Universidad Politécnica
de Madrid

V Seminario de
Matemática Discreta

Universidad de Valladolid

POLIEDROS
Plegados y desarrollos

Gregorio Hernández Peñalver
UPM

Valladolid 7-6-2003

De la cartulina al poliedro ….
y del poliedro a la cartulina

Primero unas imágenes

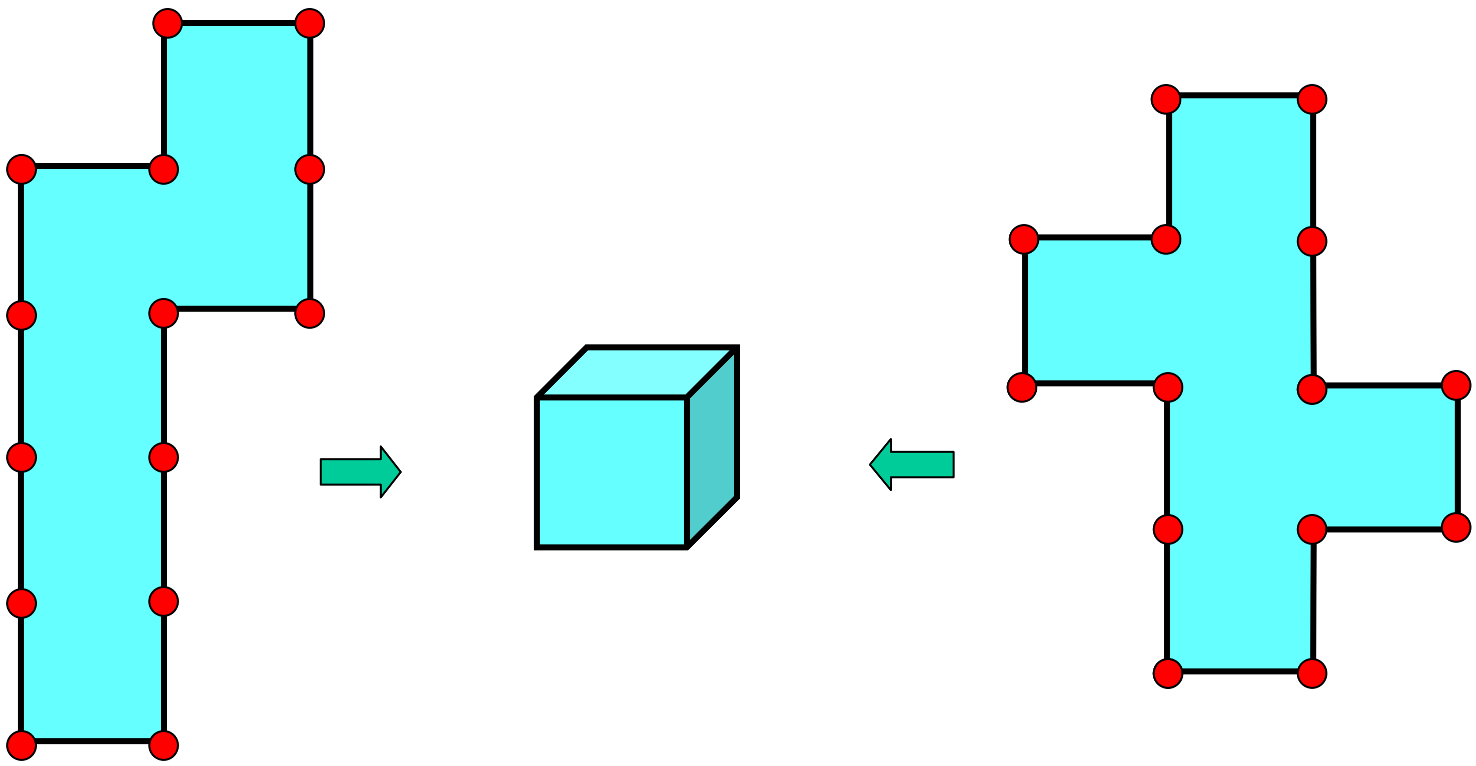
MetamorfosisCubo.mpg

Sumario

- De la cartulina al poliedro
  - Condiciones de plegado
  - Emparejamientos “legales”
- Del poliedro a la cartulina
  - Desarrollo por aristas
    - Poliedros convexos
    - Poliedros no convexos
  - Desarrollos verticiales

De la cartulina al poliedro

1.- Dado un polígono, ¿se puede plegar a un poliedro?



De la cartulina al poliedro

1.- Dado un polígono, ¿se puede plegar a un poliedro?

Teorema de Aleksandrov (1958)

Toda métrica poliédrica convexa puede realizarse como un poliedro convexo, de forma única salvo congruencias

Métrica poliédrica

- cada punto un entorno isomorfo a un disco abierto en R^2 o al ápice de un cono cuyo ángulo completo es menor que 2π (convexa)
- ángulo completo: suma de ángulos de caras incidentes

De la cartulina al poliedro

1.- Dado un polígono, ¿se puede plegar a un poliedro?

Teorema de Aleksandrov (1958)

Un polígono simple cuyas aristas se identifican de modo que:

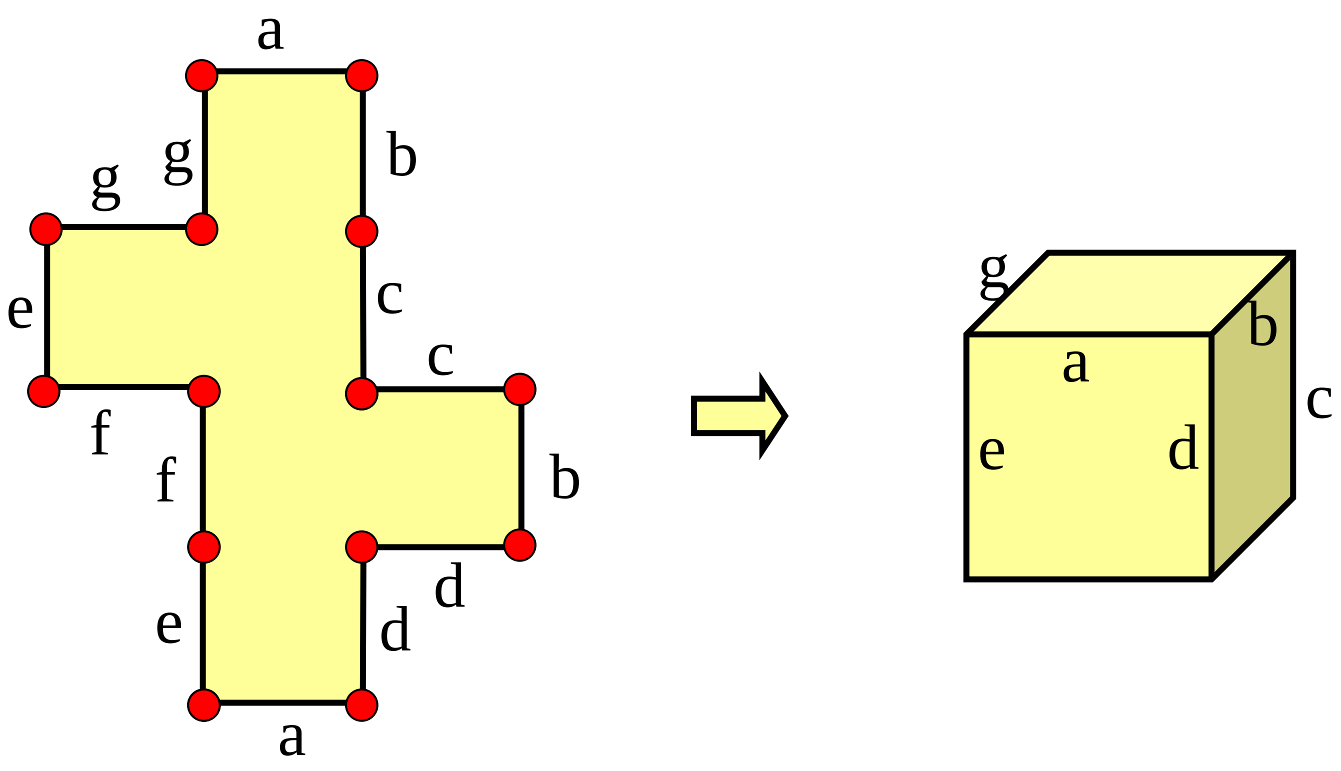
1. Cada arista se empareja con otra de igual longitud
2. La suma de los ángulos incidentes en cada vértice no es mayor que 2π (convexa)
3. La superficie resultante es homeomorfa a la esfera

define una métrica poliédrica (convexa)

Encontrar un emparejamiento "legal" (*net)* del borde del polígono

De la cartulina al poliedro

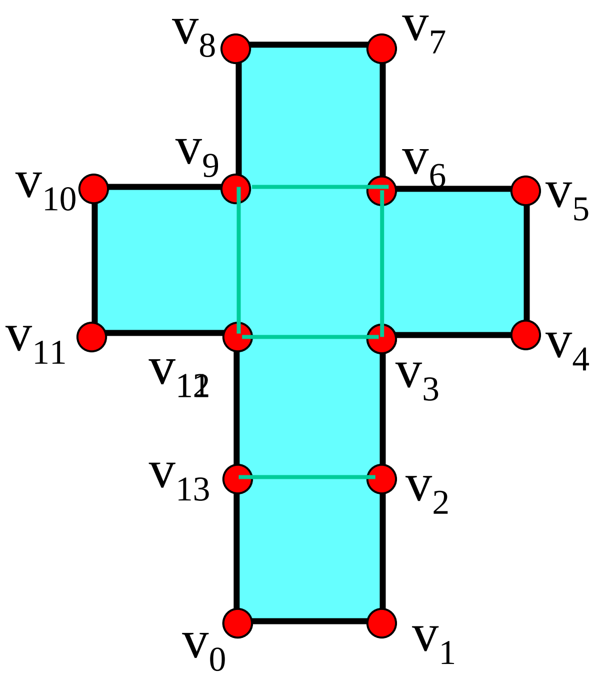
1.- Dado un polígono, ¿se puede plegar a un poliedro?

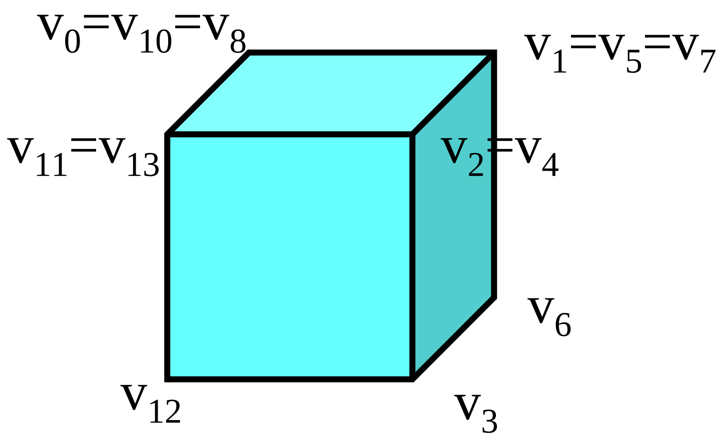


2.- ¿Hay un único emparejamiento “legal”?

Shepard (1975), un polígono con dos emparejamientos “legales”

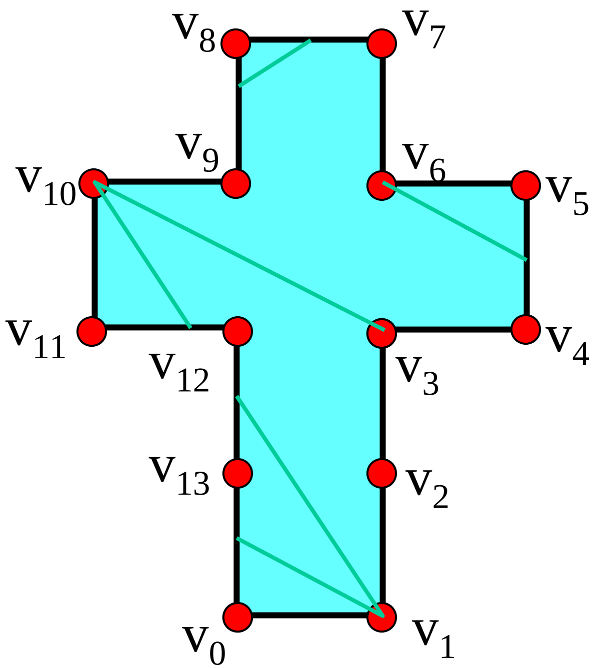
Lubiw, O’Rourke (1996), ¡5 emparejamientos “legales” de la cruz latina!

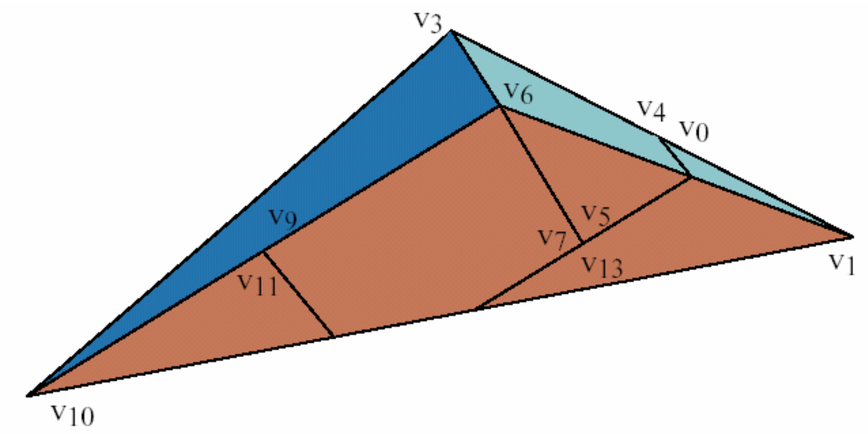




2.- ¿Hay un único emparejamiento “legal”?

Shepard (1975), un polígono con dos emparejamientos “legales”
Lubiw, O?Rourke (1996), ¡5 emparejamientos “legales” de la cruz latina!





3.- Problema de decisión

Dado un polígono P, ¿admite un emparejamiento legal”?

Lubiw, O’Rourke (1996)

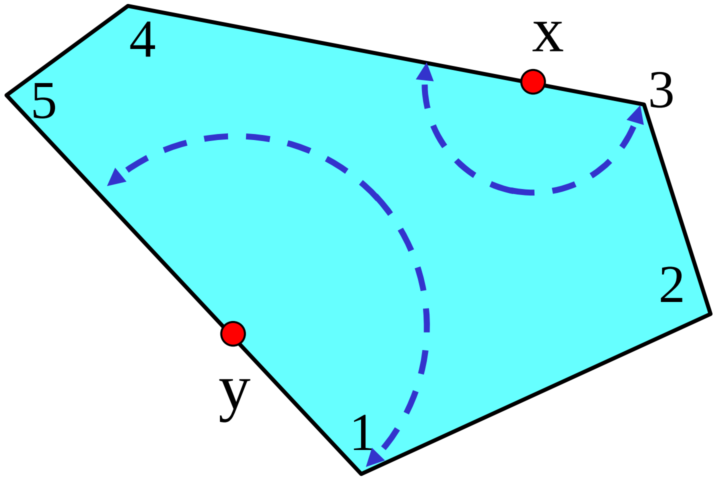
Algoritmo con programación dinámica, complejidad $O(n^2)$, que comprueba las condiciones de Aleksandrov, pegando arista con arista.
(suma de ángulos menor que 2π)

4.- Plegado de polígonos convexos

(DDLO, 00)

Todo polígono convexo se puede plegar a un politopo

Pegado semiperimetral

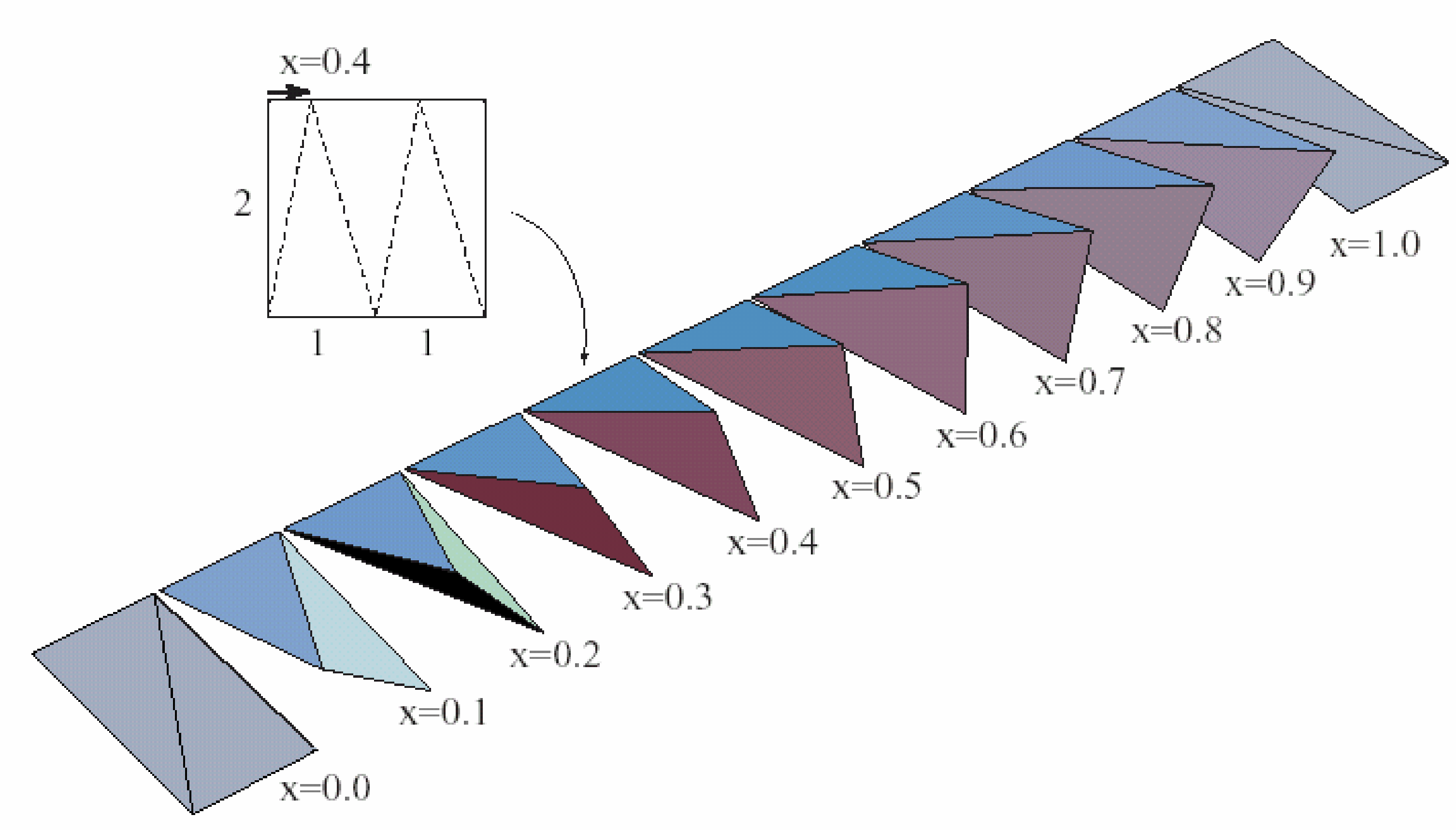


x punto de ∂P
y semiperimetral opuesto
$(x,y) \leftrightarrow (y,x)$

El pegado es legal:
- aristas iguales
- ángulo 2π en no vértices
- ángulo $< 2\pi$ en vértices
- homeomorfo a esfera

4.- Plegado de polígonos convexos (DDLO, 00)

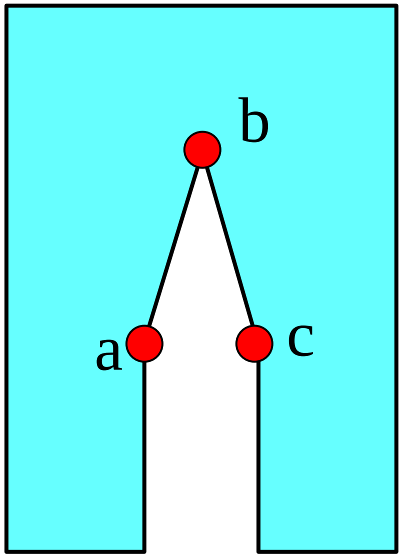
Todo polígono convexo se pliega a una cantidad no numerable de politopos no congruentes



5.- Polígonos no plegables

(DDLO, 00)

Existen polígonos no plegables a ningún poliedro convexo



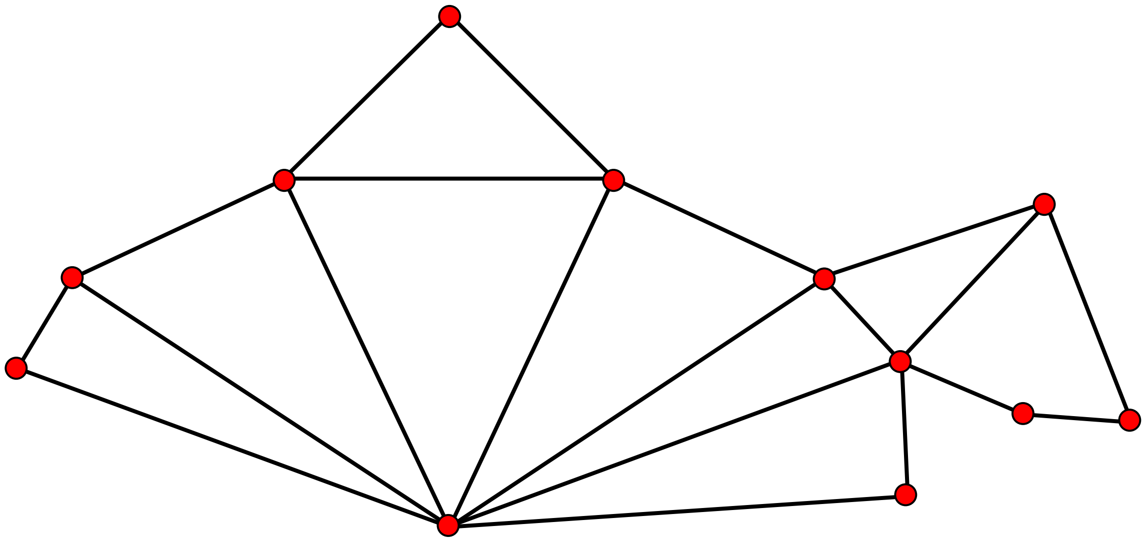
a, b, c vértices cóncavos

$$\left.\begin{array}{l}\text{- pegar a con c}\\ \text{- pegar b con un convexo}\end{array}\right\}\ \text{ángulo} > 2\pi$$

La probabilidad de que un polígono aleatorio pueda plegarse a un poliedro convexo tiende a 0 cuando $n \to \infty$

6.- Desarrollos ambiguos

Existen polígonos con dobleces ambiguos (Rote, 97)



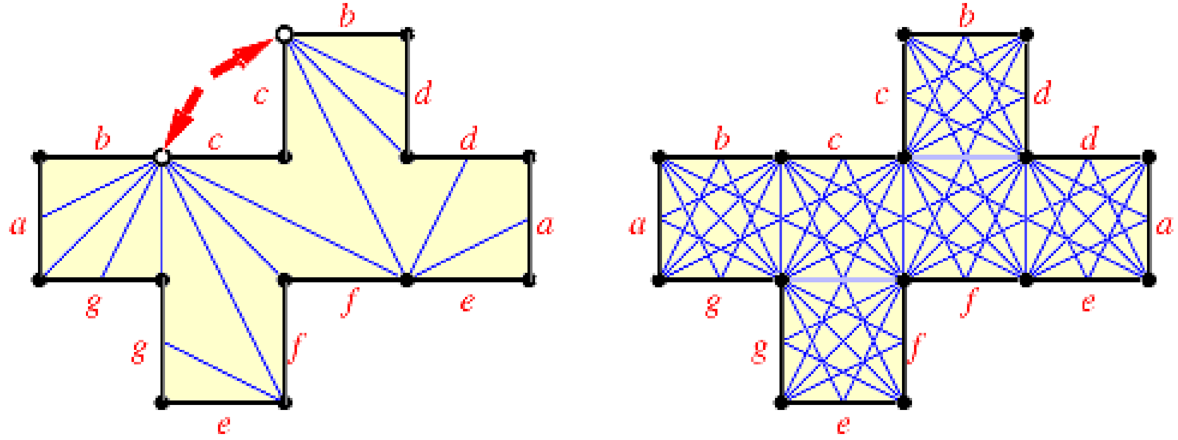
Se pueden construir dos poliedros convexos combinatoriamente distintos desde este desarrollo, respetando las mismas dobleces

7.- Problema de construcción

Dado un emparejamiento legal, construir el único poliedro convexo

(a) ¿Cuáles son las aristas del poliedro? (Dobleces en el polígono)
(b) Construcción del poliedro

(a) Los dobleces forman parte de los caminos mínimos (Aronov, O'Rourke) arreglo de segmentos con $O(n^5)$ vértices



No se conoce algoritmo para aislar los dobleces

7.- Problema de construcción

Dado un emparejamiento legal, construir el único poliedro convexo

(a) ¿Cuáles son las aristas del poliedro? (Dobleces en el polígono)
(b) Construcción del poliedro

(b) Los dobleces determinan las caras del poliedro y sus adyacencias

Teorema de rigidez de Cauchy
Los poliedros convexos con las mismas caras y combinatoriamente equivalentes son congruentes

Este teorema garantiza la unicidad y el de Aleksandrov la existencia del poliedro

O'Rourke, 2000, aproximación numérica para pocos vértices
¿algoritmo combinatorio?

7.- Problema de construcción

Más cuestiones abiertas

Dado un conjunto de polígonos convexos, sin información de adyacencias,

a) ¿se pueden ensamblar en un poliedro convexo?
b) ¿el poliedro es único?
c) si existe, ¿cómo construirlo?

La conjetura es que son problemas NP-duros

Del poliedro a la cartulina

1.- ¿Todo poliedro convexo puede cortarse a lo largo de algunas aristas y desarrollarse a un polígono simple y plano sin solapamientos?

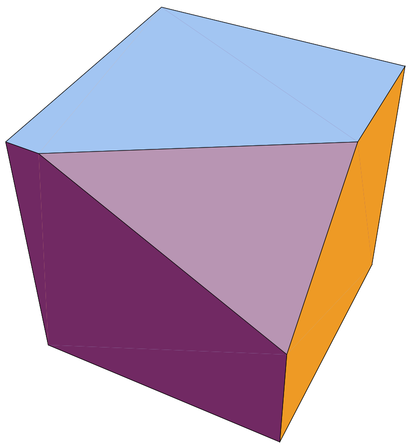
Shepard (1975), Durero (~1500)

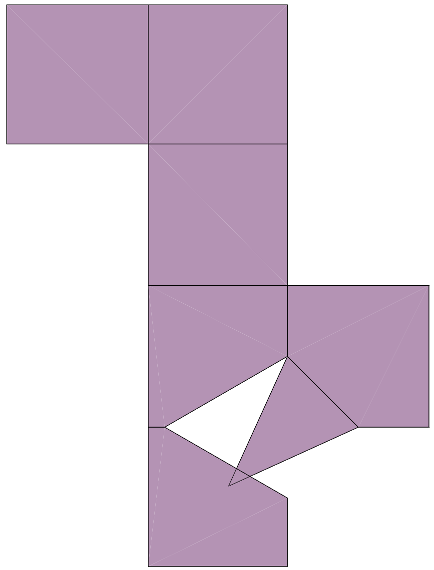
Interés en aplicaciones industriales

Wang (1997), Gupta (1998)

PROBLEMA ABIERTO

Un desarrollo con solapamiento





Programas basados en heurísticas

UnfoldPolytope (Mathematica, Namiki y Fukuda)
HyperGami (Macintosh, también no convexos)
Touch-3D (comercial) (usa piezas múltiples)

Explorando "a mano", la mayoría de los cortes conducen a desarrollos que no se solapan, pero ...

El 99% de los desarrollos de un poliedro, n>70, se solapan

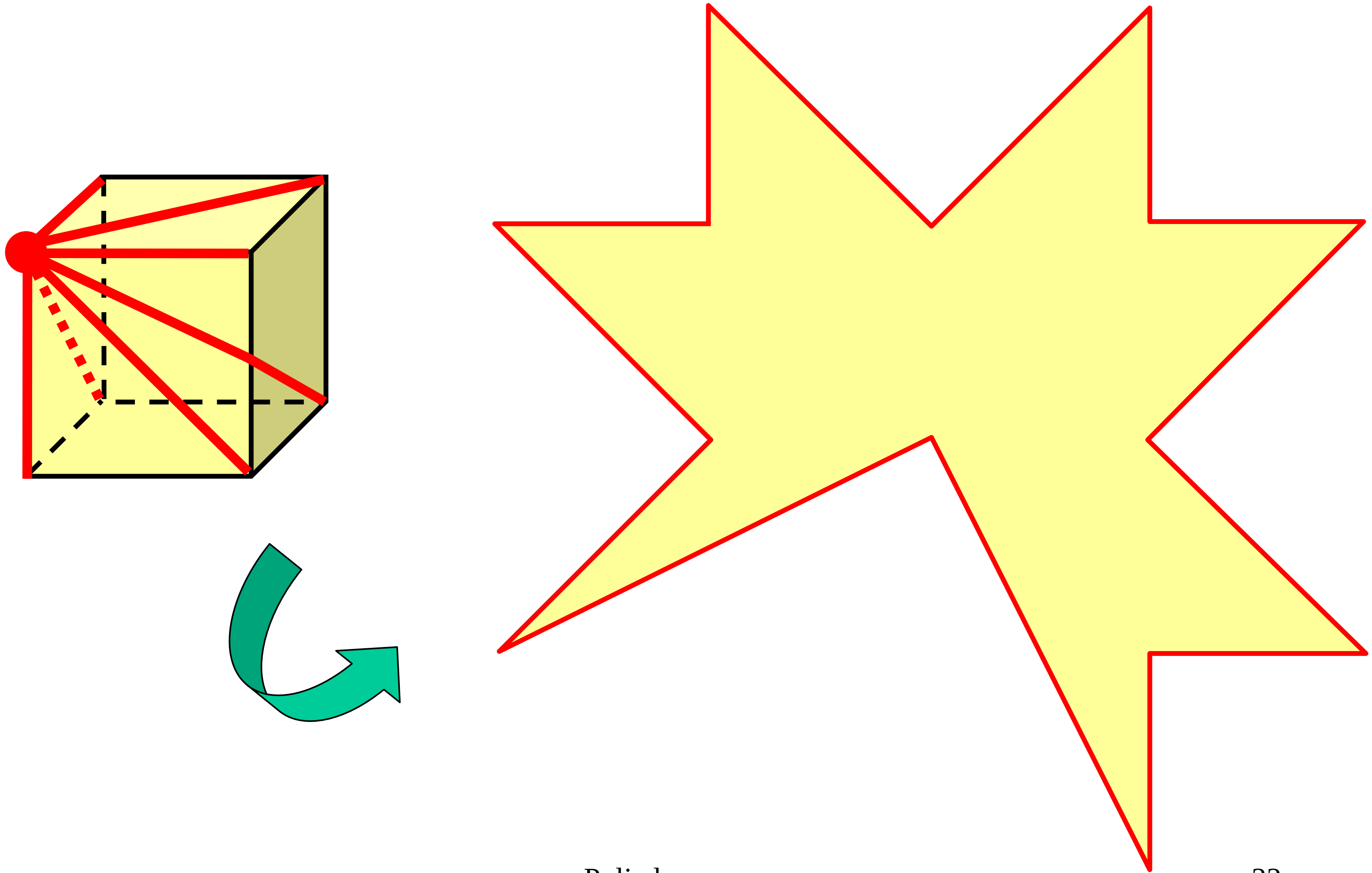
2.- ¿Y si permitimos cortes a lo largo de las caras?

La respuesta entonces es afirmativa

- desarrollo en estrella (AAOS, 1997)
  se corta desde un punto genérico x a lo largo de los caminos mínimos desde x a los vértices del poliedro

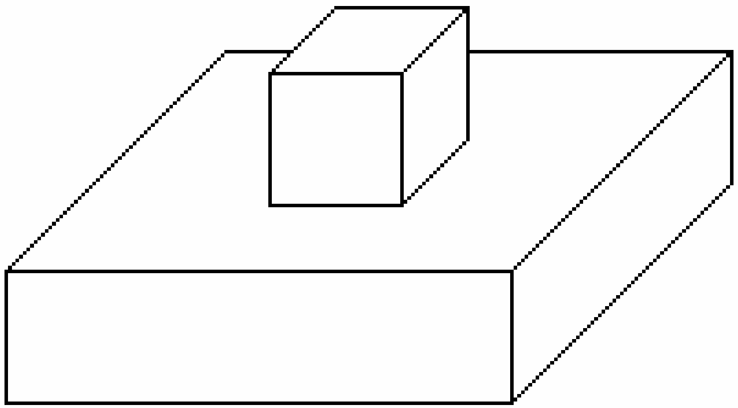
- desarrollo en fuente (MMP, 1987)
  se corta a lo largo de los puntos con más de un camino mínimo al punto fuente

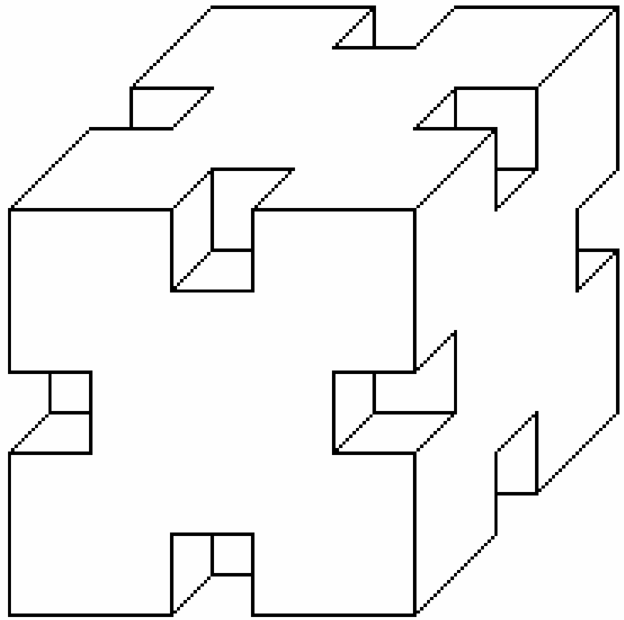
2.- Desarrollo en estrella de un cubo



3.- ¿Y si el poliedro no es convexo?

Hay poliedros que no se pueden desarrollar mediante cortes en las aristas





Estos ejemplos NO son topológicamente convexos

Q es topológicamente convexo si su grafo es isomorfo al de un poliedro convexo

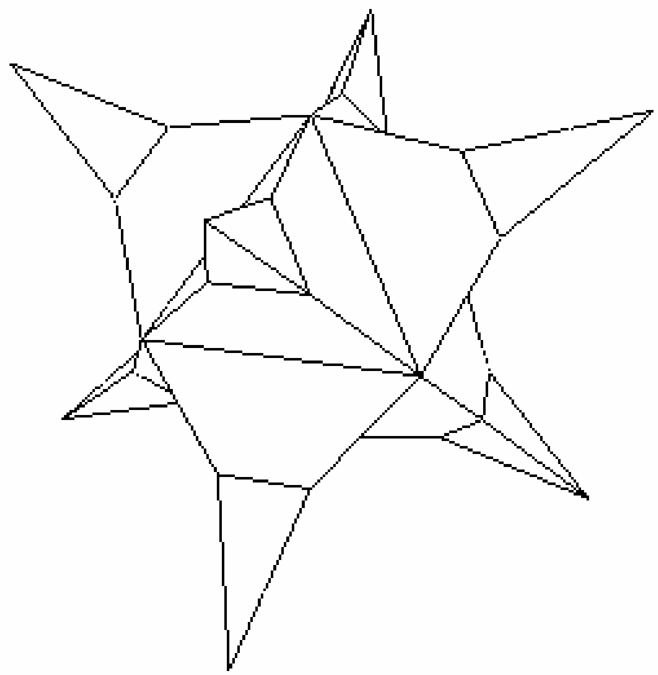
Teorema de Steinitz

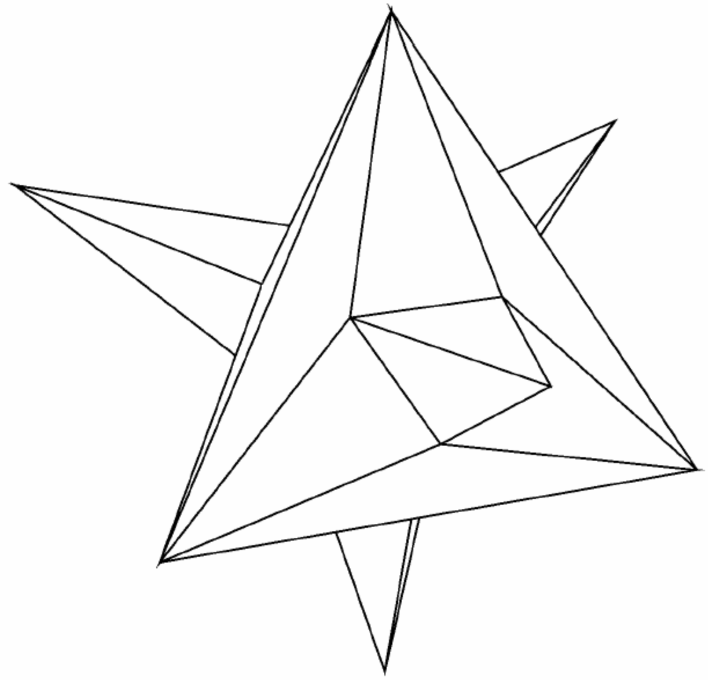
Q es topológicamente convexo si su grafo es 3-conexo y planar

En esta clase están incluidos los poliedros con caras convexas y homeomorfas a discos.

4.- ¿ Todo poliedro topológicamente convexo se puede desarrollar mediante cortes en las aristas?

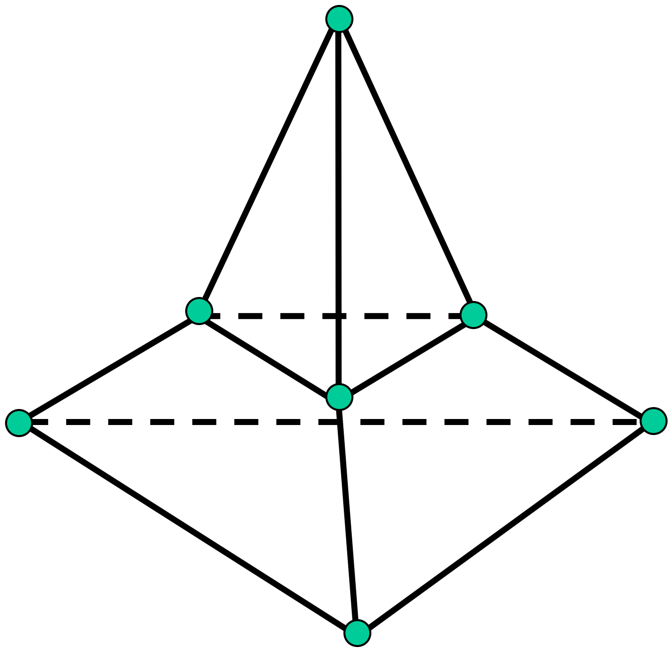
La respuesta es NO Bern, Demaine, Eppstein, Kuo (1999)

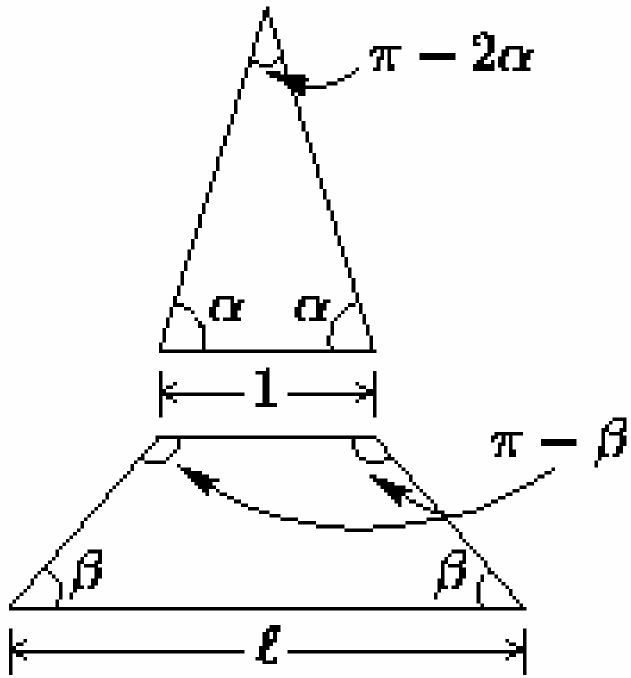




Incluso con todas las caras triangulares

El sombrero de la bruja





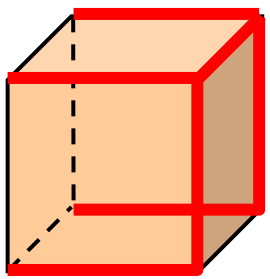
$30º \leq \alpha, \beta < 90º$

α, β cumplen que $2\alpha+2(\pi-\beta)>2\pi$, o sea, $\alpha>\beta$

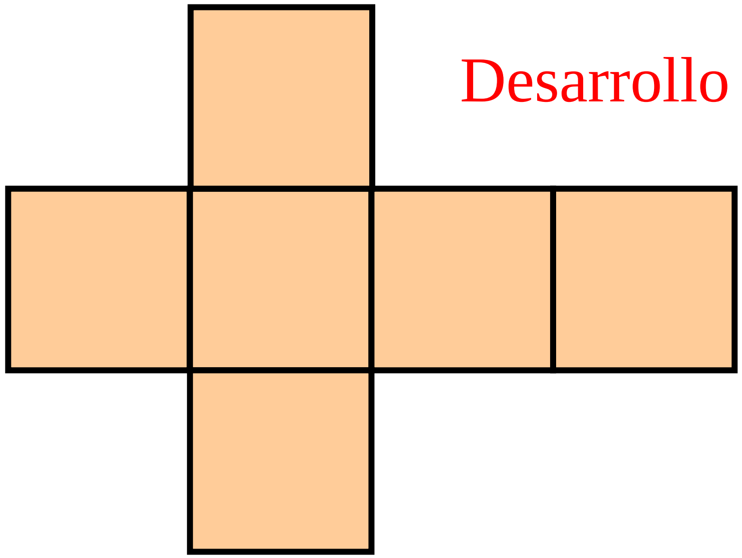
Desarrollo de un poliedro

- Corte C de un poliedro Q
  Unión de cadenas poligonales sobre Q, tales que cortando a lo largo de C resulta una superficie conexa Q–C, isométrica al plano y sin solapamientos.

- La forma plana se llama un desarrollo de Q



C

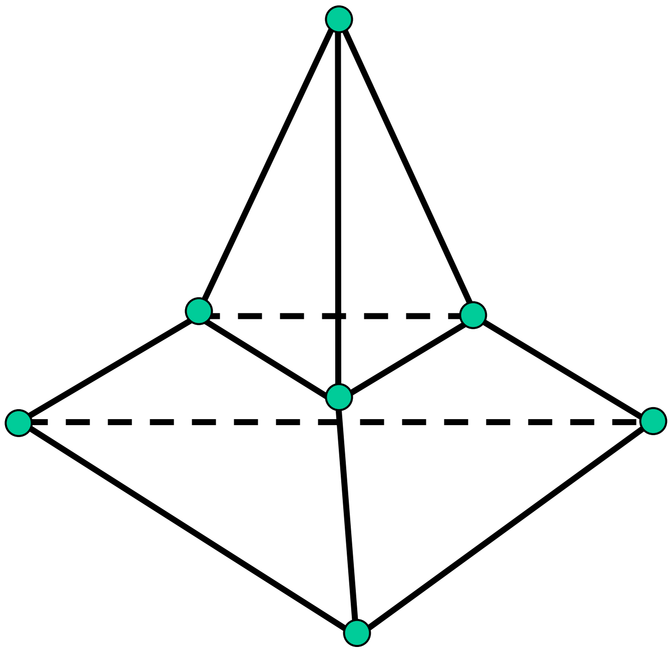


Desarrollo por aristas

Desarrollo de un poliedro

- Curvatura de un vértice 2π – (suma ángulos de las caras)

Si v curvatura positiva, se requiere un corte para desarrollar
Si v curvatura negativa, se requieren dos cortes, al menos, para aplanar



Lema 1

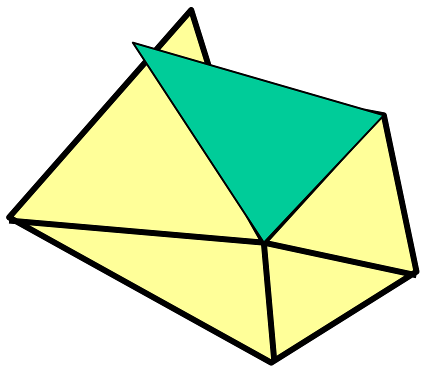
Todo corte de un poliedro es acíclico y alcanza los vértices de curvatura no nula

Si hubiera un ciclo el desarrollo tendría más de una pieza
El entorno de un vértice no alcanzado no se puede aplanar

Lema 2

Todo corte de un poliedro contiene más de un segmento incidente en cada vértice de curvatura negativa

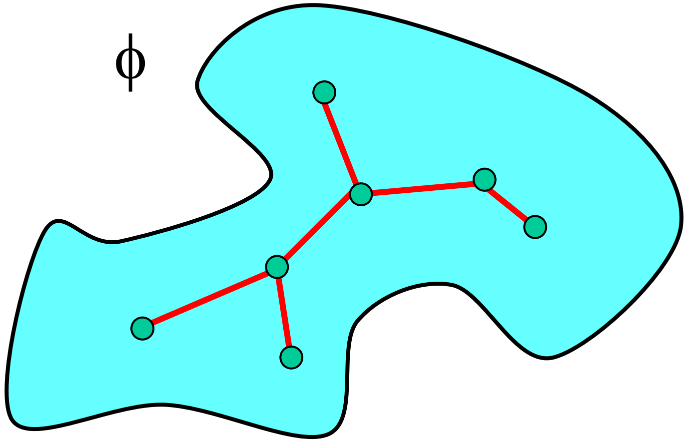
No se podría aplanar en otro caso



Lema 3

Todo corte de un poliedro convexo es un árbol

Supongamos que el corte C es un bosque no conexo



Existe un camino cerrado ϕ en Q, que evita los cortes y encierra una componente conexa de C

Teorema de Gauss-Bonnet en Q

$k(\phi) + \tau = 2\pi$

$k(\phi)$ es la curvatura encerrada por ϕ

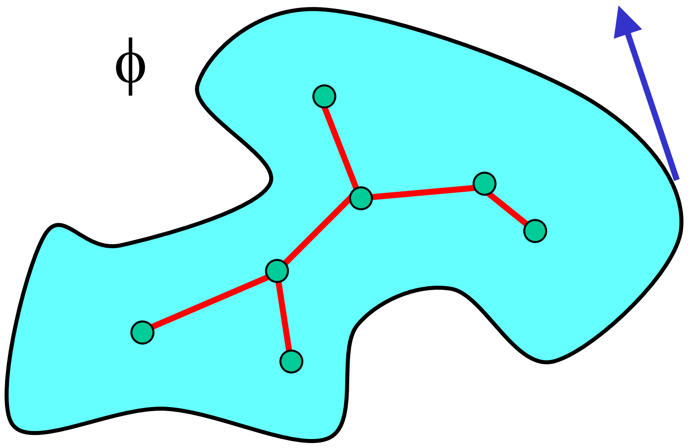
$k(\phi) \geq 0$ por convexidad

$k(\phi) > 0$ porque hay algún vértice

Lema 3

Todo corte de un poliedro convexo es un árbol

Supongamos que el corte C es un bosque no conexo



Existe un camino cerrado ϕ en Q, que evita los cortes y encierra una componente conexa de C

Teorema de Gauss-Bonnet en Q

$k(\phi) + \tau = 2\pi$

τ es el ángulo de giro total a lo largo del camino ϕ

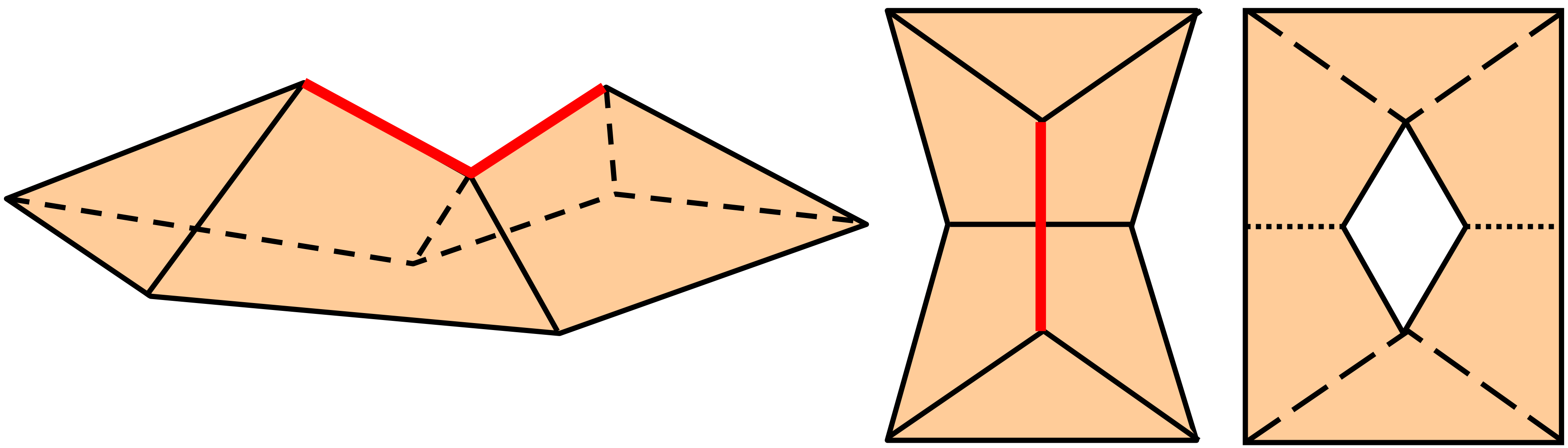
$\tau = 2\pi$

CONTRADICCIÓN

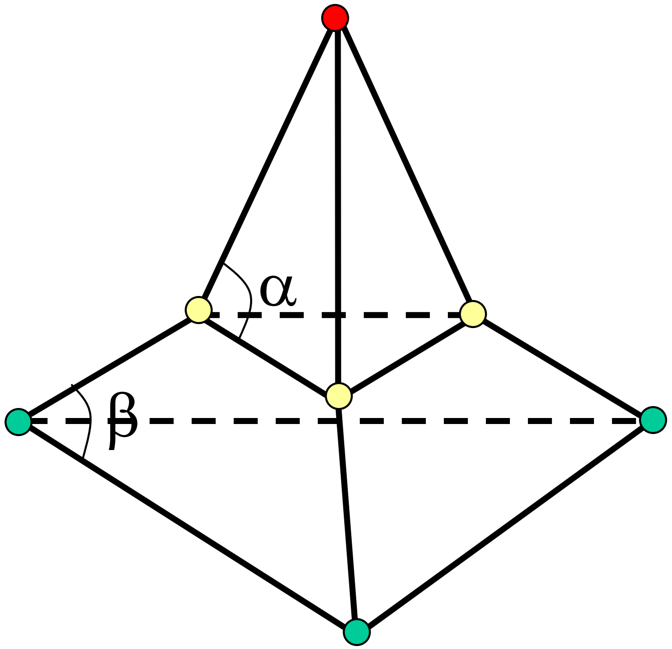
Lema 3

Todo corte de un poliedro convexo es un árbol

Si el poliedro no es convexo, un corte puede originar que el desarrollo no sea un polígono simple



El sombrero de la bruja



Sombrero ABIERTO

Si $\alpha > \beta \Rightarrow 2\alpha + 2(\pi - \beta) > 2\pi$

los vértices ○ curvatura negativa

○ vértices medios

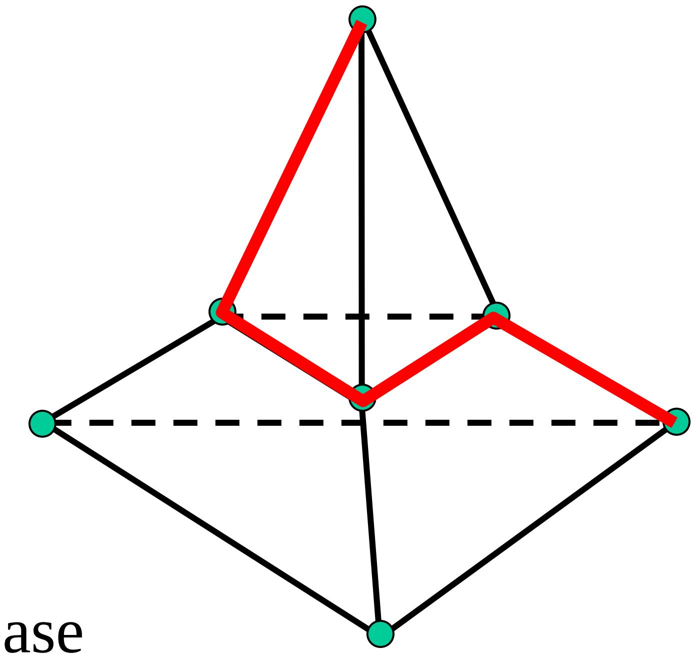
● vértice punta

El sombrero de la bruja

Lema 4

Un sombrero H (α,β,l) *con* $\alpha>\beta$*, admite a lo más un desarrollo por aristas (salvo simetría)*

Sea C un corte de H. C es un bosque que pasa por la punta y los medios. Los medios no son hojas de C, luego en C hay un vértice de la base. Y sólo uno para no desconectar. Así las hojas de C son la punta y un vértice de la base.



El corte es un camino de la punta a la base

El sombrero de la bruja

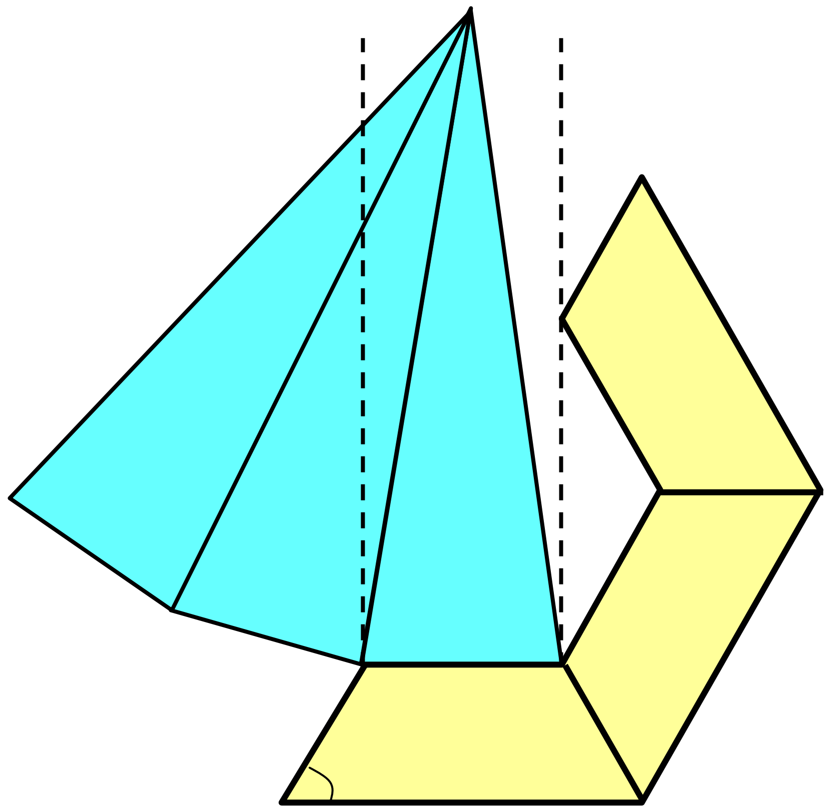
Lema 5

Si $\beta \geq 60^o$ *entonces el sombrero H* (α,β,l) *es desarrollable por aristas para cualquier valor de* α *y de* l.

Si $\beta < 60^o$ *entonces el sombrero H* (α,β,l) *no es desarrollable por aristas para un valor de* α *suficientemente grande y cualquier valor de* l

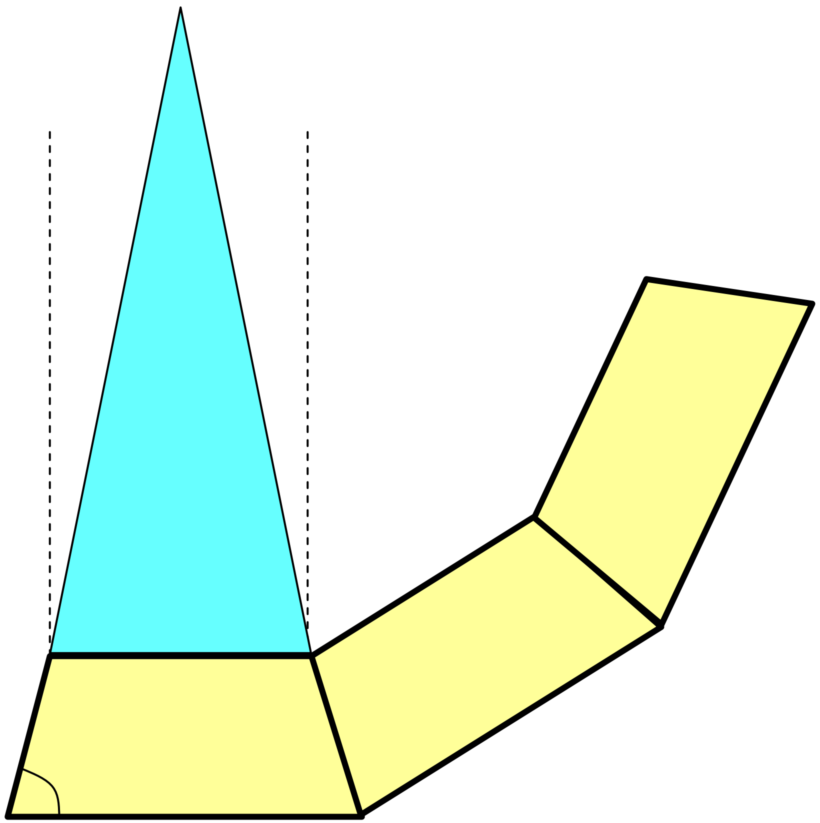
El sombrero de la bruja

Caso $\beta = 60^o$



El sombrero de la bruja

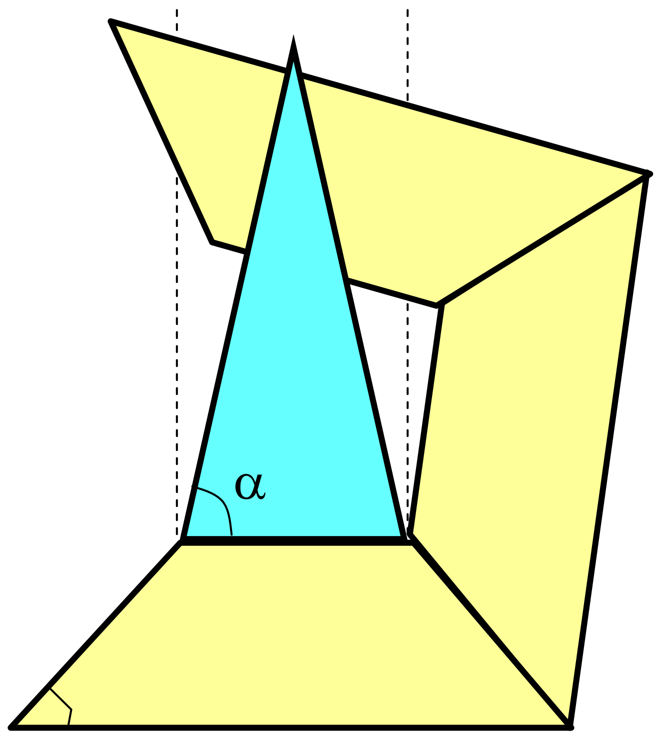
Caso $\beta > 60^{o}$



El sombrero de la bruja

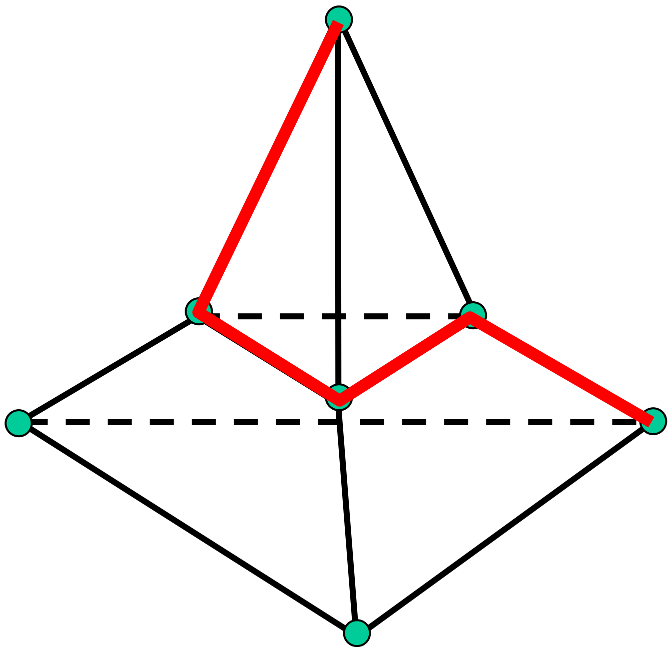
Caso $\beta < 60^{o}$

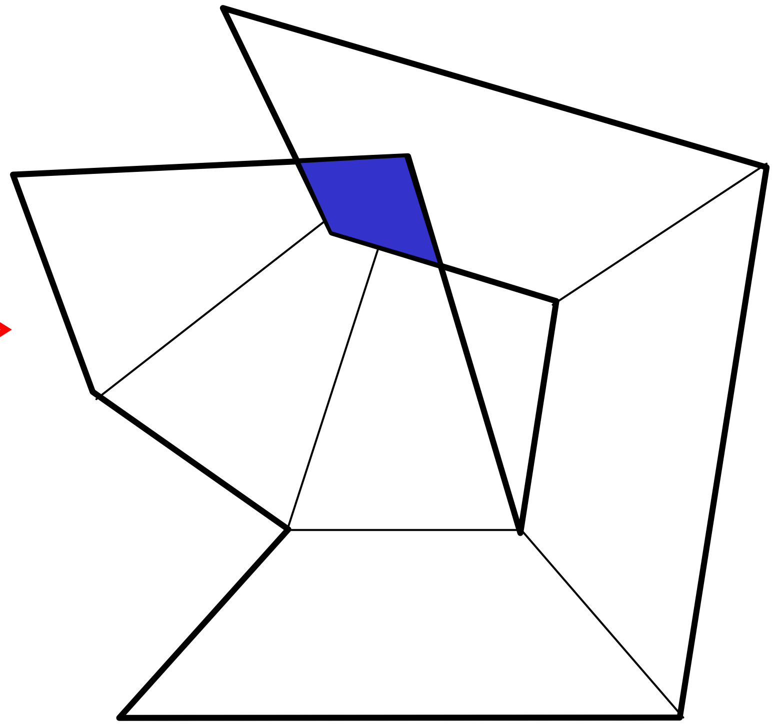
si α es suficientemente grande



SOLAPAMIENTO!!

El sombrero de la bruja





SOLAPAMIENTO!!

Poliedro de caras convexas sin desarrollo por aristas

Teorema

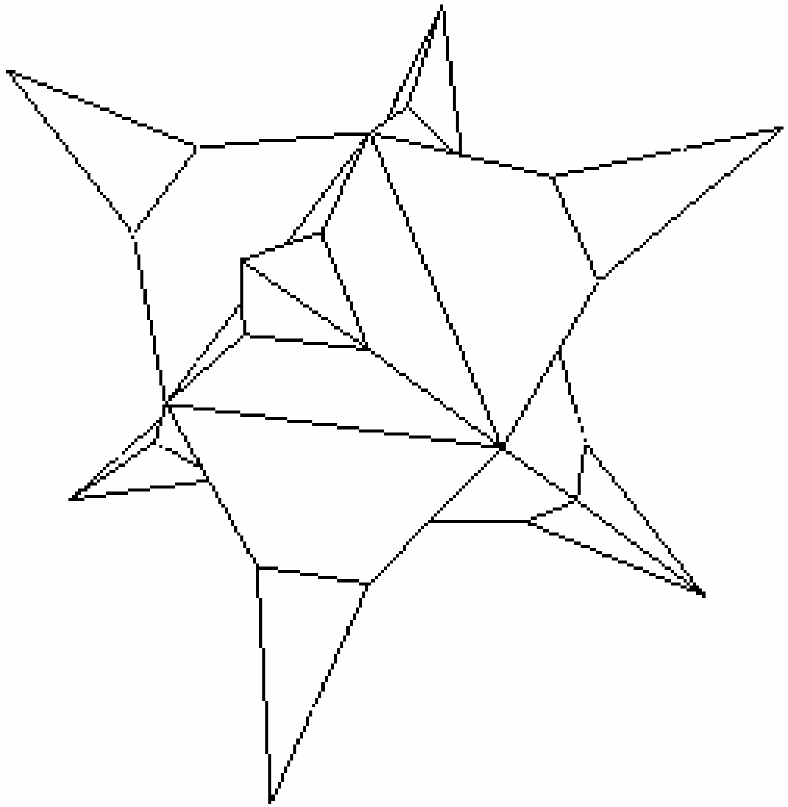
Si se coloca un sombrero H(α,β,*l*) *en cada cara de un octaedro regular, con las condiciones*

$\pi/4 < \beta < \pi/3$,

$l > 2$,

α *suf. grande,*

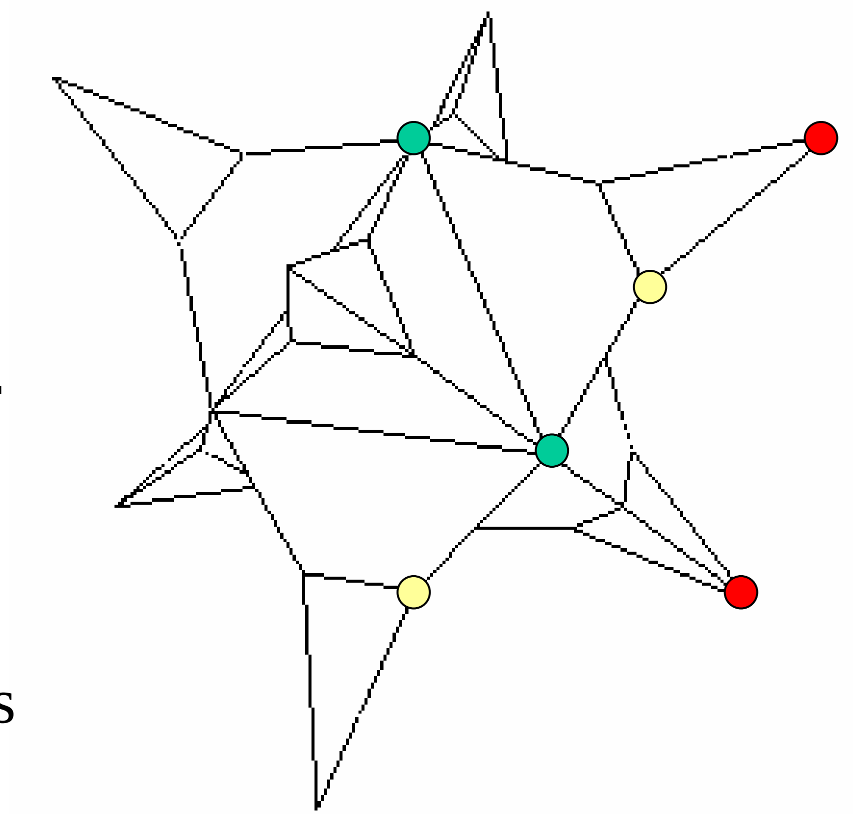
el poliedro así construido, no admite desarrollo por aristas



Poliedro de caras convexas sin desarrollo por aristas

Curvatura de los vértices

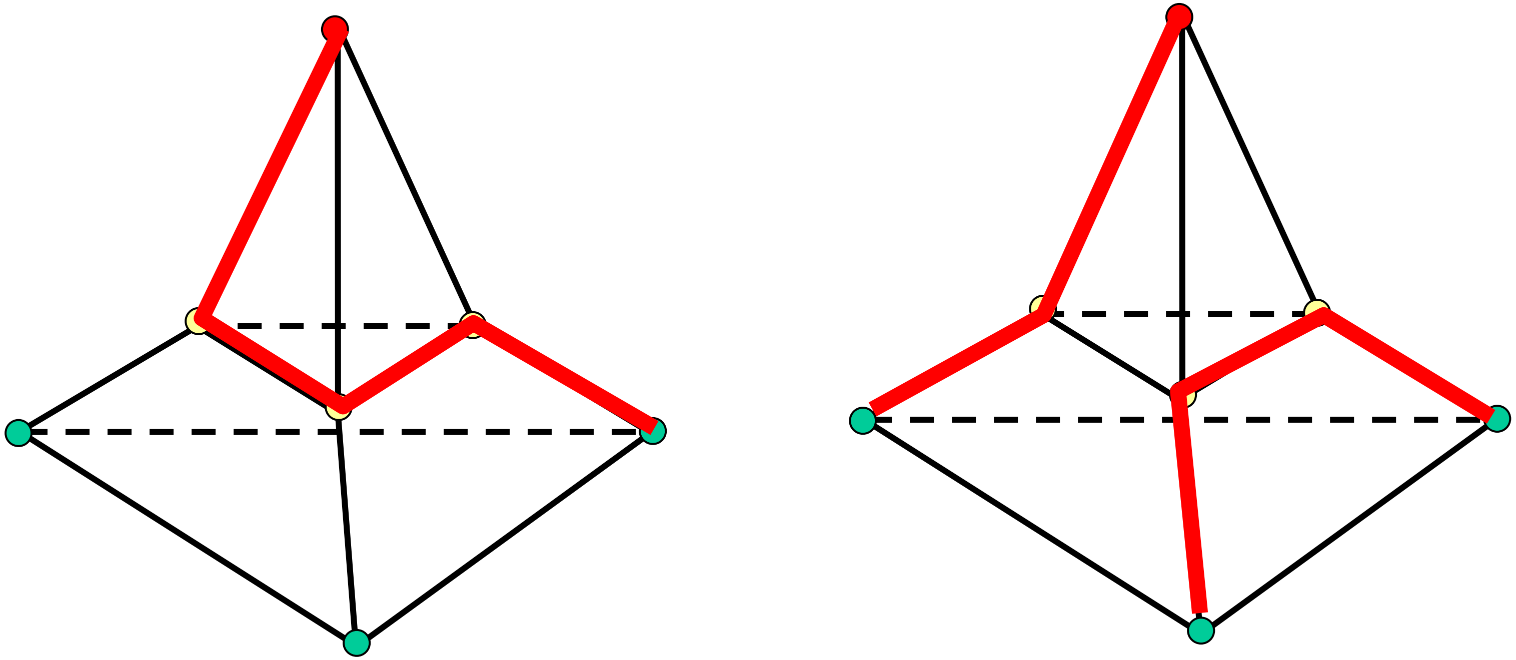
- negativa en ○ por $\alpha > \beta$
- negativa en ○ por $\beta > 45^{o}$
- positiva en ○



Un corte C es un bosque generador
h hojas de C, sólo en las puntas
C tiene a lo más h -2 vértices de grado >2
existen dos sombreros cuyas puntas son hojas y cuyos vértices medios son de grado 2

Poliedro de caras convexas sin desarrollo por aristas

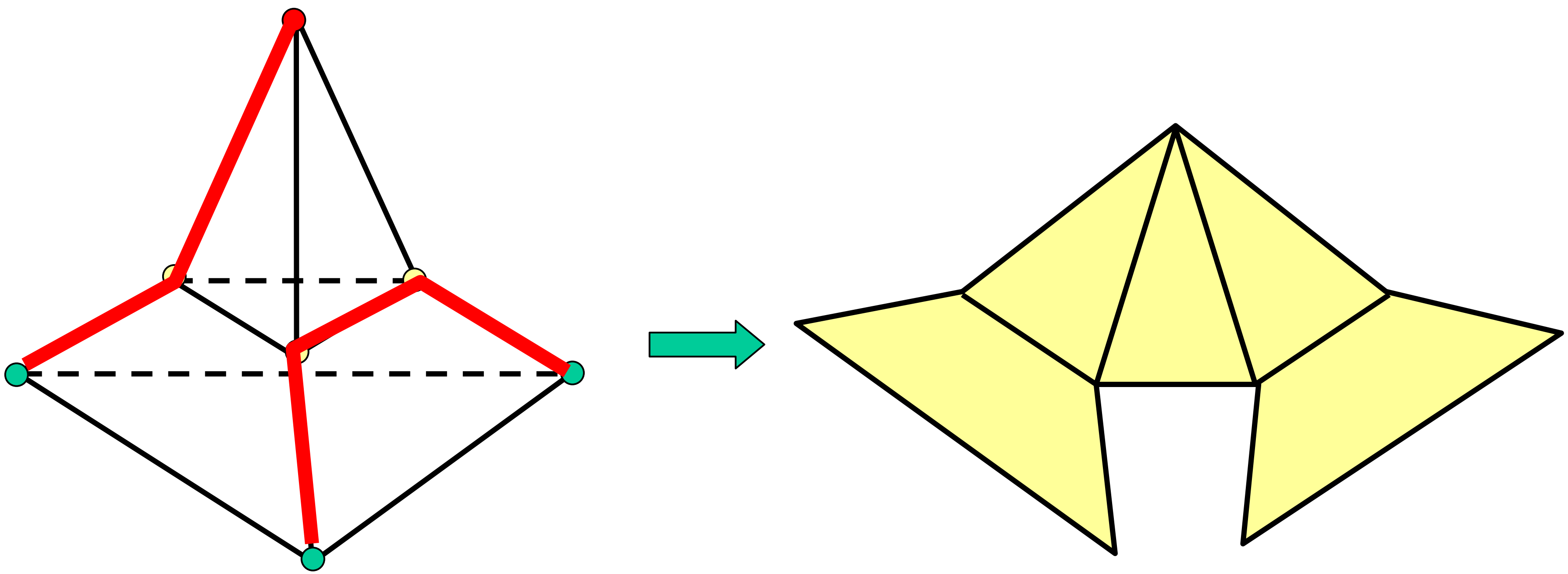
Sólo hay dos posibles desarrollos para esos sombreros



Solapamiento por $\beta < 60^{\circ}$

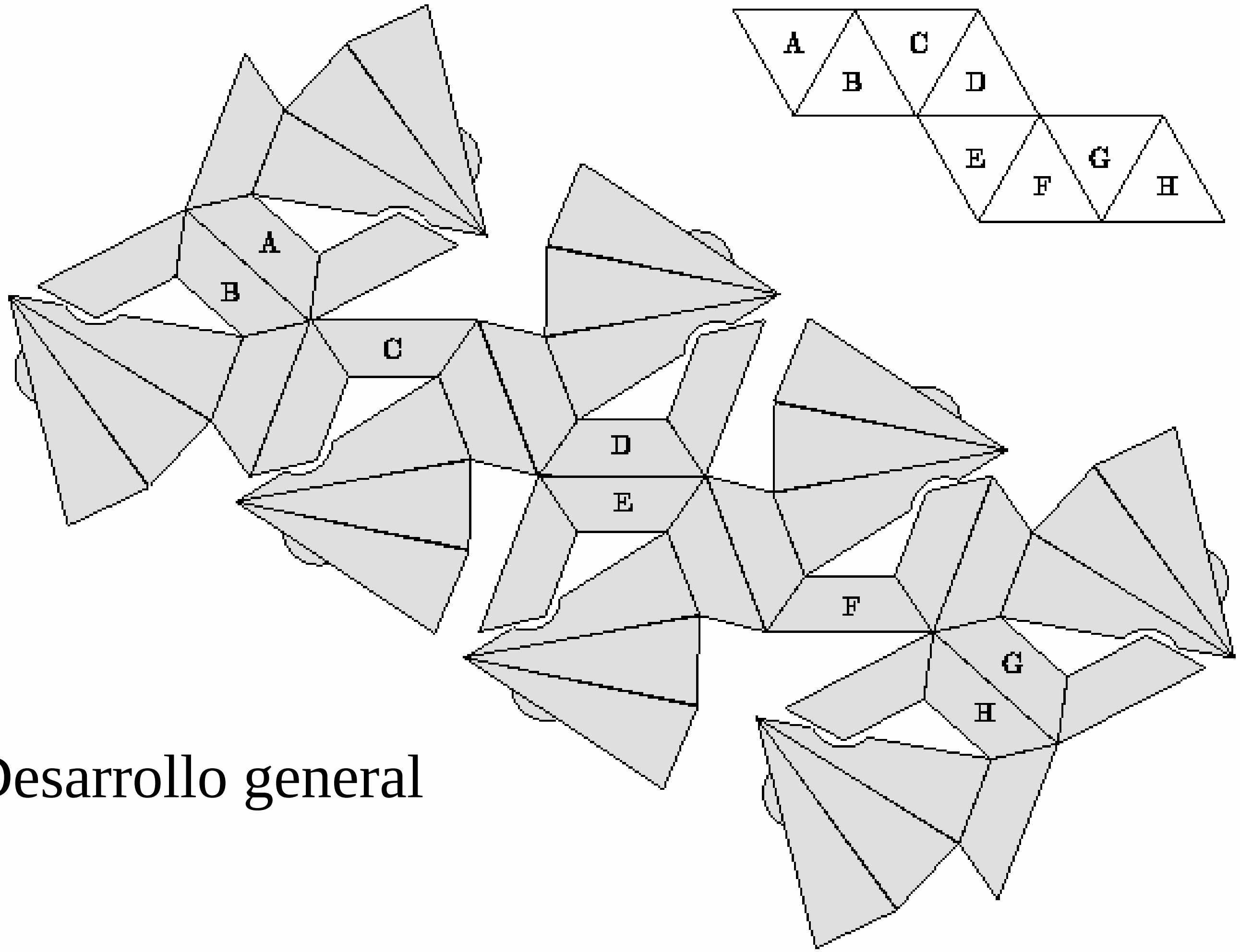
Poliedro de caras convexas sin desarrollo por aristas

Sólo hay dos posibles desarrollos para esos sombreros



Si α se acerca a 90º, los trapecios se solapan

Poliedro de caras convexas sin desarrollo por aristas

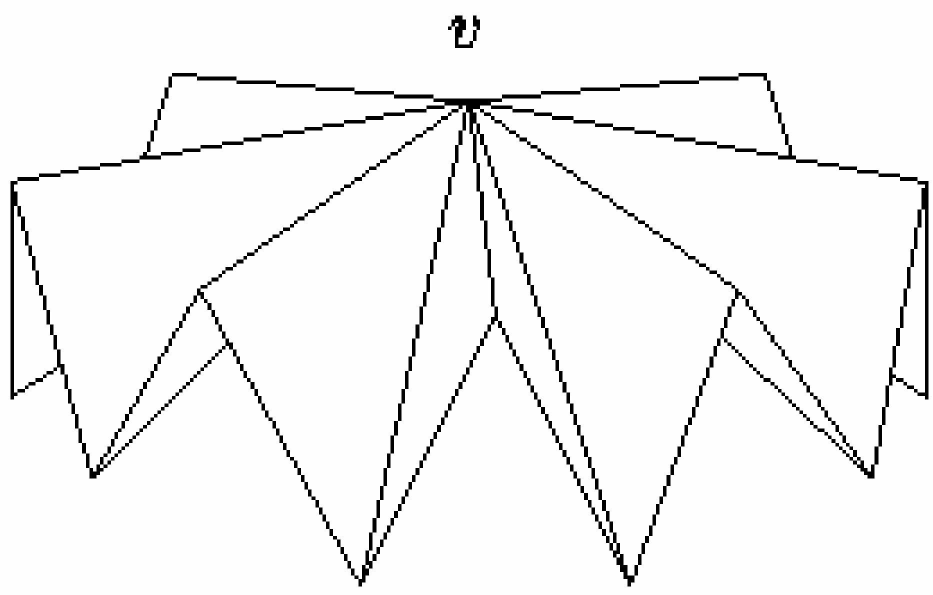


Desarrollo general

Poliedro (abierto) sin desarrollo

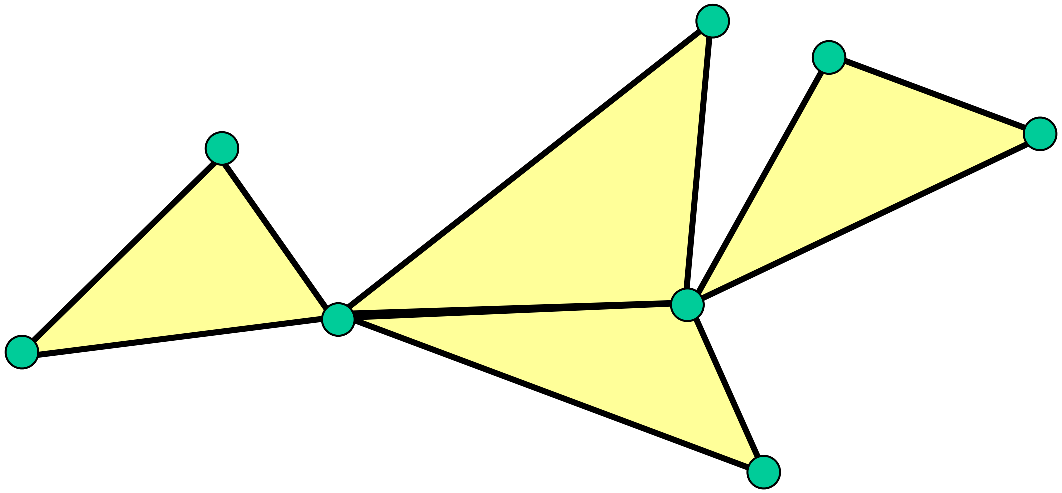
Existen poliedros no convexos, abiertos y de caras triangulares que no admiten un desarrollo (*general unfolding)*

v con curvatura negativa



Desarrollo verticial (*vertex-unfolding*)

Las caras del poliedro se unen por vértices (o por aristas)

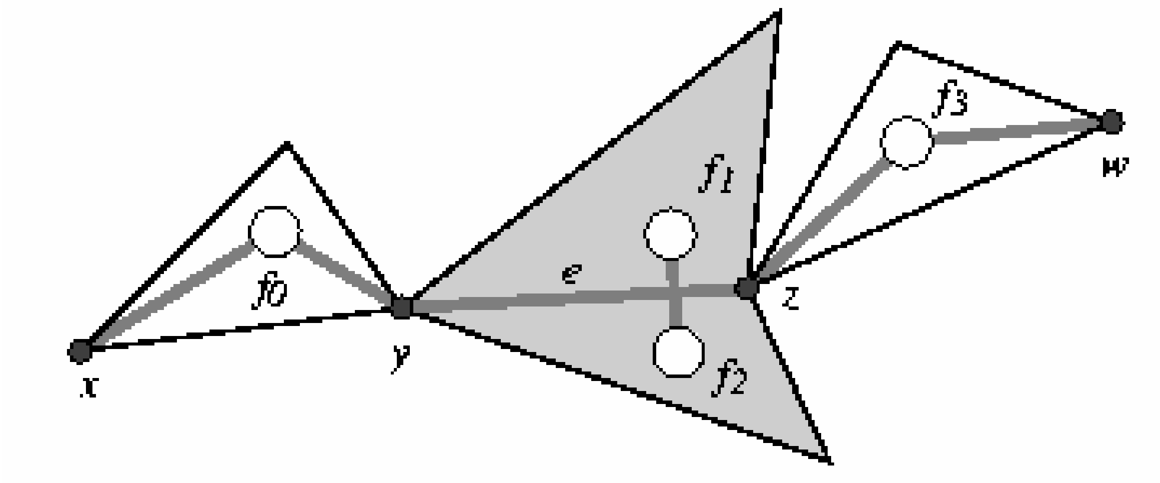


Todo poliedro simplicial (caras triangulares), de cualquier género, admite un desarrollo verticial en tiempo lineal

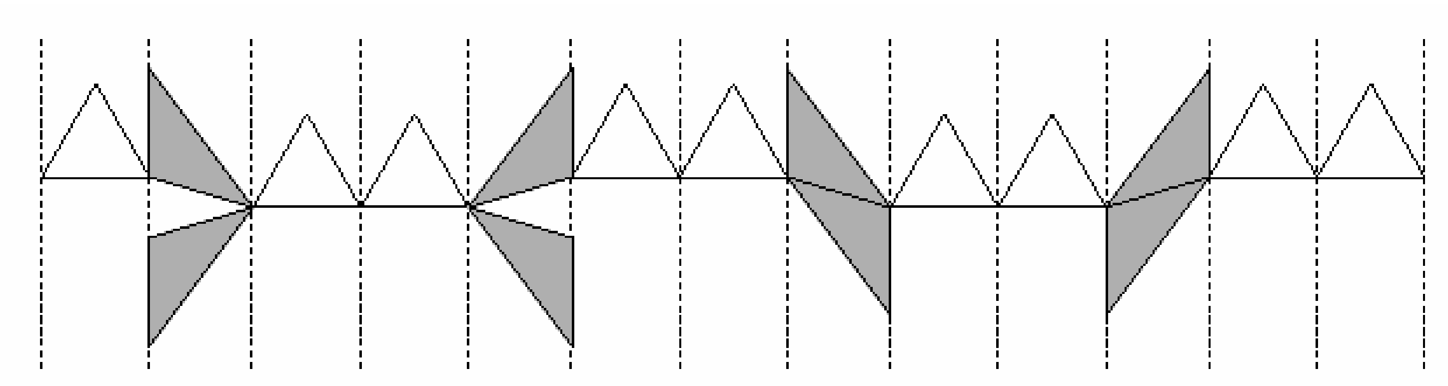
DEEHO, 2001

Desarrollo verticial (*vertex-unfolding*)

Camino desarrollable
xf_0yezf_3w



Desarrollo verticial



Desarrollo verticial (*vertex-unfolding*)

Todo poliedro simplicial (caras triangulares), de género cero, admite un desarrollo verticial en tiempo lineal, en bandas paralelas de forma que cada banda contenga un triángulo.

Problemas abiertos

- Extender el resultado anterior a cualquier género
- Todo poliedro con caras homeomorfas a discos, ¿admite un desarrollo verticial?
- Un poliedro en R^4 , ¿admite un desarrollo verticial?

Referencias

- A. Lubiw, J. O’Rourke, *When can a Polygon fold to a Polytope?* TR 48, Dept. Comp. Sci., Smith College, 1996
- J. O’Rourke: *Folding and Unfolding in Computational Geometry*, Proc. Japan Conf. Discrete and Comput. Geometry, 1998 (ftp://cs.smith.edu/pub/orourke.papers/jp.ps.gz)
- E. Demaine, M. Demaine, A. Lubiw, J. O’Rourke, *Examples, Counterexamples, and enumeration results for foldings and unfoldings between Polygons and Polytopes*, TR 69, Smith College, 2000, (http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/0007019)

Referencias

- M. Bern, E. Demaine, D. Eppsteein, E. Kuo, A. Mantler, J. Snoeyink, *Ununfoldable Polyhedra with convex faces*, Comput. Geometry, 24, pp. 51-62, 2003 (http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/9908003)
- E. Demaine, D. Eppstein, J. Erickson, G. Hart, J. O'Rourke, *Vertex-Unfoldings of Simplicial Polyhedra* (http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/0107023)

- http://theory.lcs.mit.edu/~edemaine/folding/
- http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/open/unfold.html
- http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/unfold.html