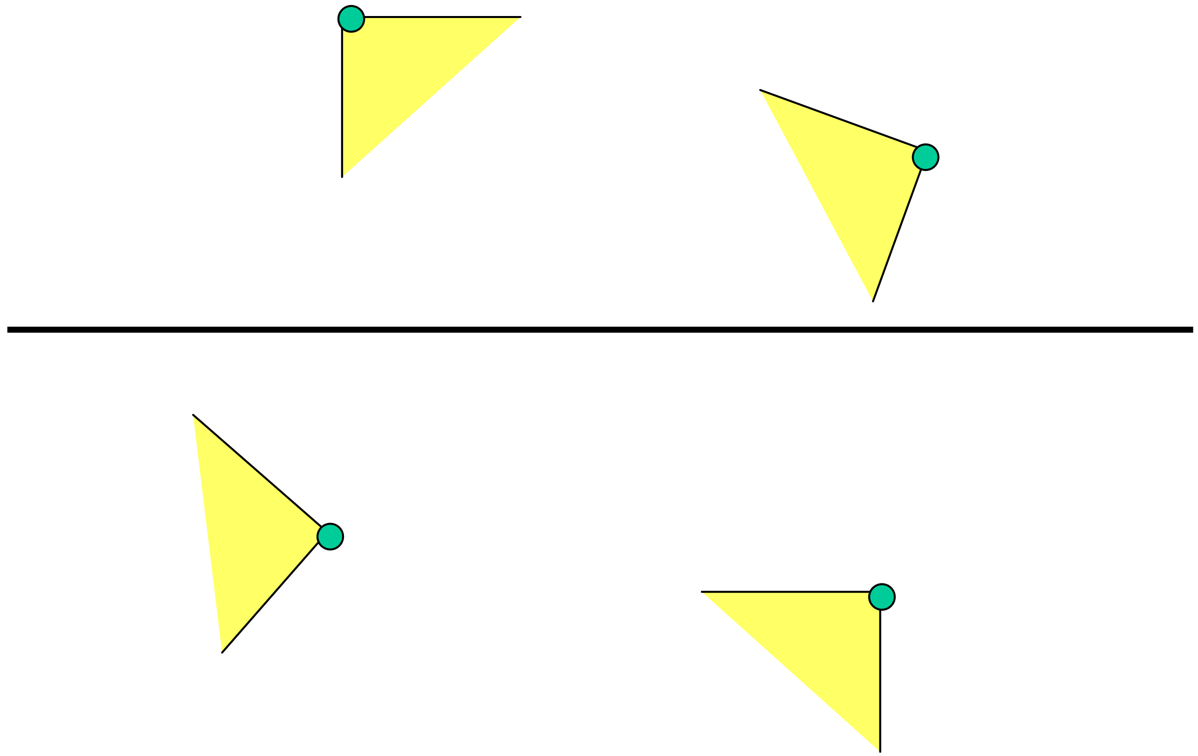


Sea $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ conjunto de n puntos en el mismo lado de una recta L. Hallar un conjunto de reflectores $R_1, R_2, \ldots, R_n$ tales que cada uno se coloque en un punto de S, iluminen L y la suma de sus amplitudes $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ sea mínima

Czyzowicz, Rivera, Urrutia, 1993 algoritmo O(nlogn)

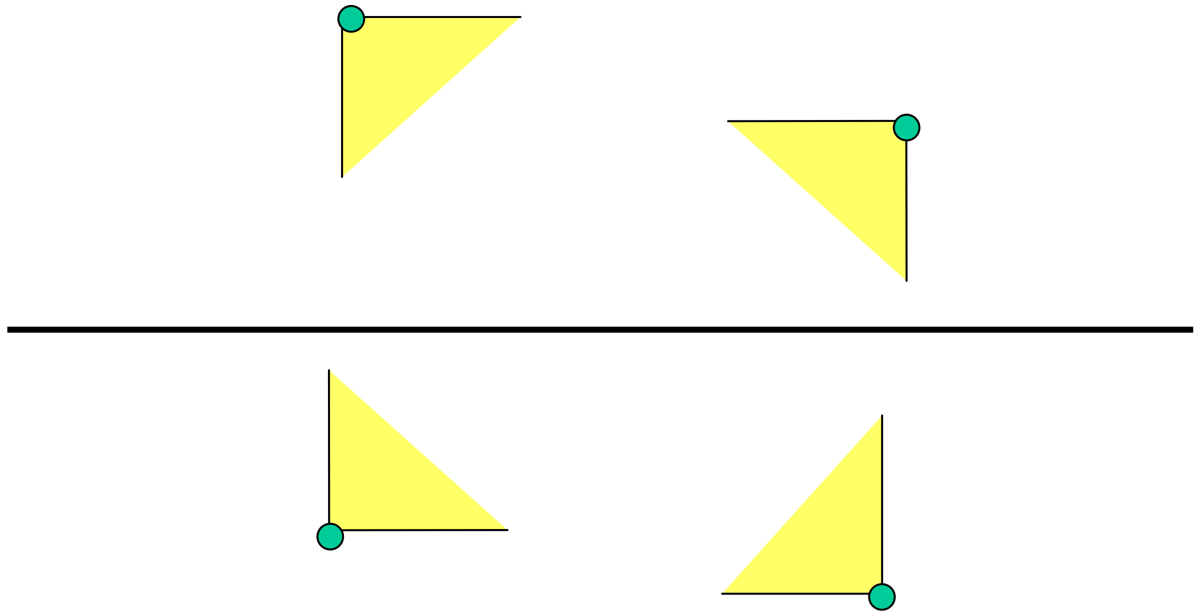
ILUMINANDO EL PLANO

Dados cuatro puntos P_1, P_2, P_3 , P_4 y cuatro reflectores de amplitud $\pi/4$, ¿es posible orientarlos para iluminar todo el plano?



ILUMINANDO EL PLANO

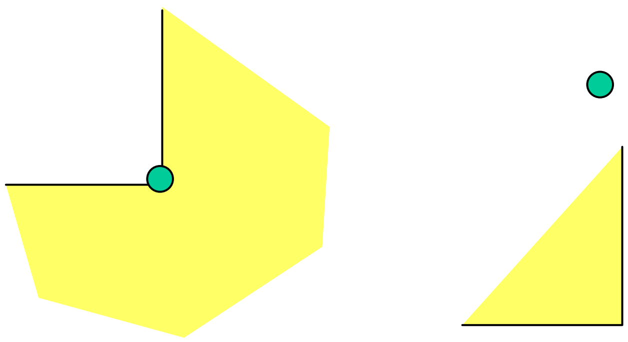
Dados cuatro puntos P_1, P_2, P_3 , P_4 y cuatro reflectores de amplitud $\pi/4$, ¿es posible orientarlos para iluminar todo el plano?



ILUMINANDO EL PLANO

Dados n puntos P_1, P_2, ... , P_n y n reflectores de amplitudes α_1, α_2, ... , α_n tales $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 2\pi$, ¿es posible asignar un reflector a cada punto y orientar los reflectores de forma que se ilumine todo el plano?

Es necesario que cada $\alpha_k < \pi$



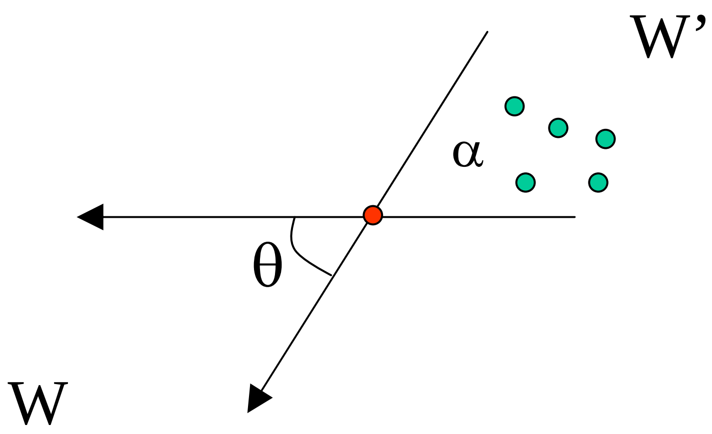
¡Y es suficiente!

Bose, Guibas, Lubiw, Overmars, Souvaine, Urrutia, 1993

ILUMINANDO EL PLANO

Lema 1

Sea W una cuña de amplitud $\theta \leq \pi$, S un conjunto de n puntos en W' y R un conjunto de reflectores de amplitudes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \theta$. Entonces podemos iluminar W colocando un reflector en cada punto de S

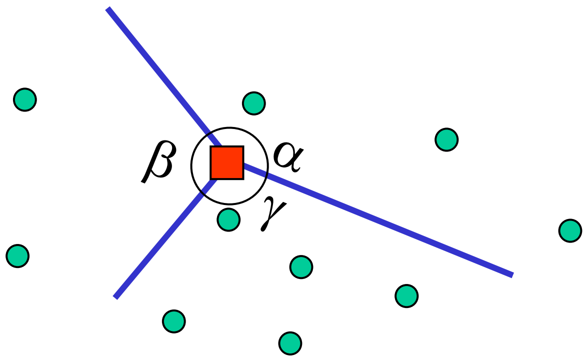


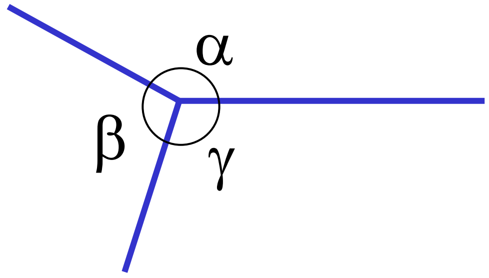
ILUMINANDO EL PLANO

Lema 2 (Tripartición)

n puntos en el plano, $n = a + b + c$,

α, β, γ ángulos $\leq \pi$, tales que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$





n = 3+2+5

Existe un punto x y tres cuñas con vértice en x de amplitudes α, β, γ, que contienen a, b y c puntos respectivamente

ILUMINANDO EL PLANO

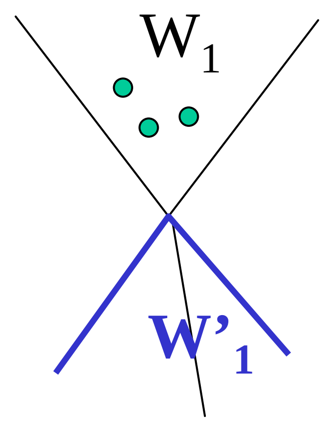
Demostración del Teorema

Repartimos los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en tres partes A, B, C de cardinales i, j-i, n-j modo que sum(A), sum(B), sum(C) $\leq \pi$

Por lema 2 partimos el plano en tres cuñas W_1, W_2, W_3 conteniendo i, j-i, n-j puntos resp.

Por lema 1 los puntos en W_k iluminan la cuña complementaria W'_k

Las cuñas complementarias llenan el plano



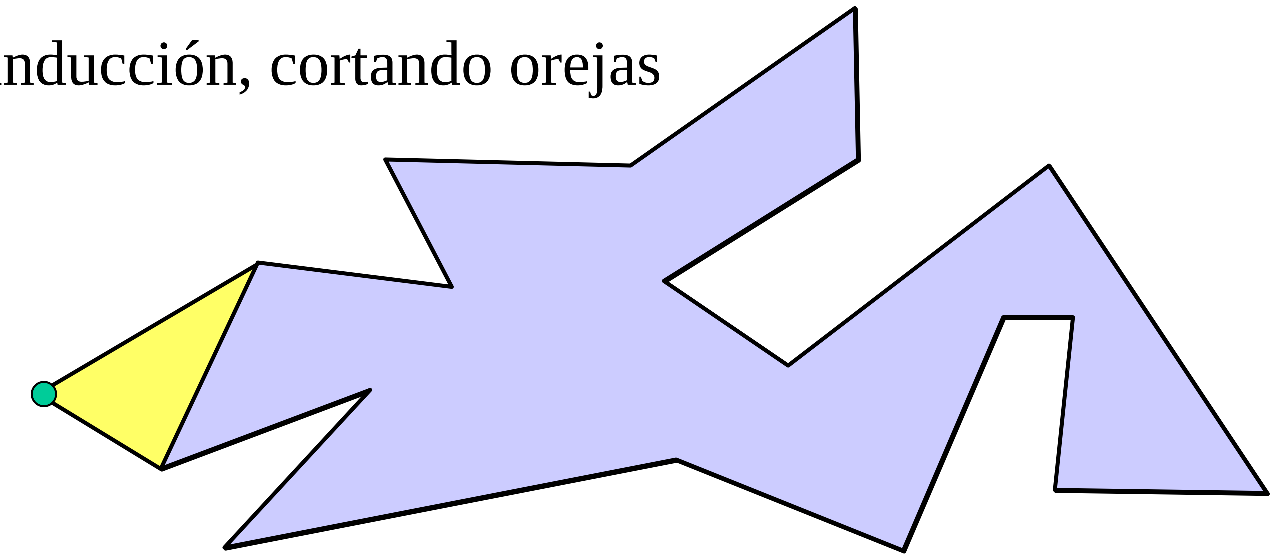
¡El plano iluminado!

ILUMINANDO CON REFLECTORES IGUALES

Se dispone de n reflectores de igual amplitud α, uno por cada vértice. ¿Cuál es la menor amplitud necesaria para iluminar todo el polígono?

Si colocamos $n-2$ reflectores de amplitud π, uno por vértice, el polígono queda iluminado

Por inducción, cortando orejas



ILUMINANDO CON REFLECTORES IGUALES

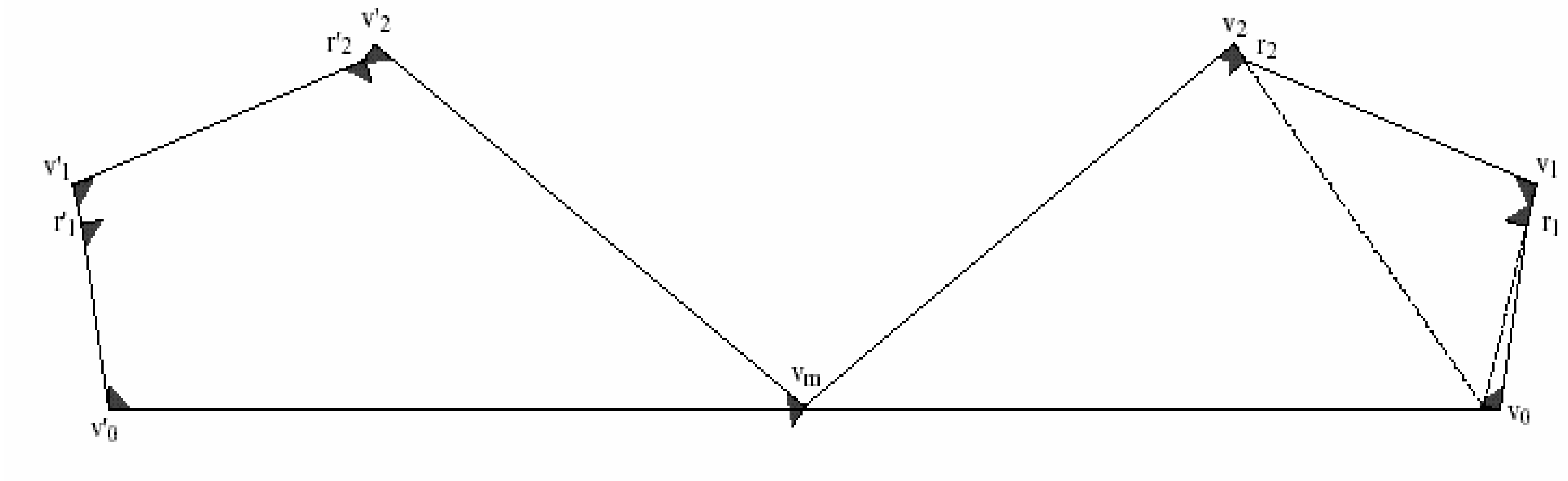
Se dispone de n reflectores de igual amplitud α, uno por cada vértice. ¿Cuál es la menor amplitud necesaria para iluminar todo el polígono?

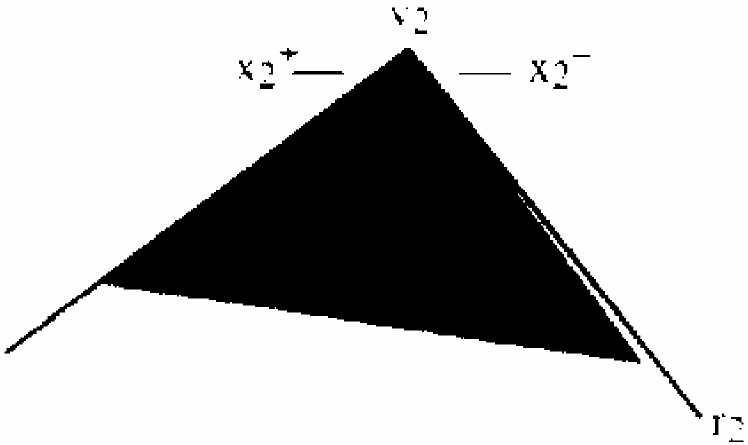
Conjetura de Urrutia $\alpha = \frac{\pi}{2}$

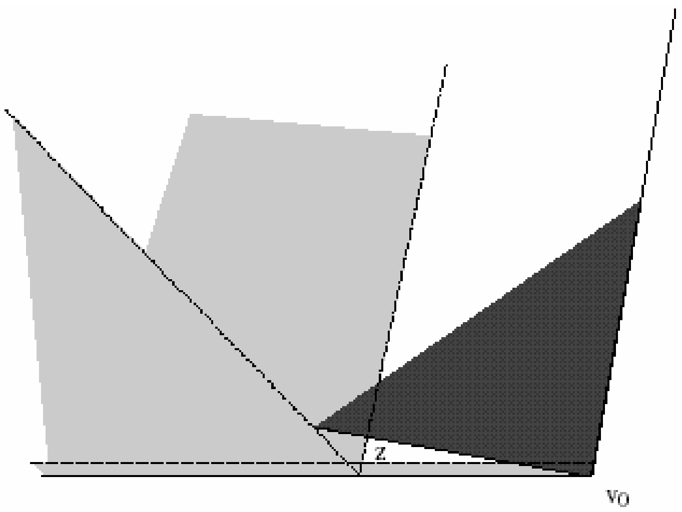
(O'Rourke, Xu, 1994). Existen polígonos que no se iluminan con reflectores de amplitud $\pi/2$, colocados uno en cada vértice

(ECOUX, 1995) Para todo $\varepsilon > 0$ existen polígonos simples que NO pueden iluminarse con reflectores de amplitud $\leq \pi - \varepsilon$, colocados uno en cada vértice

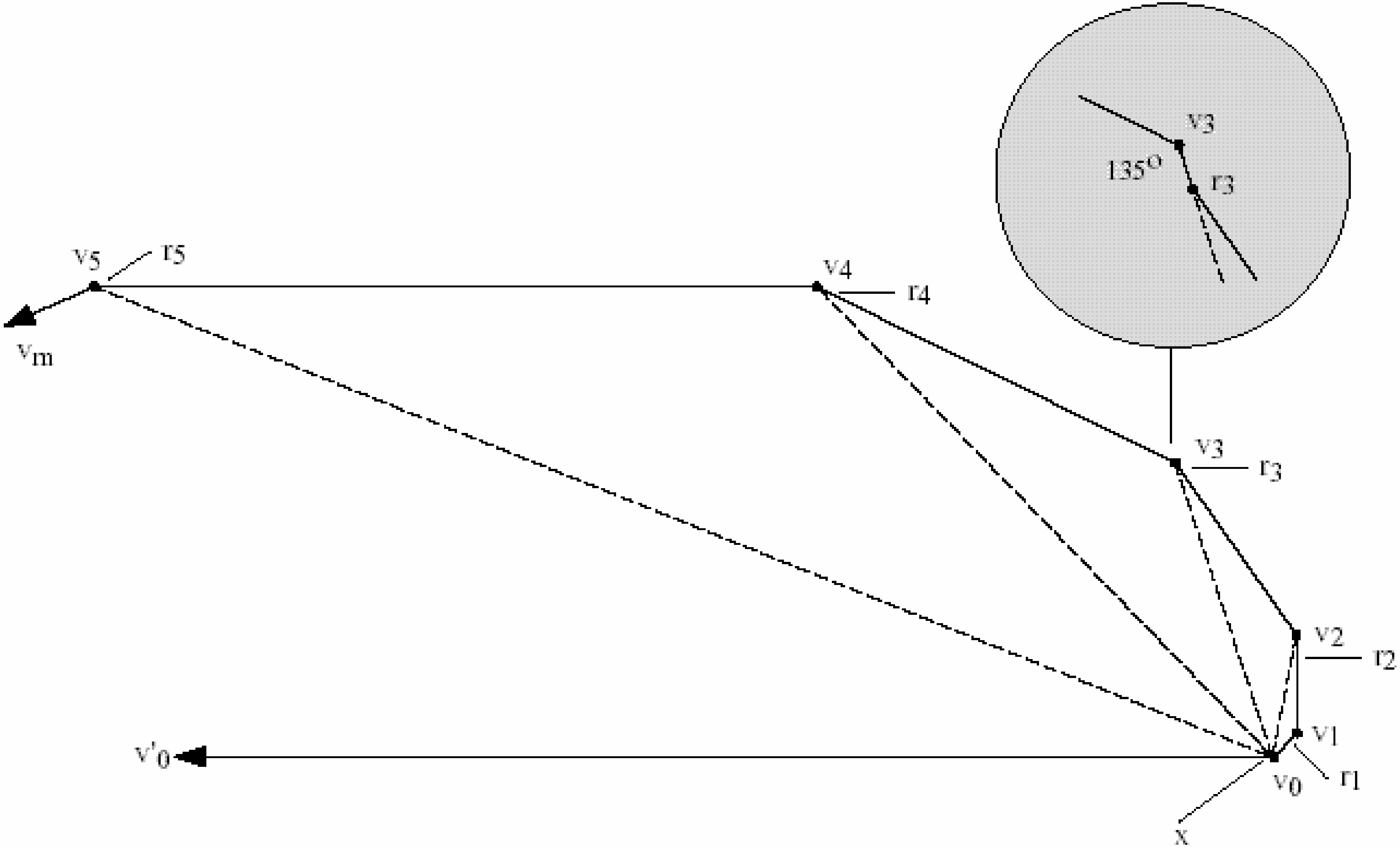
Existen polígonos que no se iluminan con reflectores de amplitud $\pi/2$ colocados uno en cada vértice



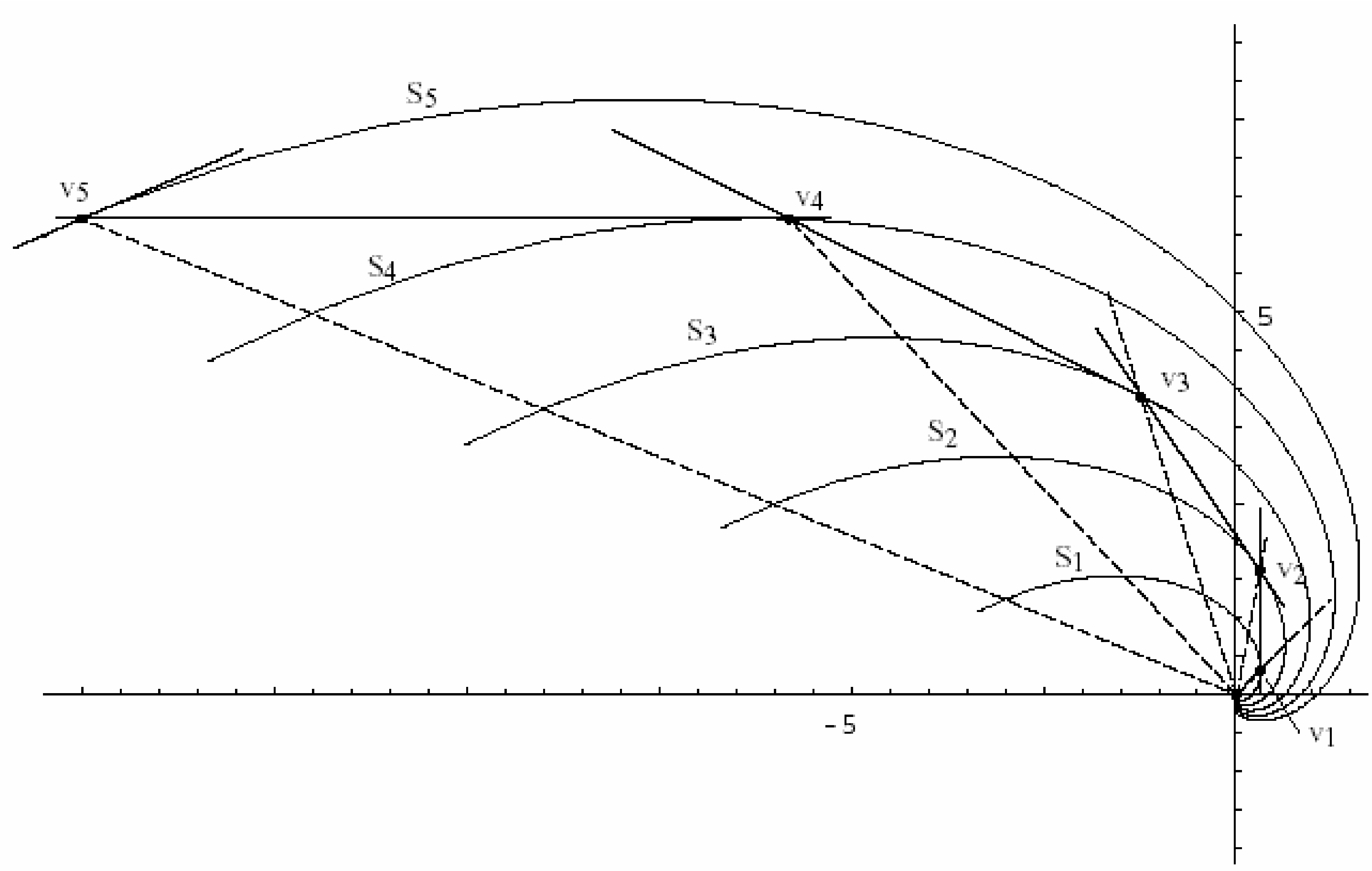




Existen polígonos que no se iluminan con reflectores de amplitud menor que $3\pi/4$ colocados uno en cada vértice



Para todo ε > 0 existen polígonos que NO pueden iluminarse con reflectores de amplitud ≤ π - ε, colocados uno en cada vértice

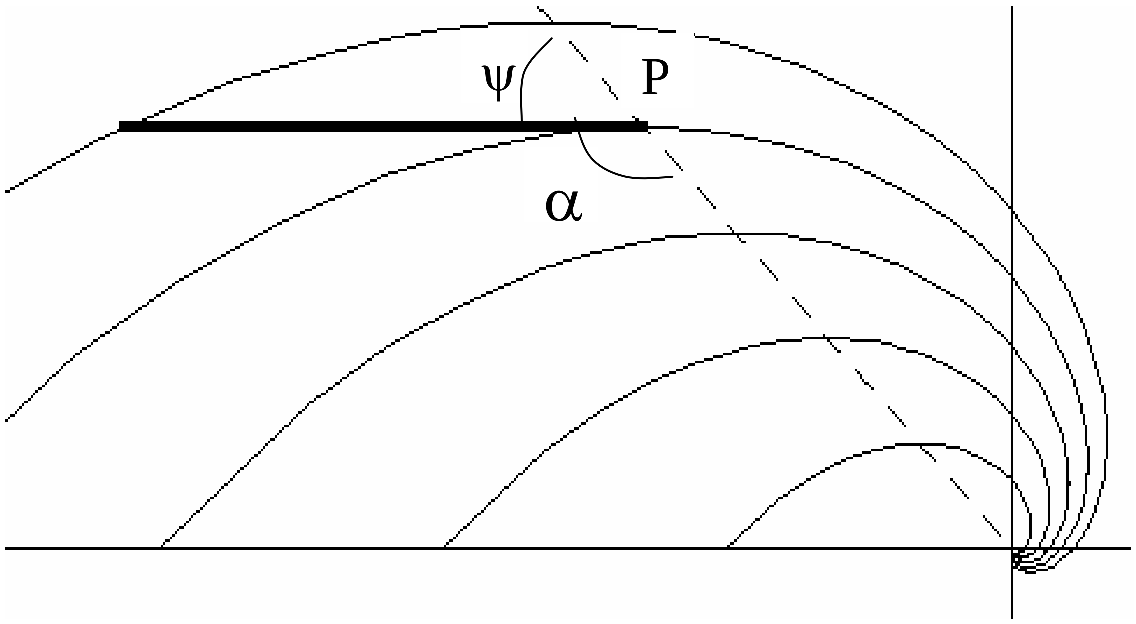


Para todo ε > 0 existen polígonos que NO pueden iluminarse con reflectores de amplitud ≤ π - ε, colocados uno en cada vértice

Espiral logarítmica

$$r = a\,e^{b\theta}$$

"El ángulo ψ entre el radio vector a un punto *P* de la curva y la tangente a la curva en *P*, es constante"



Para todo $\varepsilon > 0$ existen polígonos que NO pueden iluminarse con reflectores de amplitud $\leq \pi - \varepsilon$, colocados uno en cada vértice

Si queremos un polígono que no pueda iluminarse con α'-reflectores con $\alpha' < \alpha$, basta tomar las espirales

$$S_a \equiv \quad r = a\, e^{(\cot\alpha)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}, \quad a = 1, 2, \ldots$$

Origen de todas las espirales: x

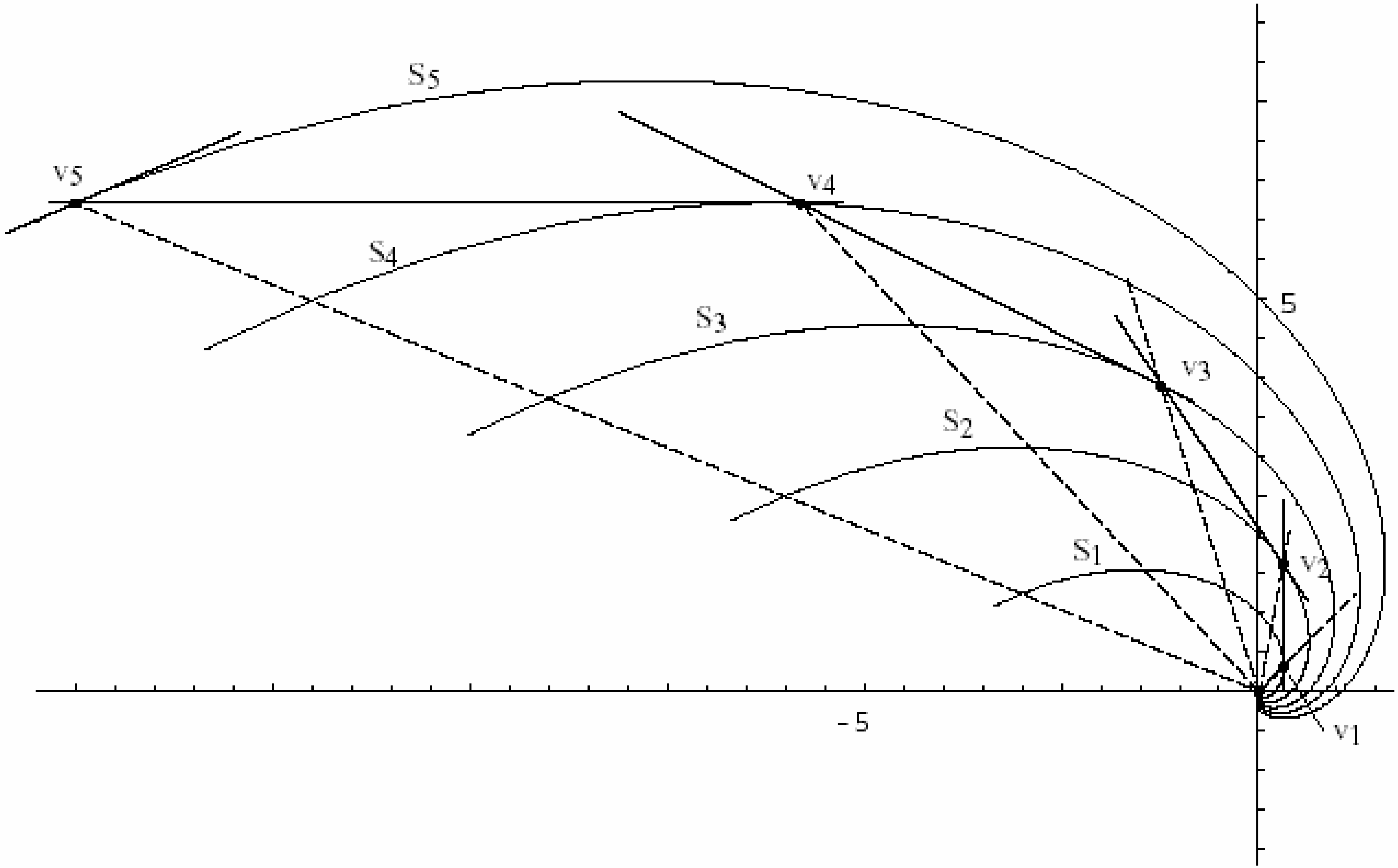
v_0 a la derecha y muy próximo a x

$v_1 = S_1 \cap$ recta que pasa por v_0 con ángulo $\pi - \alpha$ respecto de la horizontal

$v_2 = S_2 \cap$ recta tangente a S_1 en v_1

$v_3 = S_3 \cap$ recta tangente a S_2 en v_2

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



S5
v5
v4
S4
S3
v3
S2
S1
v2
v1
5
- 5

ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS

• Amplitud total de los reflectores que iluminan un polígono

n-2 reflectores situados en los vértices y con amplitud $\pi/3$ iluminan cualquier polígono de n lados

Pesos en los vértices de un polígono

El peso de un vértice v es $\alpha(v)$, la amplitud del ángulo interior

Si S es un conjunto de vértices de P, se llama peso de S a

$$\alpha(S) = \sum_{v \in S} \alpha(v)$$

ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS

Teorema

(a) Todo polígono tiene un subconjunto de vértices S, que lo ilumina, y de peso

$$\alpha(S) \leq \frac{(n-2)\ \pi}{3}$$

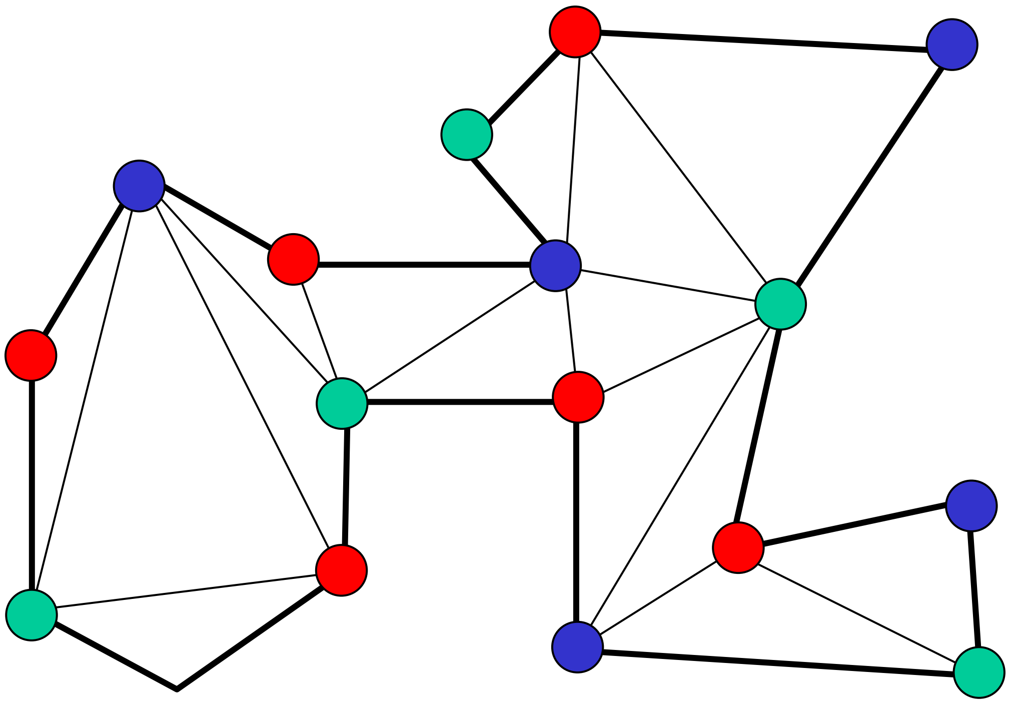
(b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polígono que no se puede iluminar con un conjunto de vértices S de peso

$$\frac{(n-2)\ \pi}{3} - \varepsilon$$

ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS

(a) Todo polígono tiene un subconjunto de vértices S, que lo ilumina, y de peso

$$\alpha(S) \leq \frac{(n-2)\,\pi}{3}$$



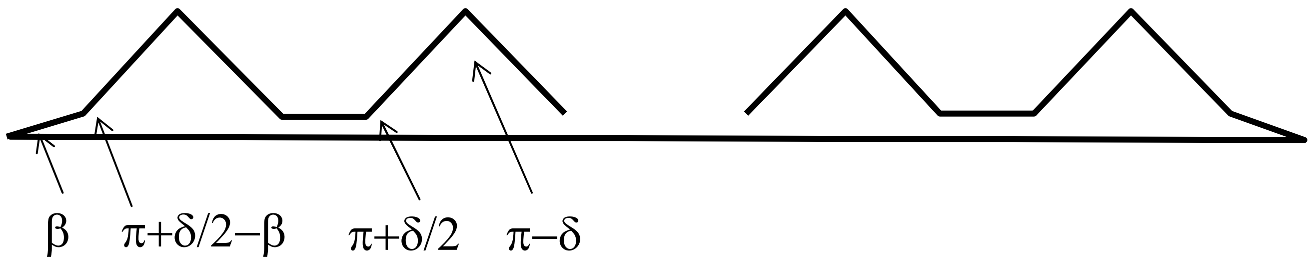
1. Suma ángulos $(n\text{-}2)\pi$
2. Triangulamos y 3-coloreamos
3. Los vértices de cada color iluminan P

Algún color tiene peso

$$\leq \frac{(n-2)\,\pi}{3}$$

ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS

(b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polígono que no se puede iluminar con un conjunto de vértices S de peso $\dfrac{(n-2)\,\pi}{3} - \varepsilon$



n=3m+2 vértices m vértices de peso $\pi-\delta$ $\delta < \dfrac{3\,\varepsilon}{n-2}$

Para iluminar cada uno de los m vértices se necesita un peso $\pi-\delta$, luego para iluminar el polígono necesitamos un peso

$$m\,(\pi-\delta) = \frac{(n-2)\,\pi}{3} - \frac{(n-2)\,\delta}{3} > \frac{(n-2)\pi}{3} - \varepsilon$$

ILUMINANDO CON REFLECTORES DE AMPLITUD π

¿Cuántos π-reflectores, colocados en puntos de un polígono de n lados, son suficientes para iluminarlo?

1992 Bunting, Larmann
Csizmadia, Tóth

$$\left\lfloor \frac{4}{9}\left(n+\frac{1}{4}\right)\right\rfloor$$

1996, Csizmadia, Tóth

$$\left\lceil \frac{2}{5}(n-3)\right\rceil \qquad n>3$$

Conjetura J. Urrutia

$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ π-reflectores son suficientes para iluminar cualquier polígono de n lados

ILUMINANDO CON REFLECTORES DE AMPLITUD π

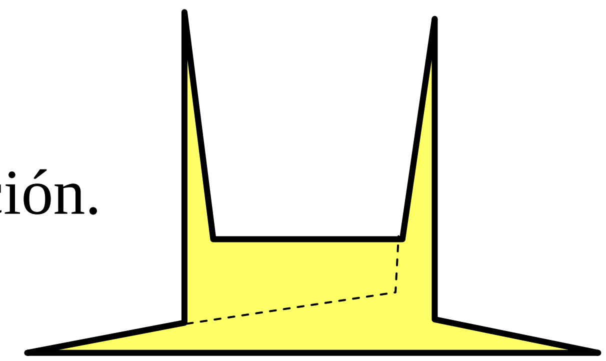
Teorema (C. Tóth, 2000)

Cualquier Galería de Arte de n lados puede iluminarse con, a lo más, $\lfloor n/3 \rfloor$ π-reflectores

Idea: Partir el polígono por "cortes buenos".
Un corte de P es bueno si descompone P en P_1 y P_2, de forma que

$$\left\lfloor \frac{n_1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Encontrar un "corte bueno" y aplicar inducción.
¿Existen los "cortes buenos"?
Sí, aunque no siempre son diagonales



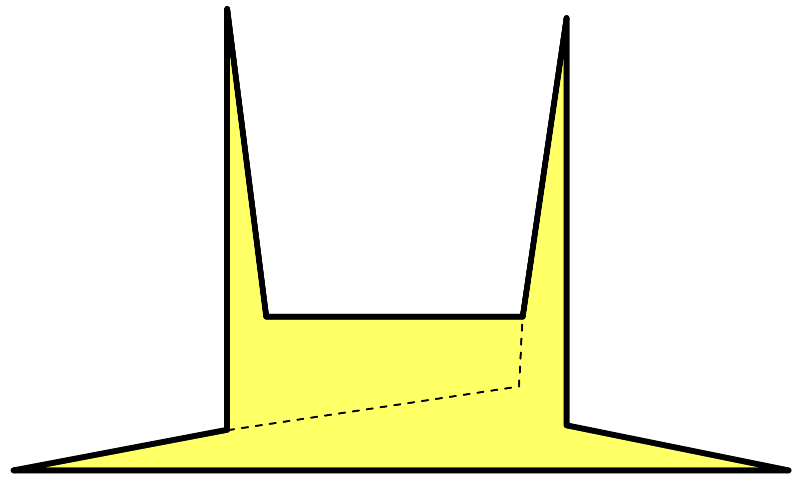
Si n = 3k, entonces cualquier diagonal es un “corte bueno”

Si n = 3k+1, entonces alguna diagonal es un “corte bueno”

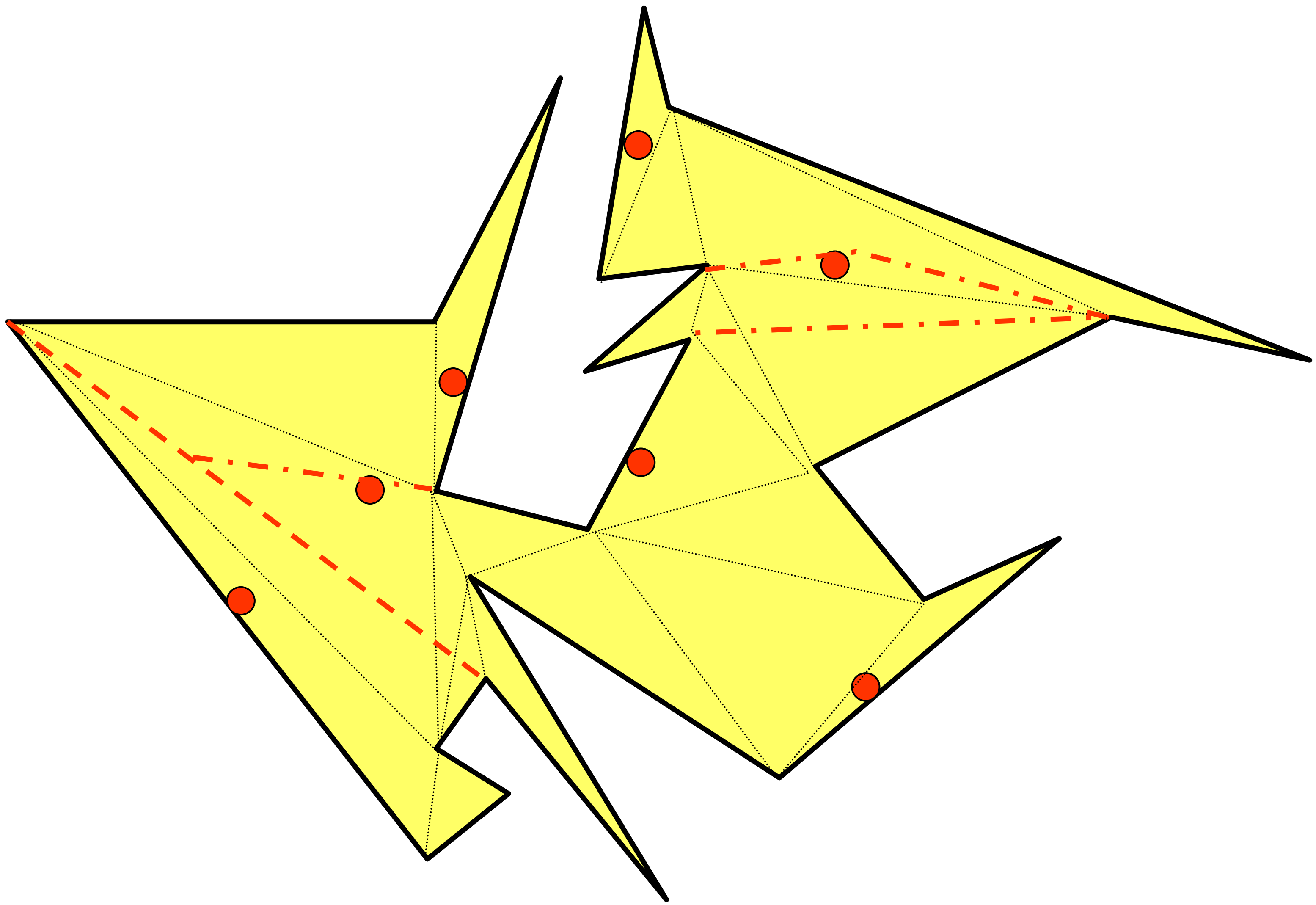
Si n = 3k+2, entonces un corte es un “corte bueno” si el nº de lados de P_1 es $n_1=3k_1+2$ y el de P_2 es $n_2 = 3k_2+2$

¡Existen polígonos para los que ninguna diagonal es un “corte bueno”!

Pero SÍ existen cortes buenos formados por dos segmentos



ILUMINANDO CON REFLECTORES DE AMPLITUD π

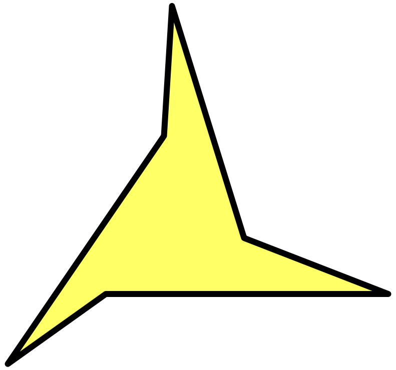


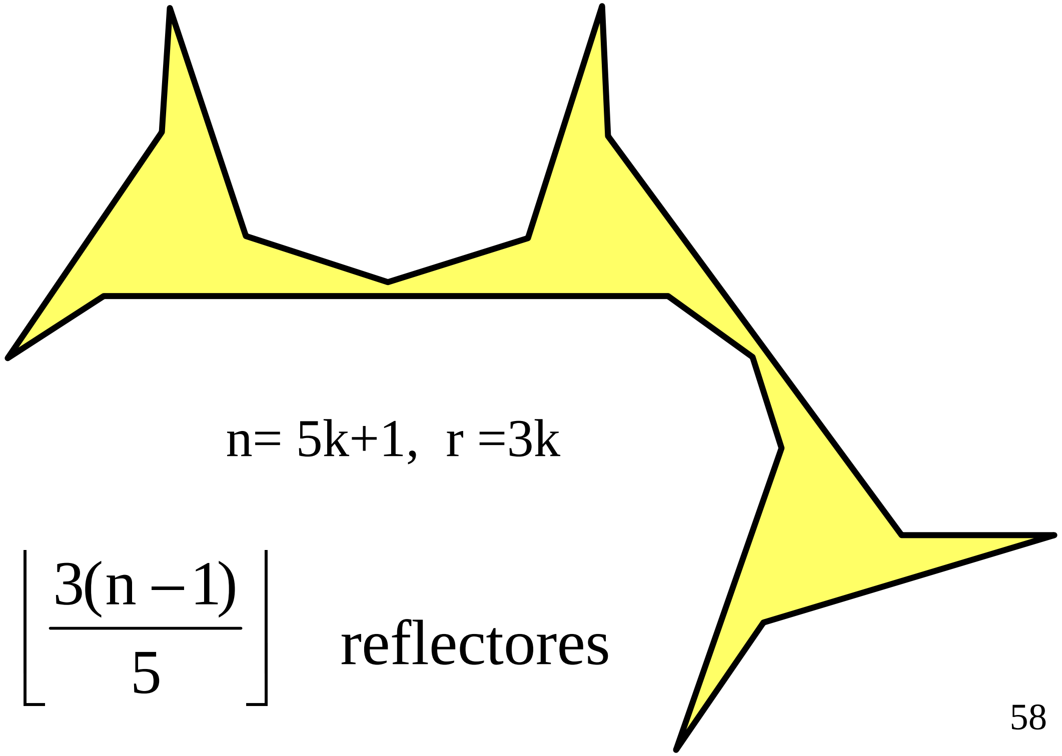
ILUMINANDO CON π-REFLECTORES EN VÉRTICES

n-2 reflectores son suficientes

¿Existe $c < 1$, tal que todo polígono de n vértices puede ser iluminado con cn π-reflectores en vértices?

Ejemplo de Santos





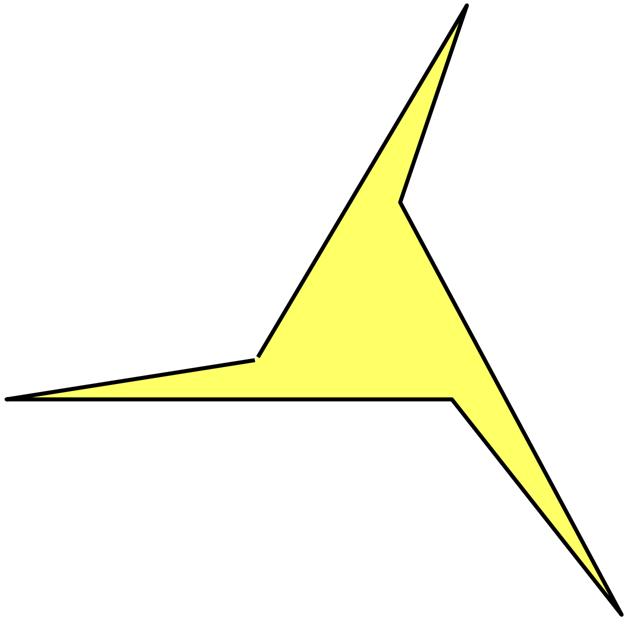
$n = 5k+1, \ r = 3k$

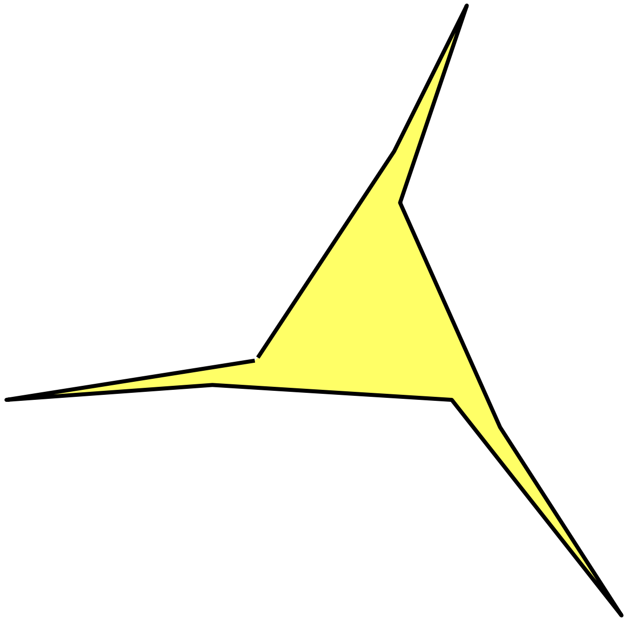
Se necesitan $\left\lfloor \frac{3(n-1)}{5} \right\rfloor$ reflectores

ILUMINANDO CON π-REFLECTORES EN VÉRTICES

n-2 reflectores son suficientes

¿Existe $c < 1$, tal que todo polígono de n vértices puede ser iluminado con cn π-reflectores en vértices?

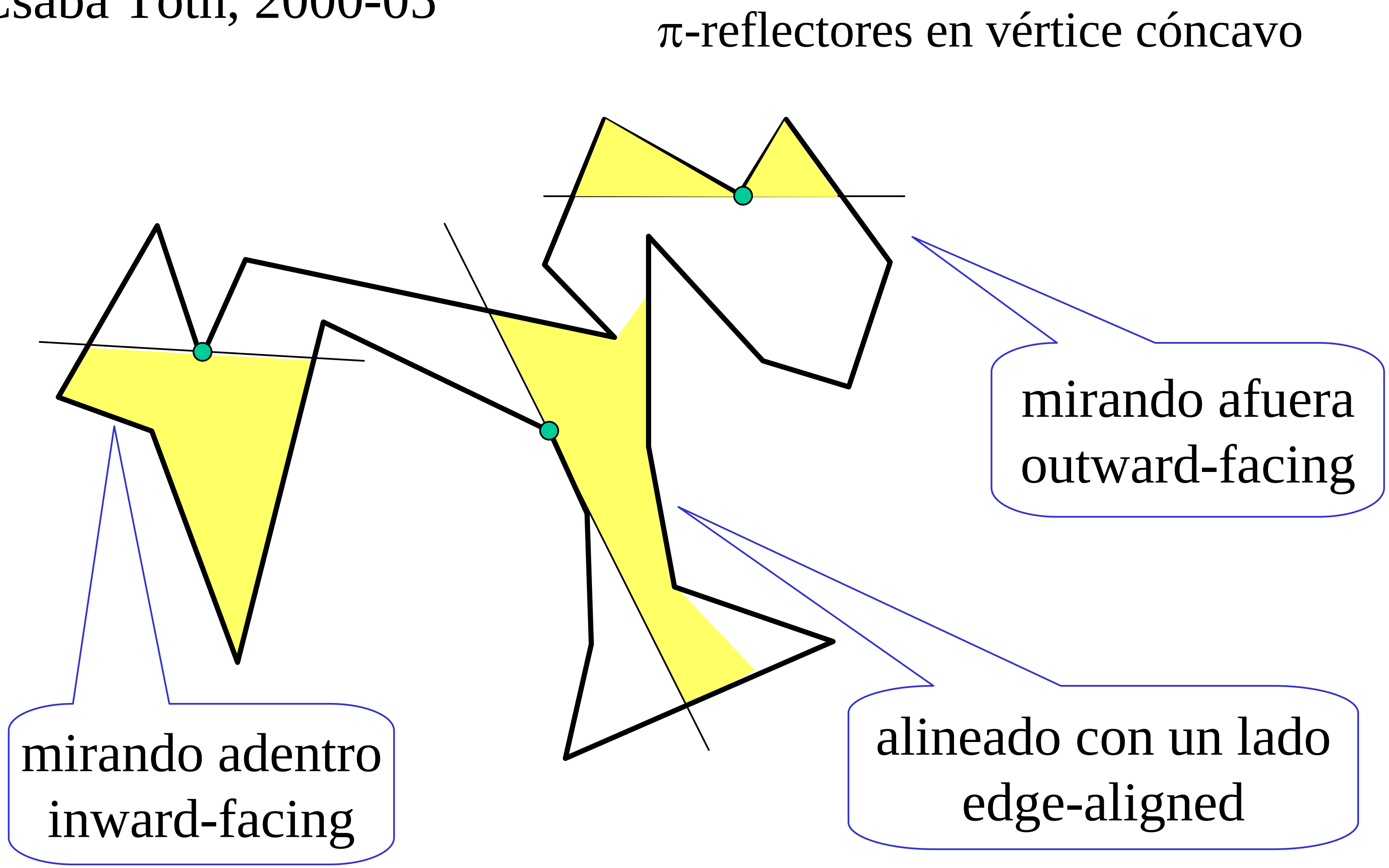




Urrutia $\left\lfloor \frac{5(n-1)}{8} \right\rfloor$ π-reflectores

ILUMINANDO CON π-REFLECTORES EN VÉRTICES

Csaba Tóth, 2000-05



ILUMINANDO CON π-REFLECTORES EN VÉRTICES

Csaba Tóth, 2000-05

$\lfloor n/2 \rfloor$ π-reflectores en vértices son suficientes para vigilar un polígono de n vértices, (*modelo general)*

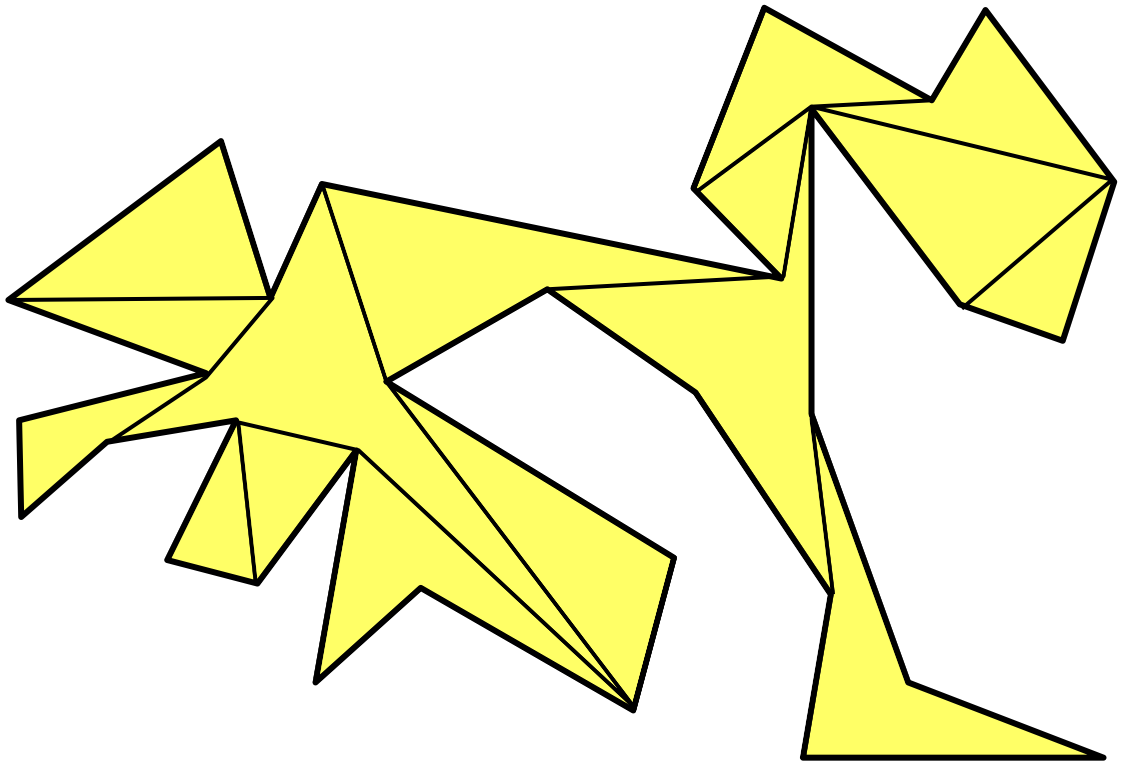
$\lfloor (2n)/3 \rfloor - 1$ π-reflectores alineados en vértices son suficientes para vigilar un polígono de n vértices.

$\lfloor (2n-k)/3 \rfloor$ π-reflectores alineados en vértices son suficientes para vigilar un polígono de n vértices, k de ellos convexos.

ILUMINANDO CON π-REFLECTORES EN VÉRTICES

Csaba Tóth, 2000-05

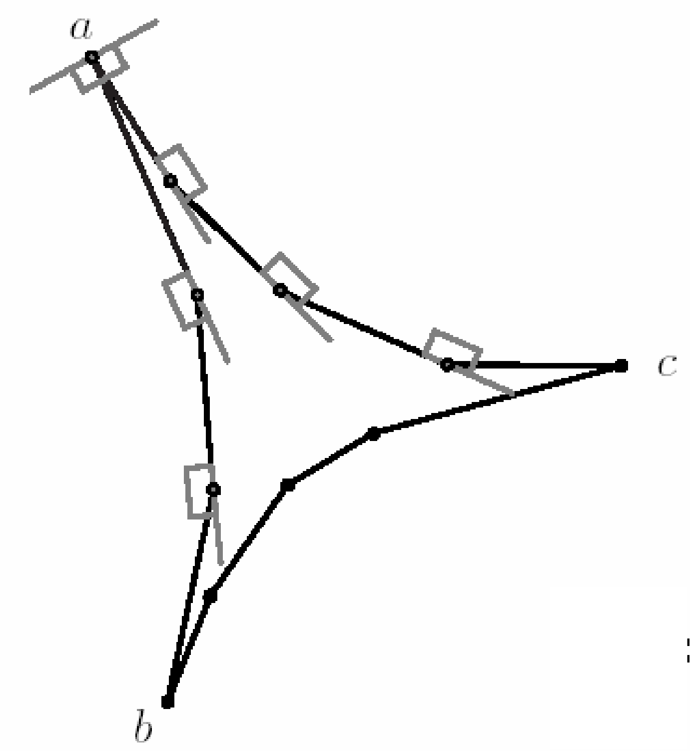
Pseudotriangulación

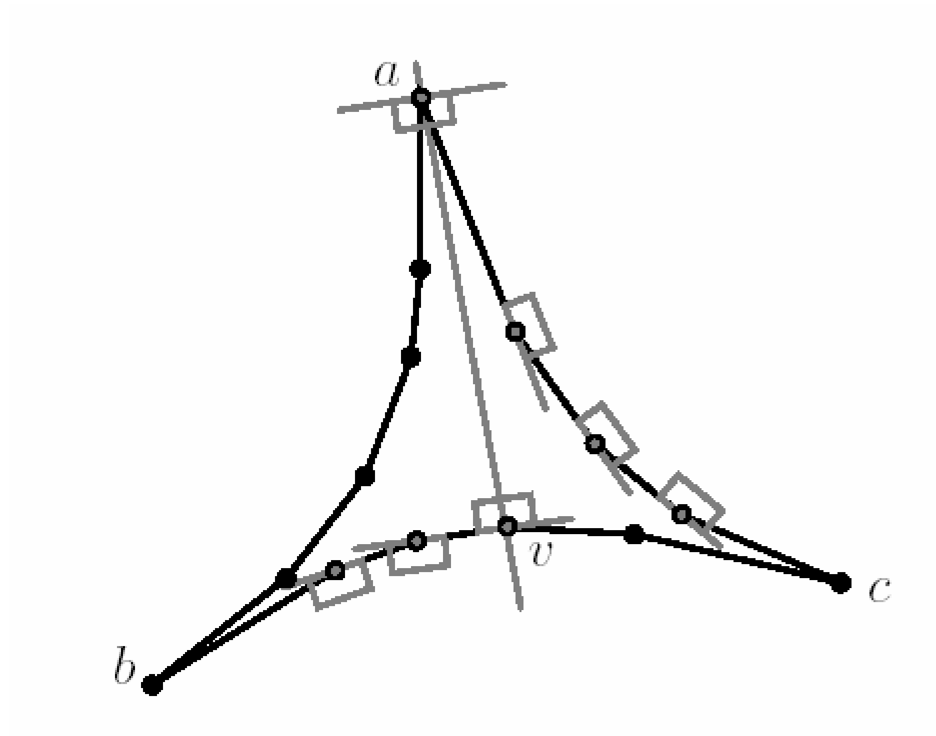


ILUMINANDO CON π-REFLECTORES EN VÉRTICES

Csaba Tóth, 2000-05

Vigilando un pseudotriángulo de j vértices



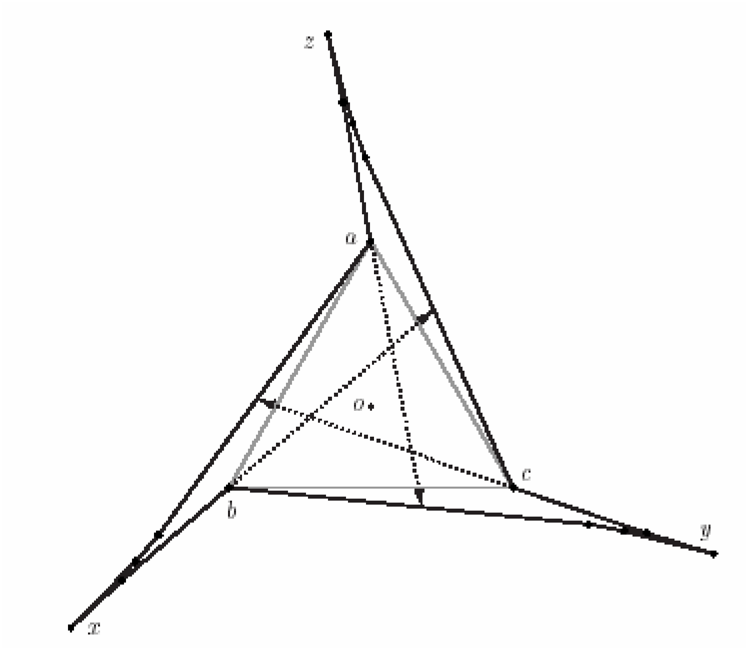


$\lfloor (2j-3)/3 \rfloor$ en el modelo alineado

Con $\lfloor j/2 \rfloor$ en el modelo general

ILUMINANDO CON π-REFLECTORES EN VÉRTICES

Csaba Tóth, 2000-05



Pegando copias del pseudotriángulo obtiene un polígono que necesita $9n/14$ π-reflectores alineados en vértices para iluminarlo

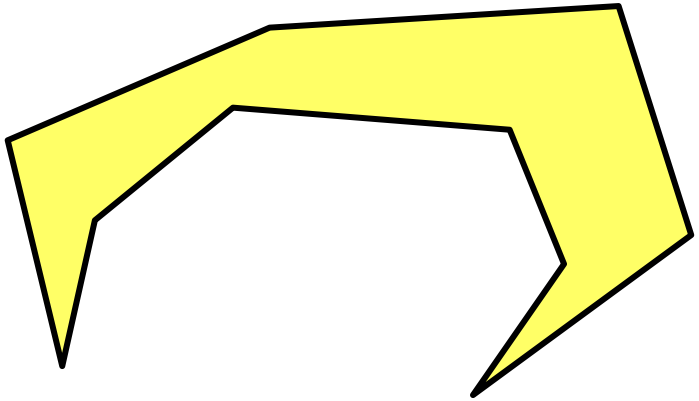
Queda sólo cubrir el salto de $9/14 \approx 0{,}643$ hasta $2/3 \approx 0{,}666$

REFLECTORES DE AMPLITUD π (situados en vértices)

POLÍGONOS ESPIRALES

Teorema

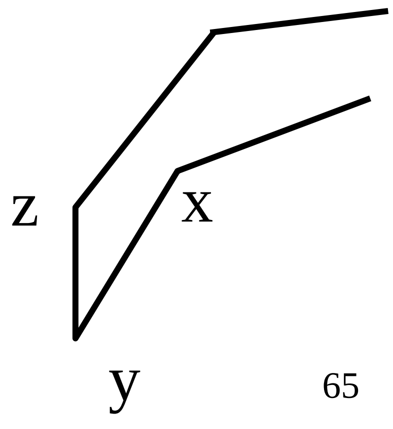
Todo polígono espiral S de
n vértices (t = n -2 triángulos)
puede iluminarse con



$$\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$ reflectores en los vértices

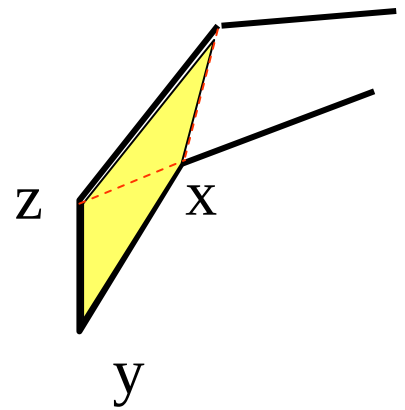
Dem. Sea r el nº de vértices cóncavos

Si S es convexo, r = 0, basta un reflector
Si r>0, tomamos x, y, z consecutivos,
x cóncavo, y,z, convexos



REFLECTORES DE AMPLITUD π (situados en vértices)

POLÍGONOS ESPIRALES



En alguna triangulación de S hay DOS triángulos incidentes en z.
Colocamos un reflector en z,
se cubren dos triángulos y ...
se repite el proceso

$$\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$ reflectores iluminan todo S

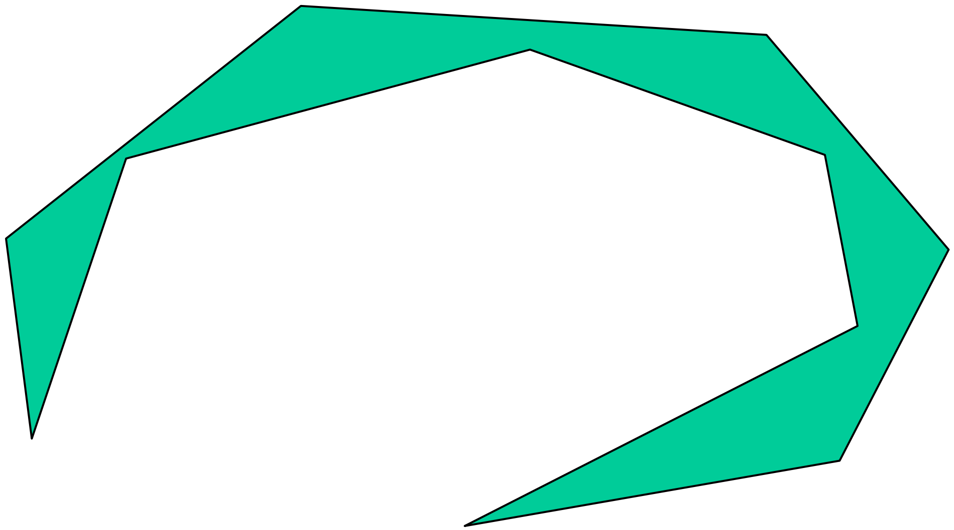
REFLECTORES DE AMPLITUD π (situados en vértices)

POLÍGONOS ESPIRALES

$$c = \frac{1}{2}$$

La cota $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ es ajustada.

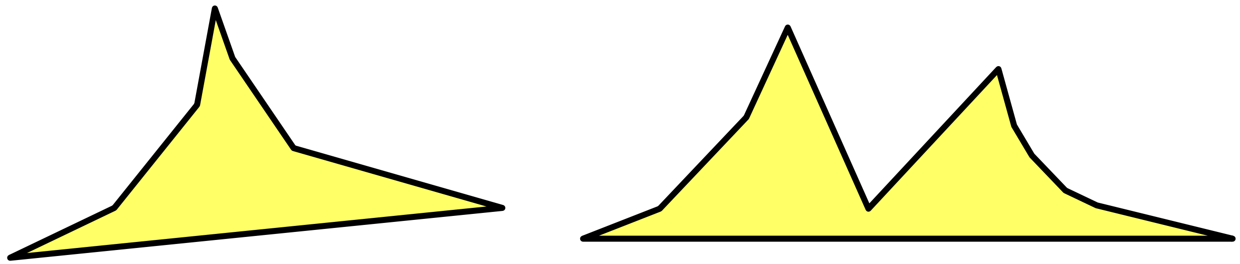
Existen polígonos que necesitan ese nº de reflectores



REFLECTORES DE AMPLITUD π (situados en vértices)

POLÍGONOS CORDILLERA

$$c = \frac{1}{2}$$



Polígonos monótonos en los que una cadena se reduce a un lado

Teorema

El nº de reflectores de amplitud π, situados en vértices, siempre suficientes y a veces necesarios para iluminar una cordillera de n vértices es

$$\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$

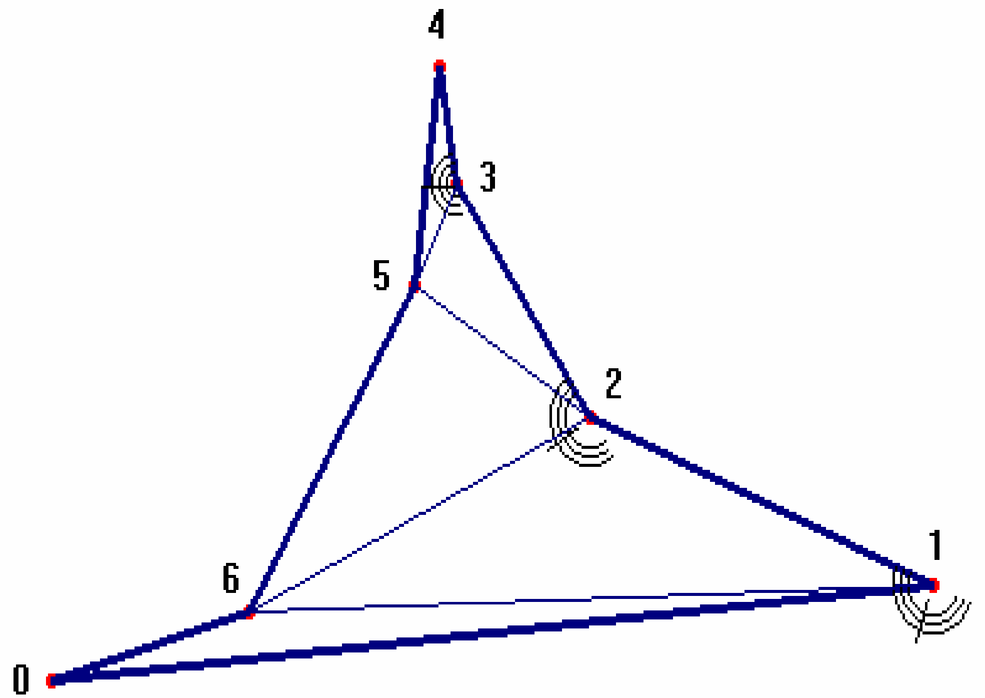
REFLECTORES DE AMPLITUD π (situados en vértices)

POLÍGONOS CORDILLERA

Una cordillera en la que cada reflector sólo ilumina DOS triángulos

$$\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$

reflectores son, a veces, necesarios

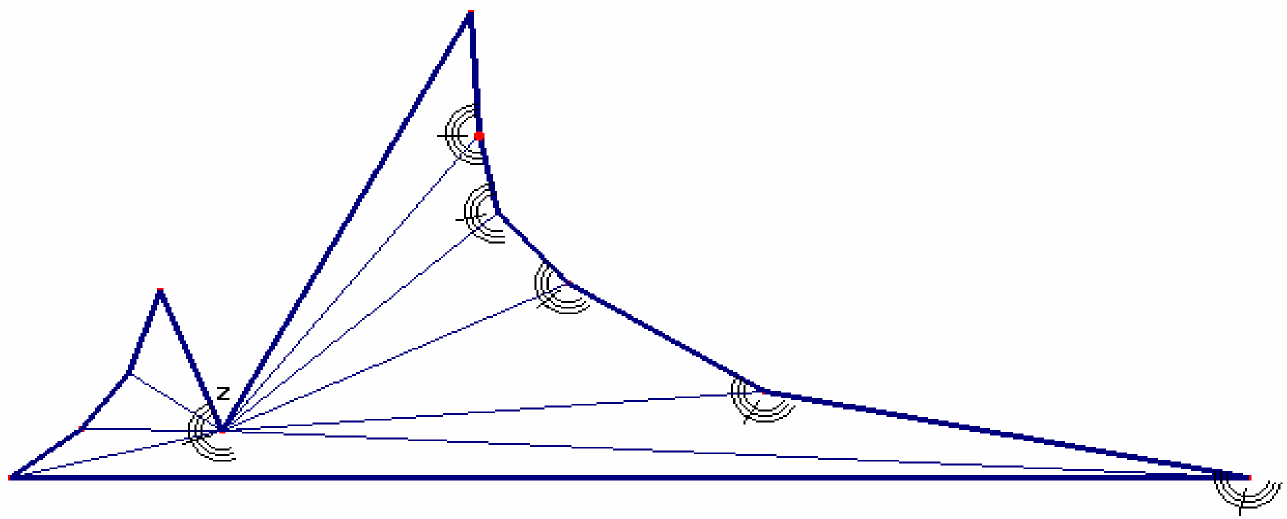


REFLECTORES DE AMPLITUD π (situados en vértices)

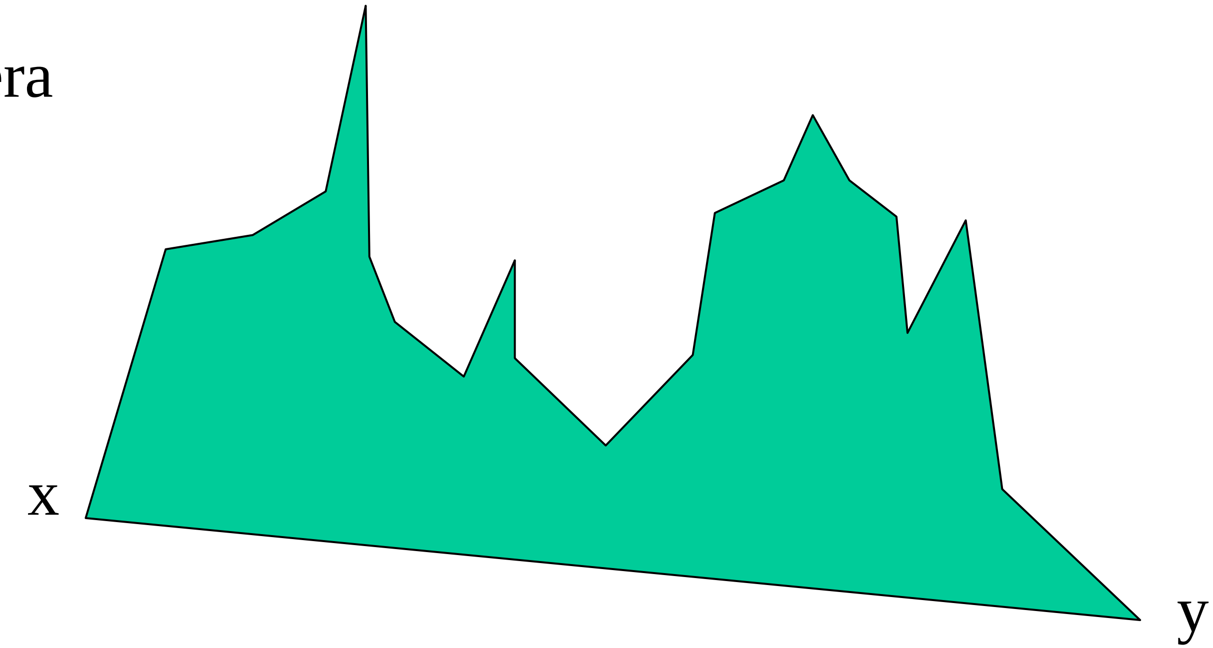
POLÍGONOS CORDILLERA

$$\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$ reflectores son siempre suficientes

Idea: Si un polígono con un vértice v prohibido requiere muchos reflectores, colocando un reflector en v harán falta pocos focos



Sea M una cordillera



$L_{10}(M)$ nº de reflectores con foco en x pero no en y
$L_{01}(M)$ nº de reflectores con foco en y pero no en x

Lema
Si M tiene t triángulos, entonces $L_{10}(M) + L_{01}(M) \leq t + 1$

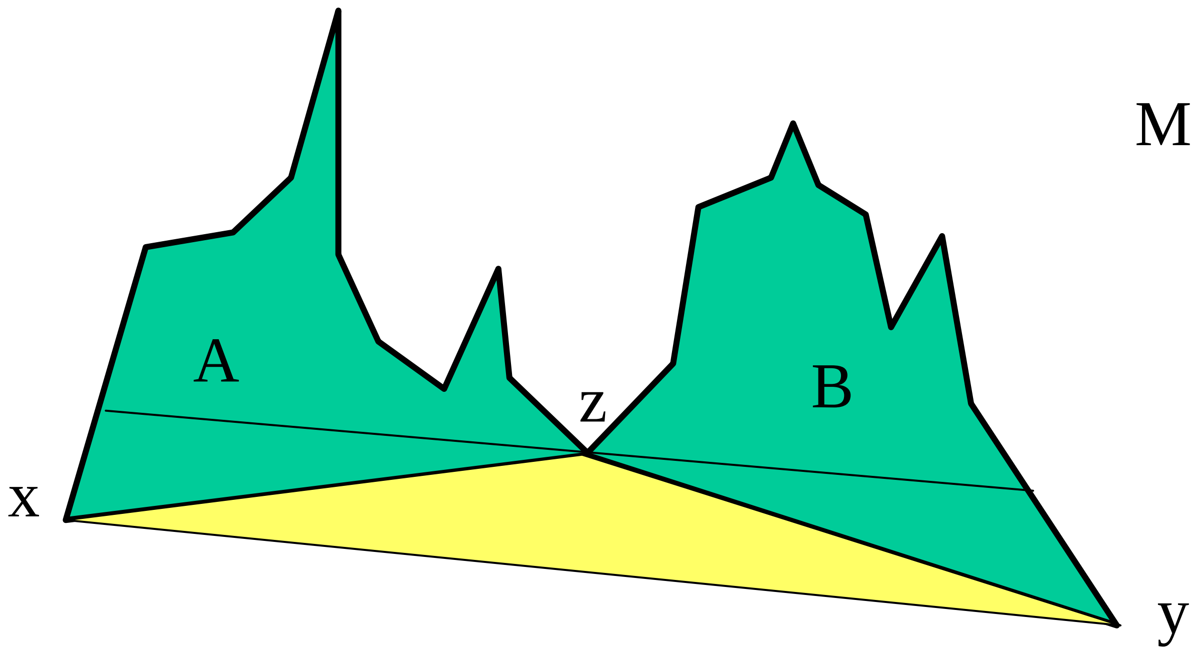
Lema

Si M tiene t triángulos, entonces $L_{10}(M) + L_{01}(M) \leq t + 1$

Dem. Inducción sobre t

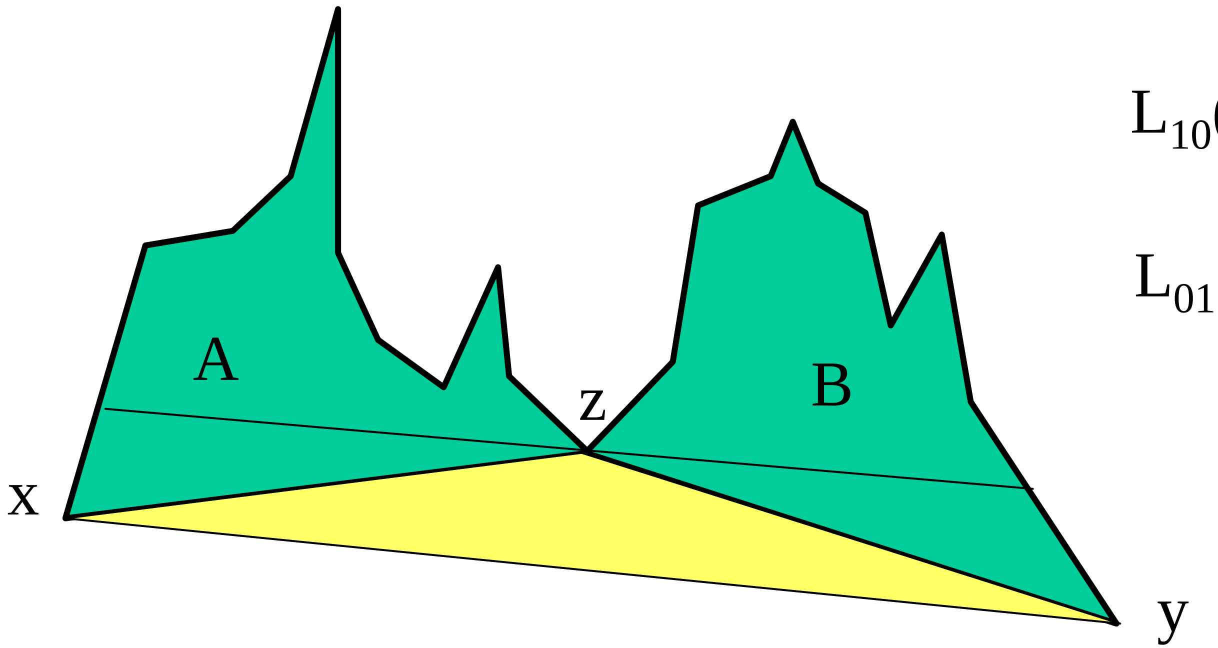
Si t=1, entonces $L_{10} = L_{01} = 1$, luego $L_{10} + L_{01} = 1+1 = 2$

Supongamos cierto para M' con t'<t triángulos



$$M = \overset{\triangle}{xyz} \cup A \cup B$$

Caso 1) A y B no vacíos



$L_{10}(M) \leq L_{10}(A)+L_{10}(B)$

$L_{01}(M) \leq L_{01}(A)+L_{01}(B)$

Si A consta de a triángulos y B de b, será $t = a + b +1$

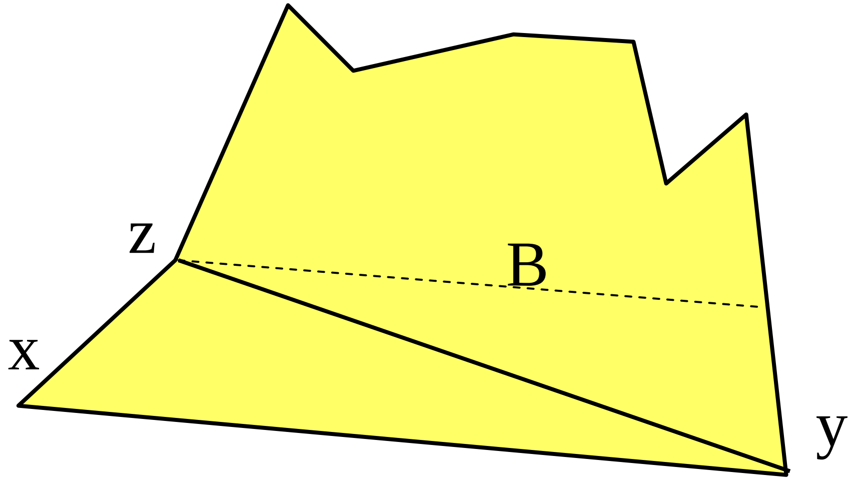
$L_{10}(M) + L_{01}(M) \leq a+1 + b+1 = t +1$

Caso 2) $A=\emptyset$, $B\neq\emptyset$

Un foco en x cubre $\overset{\triangle}{xyz}$

$L_{10}(M) \leq 1 + L_{10}(B)$

Un foco en y $L_{01}(M) \leq L_{01}(B)$



$L_{10}(M) + L_{01}(M) \leq 1 + L_{10}(B) + L_{01}(B) \leq 1+b+1= t + 1$

$\boxed{\text{Demostración del teorema}}$ $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ reflectores son suficientes

$L_{10} + L_{01} \leq t + 1$, como $L(M) = \text{mín}\{ L_{10}, L_{01}\}$

$$L(M) \leq \left\lfloor \frac{t+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$$

POLÍGONOS CORDILLERA

Algoritmo de colocación de los π-reflectores

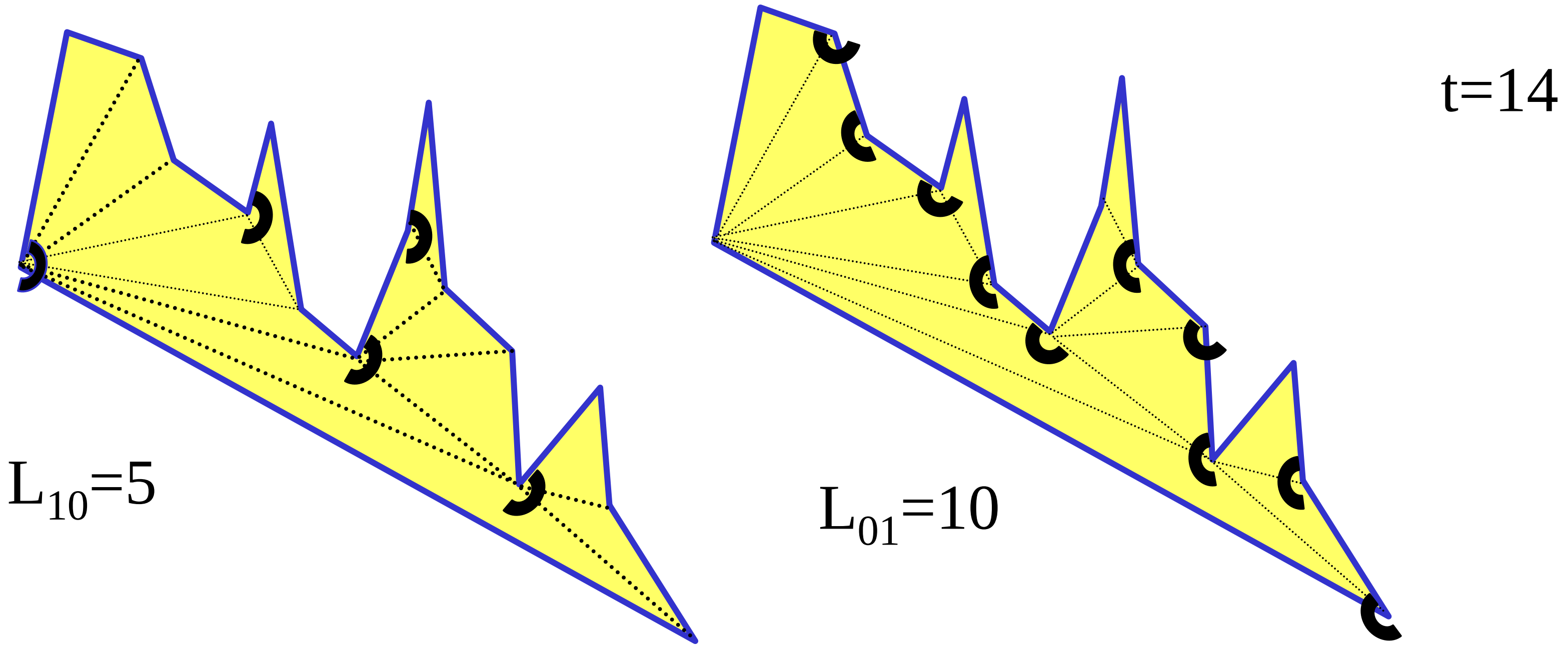
Se calculan L_{10} y L_{01} con sus respectivas ubicaciones de focos y se elige la mejor

L_{10} : se colocan luces en los vértices izquierdos de A y B y se prosigue recursivamente
L_{01} : se colocan luces en los vértices derechos de A y B y ...

Es un algoritmo tipo “divide y vencerás”. Como el punto z se detecta en tiempo lineal, el coste es O(nlogn)

POLÍGONOS CORDILLERA

Algoritmo de colocación de los π-reflectores



Los vértices que no son máximos locales reciben un foco

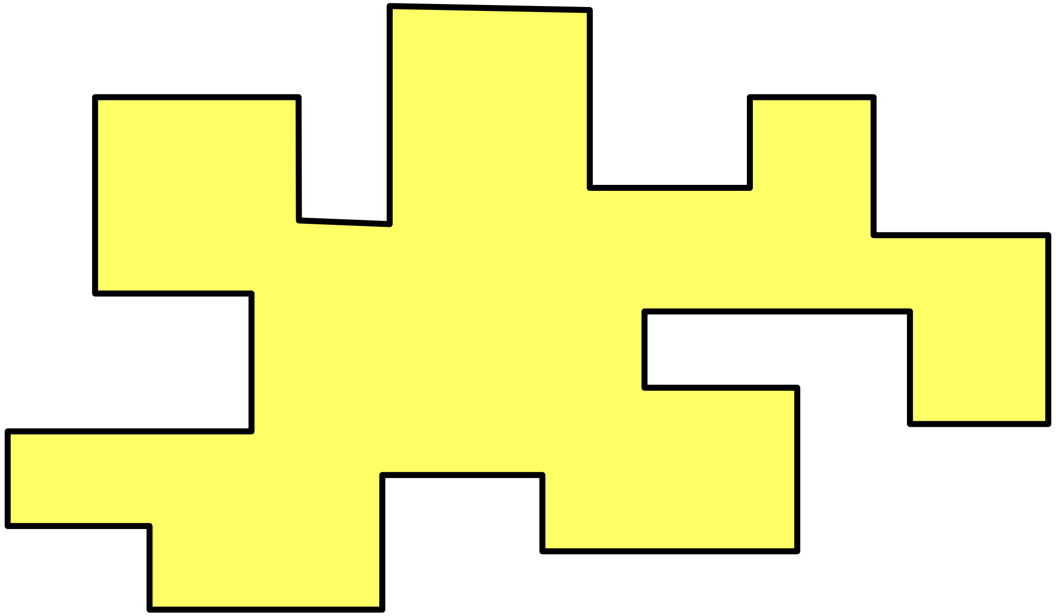
En L_{10} los reflectores miran a la derecha y se colocan girados en sentido +

En L_{01} los reflectores miran a la izquierda y se colocan girados en sentido -

$L_{10} + L_{01} = t +1$, pues se colocan los reflectores aunque no sean necesarios

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

El ángulo de apertura de cada foco es $\pi/2$



n vértices

c convexos $\pi/2$

r cóncavos $3\pi/2$

Lema

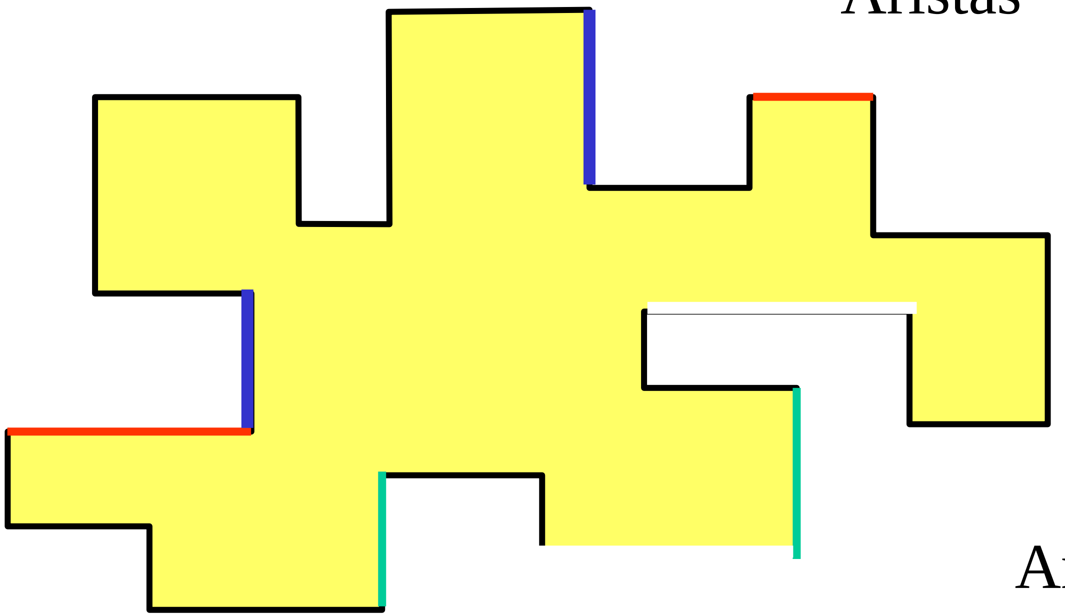
En un polígono ortogonal $n = 2r + 4$

$$(n-2)\,\pi = c\,\pi/2 + r\,3\pi/2$$

$$c + r = n$$

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

Aristas NORTE

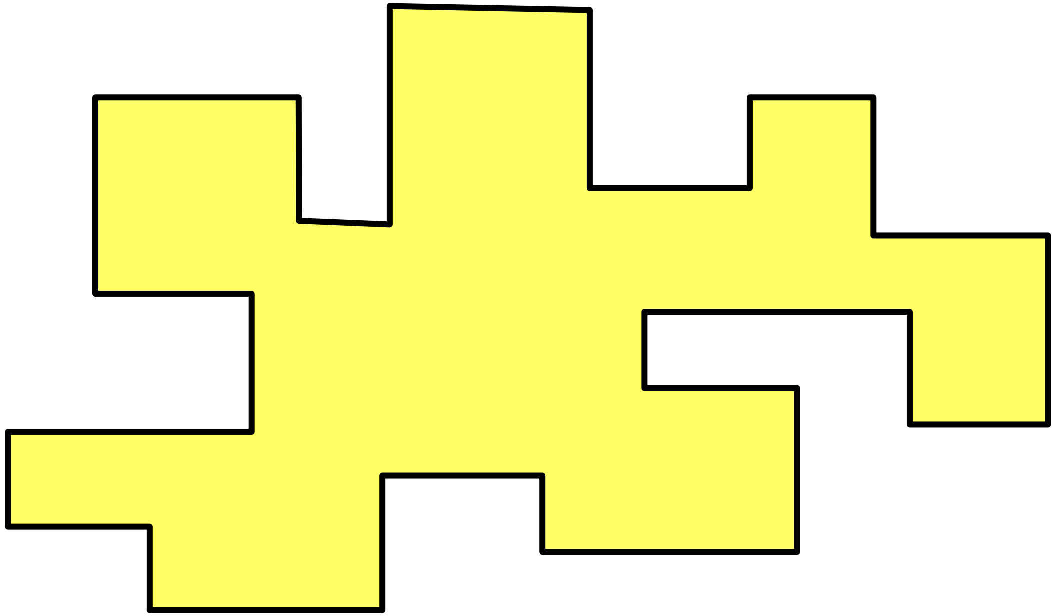


Aristas ESTE

Aristas OESTE

Aristas SUR

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES



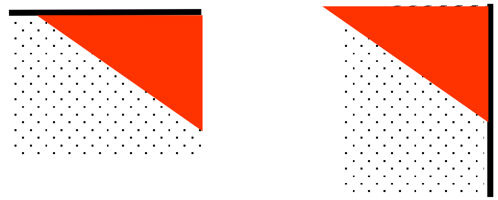
Teorema (Estivill, Urrutia, 1994)
Todo polígono ortogonal puede iluminarse con reflectores ortogonales colocados en vértices $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

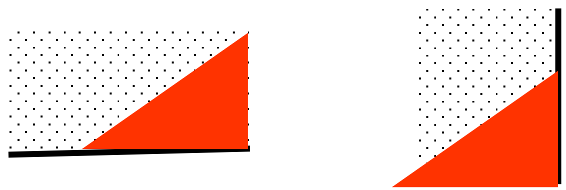
Reglas de iluminación

Regla NOROESTE

Regla NORDESTE



Regla SUDESTE



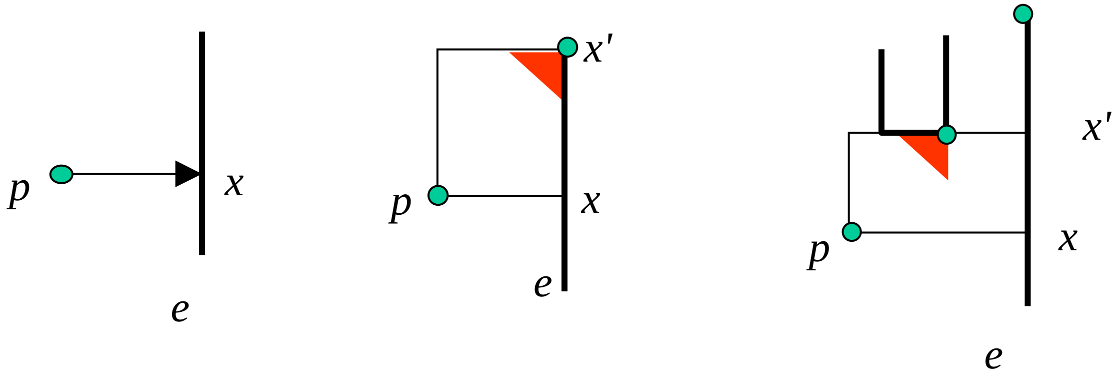
Regla SUDOESTE

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

Lema

1. Las reglas son disjuntas
2. Los reflectores de cada regla iluminan el polígono
3. Con las cuatro reglas en total se colocan dos reflectores en cada vértice cóncavo y uno en cada convexo

2. La regla NORDESTE ilumina el polígono

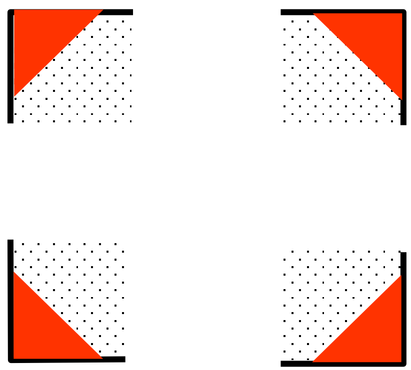


ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

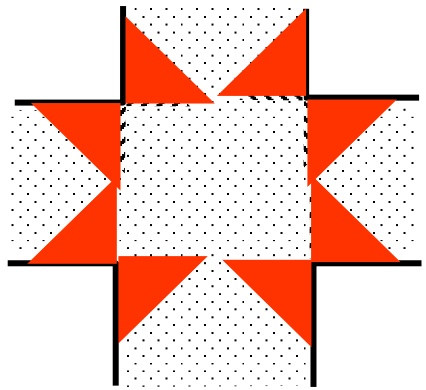
Lema

1. Las reglas son disjuntas
2. Los reflectores de cada regla iluminan el polígono
3. Con las cuatro reglas en total se colocan dos reflectores en cada vértice cóncavo y uno en cada convexo

3.



Vértices convexos



Vértices cóncavos

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

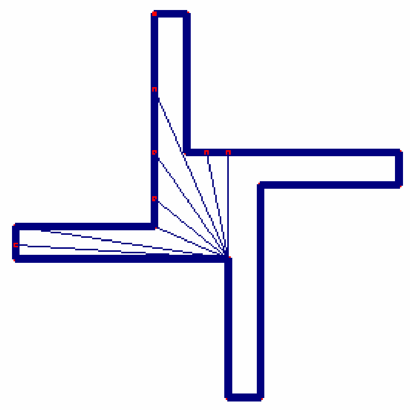
Teorema (Estivill, Urrutia, 1994)
Todo polígono ortogonal puede iluminarse con $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$ reflectores ortogonales.
Los reflectores se colocan en O(n)
Además existen polígonos que necesitan ese nº de reflectores

Suficiencia

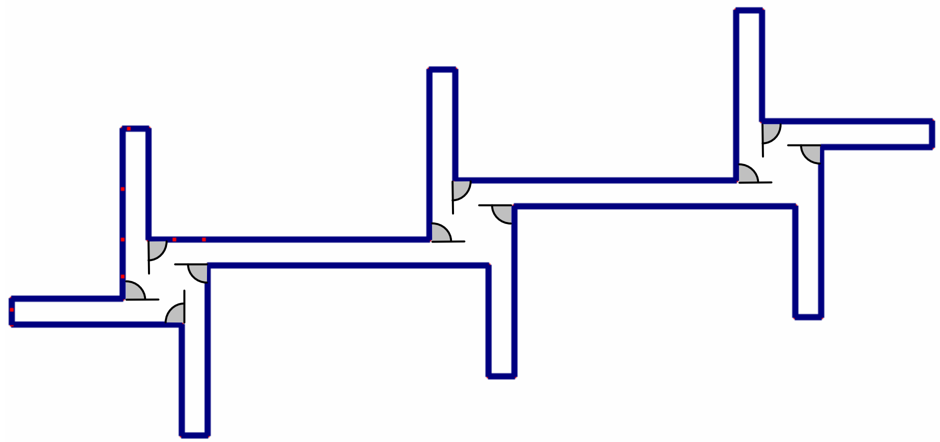
1. Se ilumina P con las cuatro reglas
2. Nº total de reflectores $2r + c = (3n - 4)/2$
3. Una de las cuatro reglas utiliza, a lo más, $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$ reflectores ortogonales

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

Necesidad de $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$ reflectores



Hélice de 4 aspas, 12 vértices
necesita 4 reflectores



Por cada nueva hélice
8 vértices y 3 reflectores

n = 12 + 8k vértices
4 + 3k reflectores

Este polígono requiere $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$ reflectores

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

Amplitud total de los reflectores utilizados

Cuadrangulación $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-vértice vigilan P

La amplitud de focos puede ser $\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{n}{4} = \frac{3\pi n}{8}$

Algoritmo de colocación de guardias O(nlogn)

Con reflectores ortogonales la amplitud es $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3n-4}{8} < \frac{3\pi n}{16}$

ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

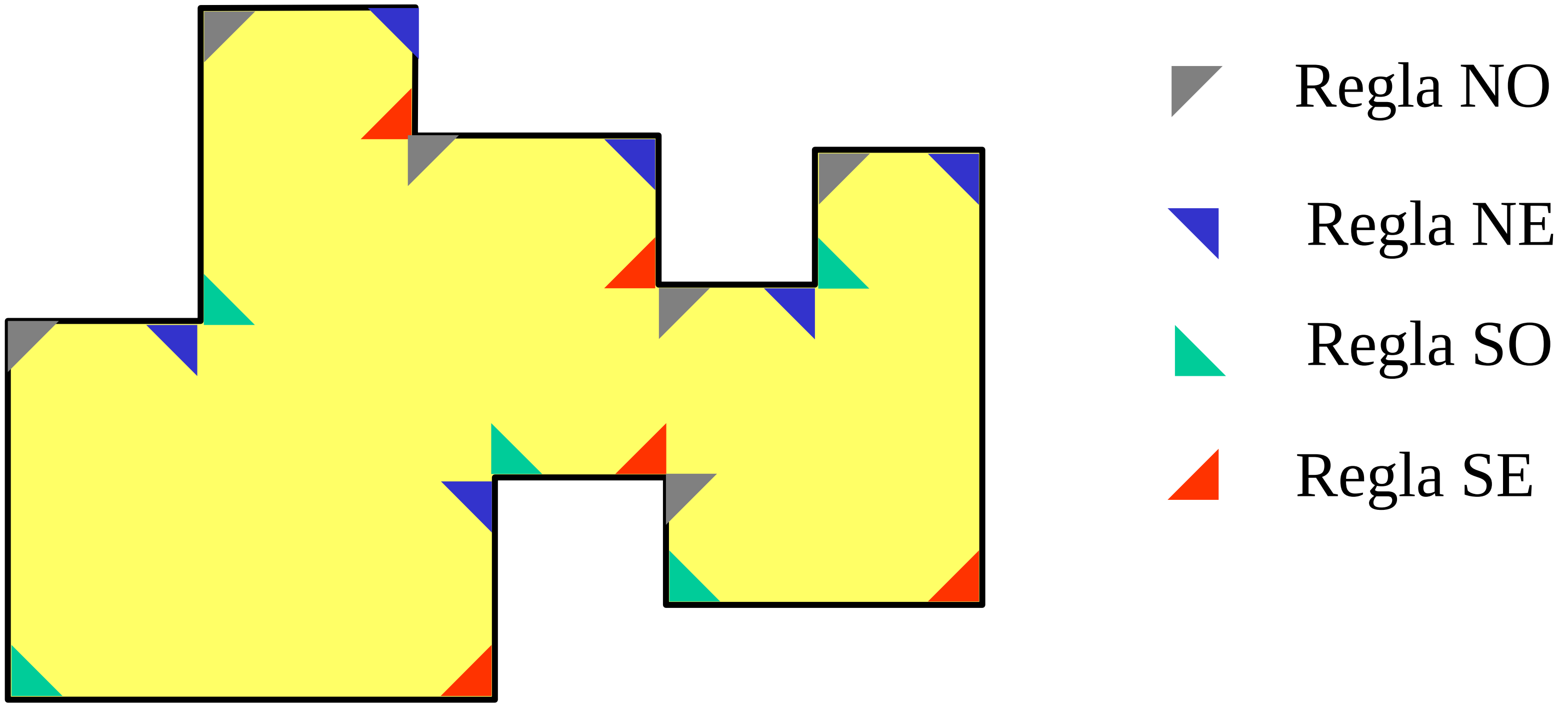
Algoritmo de colocación de reflectores

1. Detección de vértices convexos y cóncavos
2. Cálculo del nº de reflectores para cada regla de iluminación
3. Elección de la regla que usa menor nº de reflectores
4. Asignación de reflectores a vértices

Complejidad $O(n)$

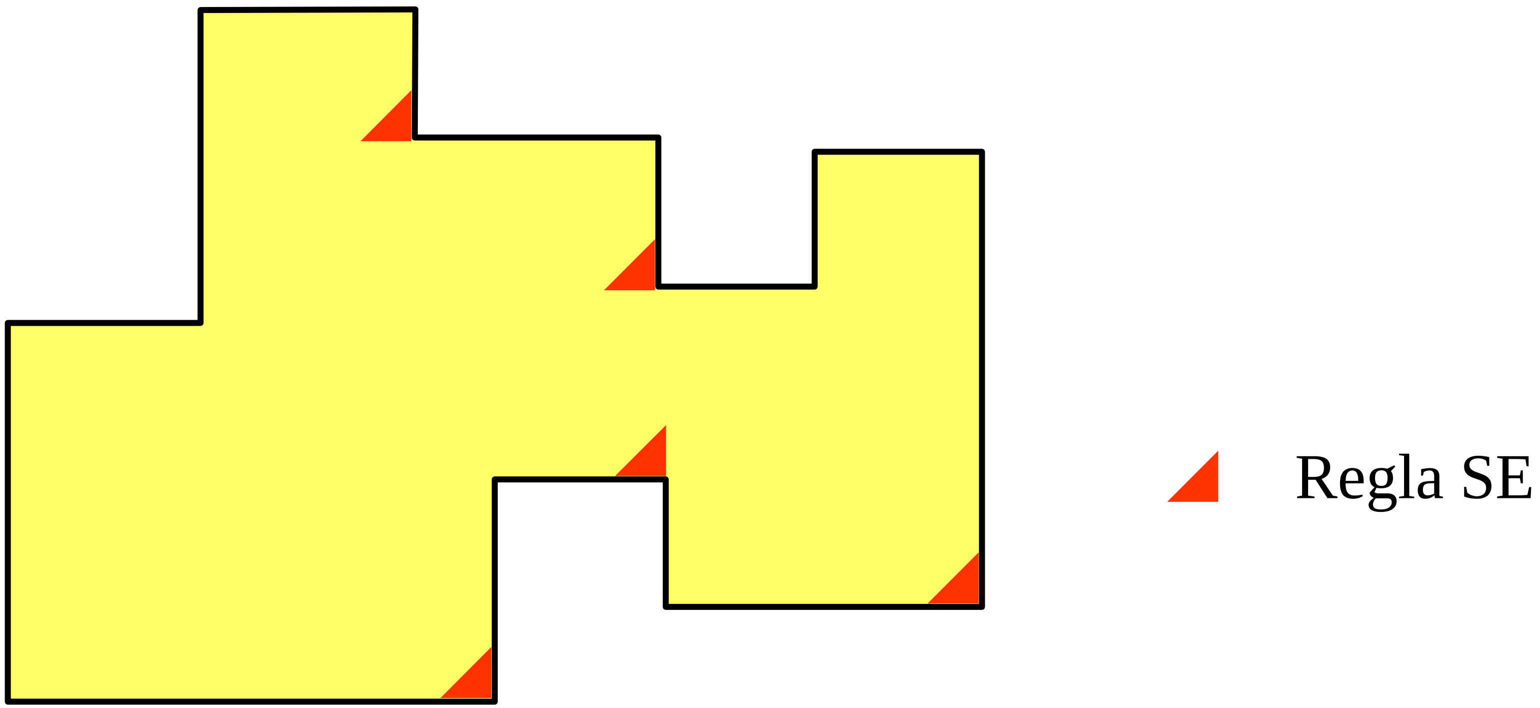
ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

Algoritmo de colocación de reflectores



ILUMINACIÓN CON V-REFLECTORES ORTOGONALES

Algoritmo de colocación de reflectores

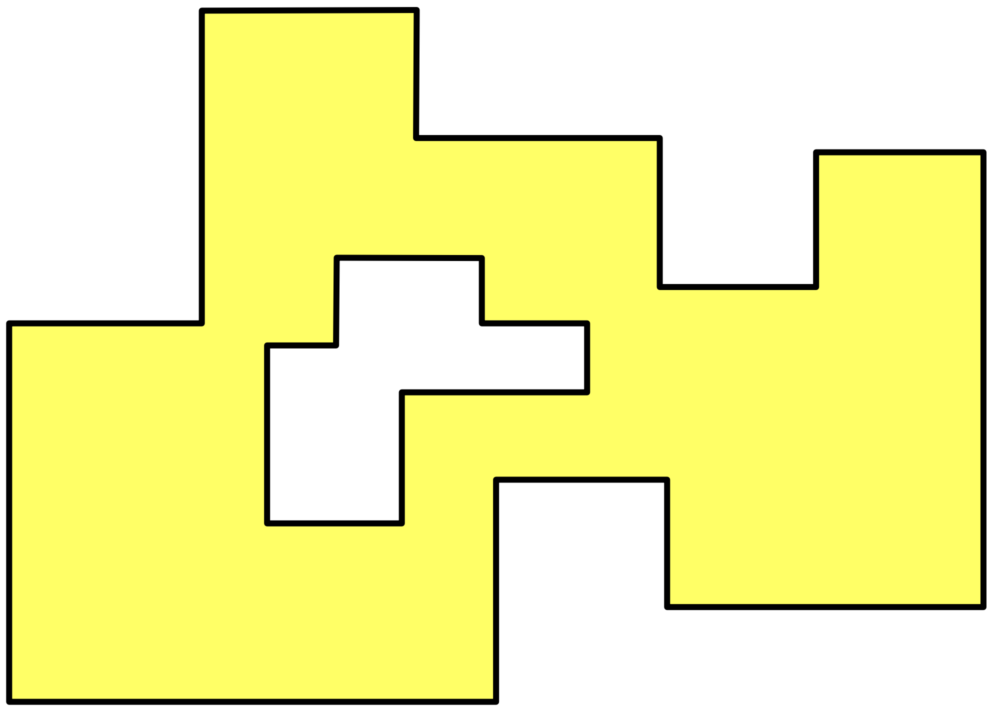


ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS CON AGUJEROS

(con reflectores ortogonales en vértices)

n vértices

h agujeros



$$r = \frac{n + 4(h-1)}{2}$$

$$c = \frac{n - 4(h-1)}{2}$$

$r = r_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_h$ $\quad c = c_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_h$ $\quad n_i = c_i + r_i$

$$r_i = \frac{n_i - 4}{2} \qquad c_i = \frac{n_i + 4}{2}$$

ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS CON AGUJEROS

Teorema

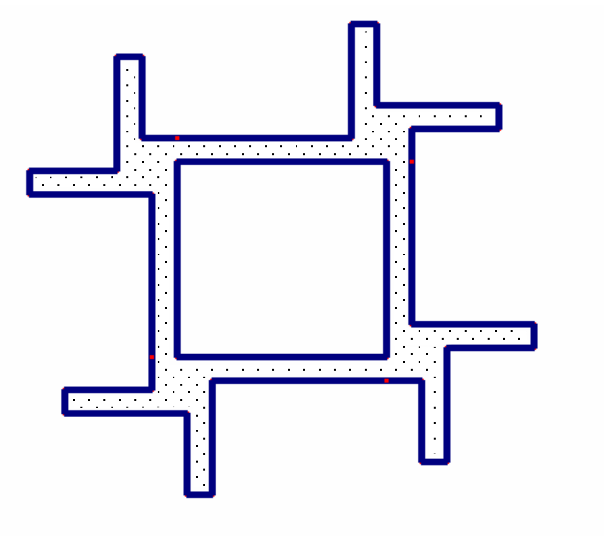
Todo polígono ortogonal de n vértices y h agujeros puede iluminarse con, a lo más, $\left\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \right\rfloor$ v-reflectores ortogonales

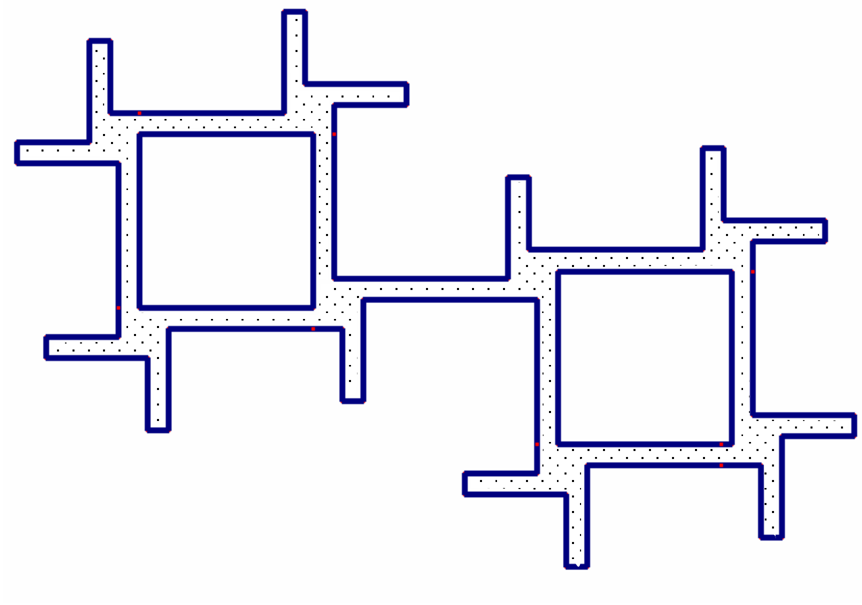
Suficiencia

- Iluminamos el polígono con las cuatro reglas de iluminación
- El nº de reflectores usados es 2r + c, o sea $\left\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{2} \right\rfloor$
- Una de las 4 reglas usa, a lo más, el nº del enunciado

ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS CON AGUJEROS

Necesidad $\left\lfloor \dfrac{3n + 4(h-1)}{8} \right\rfloor$





Cada copia aumenta 28 vértices
11 reflectores

n = 32 + 28(h-1) vértices
12 + 11(h-1) reflectores

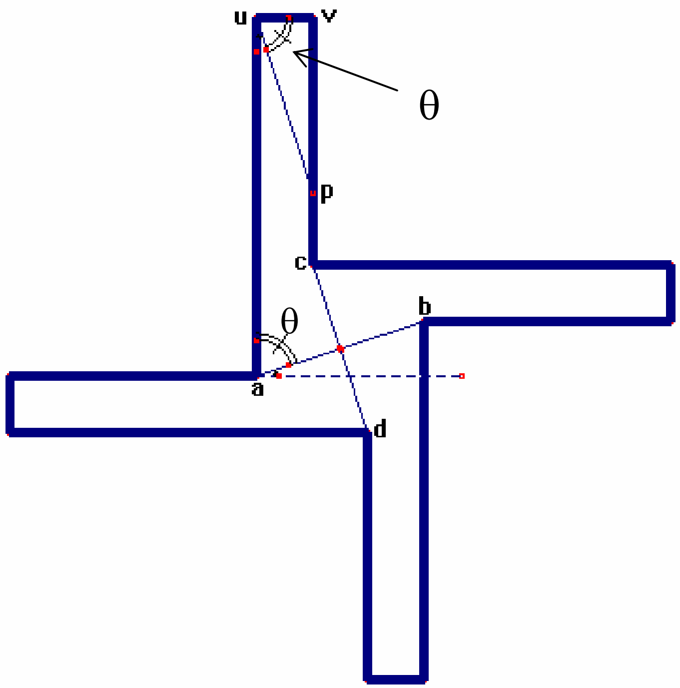
n=32, h=1
12 reflectores

¿POR QUÉ REFLECTORES ORTOGONALES?

Porque reflectores con menor amplitud NO iluminan algún polígono ortogonal. (Poniendo un reflector por vértice)

Teorema [AECSU, 1995]
Para todo $\varepsilon > 0$ existe polígono ortogonal que no puede iluminarse

con reflectores de amplitud , $\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$
uno por vértice



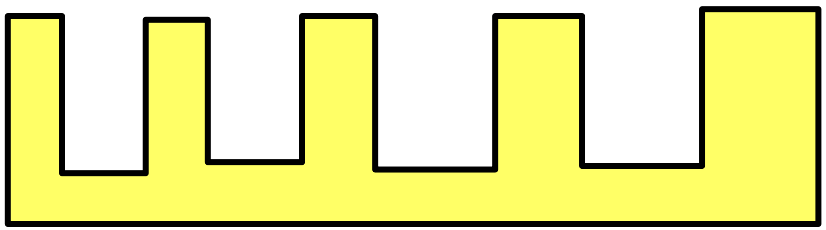
$\delta < \varepsilon$ $\quad\theta = \pi/2 - \delta,$
ab y cd perpendiculares

ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

Ahora se permiten reflectores no situados en vértices

Teorema [EU, 1994]
Todo polígono ortogonal puede iluminarse con, a lo más, $\lfloor n/4 \rfloor$ reflectores ortogonales situados en el borde del polígono.
Además estos reflectores pueden colocarse en tiempo lineal

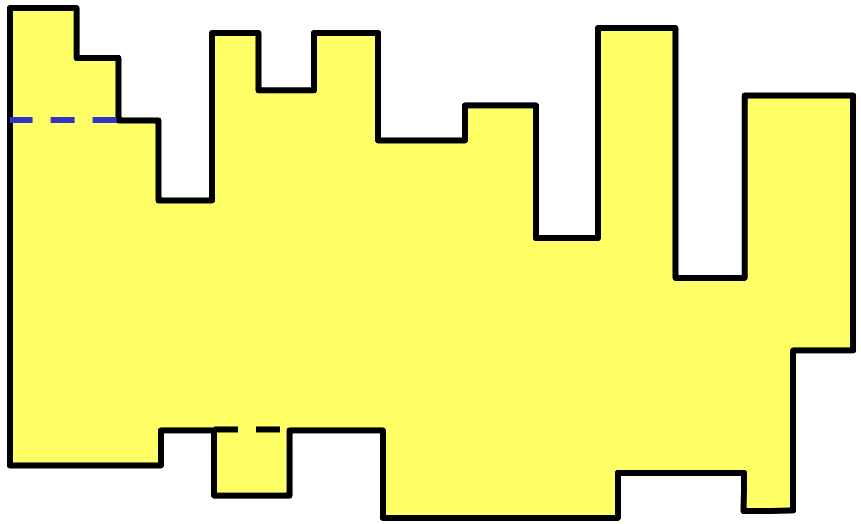
Obsevación: $\lfloor n/4 \rfloor$ reflectores ortogonales en el borde son necesarios para iluminar los polígonos muralla



ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

Corte horizontal
Corte impar

H-par

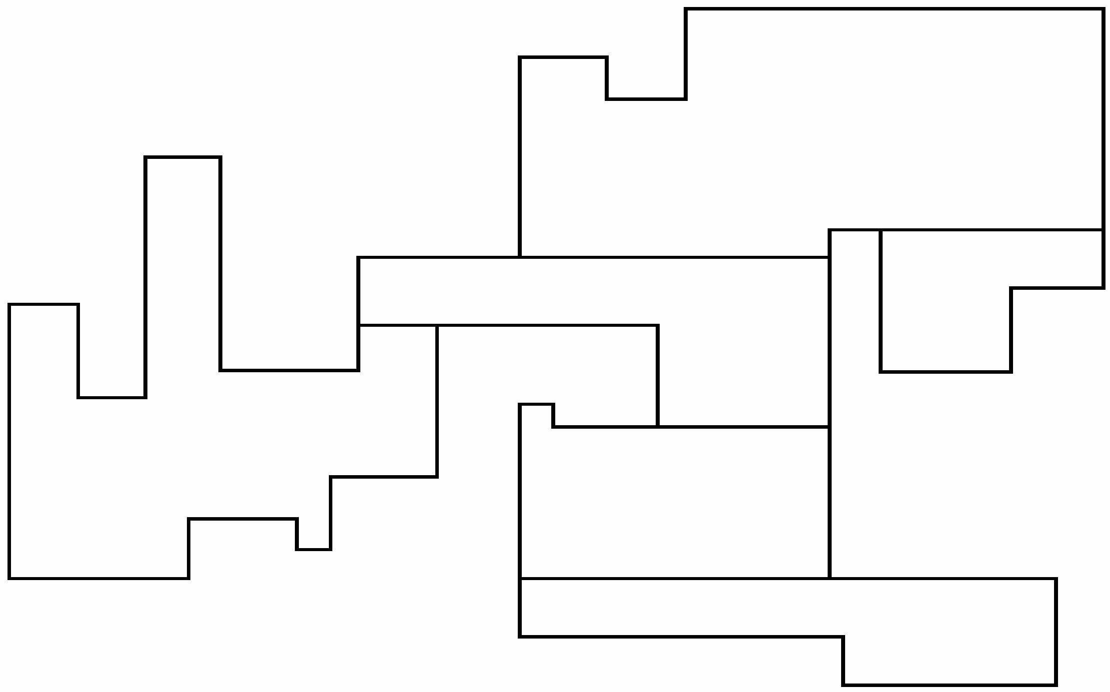


Partición noble de P
- cortamos por todos los cortes impares
- cortamos por segmentos que unen un H-par

ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

Partición noble de P

No hay cortes impares
Las aristas verticales son de P

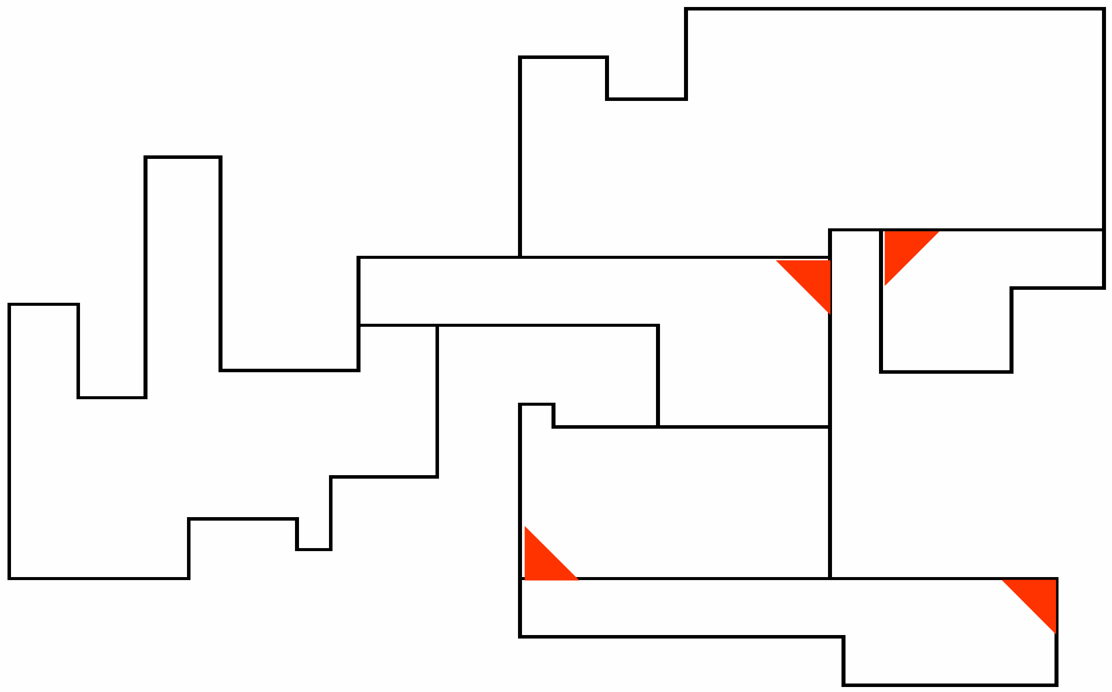


ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

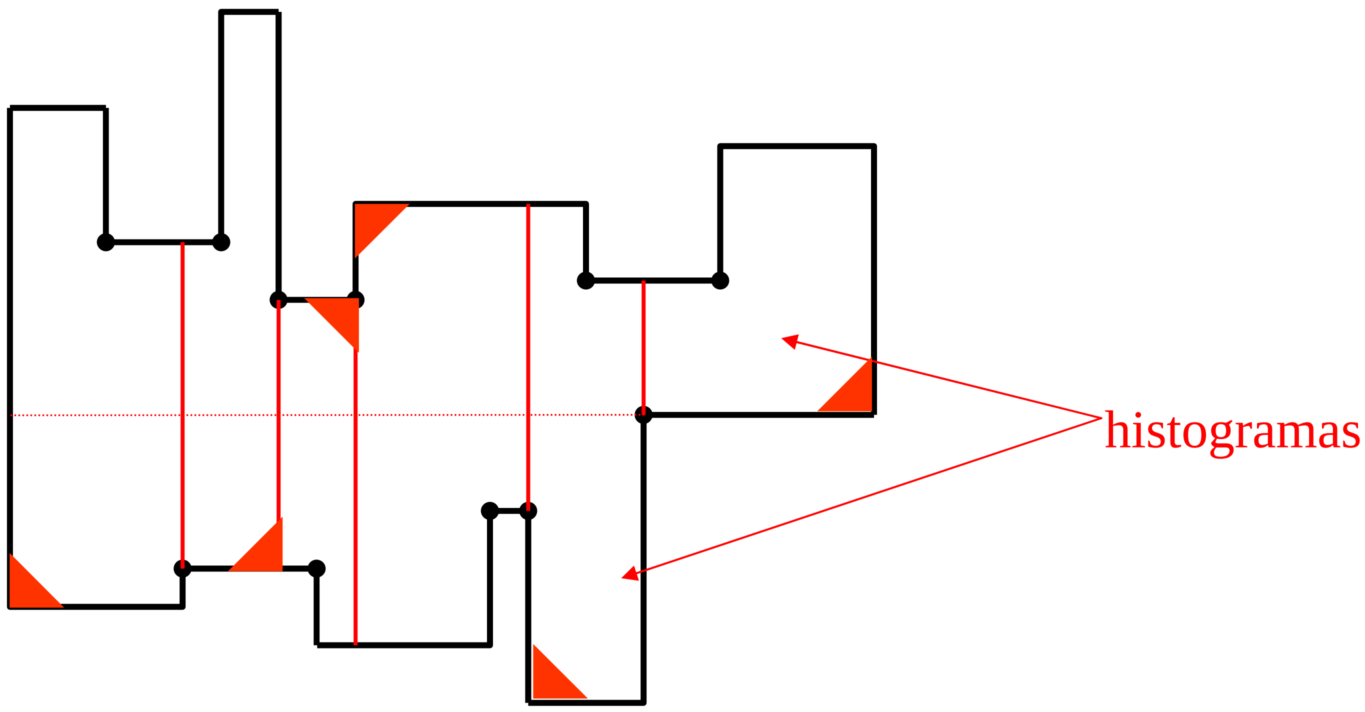
Partición noble de P

Piezas L 1 reflector

Histograma doble



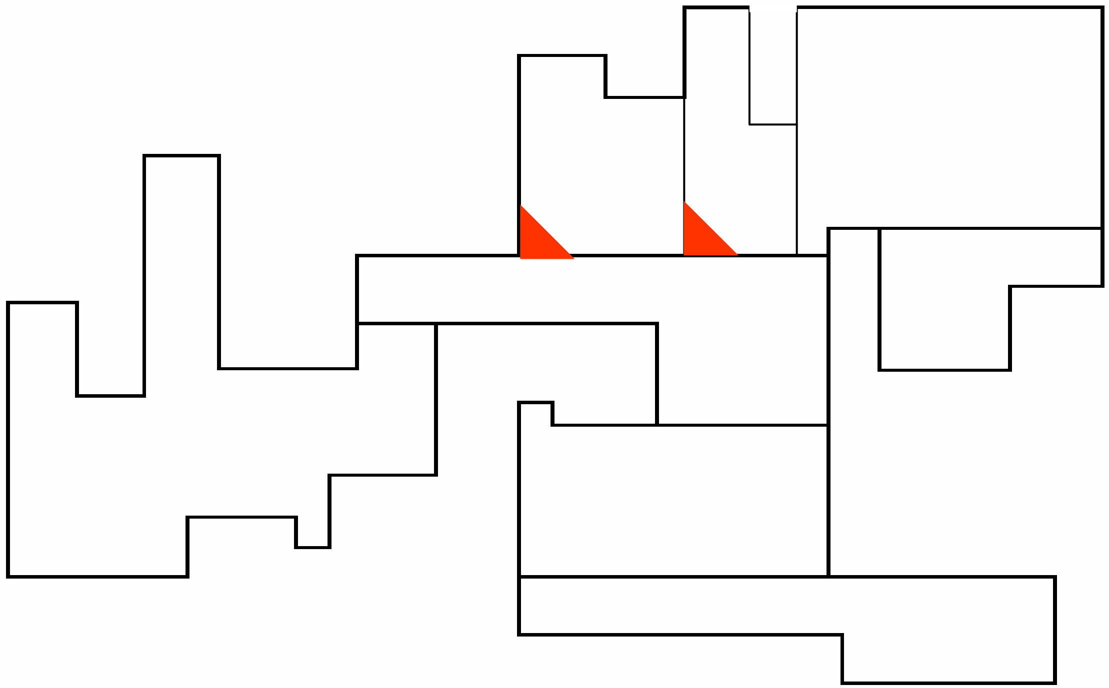
ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES



Un histograma doble de r vértices cóncavos se ilumina con $\lfloor r/2 \rfloor+1$ reflectores ortogonales situados en los lados

ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

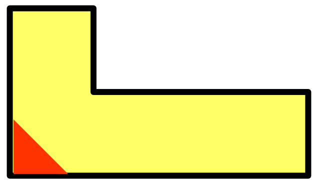
¡Los reflectores pueden caer en puntos interiores de P!



ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

Lema
Cada polígono de una partición noble de r vértices cóncavos puede iluminarse con $\lfloor r/2 \rfloor$+1 reflectores ortogonales situados en sus aristas verticales

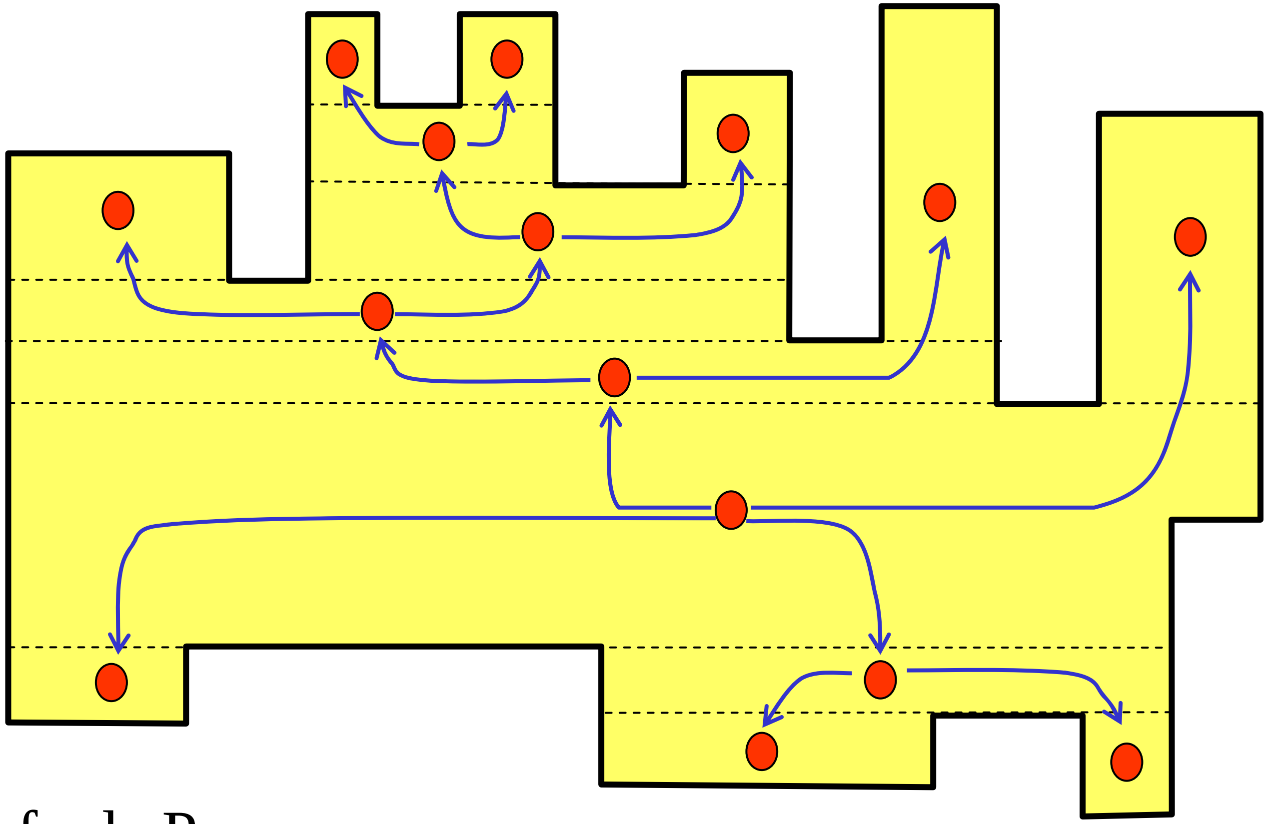
Dem. Por inducción sobre r
Si r=1, el polígono es una "L"



Supongamos el resultado cierto para polígonos con menos de r vértices cóncavos

Sea P, polígono noble con r cóncavos (histograma doble)
H-grafo de P, grafo de adyacencia de la partición inducida por los H-cortes correspondientes a cada H-par

ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

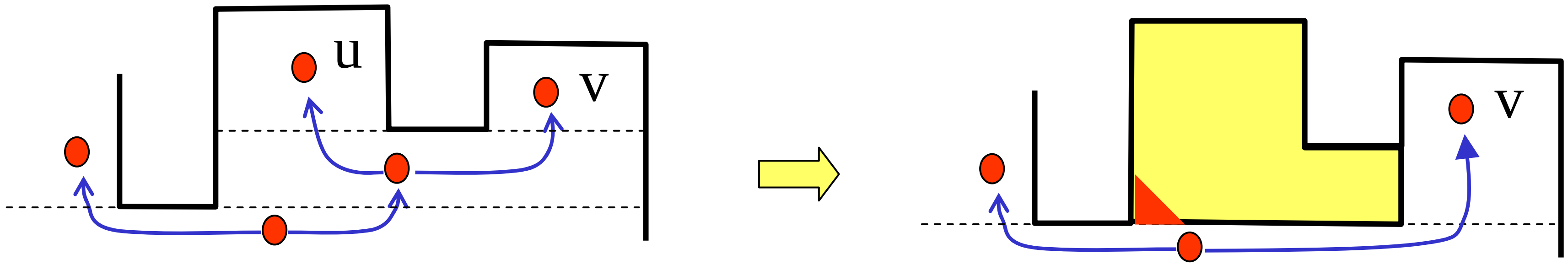


H-grafo de P

digrafo con un único vértice con d_e=0

ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

Tomemos un H-par de vértices que sean hojas del H-grafo



Este recorte construye P’ con r-2 cóncavos. La hipótesis de inducción asegura que iluminamos P’ con $\lfloor (r-2)/2 \rfloor + 1 = \lfloor r/2 \rfloor$ reflectores situados en aristas verticales.

Con uno más iluminamos todo P, como dice el lema

ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

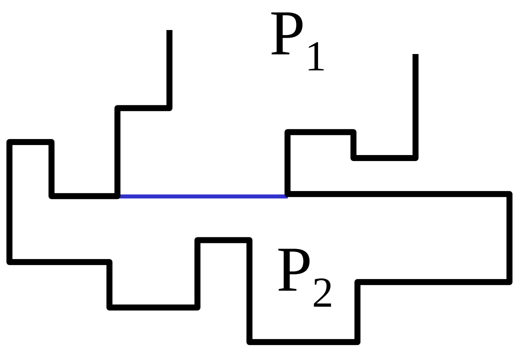
Teorema [EU, 1994]
Todo polígono ortogonal puede iluminarse con, a lo más, $\lfloor n/4 \rfloor$ reflectores ortogonales situados en el borde del polígono.
Además estos reflectores pueden colocarse en tiempo lineal

Dem

Caso 1) Existe un corte que resuelve dos vértices cóncavos

P_1 r_1 cóncavos, P_2 r_2 cóncavos
$r = r_1 + r_2 + 2$

$$\left\lfloor \frac{r_1}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{r_2}{2} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{r_1 + r_2 + 2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$$



ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

Caso 2) Existe un corte impar horizontal que divide P en P_1 con r_1 cóncavos, r_1 impar, y P_2 con r_2 cóncavos

Ahora $r = r_1 + r_2 + 1$

$$\left\lfloor \frac{r_1}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{r_2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{r_1 - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r_2}{2} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{r_1 - 1 + r_2 + 2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{r_1 + r_2 + 1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$$

Caso 3) No existen cortes impares horizontales. P es un histograma doble

El lema anterior resuelve el problema.
El H-grafo se puede construir en tiempo O(n)

ILUMINACIÓN CON REFLECTORES ORTOGONALES

Amplitud total de los reflectores utilizados

En [EU, 1994] se colocan $\lfloor n/4 \rfloor$ reflectores ortogonales.
La amplitud total es

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{4} = \frac{\pi\, n}{8}$$

En [H, 1990] Hoffmann demuestra que $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias puntuales vigilan un polígono ortogonal de n vértices, independientemente del nº de agujeros

En el peor caso la amplitud es $$2\pi \cdot \frac{n}{4} = \frac{\pi\, n}{2}$$

Algoritmo $O\,(\, n^{1.5} \log^2 \log\log n\,)$

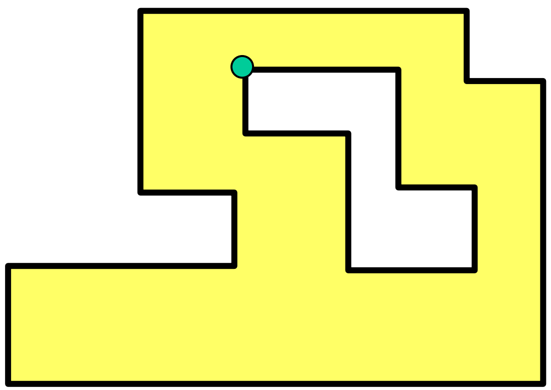
ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS CON AGUJEROS

(con reflectores ortogonales en el borde)

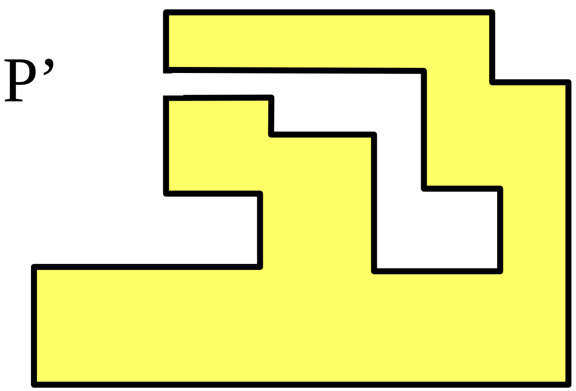
Teorema [AECSU, 1995]
Todo polígono ortogonal con n vértices y h agujeros puede iluminarse con, a lo más, $\lfloor (n+2h) / 4 \rfloor$ reflectores ortogonales situados en el borde del polígono.

Suficiencia

P



P'



ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS CON AGUJEROS

(con reflectores ortogonales en el borde)

P' tiene n + 2 vértices y h -1 agujeros

....

P* tiene n + 2h vértices y ningún agujero

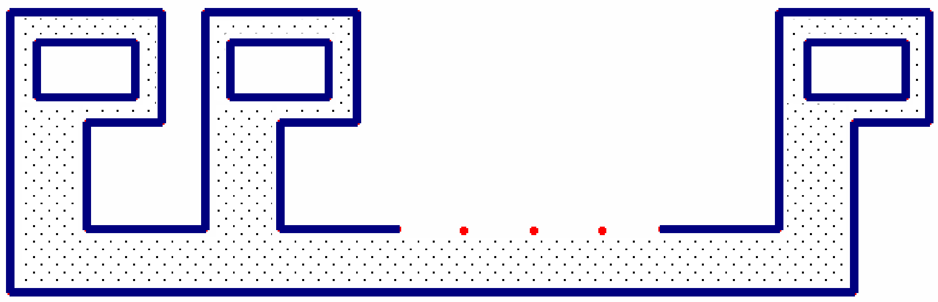
P* se ilumina con $\left\lfloor \dfrac{n+2h}{4} \right\rfloor$ reflectores en aristas verticales

Como las aristas verticales de P* lo son de P, los reflectores de P* sirven para iluminar P

ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS CON AGUJEROS

(con reflectores ortogonales en el borde)

Necesidad de los $\left\lfloor \frac{n+2h}{4} \right\rfloor$ reflectores



n = 10h

h agujeros

Se necesitan 3 reflectores ortogonales por cada zona, en total 3h reflectores

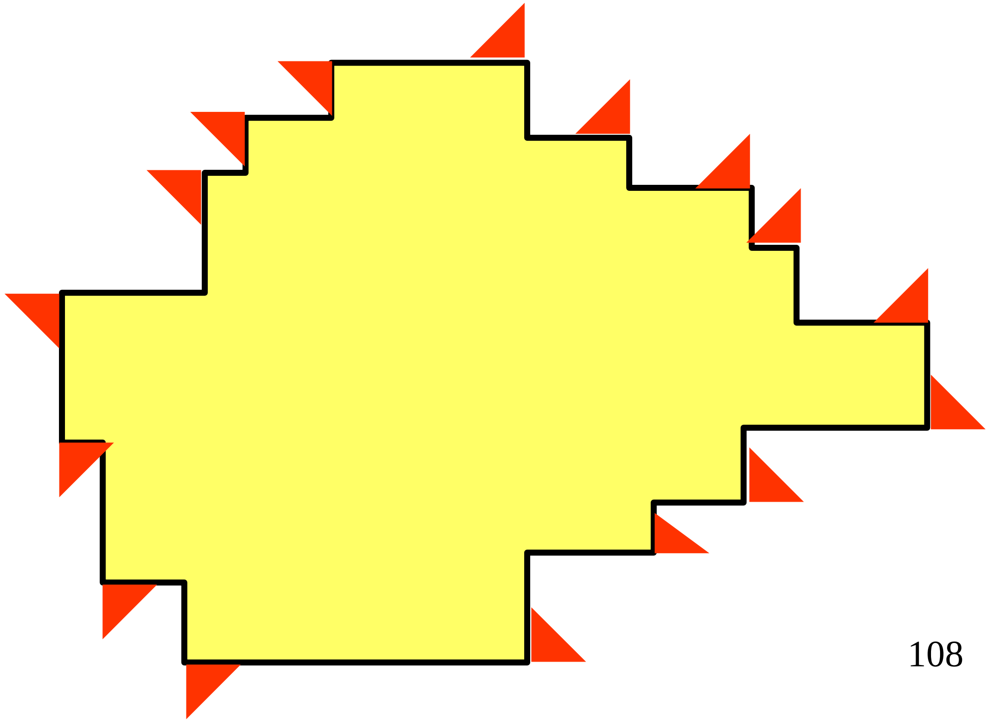
ILUMINACIÓN EXTERIOR

Teorema [AECSU, 1995]
Si P es un polígono ortogonal con n vértices y h agujeros entonces n / 2 +2 reflectores ortogonales (situados en vértices o en el borde de P son siempre suficientes, y a veces necesarios, para iluminar el exterior de P.

Necesidad

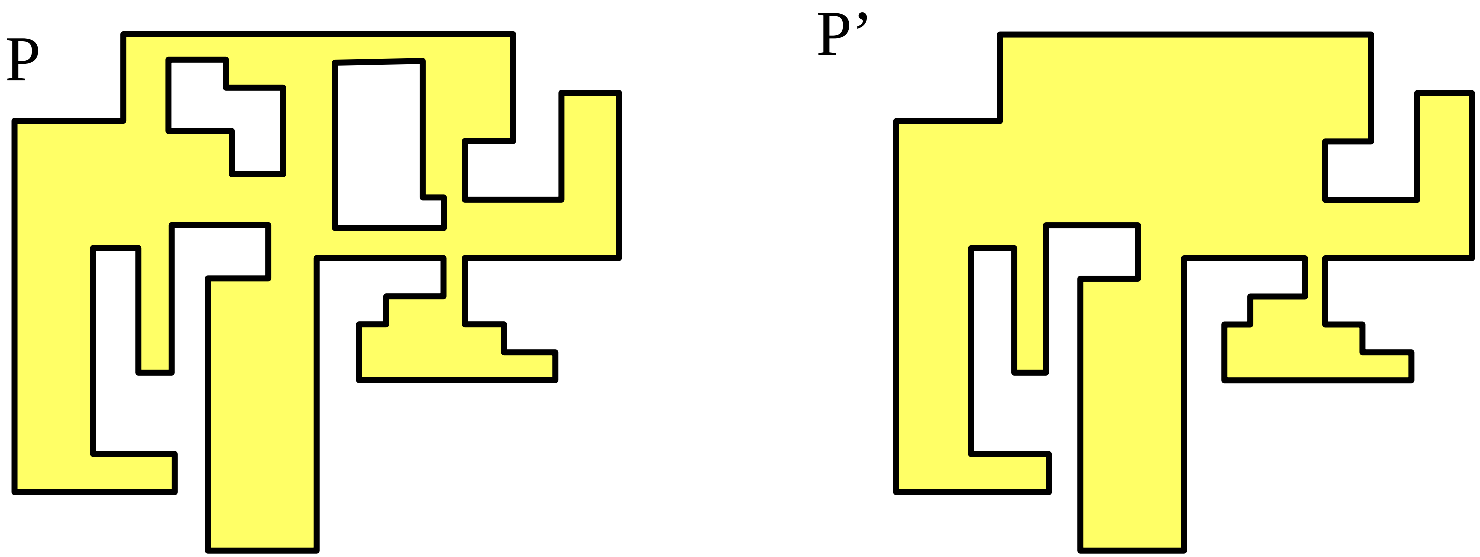
Polígono ortoconvexo

$$c = \frac{n+4}{2} = \frac{n}{2} + 2$$



ILUMINACIÓN EXTERIOR

Suficiencia

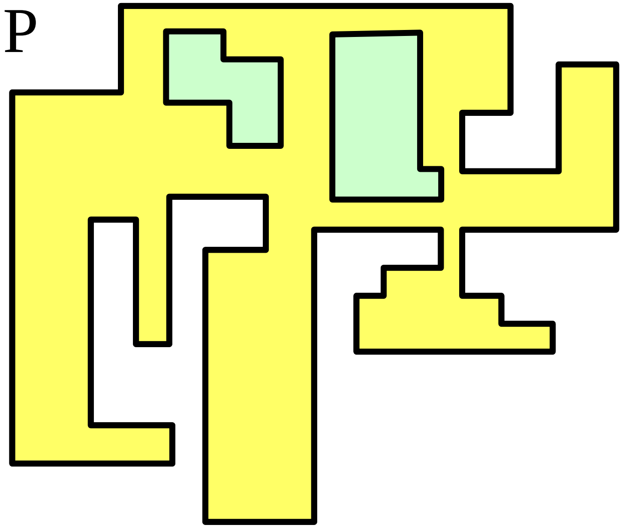


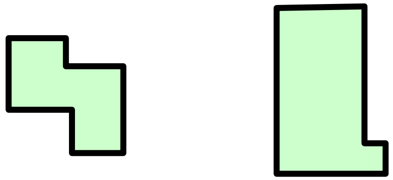
Iluminar el exterior de P es iluminar el interior de cada uno de los agujeros de P y el exterior de P’

ILUMINACIÓN EXTERIOR

Suficiencia

P





Los agujeros son polígonos ortogonales de n_i vértices
P' tiene n_0 vértices

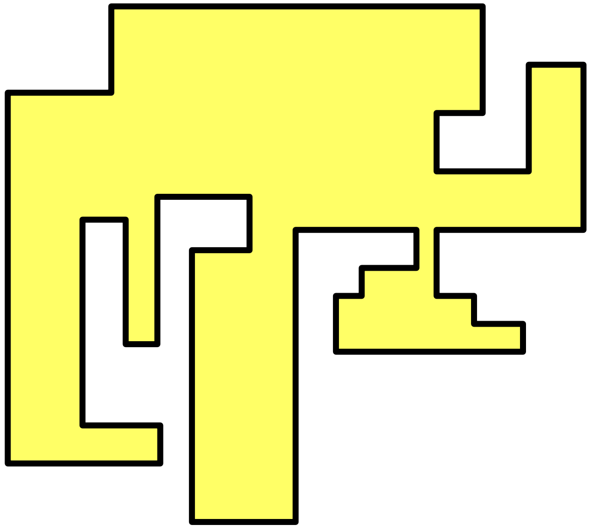
$$n = n_0 + \sum_{i=1}^{h} n_i$$

El i-ésimo agujero puede iluminarse con $n_i / 2$ reflectores

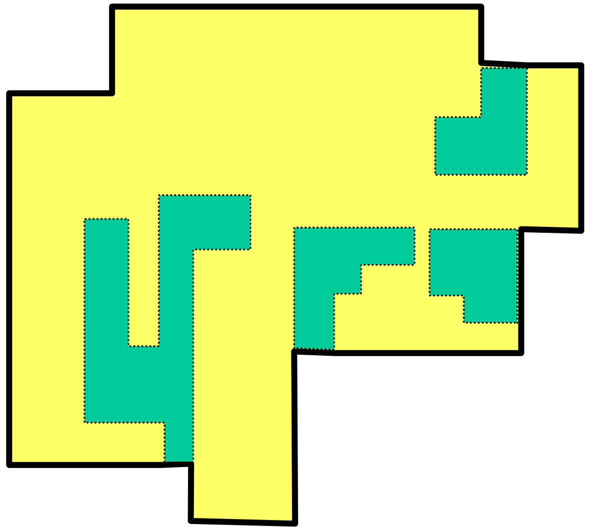
¿Se puede iluminar el exterior de P' con $\frac{n_0}{2} + 2$ reflectores?

ILUMINACIÓN EXTERIOR

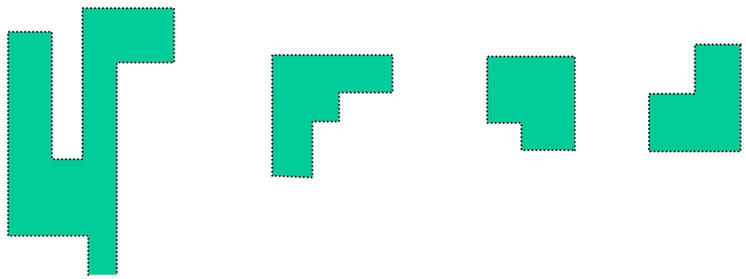
P’



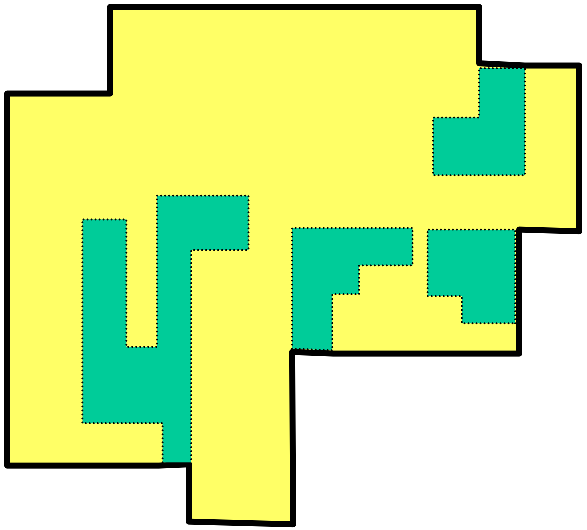
CCO(P’)



Iluminar el exterior de P’ es iluminar el exterior de CCO(P’)
y el interior de los bolsillos



ILUMINACIÓN EXTERIOR



Si CCO(P') tiene k vértices, el exterior se ilumina con

$$\frac{k}{2}+2 \quad \text{reflectores}$$

Los bolsillos tienen vértices que NO son vértices del polígono inicial. No se puede aplicar la cota obtenida

ILUMINACIÓN EXTERIOR

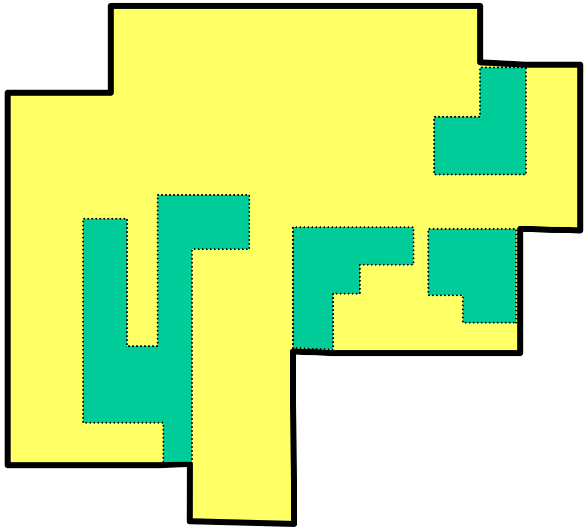
Lema
Un polígono ortogonal de n vértices, sin agujeros, en el que no se puede colocar reflector en un vértice convexo se puede iluminar con $n/2 - 1$ reflectores ortogonales

Las cuatro reglas de iluminación colocan $2r + c$ reflectores ortogonales.
Toda regla coloca al menos un reflector en un vértice convexo.

La regla que coloca el segundo menor nº de luces, utiliza,

a lo más $\left\lfloor \frac{2r + c - 1}{3} \right\rfloor = \frac{n}{2} - 1$ reflectores ortogonales

ILUMINACIÓN EXTERIOR



Si P' tiene m bolsillos, con b_i vértices cada uno, entonces cada bolsillo se ilumina con

$$\frac{b_i}{2} - 1 \quad \text{reflectores}$$

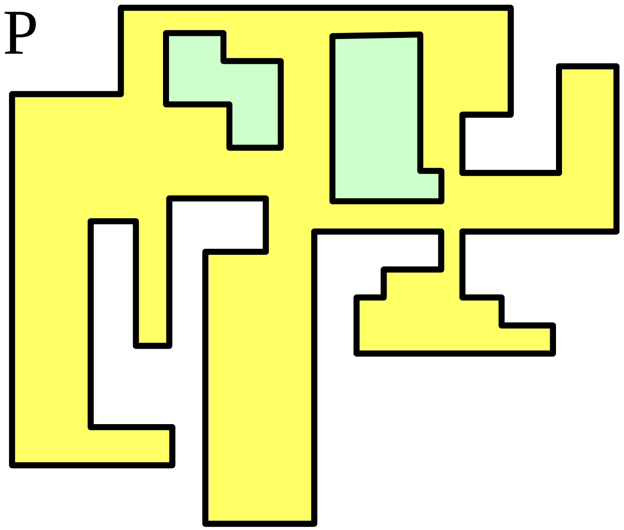
Como $$k + \sum_{i=1}^{m} b_i \leq n_0 + 2\,m$$

El nº de reflectores que iluminan el exterior de P' es:

$$\frac{k}{2} + 2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{b_i}{2} - 1\right) \leq \frac{n_0}{2} + 2$$

ILUMINACIÓN EXTERIOR

P



Finalmente, el nº de reflectores suficientes para iluminar el exterior de P es

$$\left(\sum_{i=1}^{h}\frac{n_i}{2}\right)+\frac{k}{2}+2+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{b_i}{2}-1\right) \le \left(\sum_{i=1}^{h}\frac{n_i}{2}\right)+2+\frac{n_0}{2}=\frac{n}{2}+2$$

agujeros

Exterior de CCO(P')

Bolsillos de P'

PROBLEMA   ABIERTO

Si se permiten reflectores de amplitud diferente, α_1 , α_2 , ... , α_n, ¿qué podemos decir de un recubrimiento que minimice la suma

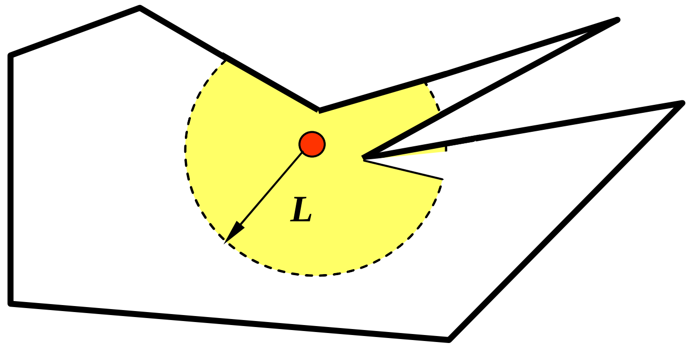
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

ILUMINACIÓN DE CALIDAD

- ÁNGULO DE ILUMINACIÓN
  (Tesis de Vera Sacristán)
- ALCANCE LIMITADO DE LOS FOCOS
- BUENA ILUMINACIÓN

ALCANCE LIMITADO DE LOS FOCOS

Los focos o guardias tienen un alcance limitado L



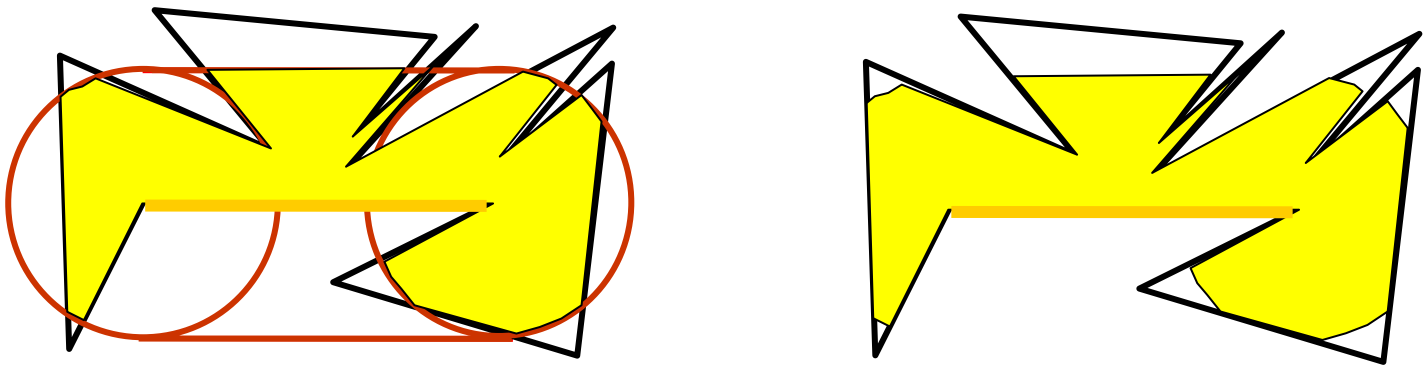
Ntafos, 1992

Algoritmos aproximados para la Ruta del L-vigilante para el borde y para el Problema del L-barrendero

ALCANCE LIMITADO DE LOS FOCOS

Kim y otros, 1995

Algoritmo O(n) para construir el polígono de L-visibilidad desde un lado del polígono



García, 1995

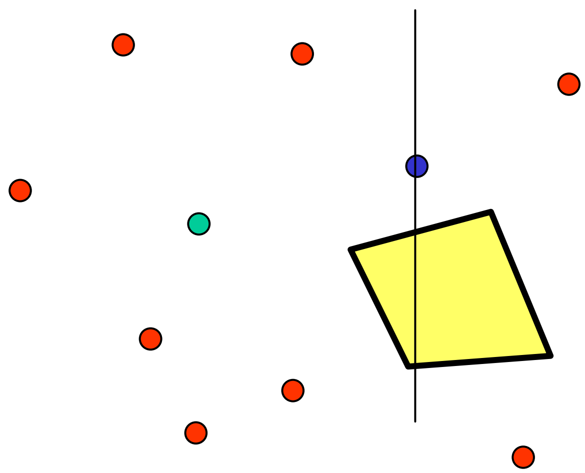
Resultados combinatorios y algorítmicos sobre L-visibilidad con luces en vértices.

Para luces-punto los problemas son NP-duros?

BUENA ILUMINACIÓN

Canales, Abellanas, Hernández, 2004

Un punto *x* está t-bien iluminado por un conjunto S de focos si cada semiplano que contiene a *x* también contiene a t focos de S que lo iluminan

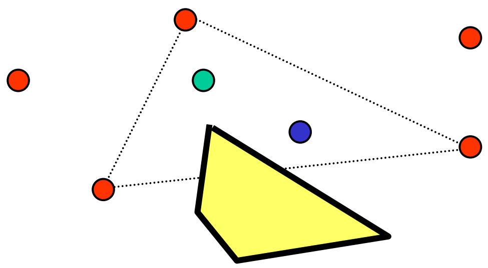


- 2-bien iluminado
- No 2-bien iluminado

BUENA ILUMINACIÓN

Canales, Abellanas, Hernández, 2004

Un punto *x* está t-bien iluminado por un conjunto S de focos si cada semiplano que contiene a *x* también contiene a t focos de S que lo iluminan

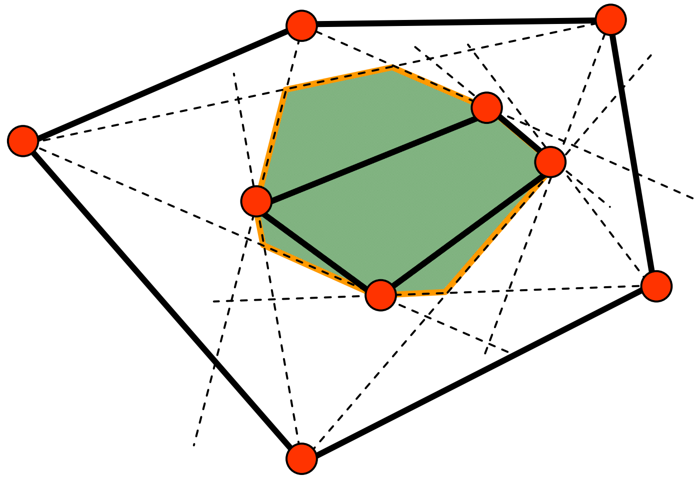


La 1-buena iluminación corresponde a la Δ-vigilancia, introducida por Smith, Evans, 2003

Algoritmo polinómico para colocar un conjunto mínimo de Δ-guardias en un polígono P para Δ-vigilar otro Q contenido en P. Si el borde es opaco el problema es NP-duro.

BUENA ILUMINACIÓN

- Buena iluminación sin obstáculos

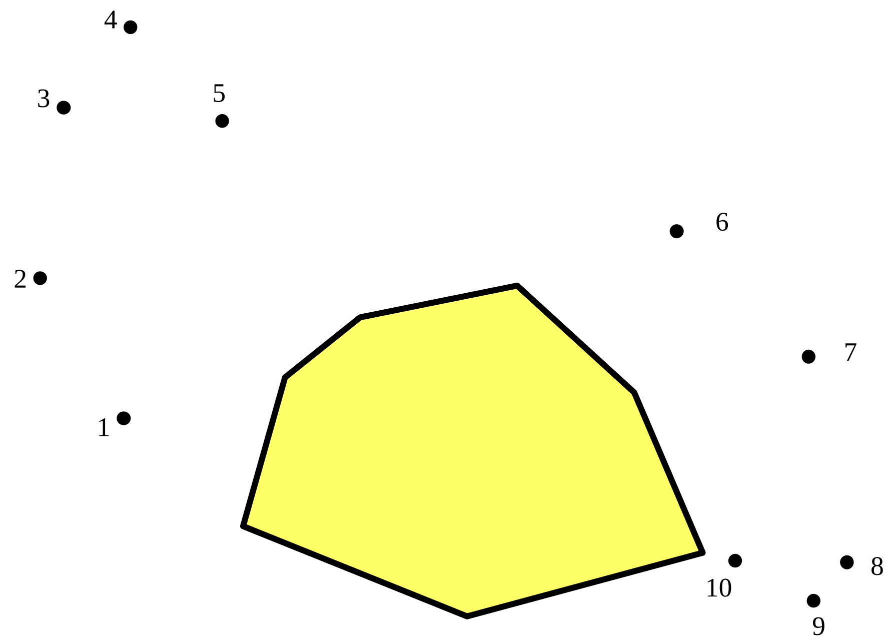


La zona t-bien iluminada es el nivel t de separabilidad.

Se calculan todos los niveles en $O(n^2)$ Claverol, 2004

BUENA ILUMINACIÓN

- 1-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, 2004
- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, 2005



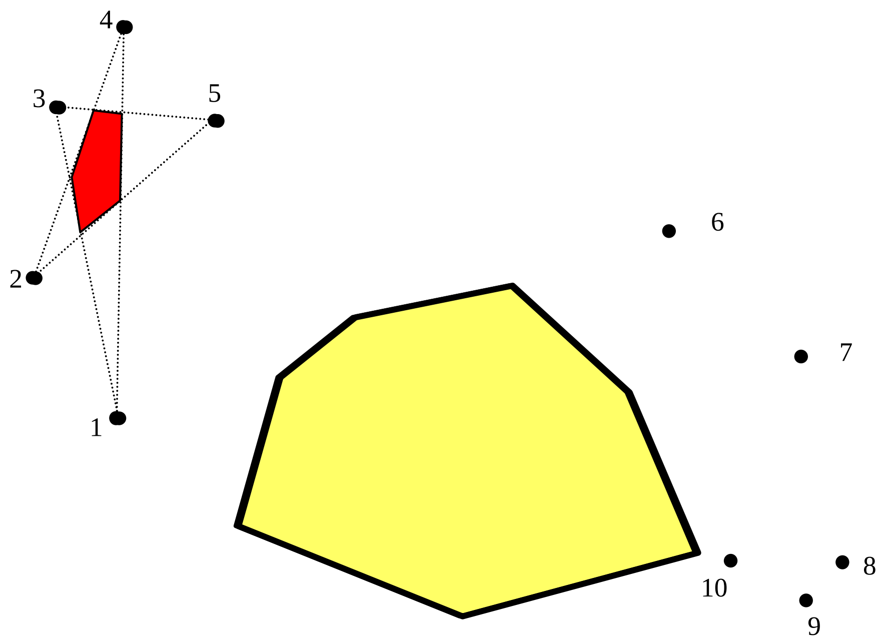
n focos, k vértices

BUENA ILUMINACIÓN

- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo n focos, k vértices

ACH, 2005

Fase 1

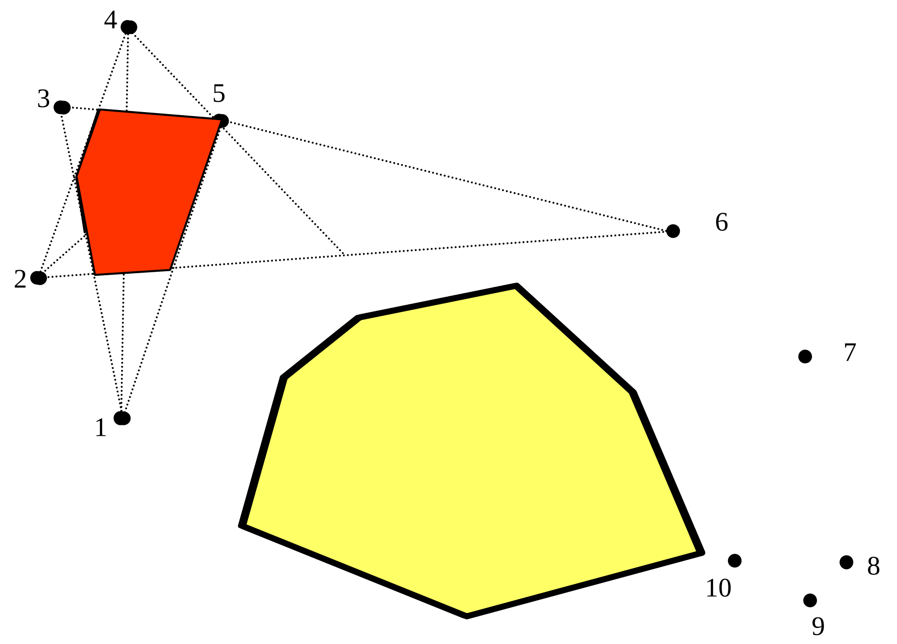


BUENA ILUMINACIÓN

- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo n focos, k vértices

ACH, 2005

Fase 1

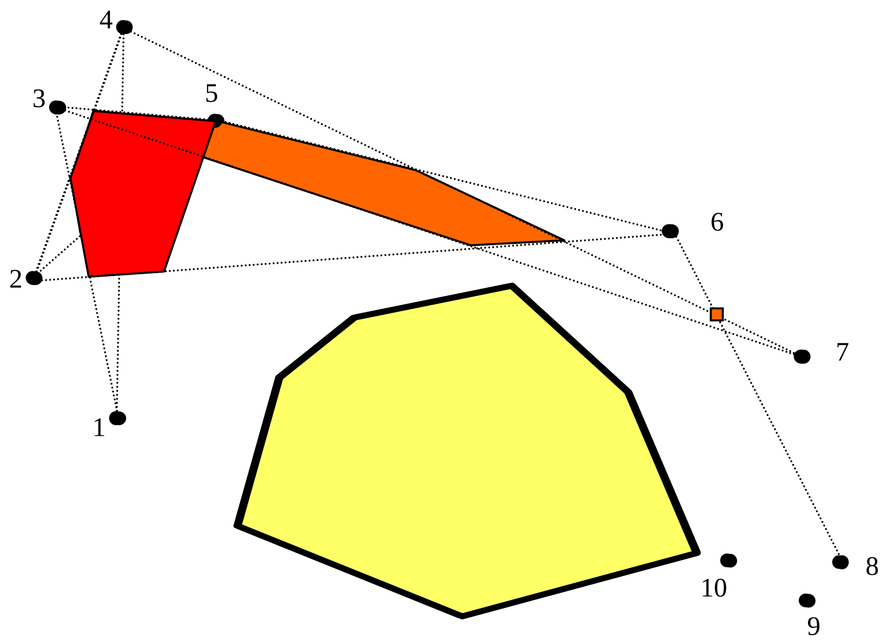


BUENA ILUMINACIÓN

- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo n focos, k vértices

ACH, 2005

Fase 1

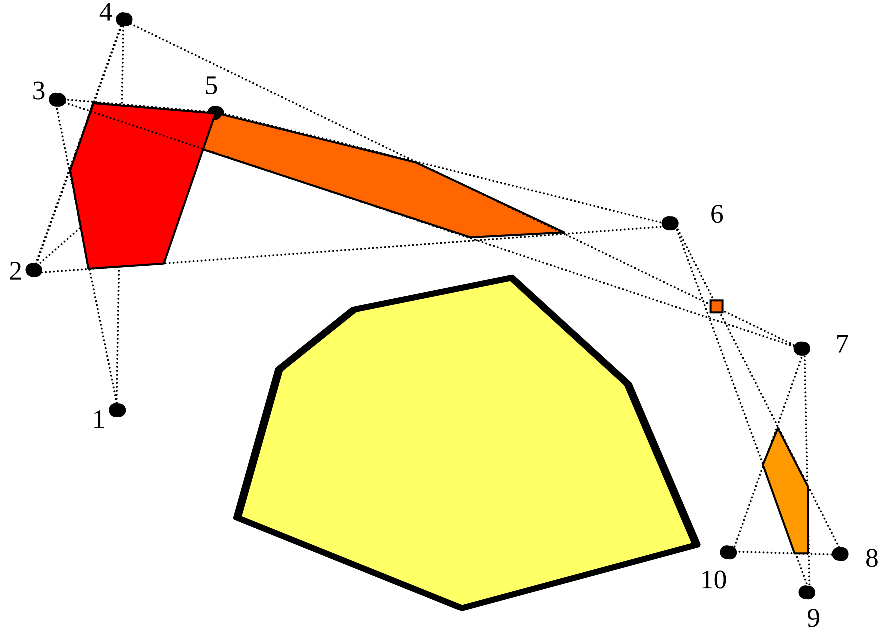


BUENA ILUMINACIÓN

- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, 2005
  n focos, k vértices

Fase 1

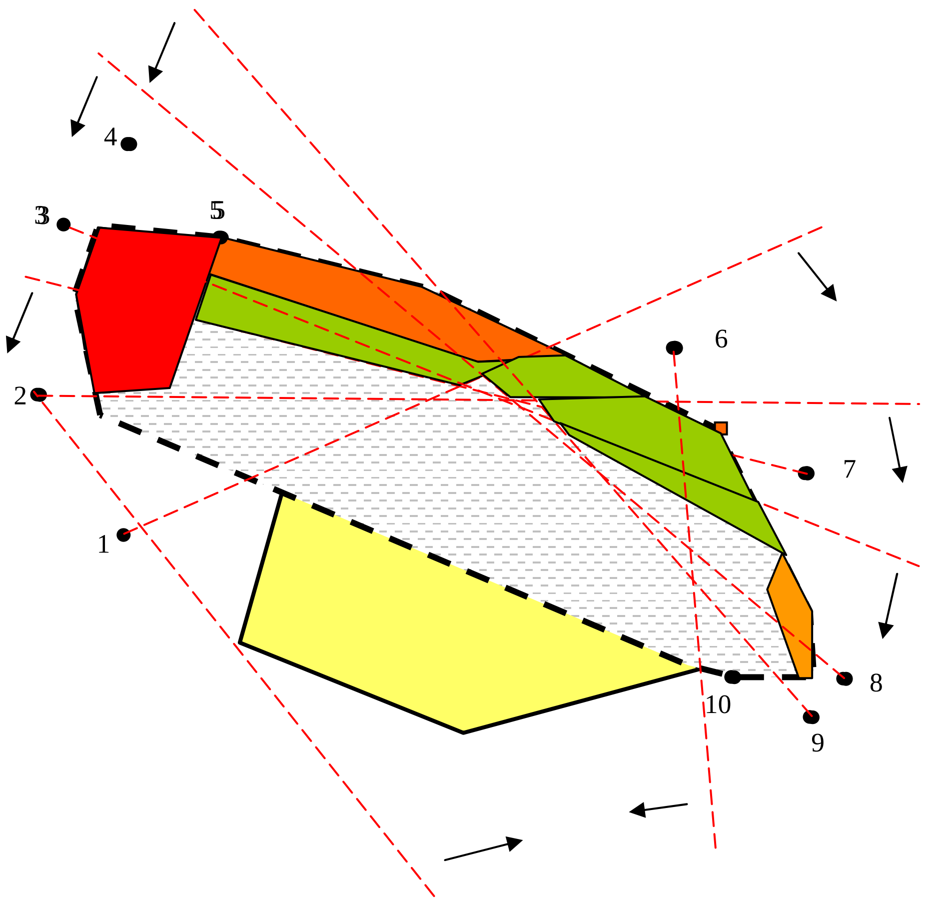
$O(n\log(nk))$



BUENA ILUMINACIÓN

- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, 2005

Fase 2

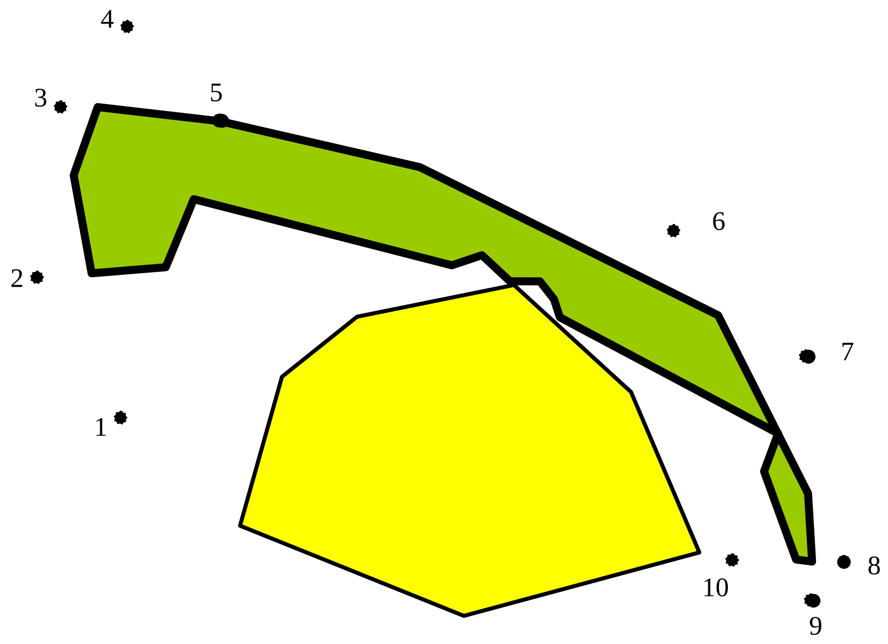


BUENA ILUMINACIÓN

- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, 2005

Fase 2

O(n+k+nlogk)



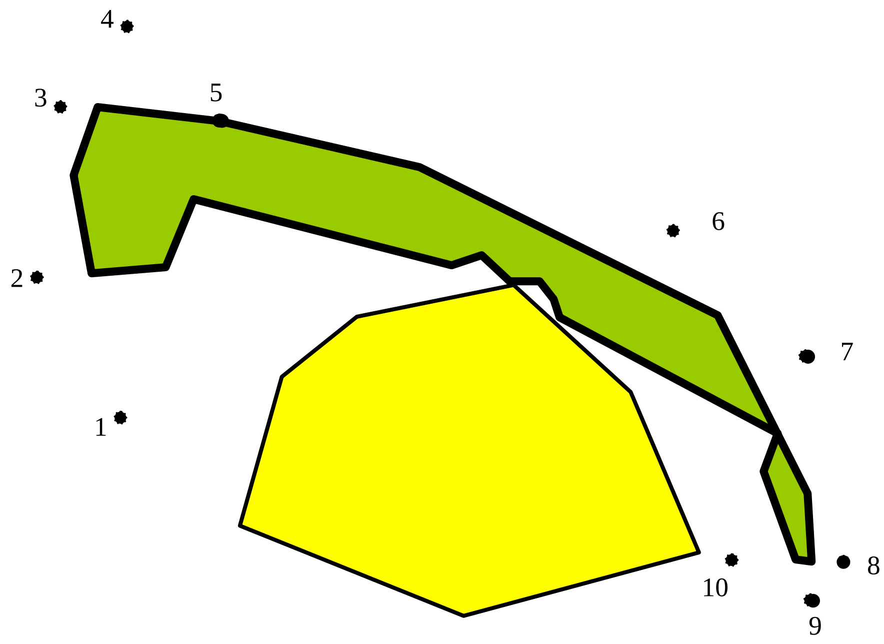
Complejidad total O(nlog(nk) + k)

BUENA ILUMINACIÓN

- 2-Buena iluminación con un obstáculo convexo ACH, 2005

Fase 2

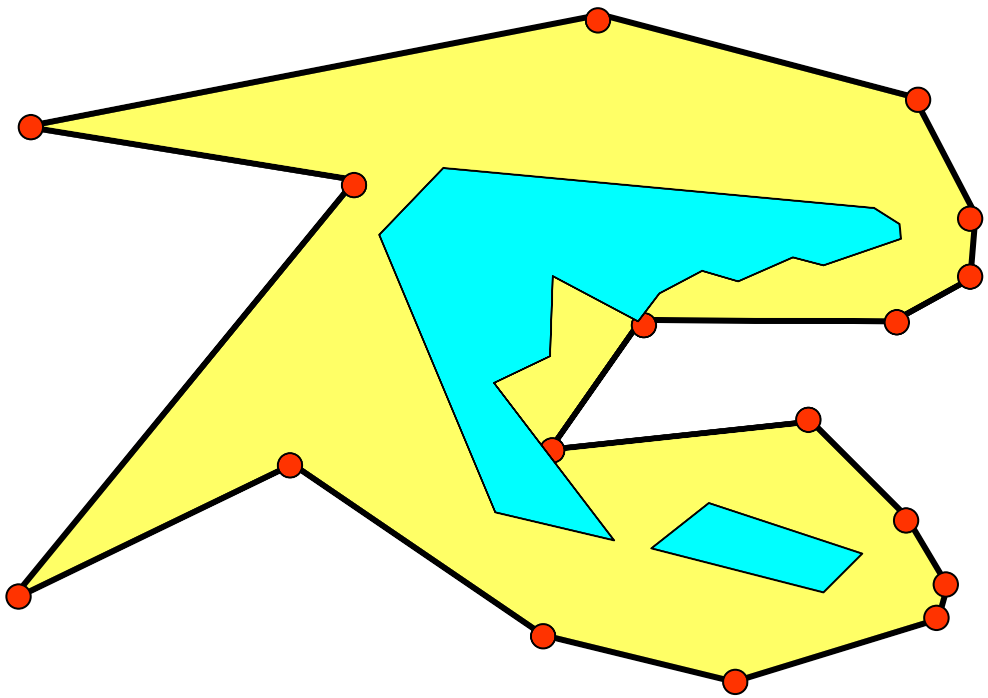
O(n+k+nlogk)



Complejidad total O(nlog(nk) + k)

BUENA ILUMINACIÓN en polígonos

- 2-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, 2004
- 3-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, 2005

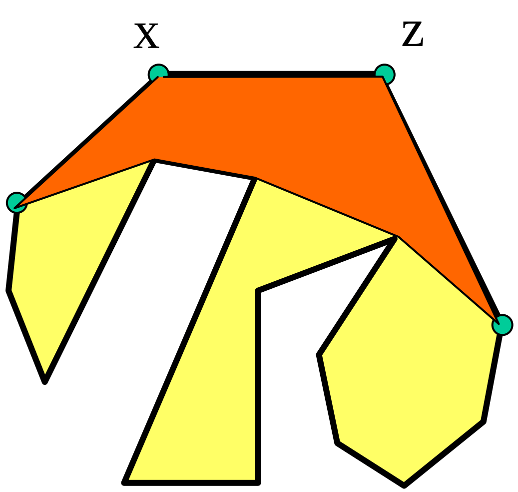


BUENA ILUMINACIÓN en polígonos

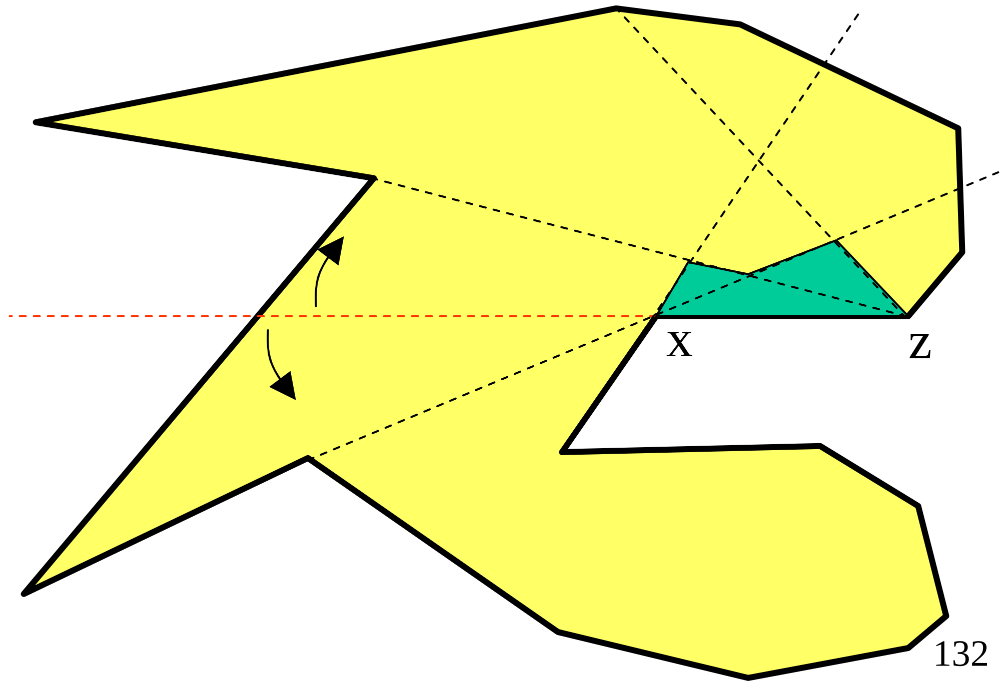
- 2-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, 2004
- 3-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, 2005

Eliminar las zonas no 3-bien iluminadas

Zonas tipo I



Zonas tipo II

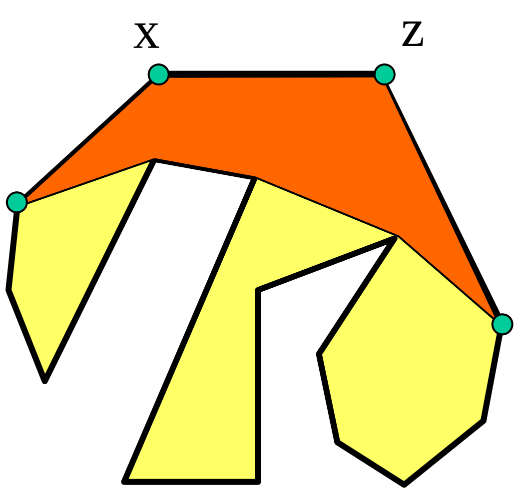


BUENA ILUMINACIÓN en polígonos

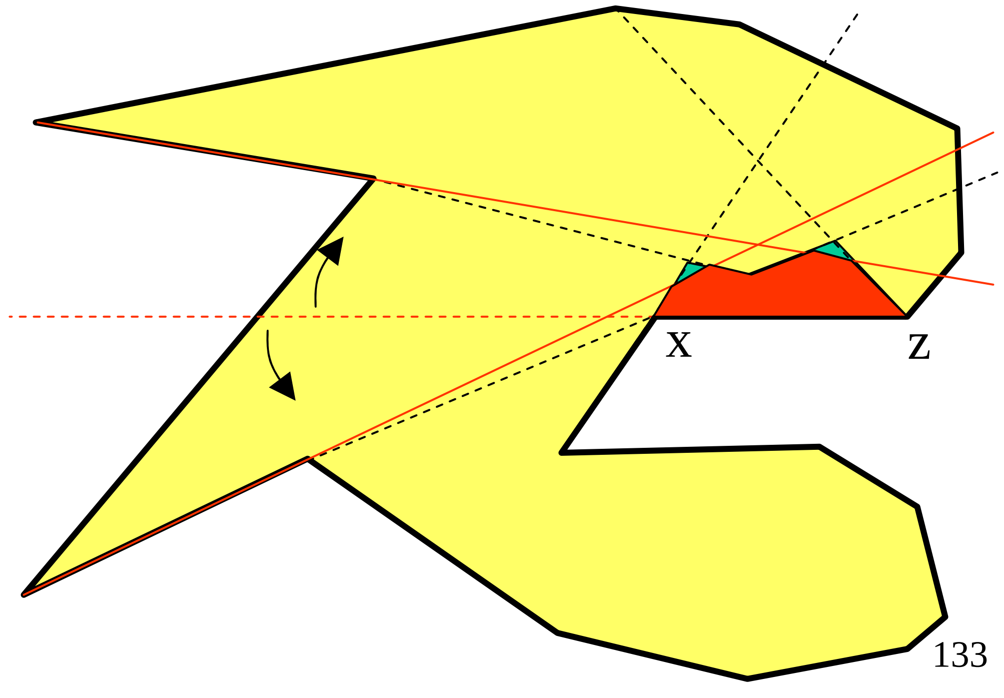
- 2-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, 2004
- 3-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, 2005

Eliminar las zonas no 3-bien iluminadas

Zonas tipo I



Zonas tipo II

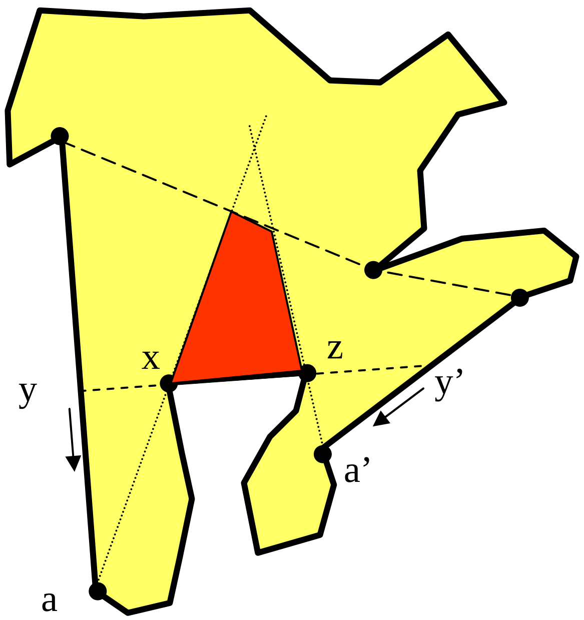


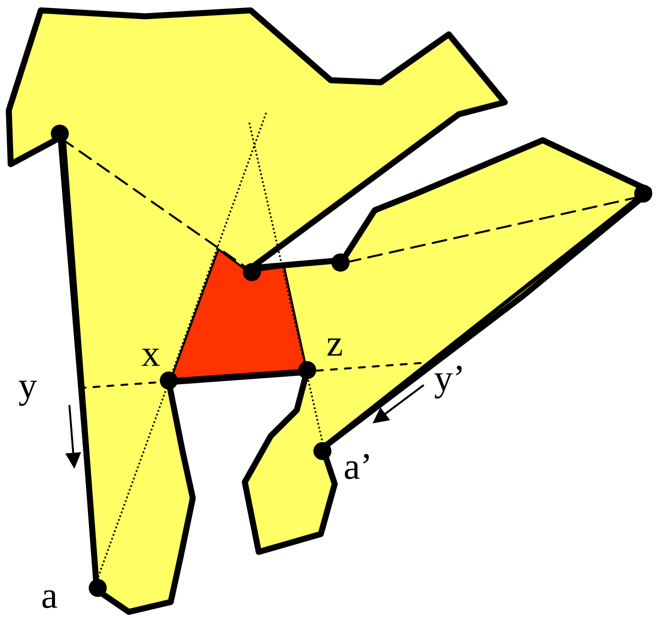
BUENA ILUMINACIÓN en polígonos

- 3-Buena iluminación, un foco en cada vértice. ACH, 2005

Eliminar las zonas no 3-bien iluminadas $O(n^2)$

Zonas tipo III





BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

- Abellanas, Bajuelos, Hernández, Matos, 2005

Un conjunto de focos S, con alcance limitado

Problemas

(1) Dado un punto P, ¿cuál es el mínimo alcance necesario para 1-bien iluminar P?, ¿cuál es el triángulo correspondiente a ese mínimo? $O(n\log n)$

(2) Dado un segmento r, ¿cuáles son los triángulos mínimos que 1-bien iluminan r? $O(n^3 \log n)$

BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

- Abellanas, Bajuelos, Hernández, Matos, 2005

Un conjunto de focos S, con alcance limitado.

Un nuevo Diagrama de Voronoi **TGVD**

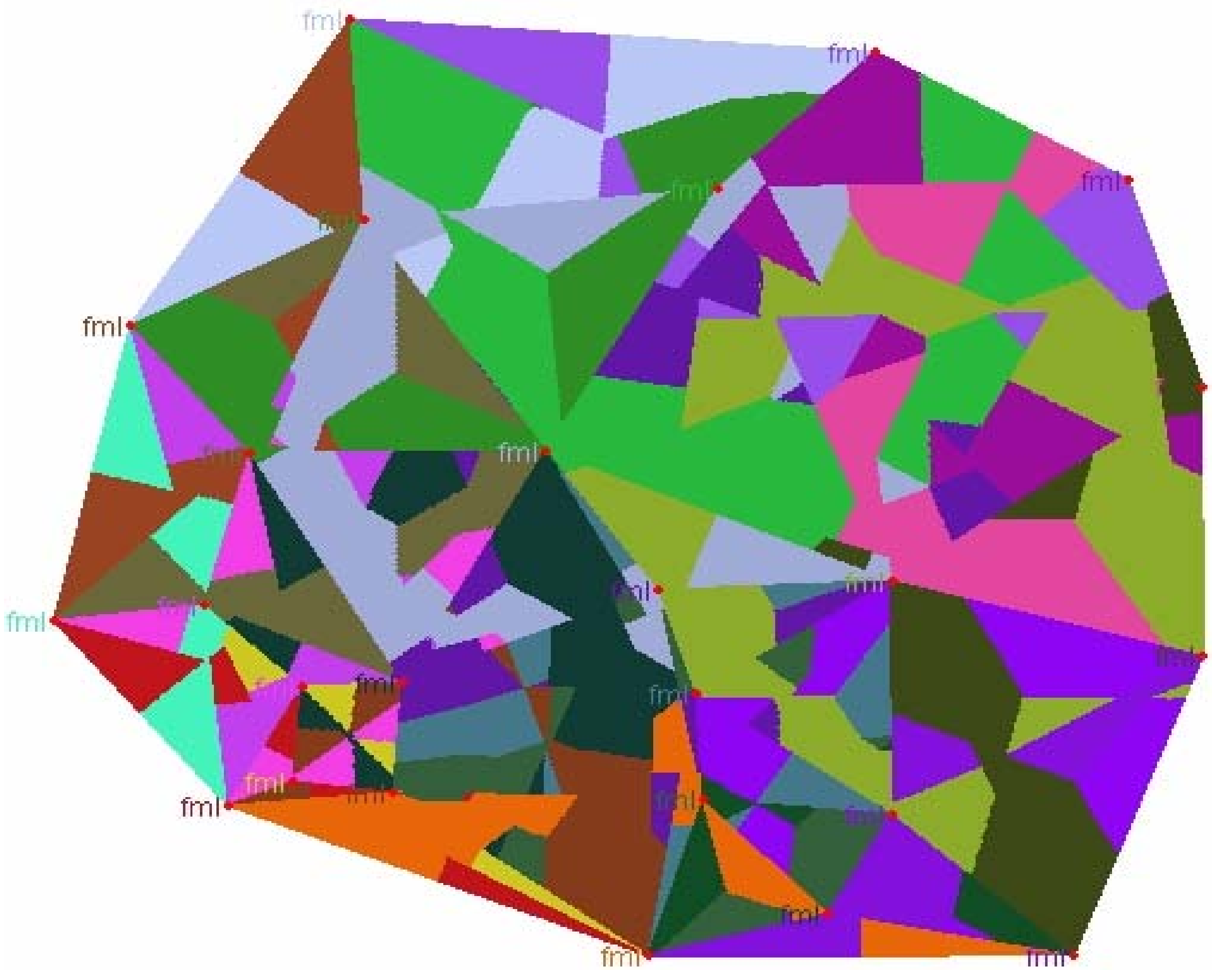
Un punto P pertenece a la región del foco f si, en el triángulo mínimo que 1-bien ilumina P, el foco f es el vértice más lejano del punto P

Propiedades

• Complejidad combinatoria cuadrática
• Regiones no conexas y no convexas
• Una región puede tener O(n) componentes

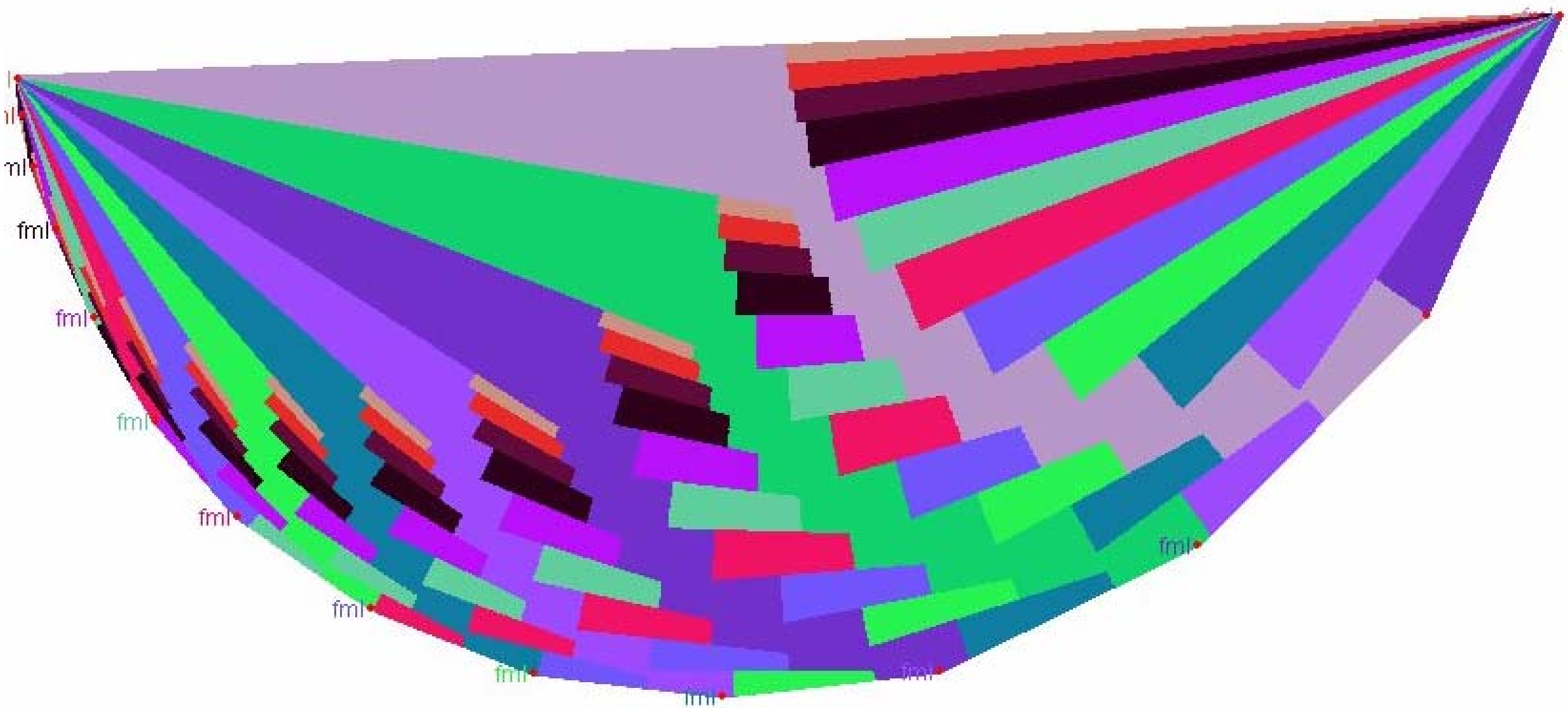
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

- TGVD



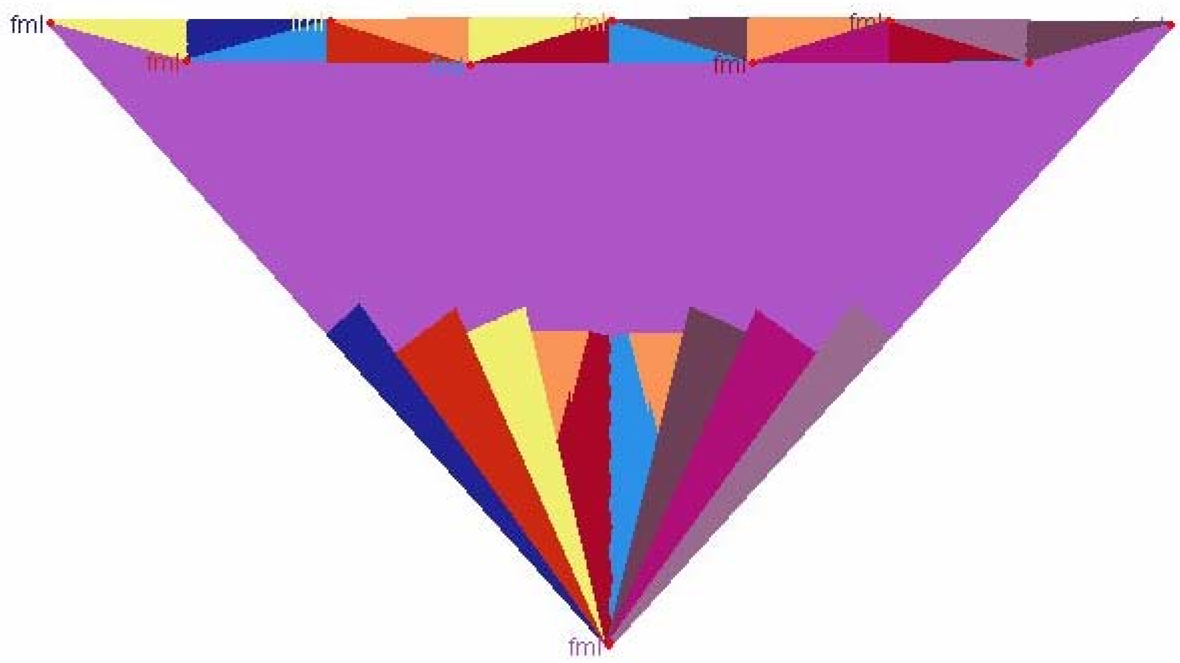
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

- TGVD



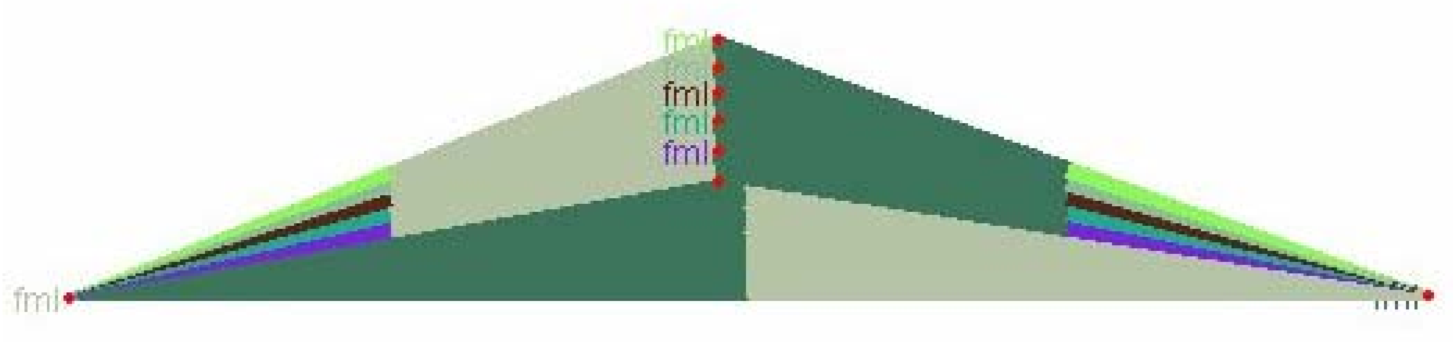
BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

- TGVD



BUENA ILUMINACIÓN + ALCANCE LIMITADO

- TGVD



Las demostraciones del Teorema de Galerías de Arte

- V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combin. Theory Ser. B 18, 39-41, 1975
- S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combin. Theory Ser. B 24, 374, 1978

REFERENCIAS BÁSICAS

- J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, Handbook on Computational Geometry, (J.-R. Sack, J. Urrutia, ed.) Elsevier, 2000
- J. O'Rourke, *Art Gallery, Theorems and Algorithms*, Oxford, 1987

Problemas abiertos

- The Open Problems Project (Demaine, Mitchell, O'Rourke) http://maven.smith.edu/~orourke/TOPP/

REFERENCIAS ADICIONALES

- [ABHM] M. Abellanas, A. Bajuelos, G. Hernández, I. Matos, *Good Illumination with Limited Visibility*, Actas XI EGC'05, Santander, 2005
- [ACH] M. Abellanas, S. Canales, G. Hernández, *Más resultados sobre buena iluminación*, Actas XI EGC'05, Santander, 2005
- [C] S. Canales, *Métodos heurísticos en problemas geométricos: Visibilidad, iluminación y vigilancia*, Tesis Doctoral, Madrid, 2004
- [E] S. Eidenbenz, (*In)-Aproximability of Visibility Problems on Polygons and Terrains*, Tesis Doctoral, ETH, Zürich, 2000
- [O´R] J. O´Rourke, *Open Problems in the Combinatorics of Visibility and Illumination*, Contemporary Mathematics, 2000
- [T] C. Tóth, *Planar subdivisions*, Tesis Doctoral, ETH, Zürich, 2002
- [T] C. Tóth, *Art gallery problem with guards whose range of vision is 180º*, Comput. Geom. Theory Appl. 17, 121-134, 2000
- [T] C. Tóth, *Allocating vertex π - guards in simple polygons via pseudo*triangulations, Discrete Comp. Geom., 33, 345-364, 2005

ARTÍCULOS CITADOS

- [AECSU] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, J. Urrutia, *Illumination with orthogonal floodlights*, Int. J. Comput. Geom. Appl., 8 (1), 1998
- [BGL+] P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine, J. Urrutia, *The floodlight problem*, Int. J. Comput. Geom. Appl. 7 153-163, 1997
- [ECOUX] V. Estivill-Castro, J. O´Rourke, J. Urrutia, D. Xu., *Illumination of polygons with vertex floodlights*, Inform. Process. Lett., 56(1), 9-13, 1995
- [CRU] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Urrutia, *Optimal floodlight illumination of stages*, Proc. 5 CCCG, pp. 393-398, 1993
- [CT] G. Csizmadia, G. Tóth, *Note on an art gallery problem* Computational Geometry 10, 47-55, 1998

ARTÍCULOS CITADOS

- [EU] V. Estivill-Castro, J. Urrutia, *Optimal floodlight illumination of orthogonal art galleries*, Proc. CCCG'94, pp. 81-86, 1994
- [H] F. Hofmann, *On the rectilinear Art Gallery Problem*, Proc. ICALP'90, LNCS 443, Springer, pp. 717-728, 1990
- [O] J. O´Rourke, *Vertex π-Lights for Monotone Mountains*, Proc. 9th Canad. Conf. Comput. Geom., 1-5, 1997
- [SS] W. Steiger, I. Streinu, *Illumination by floodlights* Computational Geometry 10, 57-70, 1998
- [T] C. Tóth, *Illuminating polygons with vertex π - floodlights*, Proc. Int. Conf. on Comput. Sci, LNCS, v. 2073, pp. 772-781, 2001
- [U] J. Urrutia, *Iluminando polígonos con reflectores*, Actas VI Encuentro de Geometría computacional, Barcelona, 1995