Universidad
Politécnica de Madrid

Universidad Nacional de
San Luis

Elegir el mejor camino: GRAFOS GEOMÉTRICOS

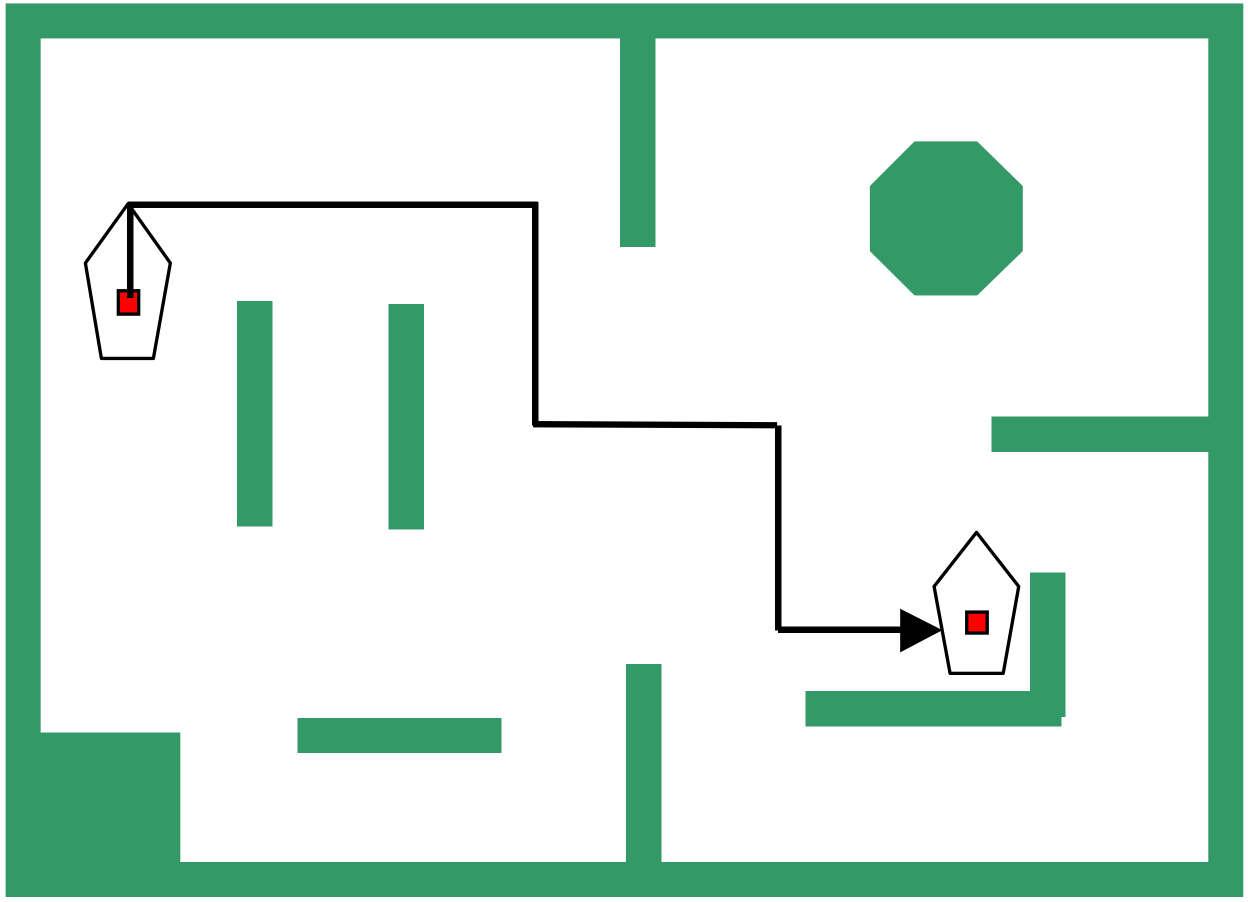
Gregorio Hernández Peñalver

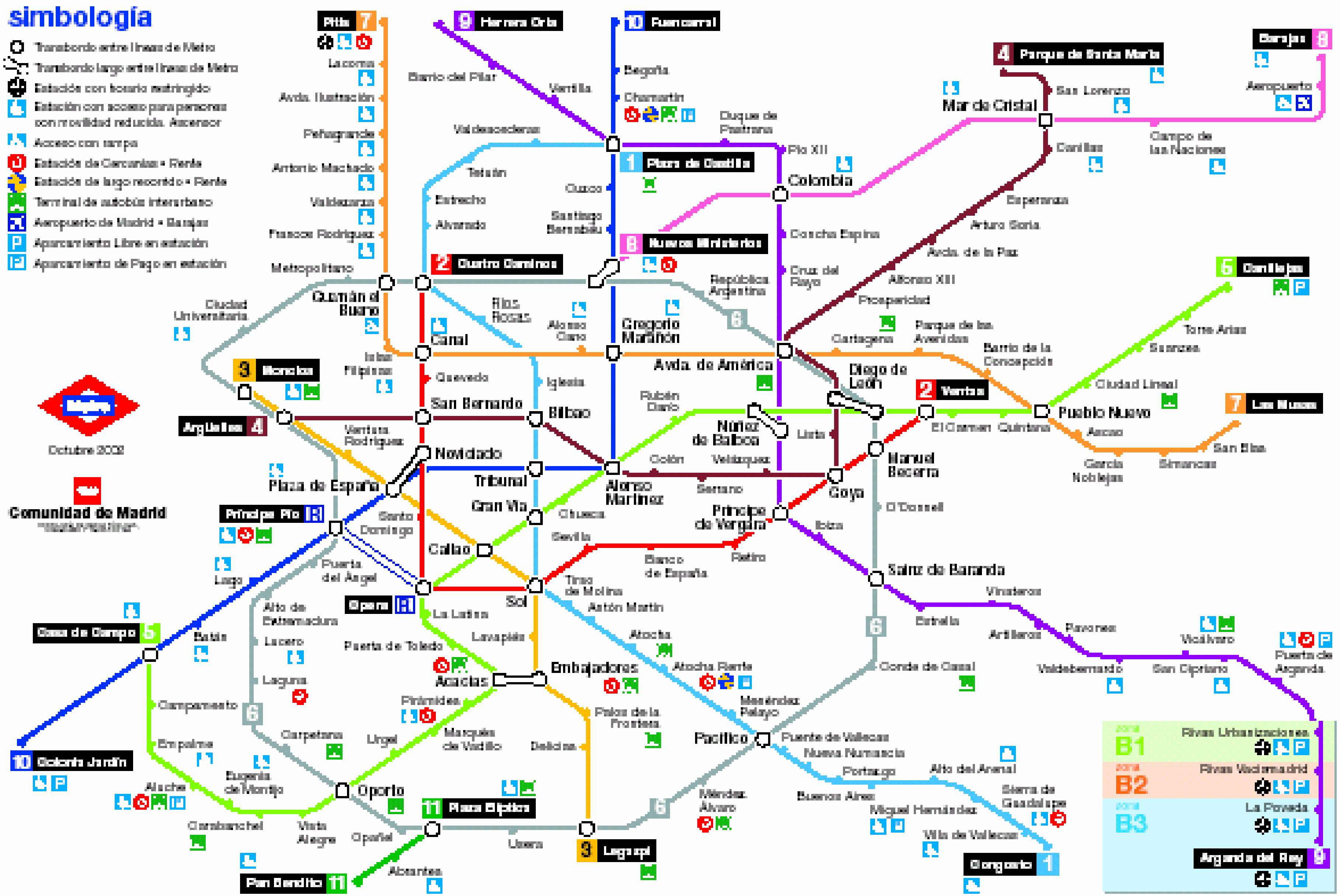
Septiembre 2003

Planificación de movimientos

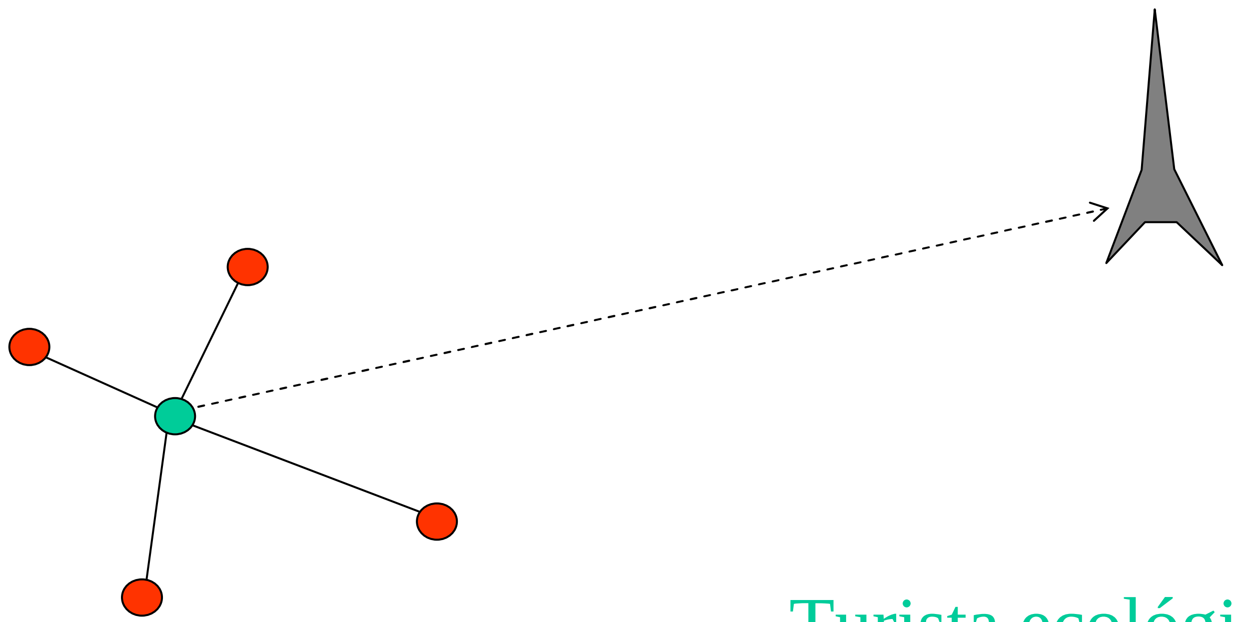
- Robótica
- Redes de comunicaciones
- Sistemas de información geográfica
- Planeamiento urbano

- Conocimiento TOTAL del entorno
- Conocimiento LOCAL del entorno



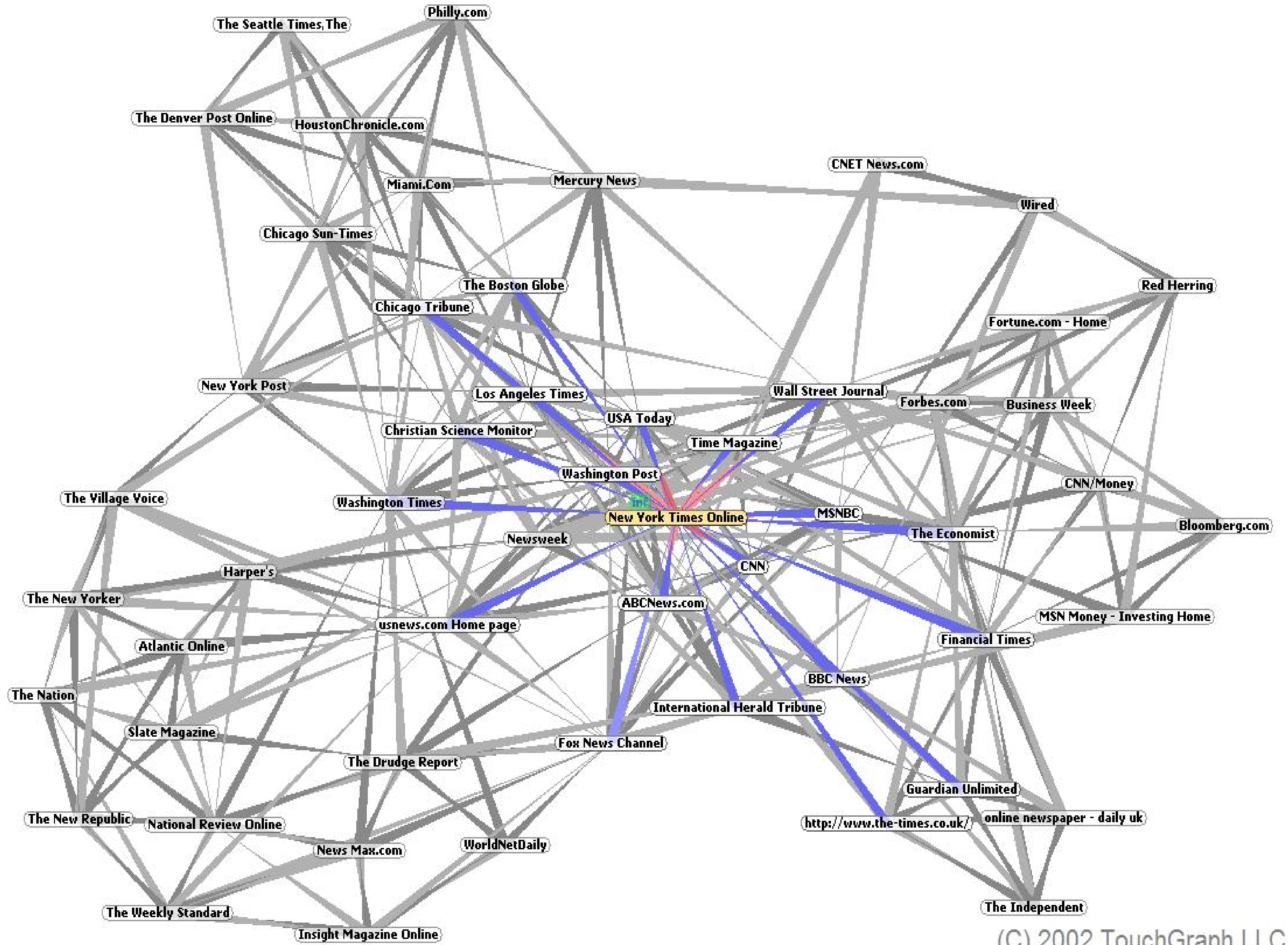

simbología
Transbordo entre líneas de Metro
Transbordo largo entre líneas de Metro
Estación con horario restringido
Estación con acceso para personas con movilidad reducida. Ascensor
Acceso con rampa
Estación de Cercanías - Renfe
Estación de largo recorrido - Renfe
Terminal de autobús interurbano
Aeropuerto de Madrid - Barajas
Aparcamiento Libre en estación
Aparcamiento de Pago en estación
Octubre 2002
Comunidad de Madrid
Pitis 7
Lacoma
Avda. Ilustración
Peñagrande
Antonio Machado
Valdezarza
Francos Rodríguez
Metropolitano
9 Herrera Oria
Barrio del Pilar
Ventilla
10 Fuencarral
Begoña
Chamartín
Duque de Pastrana
Pío XII
Valdeacederas
Tetuán
Estrecho
Alvarado
Cuzco
Santiago Bernabéu
1 Plaza de Castilla
Colombia
8 Nuevos Ministerios
Concha Espina
Cruz del Rayo
República Argentina
4 Parque de Santa María
San Lorenzo
Mar de Cristal
Canillas
Esperanza
Arturo Soria
Avda. de la Paz
Alfonso XIII
Prosperidad
Barajas 8
Aeropuerto
Campo de las Naciones
2 Cuatro Caminos
Guzmán el Bueno
Ciudad Universitaria
Ríos Rosas
Alonso Cano
Gregorio Marañón
Canal
Islas Filipinas
Quevedo
Iglesia
Avda. de América
Cartagena
Parque de las Avenidas
Barrio de la Concepción
Diego de León
3 Moncloa
Argüelles 4
San Bernardo
Bilbao
Rubén Darío
Núñez de Balboa
Lista
2 Ventas
Pueblo Nuevo
El Carmen
Quintana
5 Canillejas
Torre Arias
Suanzes
Ciudad Lineal
7 Las Musas
San Blas
Simancas
García Noblejas
Ascao
Ventura Rodríguez
Noviciado
Plaza de España
Tribunal
Alonso Martínez
Colón
Velázquez
Serrano
Goya
Manuel Becerra
O'Donnell
Príncipe Pío
Santo Domingo
Gran Vía
Chueca
Príncipe de Vergara
Sevilla
Banco de España
Retiro
Ibiza
Callao
Sol
Ópera
Puerta del Ángel
Lago
Tirso de Molina
Antón Martín
Sainz de Baranda
Vinateros
Estrella
Artilleros
Pavones
Valdebernardo
Vicálvaro
San Cipriano
Puerta de Arganda
Casa de Campo 5
Batán
Alto de Extremadura
Lucero
La Latina
Lavapiés
Puerta de Toledo
Embajadores
Atocha
Atocha Renfe
Acacias
Conde de Casal
Laguna
Campamento
Pirámides
Marqués de Vadillo
Menéndez Pelayo
Palos de la Frontera
Pacífico
Puente de Vallecas
Nueva Numancia
Portazgo
Alto del Arenal
Buenos Aires
Miguel Hernández
Sierra de Guadalupe
Villa de Vallecas
Congosto 1
Carpetana
Urgel
Delicias
Empalme
Eugenia de Montijo
Aluche
Oporto
11 Plaza Elíptica
Carabanchel
Vista Alegre
Opañel
Usera
3 Legazpi
Méndez Álvaro
Abrantes
Pan Bendito 11
10 Colonia Jardín
zona B1
Rivas Urbanizaciones
zona B2
Rivas Vaciamadrid
zona B3
La Poveda
Arganda del Rey 9

Un turista en París



Turista ecológico

Coordenadas destino
Posición actual
Posiciones vecinas



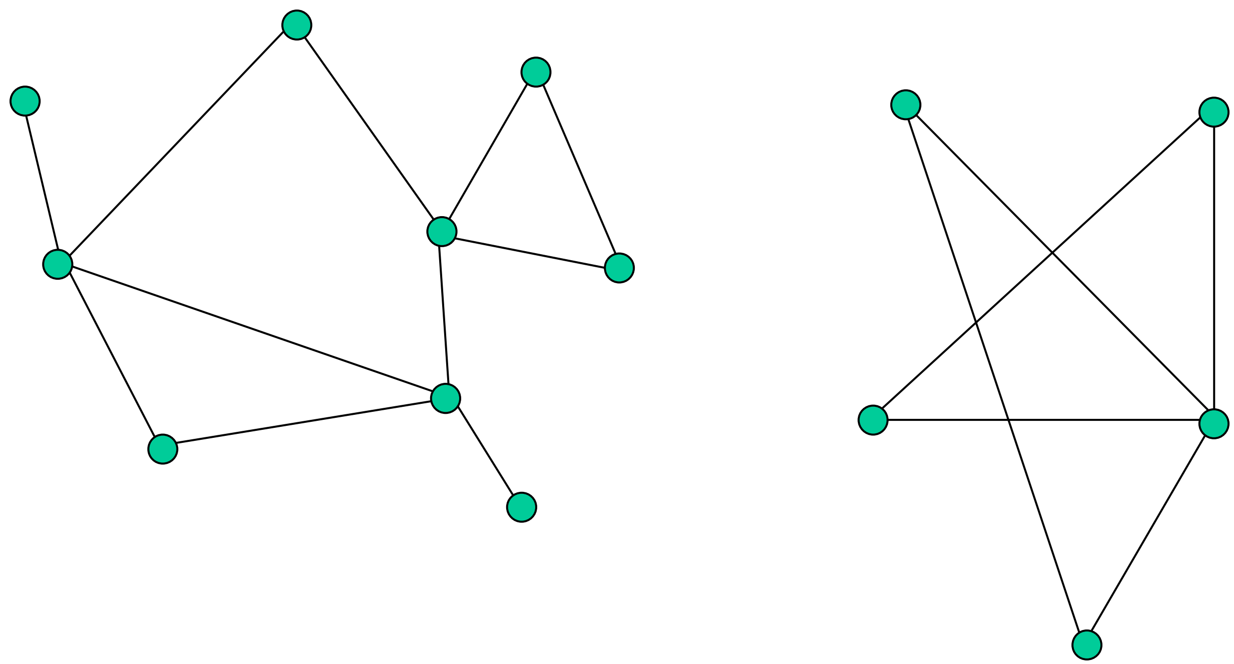
The Seattle Times,The
Philly.com
The Denver Post Online
HoustonChronicle.com
Miami.Com
Mercury News
CNET News.com
Wired
Chicago Sun-Times
The Boston Globe
Red Herring
Chicago Tribune
Fortune.com - Home
New York Post
Los Angeles Times
Wall Street Journal
Forbes.com
Business Week
USA Today
Christian Science Monitor
Time Magazine
Washington Post
CNN/Money
The Village Voice
Washington Times
New York Times Online
MSNBC
The Economist
Bloomberg.com
Newsweek
Harper's
CNN
The New Yorker
ABCNews.com
MSN Money - Investing Home
usnews.com Home page
Financial Times
Atlantic Online
The Nation
BBC News
International Herald Tribune
Slate Magazine
Fox News Channel
The Drudge Report
Guardian Unlimited
The New Republic
National Review Online
http://www.the-times.co.uk/
online newspaper - daily uk
News Max.com
WorldNetDaily
The Weekly Standard
Insight Magazine Online
The Independent
(C) 2002 TouchGraph LLC

SUMARIO

- Una “pizca” de grafos geométricos
- Caminos en entornos conocidos
- Caminos que se deciden al caminar

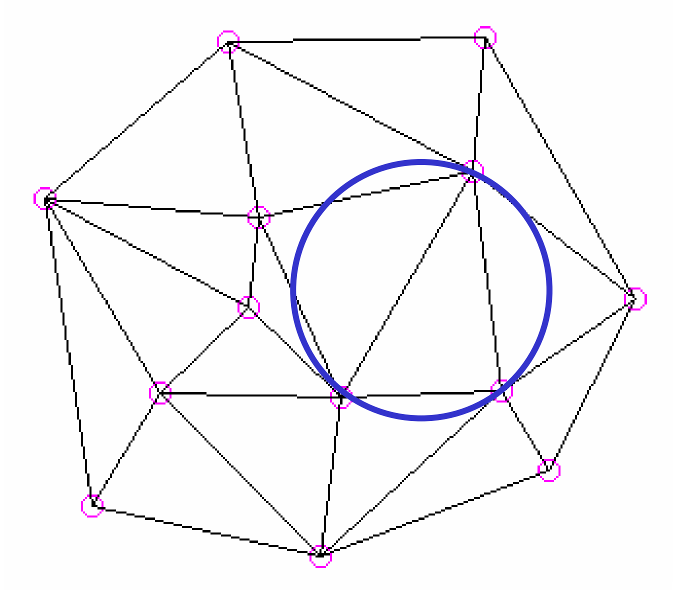
GRAFOS GEOMÉTRICOS

Un grafo geométrico es un grafo trazado en el plano de forma que sus vértices son puntos y sus aristas segmentos



GRAFOS GEOMÉTRICOS

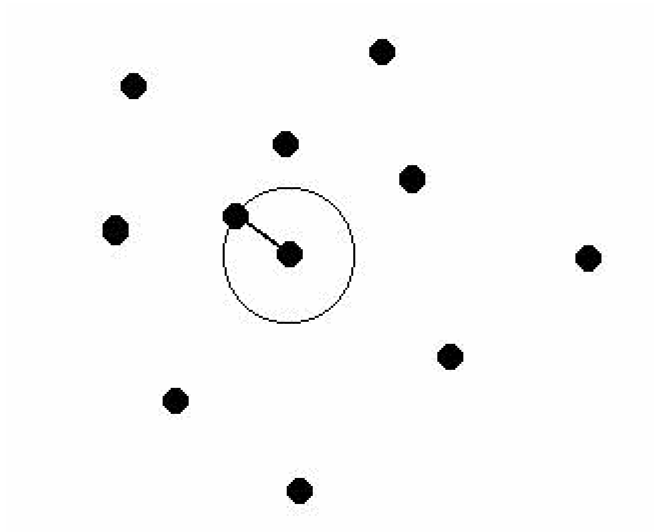
Triangulación de una nube de puntos



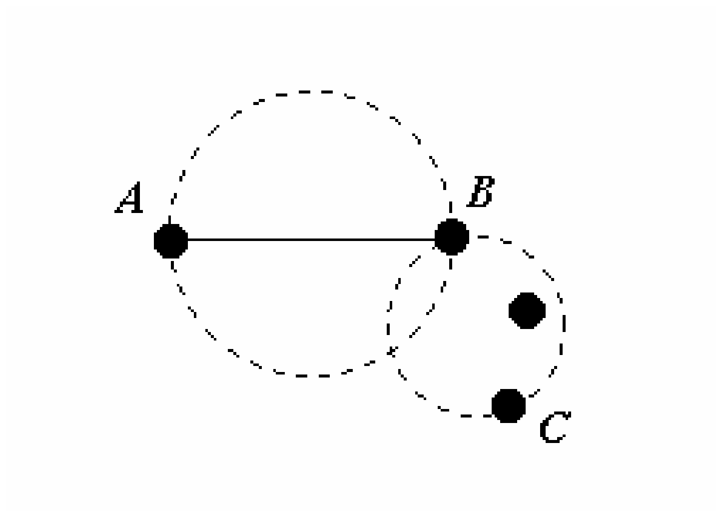
Triangulación de Delaunay

GRAFOS GEOMÉTRICOS

Subgrafos notables de la triangulación de Delaunay



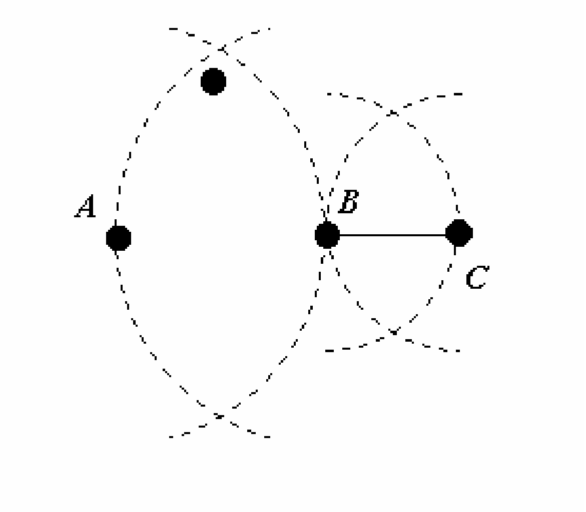
Vecino más próximo

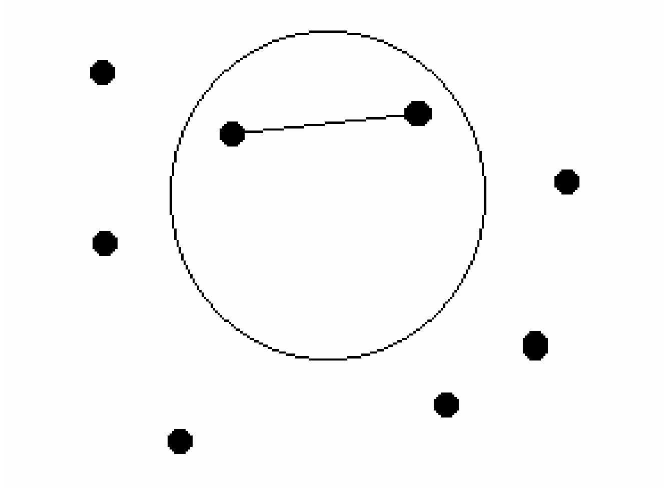


Vecindad de Grabiel

GRAFOS GEOMÉTRICOS

Subgrafos notables de la triangulación de Delaunay





Vecindad relativa

Vecindad Delaunay

GRAFOS GEOMÉTRICOS

Subdivisión convexa

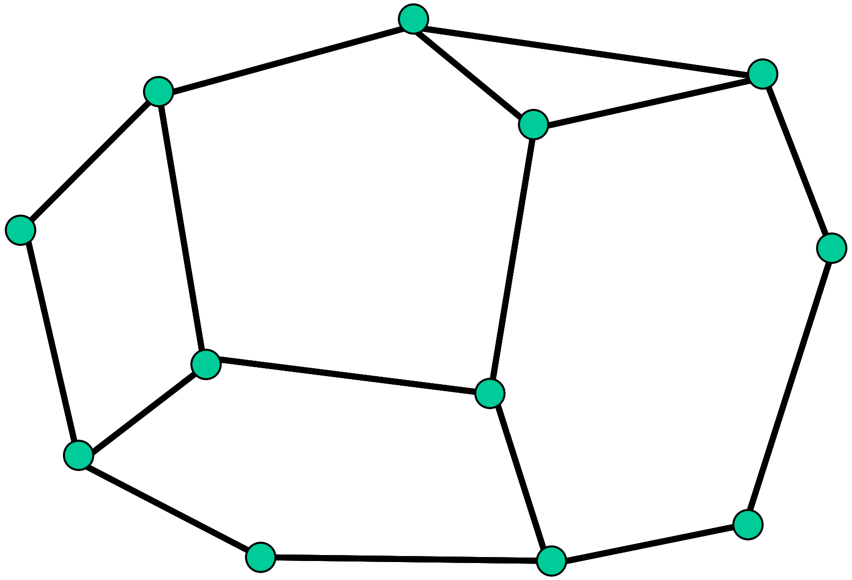
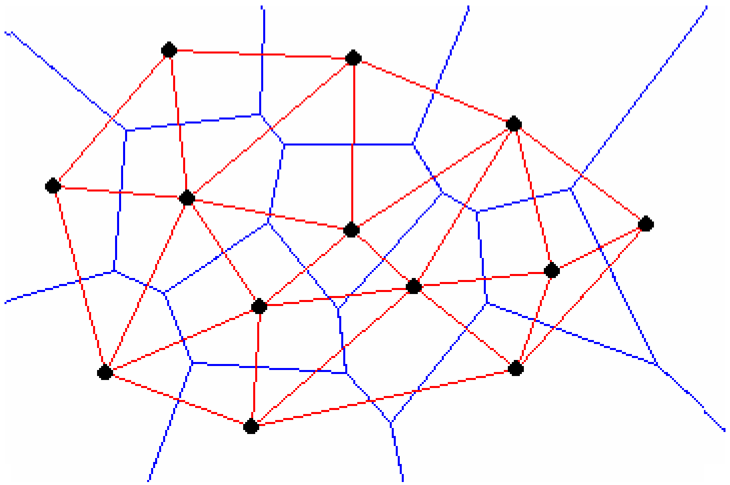
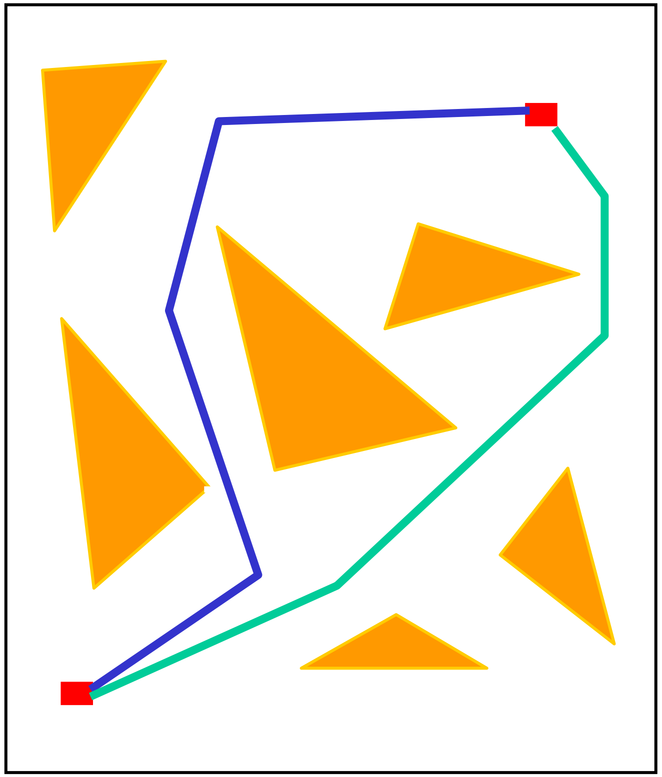


Diagrama de Voronoi



CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS



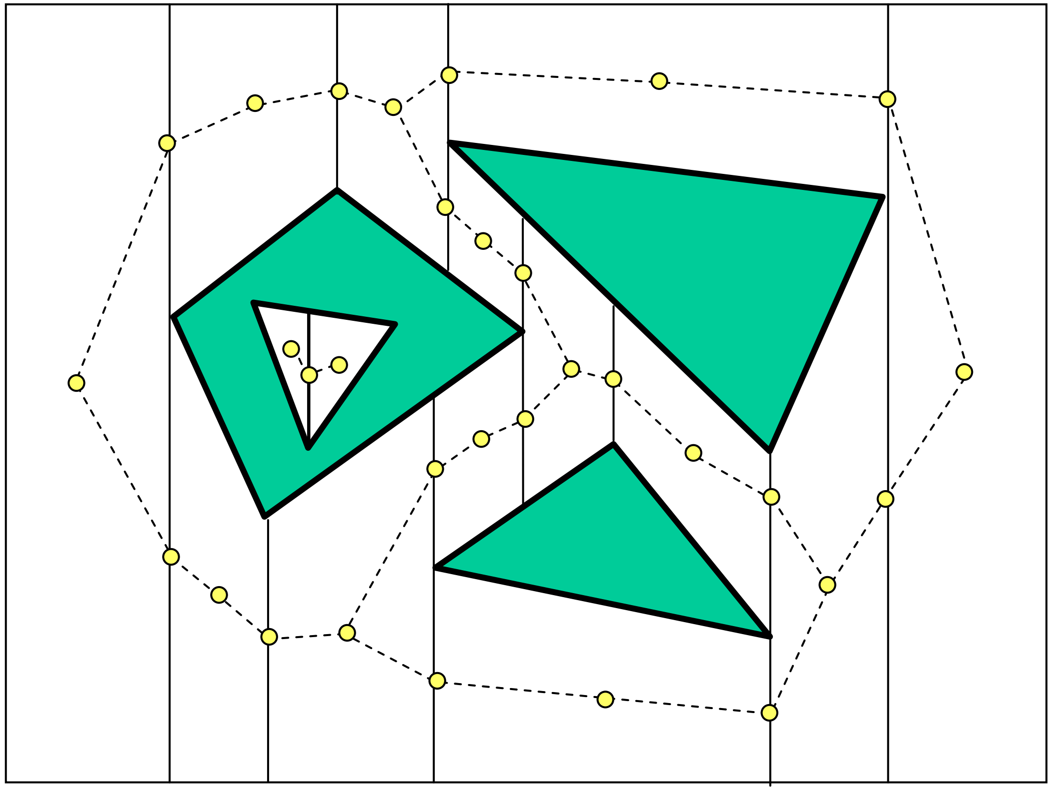
Un robot en una fábrica,
¿qué camino debe seguir?

- robot puntual
- obstáculos poligonales

El espacio libre es “continuo”,
hay que discretizar

CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS

Discretizando el espacio libre



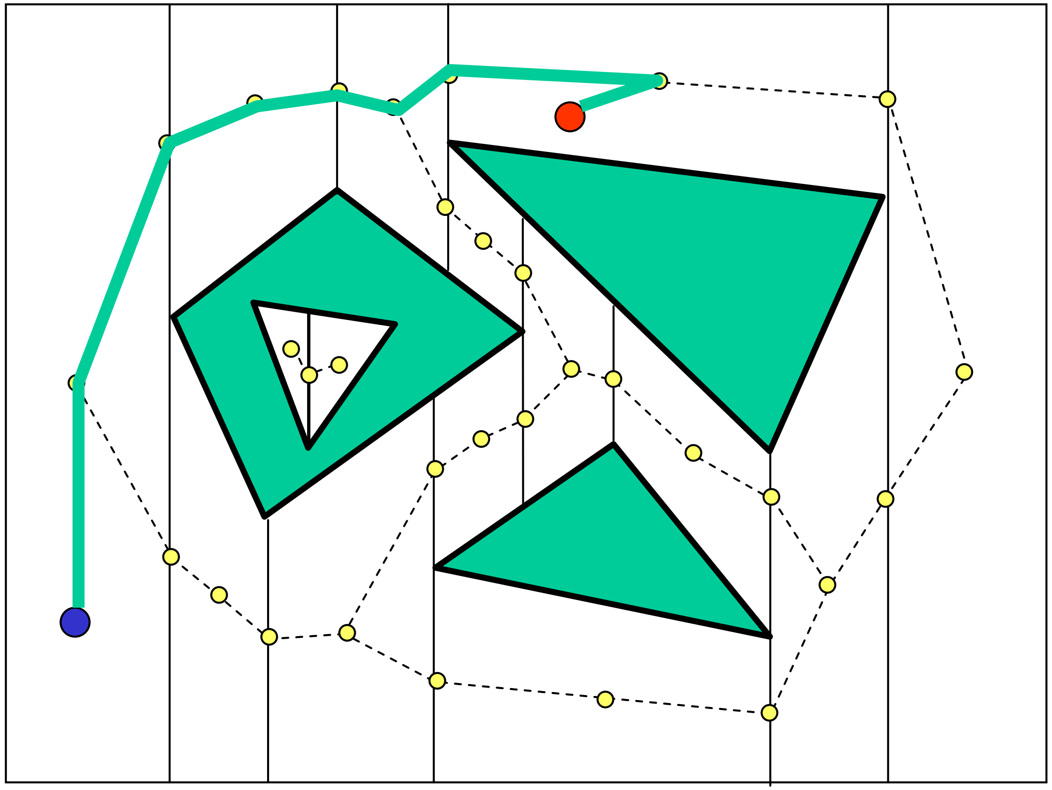
Descomposición en trapecios

Mapa de carreteras

Algoritmo aleatorizado O(nlogn)

CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS

Mapa de carreteras (grafo geométrico)



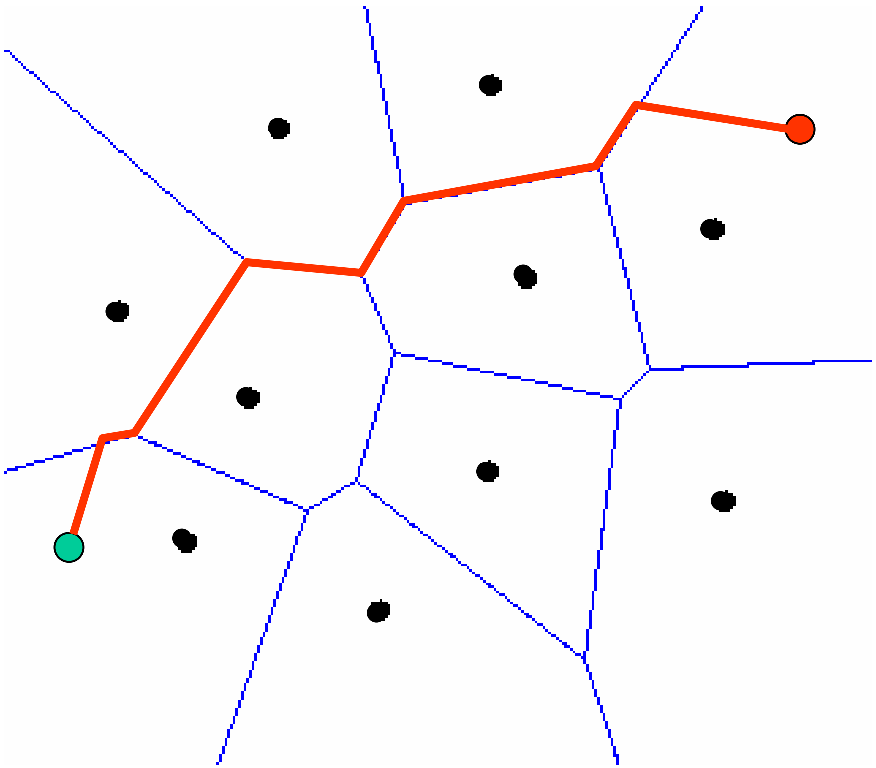
1. Detectar trapecio
2. Búsqueda BFS en el mapa

Tiempo O(n)

¿Podemos mejorar?

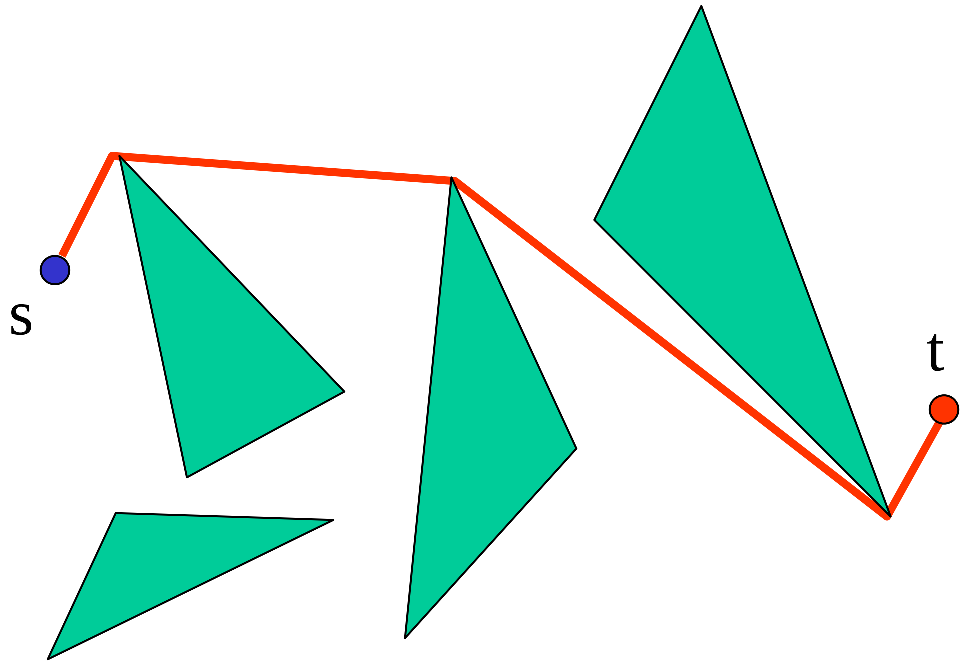
CAMINO SEGURO ENTRE OBSTÁCULOS

¿Y si buscamos el camino “más seguro”?



Mapa de carreteras
=
Diagrama de Voronoi

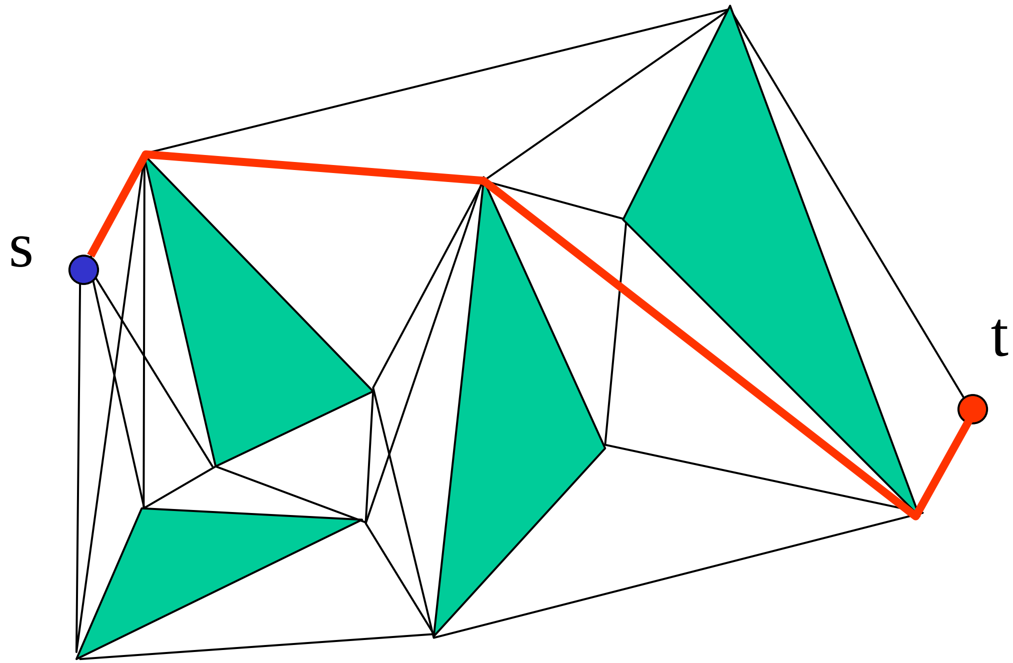
CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS



- El camino mínimo de s a t es una poligonal
- Los vértices del camino son vértices de los obstáculos
- Los segmentos del camino son aristas de visibilidad

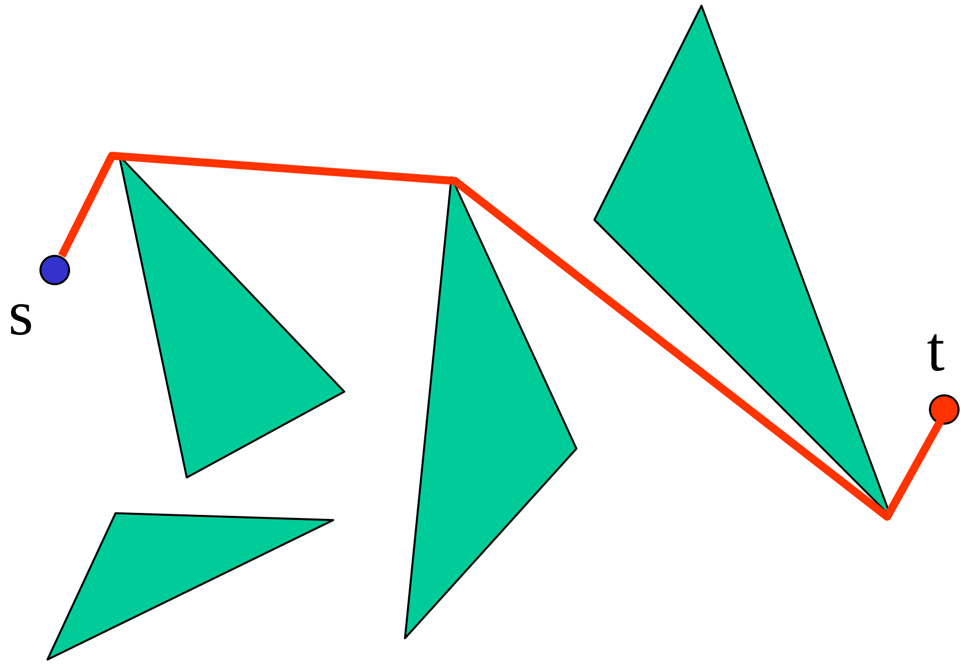
GRAFO DE VISIBILIDAD

Nuevo mapa de carreteras



El camino mínimo de s a t es un camino en el grafo de visibilidad

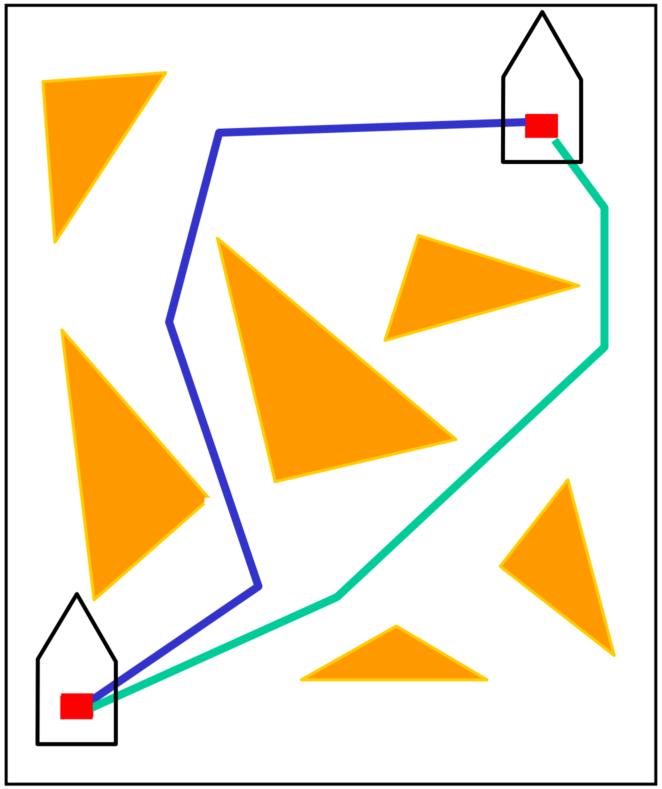
CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS



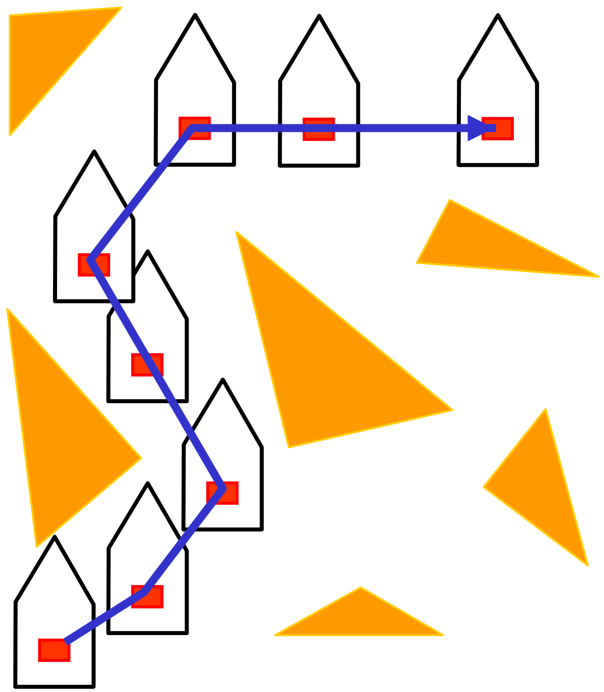
1) Construcción del grafo de visibilidad G — O(nlogn+E)
2) Construcción del camino mínimo en G de s a t — O(nlogn+E)
   Algoritmo de Dijkstra

PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

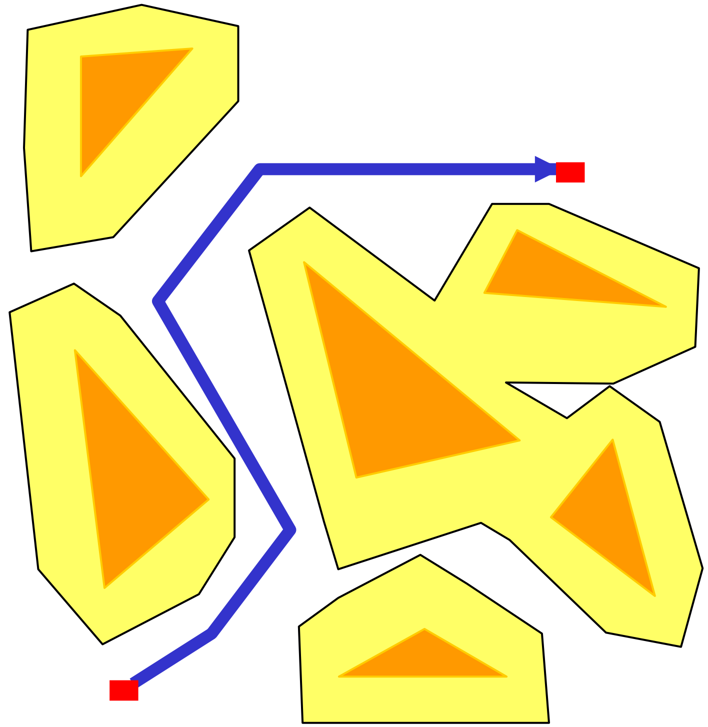
R robot, $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ obstáculos poligonales



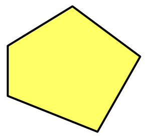
Espacio de trabajo



Espacio de configuración



Espacio prohibido



PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

1) Construcción del espacio libre

SUMA DE MINKOWSKI

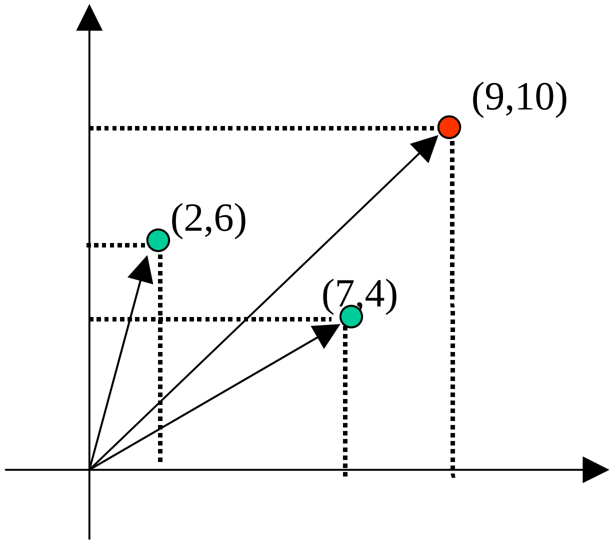
2) Construcción del camino mínimo para un robot puntual en el espacio libre

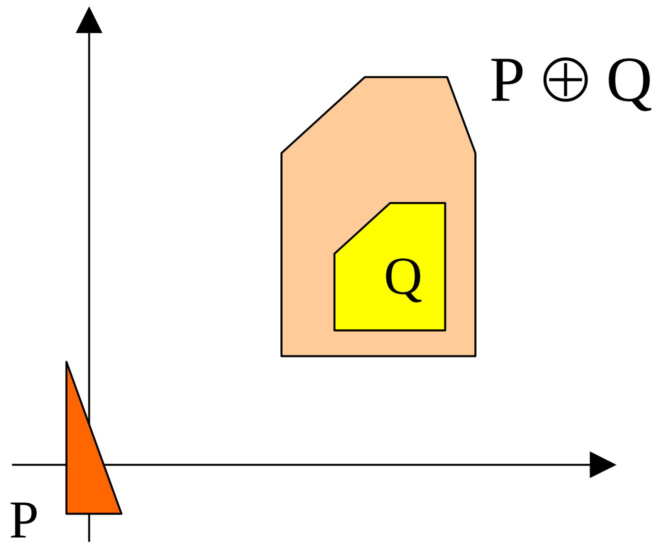
GRAFO DE VISIBILIDAD
ALGORITMO DE DIJKSTRA

SUMA DE MINKOWSKI

P, Q conjuntos de R^2

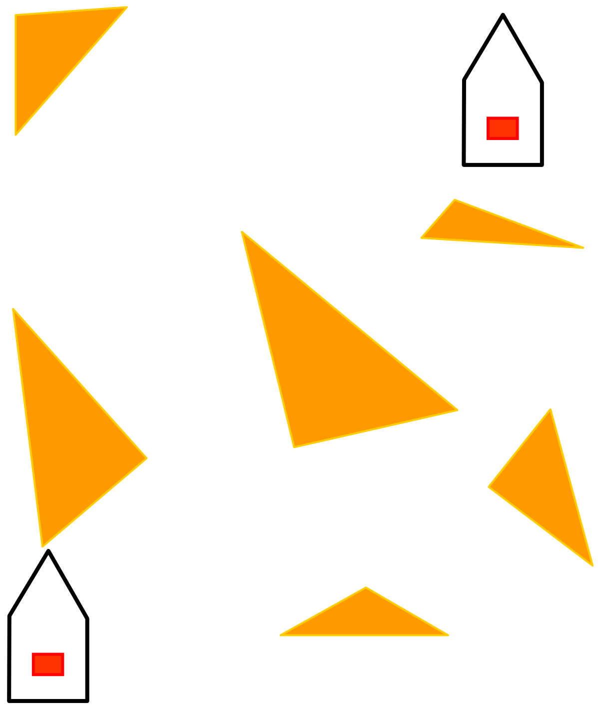
$P \oplus Q = \{ p + q \mid p \in P, q \in Q\}$



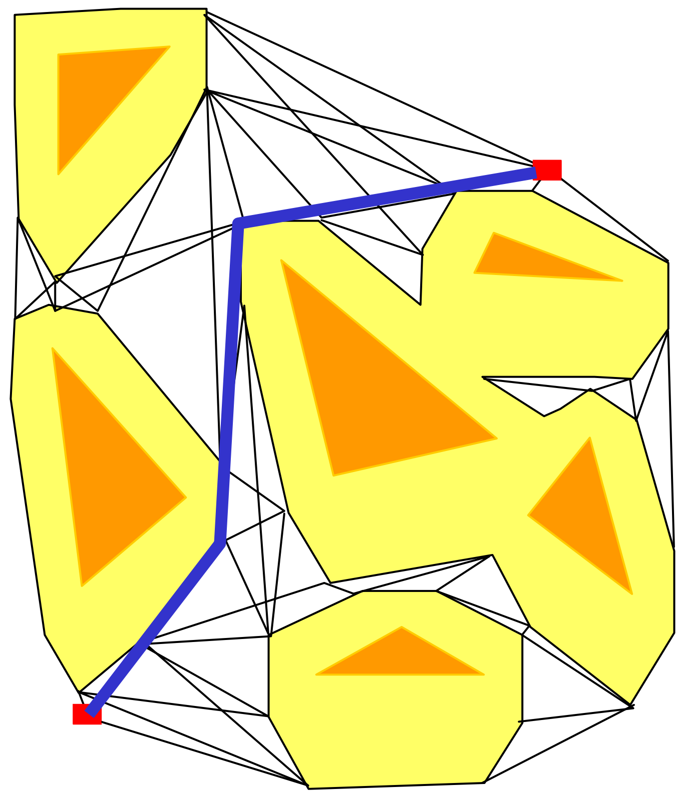


PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

Espacio de trabajo



Espacio de configuración



Camino mínimo

MENSAJES POR LA RED

Transmisión de un nodo a otro RUTEO

El plano completo de la red no se conoce en los nodos

¿Cómo se modeliza?
G grafo plano con n vértices, aristas con peso (distancia euclídea)

Un paquete (de información) viaja por las aristas de G
desde s (fuente) hasta t (destino)

¿Qué conoce el paquete?

- Las coordenadas de s, t y de los vértices de N(s)
- Cuando llega a v, aprende las coordenadas de N(v)

MENSAJES POR LA RED

RUTEO “AL VUELO” (Online routing)

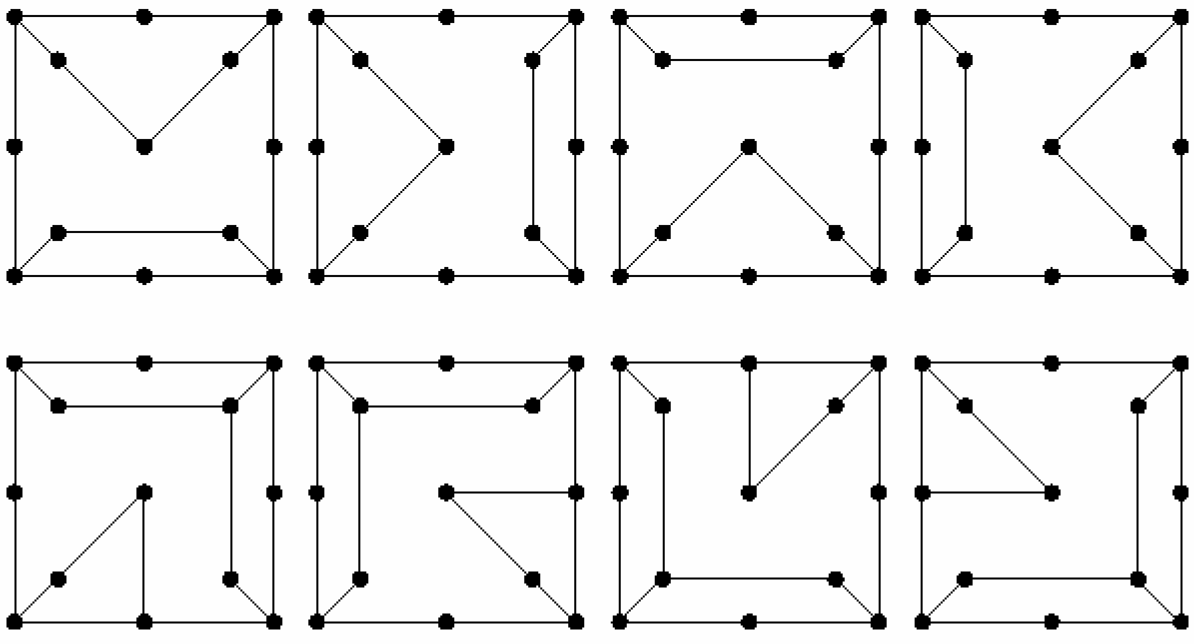
Algoritmo olvidadizo (sin memoria)

Algoritmo con memoria constante M

RUTEO "AL VUELO" (Online routing)

Algoritmo olvidadizo (sin memoria)

Existen grafos que vencen a cualquier algoritmo olvidadizo



RUTEO “AL VUELO” (Online routing)

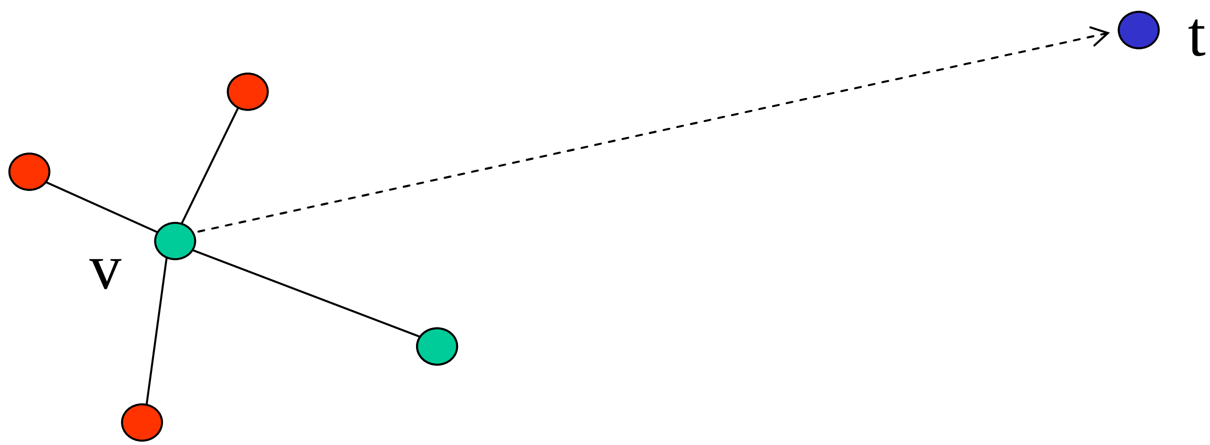
Algoritmo olvidadizo (sin memoria)

Existen grafos que vencen a cualquier algoritmo olvidadizo

Un grafo G vence a un algoritmo A si existen s,t tales que un paquete en s nunca alcanza t si se encamina utilizando A.
En caso contrario el algoritmo A trabaja para G

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz

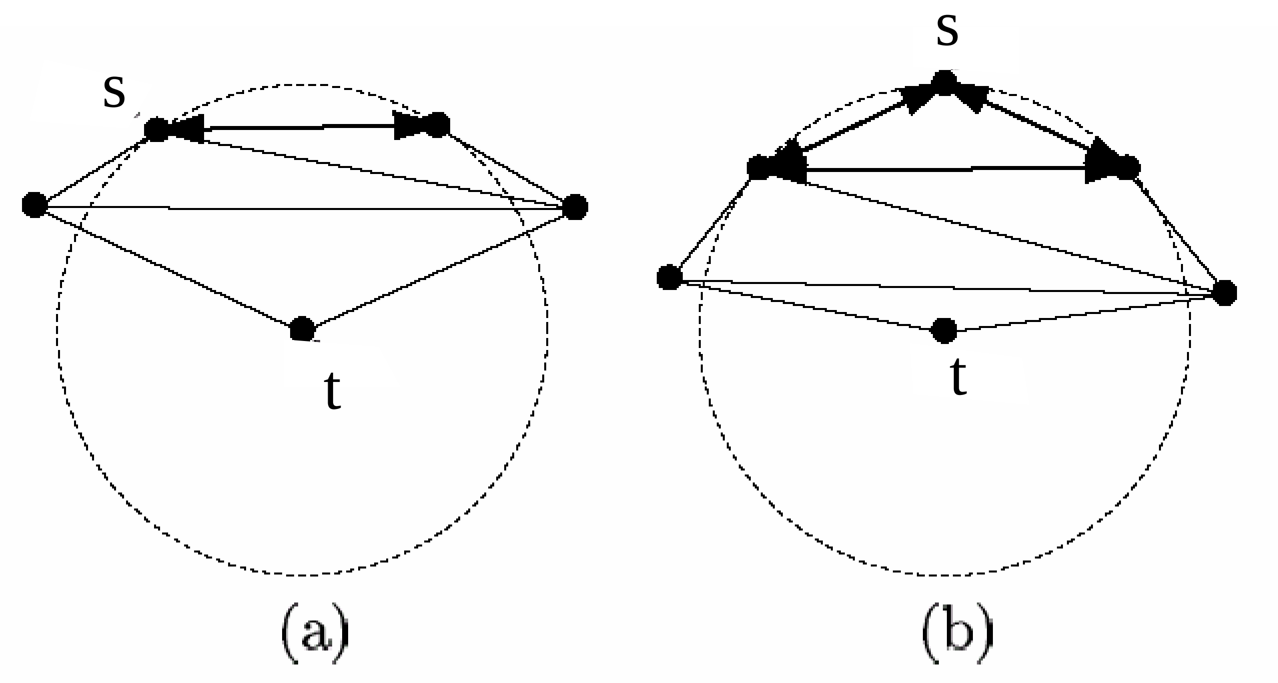


El paquete sale de v al vecino más próximo a t

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz

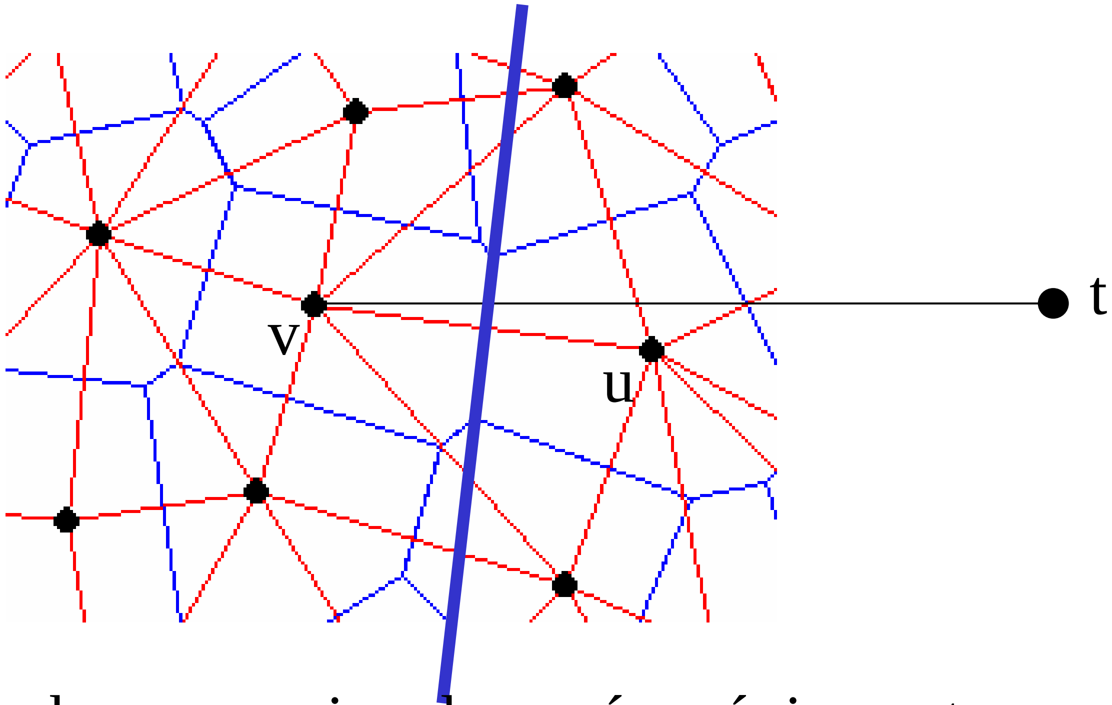
Triangulaciones que lo baten



Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz   BM '99

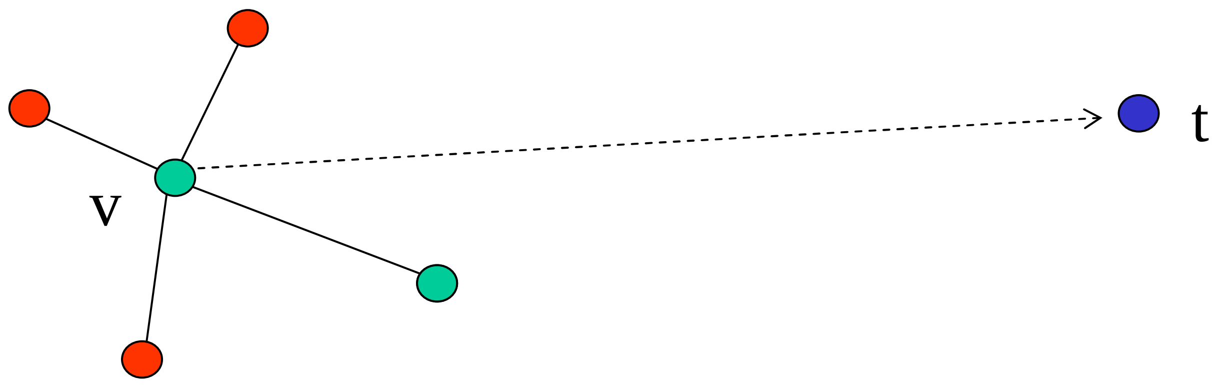
Trabaja para toda triangulación de Delaunay



Siempre hay un vecino de v más próximo a t

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

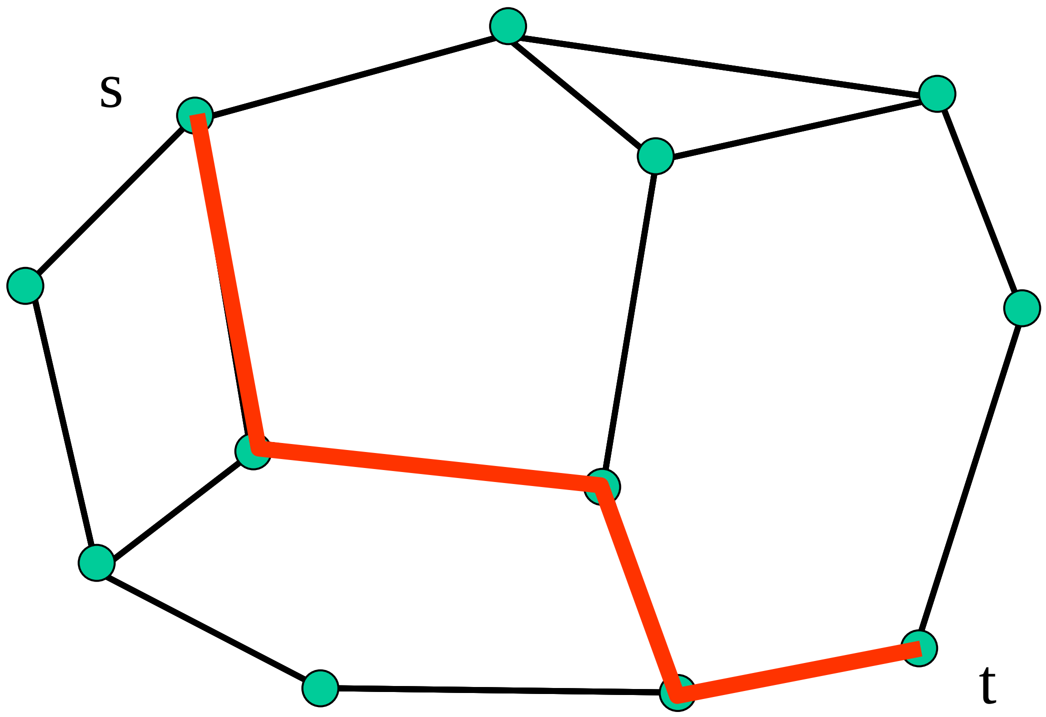
Ruteo con brújula COMPASS ROUTING (KSU'99)



El paquete sale de v al vecino que minimiza el ángulo con la recta vt

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

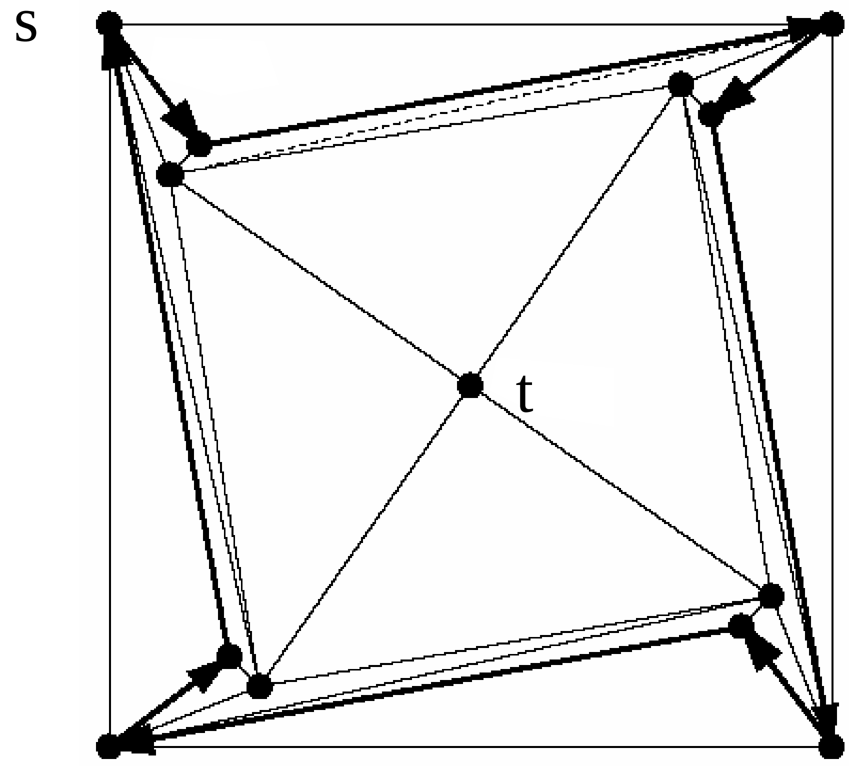
Ruteo con brújula



Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo con brújula

Una triangulación
que lo bate

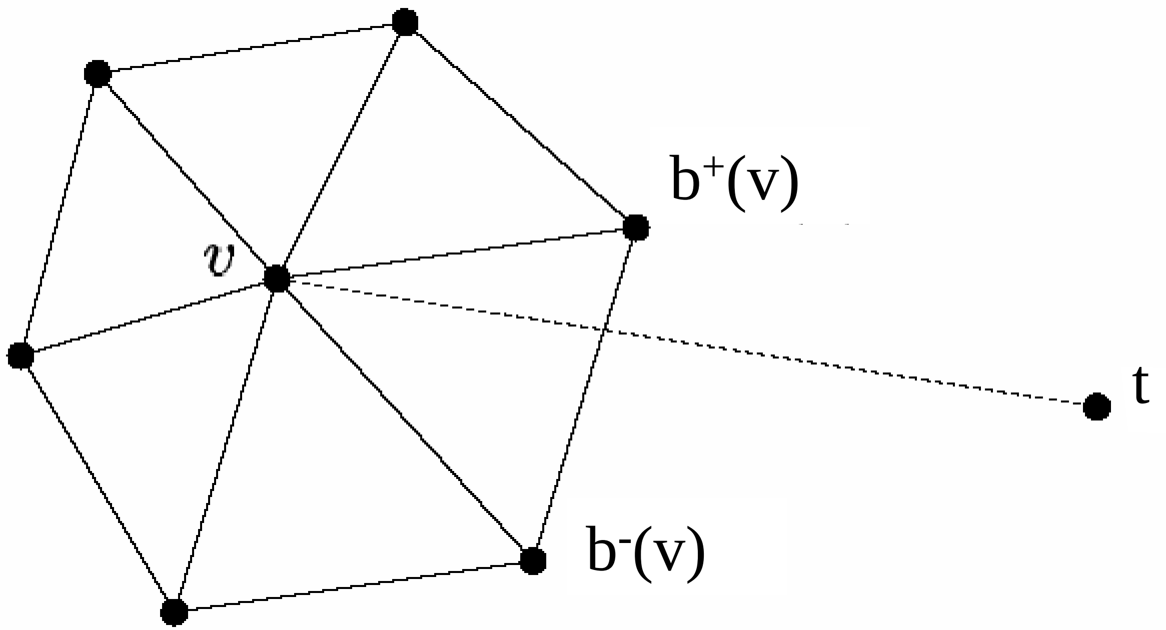


Trabaja para toda triangulación
de Delaunay

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo con brújula ALEATORIZADO

BM ‘99

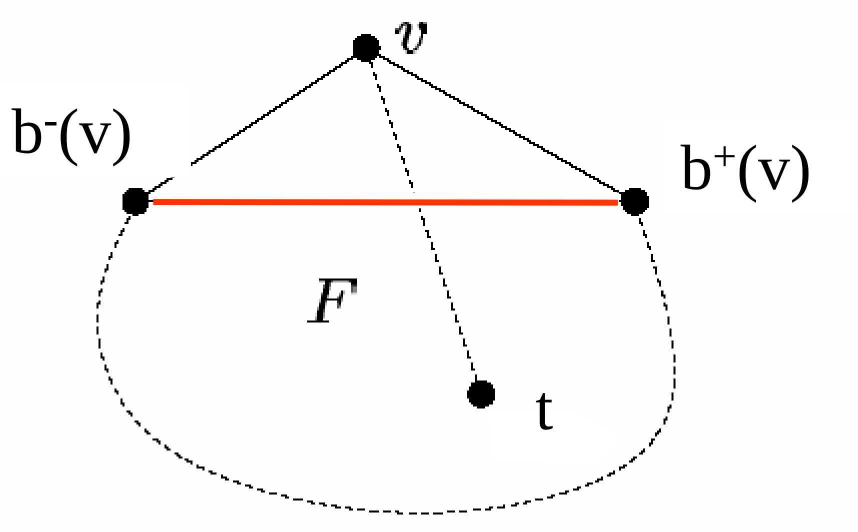


El paquete va de v a uno de los vértices $b^+(v)$ o $b^-(v)$ con igual probabilidad

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo con brújula ALEATORIZADO

Trabaja para todas las triangulaciones



Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz

Ruteo con brújula

Ruteo con brújula ALEATORIZADO

¿son "buenos"?

Si un algoritmo A trabaja para un grafo G, llamamos
A(s,t) longitud del camino según A
SP(s,t) longitud del camino mínimo en G

A es c-competitivo para G si $\dfrac{A(s,t)}{SP(s,t)} \leq c$

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz

Ruteo con brújula

¿son “buenos”?

Ruteo con brújula ALEATORIZADO

Existen triangulaciones de Delaunay para las que ninguno de los algoritmos anteriores es c-competitivo para cualquier c

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz

Ruteo con brújula

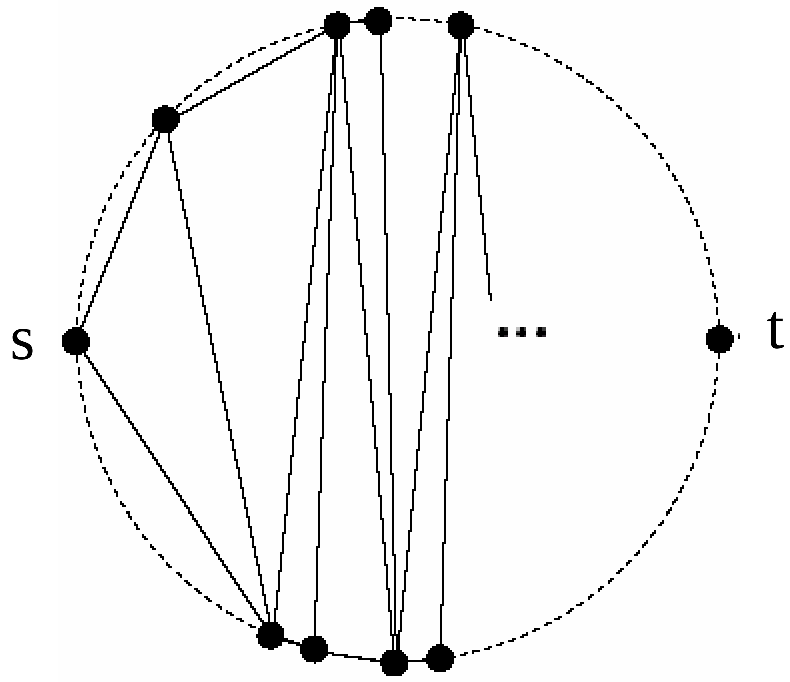
Ruteo con brújula ALEATORIZADO

¿son “buenos”?

Ruteo voraz

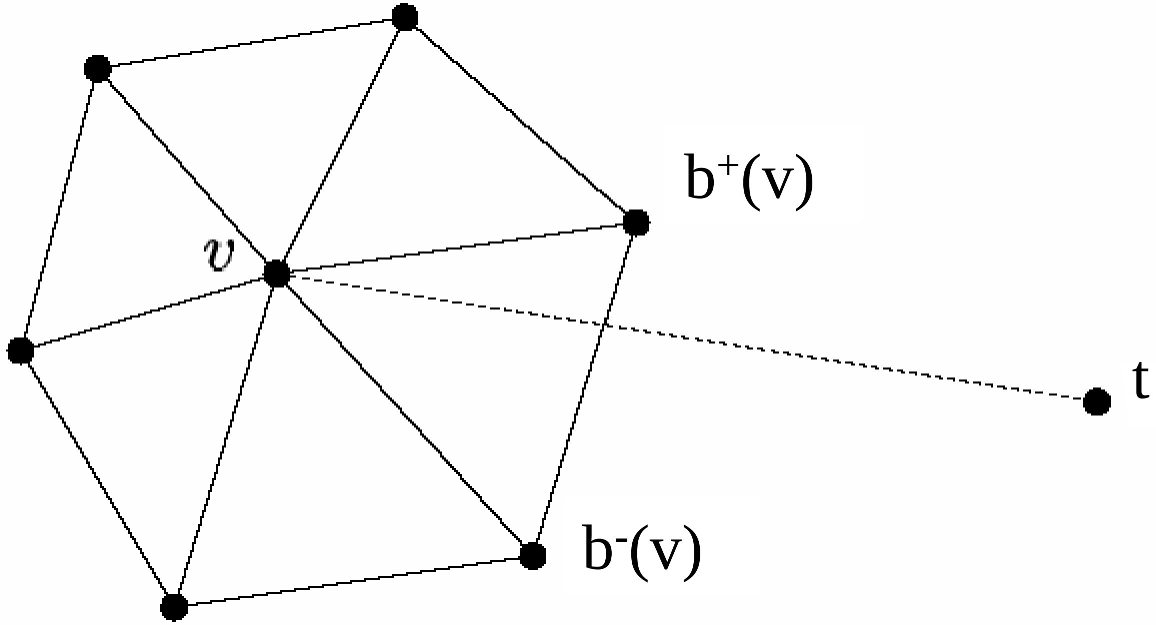
$SP(s,t) = (\pi/2)\ \mathrm{dist}(s,t)$

$A(s,t) = O(n)\ \mathrm{dist}(s,t)$



Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz-brújula GREEDY-COMPASS BM+ 00



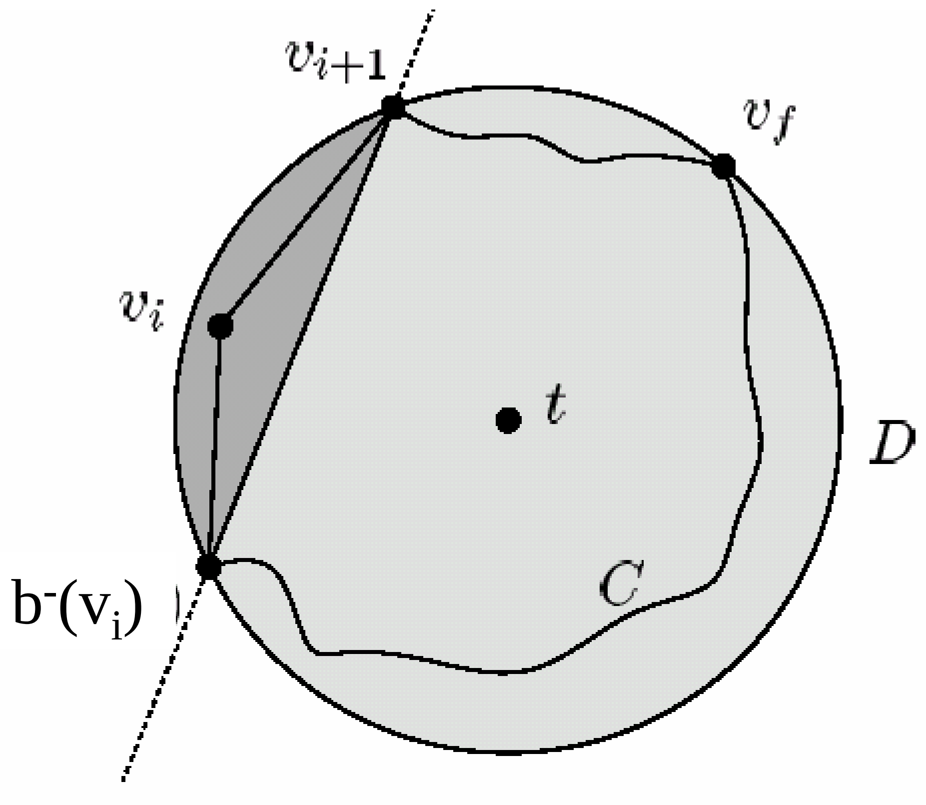
El paquete se mueve desde v al vértice entre $\{b^+(v), b^-(v)\}$ que minimiza la distancia a t

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz-brújula

Trabaja para cualquier triangulación

Si para T, s, t el algoritmo no trabaja, entonces hay un ciclo C={ v_1, v_2, ... ,v_k } que atrapa a t



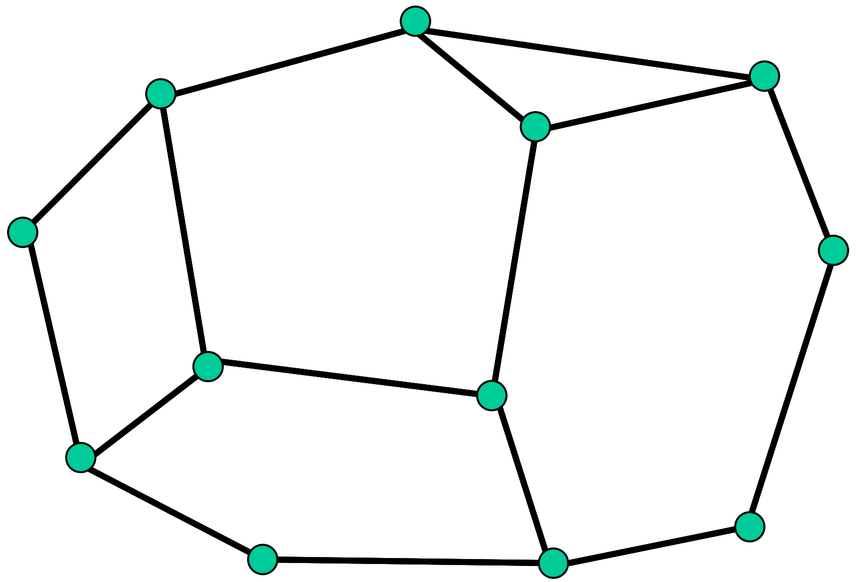
Los vértices de C están en un disco centrado en t

Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo voraz-brújula

Trabaja para cualquier triangulación

¿Trabaja para las subdivisiones convexas?



Cualquier algoritmo determinista es batido por alguna subdivisión convexa

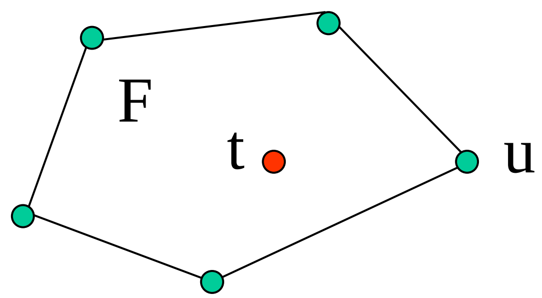
Algoritmos olvidadizos (sin memoria)

Ruteo con brújula ALEATORIZADO

Trabaja para cualquier subdivisión convexa

Supongamos existe G, s, t, tales que la probabilidad de alcanzar t desde s es 0

Así existe H, subgrafo de G, $s \in H$, $t \notin H$
con $b^+(v)$ y $b^-(v)$ en H para todo $v \in H$



F cara convexa de t

Por G conexo debe existir u en el borde de F tal que $b^+(v)$ o $b^-(v)$ en el interior de F

¿Cómo buscar competitividad?

Algoritmos con memoria constante

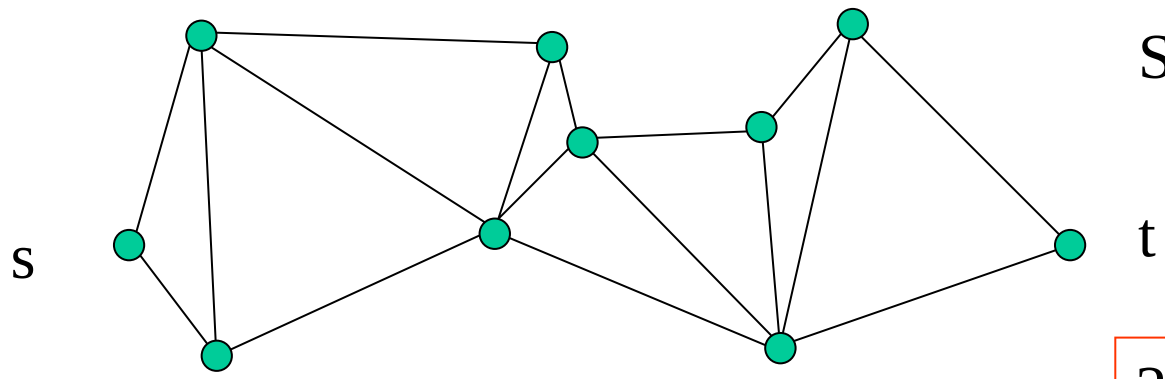
Bose, Morin 99
Algoritmo competitivo para triangulaciones Delaunay
con distancia euclídea

Bose, Morin , + 00
Este resultado no se generaliza ni a triangulaciones arbitrarias
ni para distancia de enlaces (“link”)

¿Qué triangulaciones admiten algoritmos de ruteo competitivos?

Algoritmos con memoria constante

- Algoritmo determinista competitivo para triangulaciones serpentinas
- Algoritmo determinista competitivo para triangulaciones diamantinas (Delaunay, mínimo peso, voraz, ...)



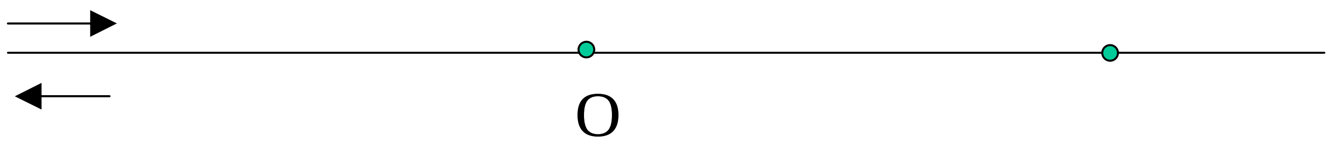
SERPENTINA

2 orejas
dual es camino

Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas

Estrategia de Baeza de búsqueda en la recta



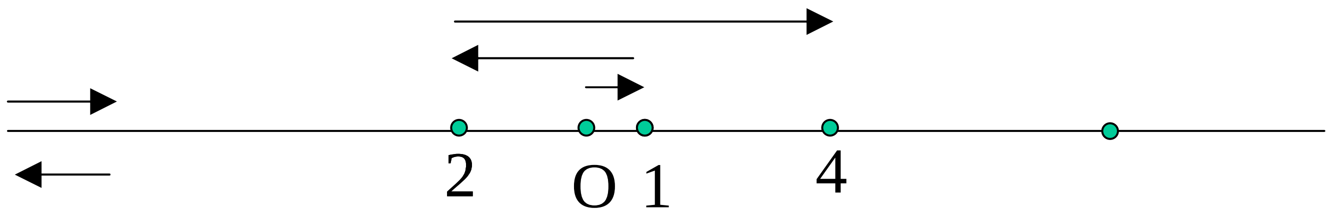
Se debe alcanzar el objetivo situado a distancia desconocida d, minimizando el número de pasos

Estrategia: Alternar la búsqueda a los dos lados del origen, doblando la distancia recorrida

Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas

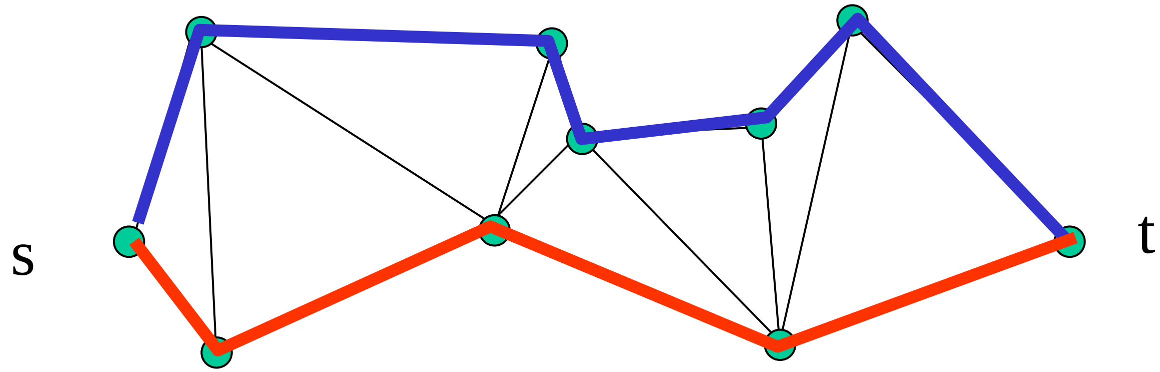
Estrategia de Baeza de búsqueda en la recta



Se comprueba que en, a lo más, 9d pasos se alcanza el objetivo

Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas

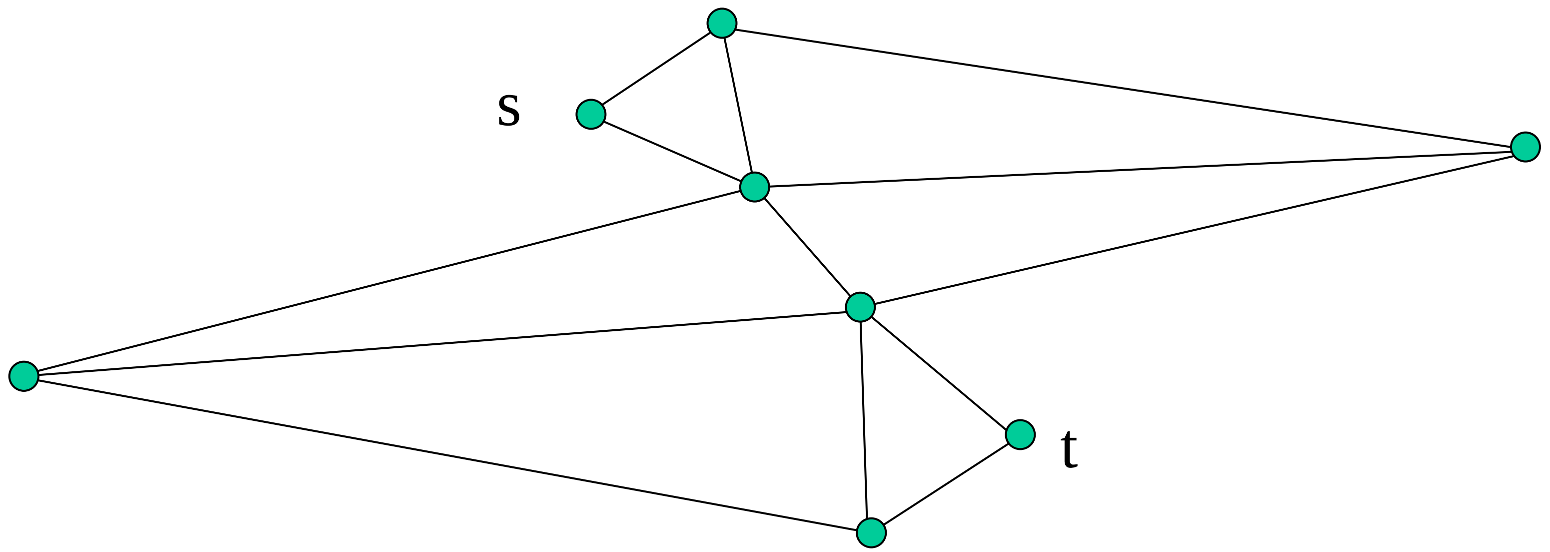


Si consideramos las cadenas superior e inferior como los dos lados del origen, la técnica anterior proporciona una estrategia 9-competitiva en el caso de que el camino más corto sea una de dichas cadenas.

Pero ...

Algoritmo con memoria constante

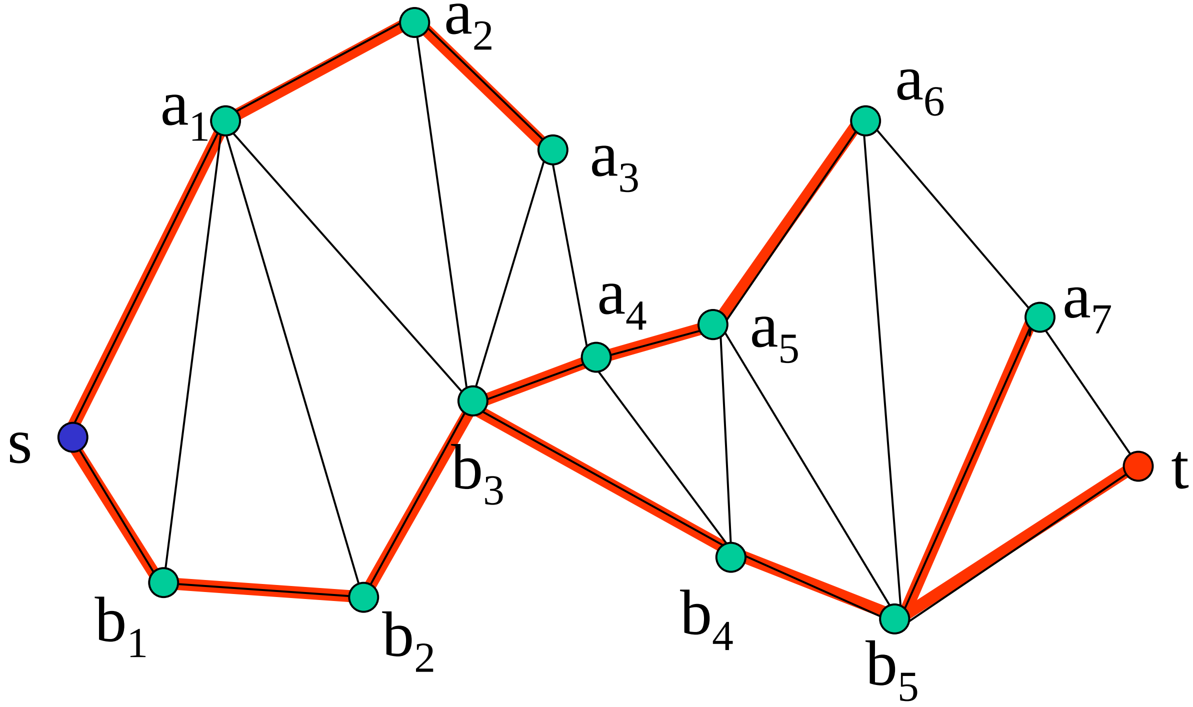
Triangulaciones serpentinas



Los caminos por las cadenas superior e inferior pueden ser muy largos

Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas



T(s) árbol de caminos mínimos desde s

El camino mínimo de s a t visita TODOS los nodos de ramificación de T(s)

Algoritmo con memoria constante

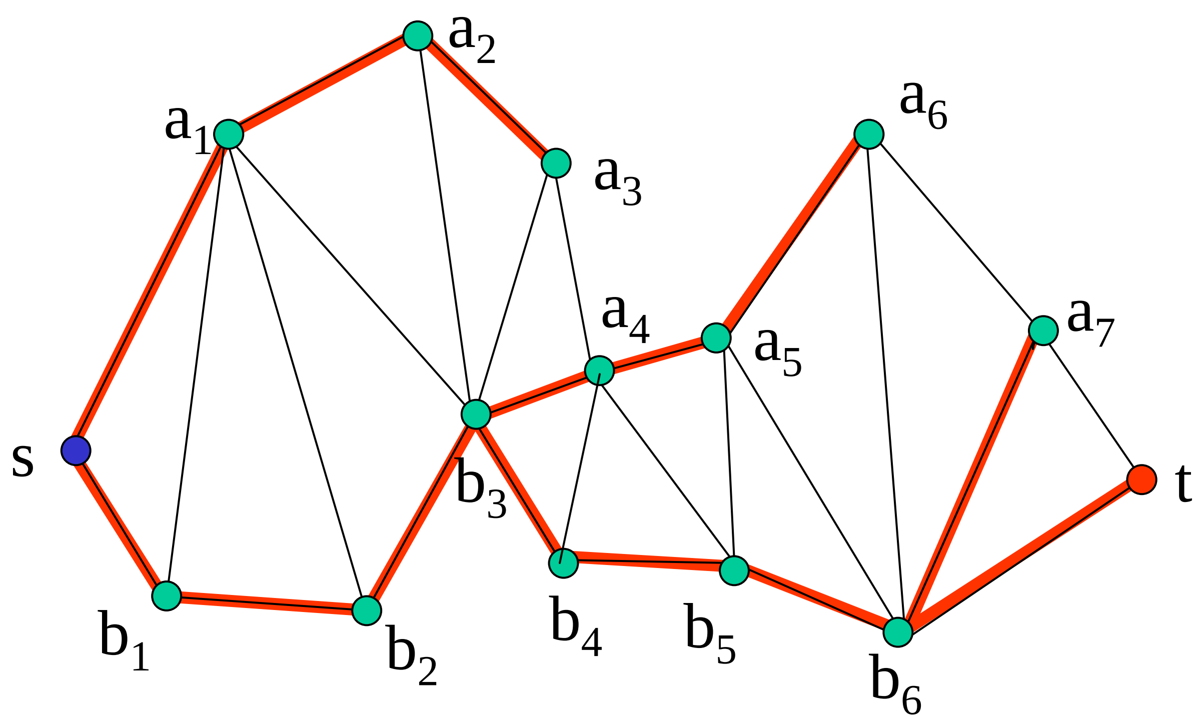
Triangulaciones serpentinas

Estrategia:
1. Detectar los nodos de ramificación
2. Moverse de un nodo a otro de forma competitiva

Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas

1. Detección con memoria constante
   Si a_i es adyacente a b_j, b_{j+1}, ... ,b_k, conociendo las longitudes de SP(s, a_{i-1}) y de SP(s, b_j) se puede determinar si a_i y sus adyacentes son ramificación



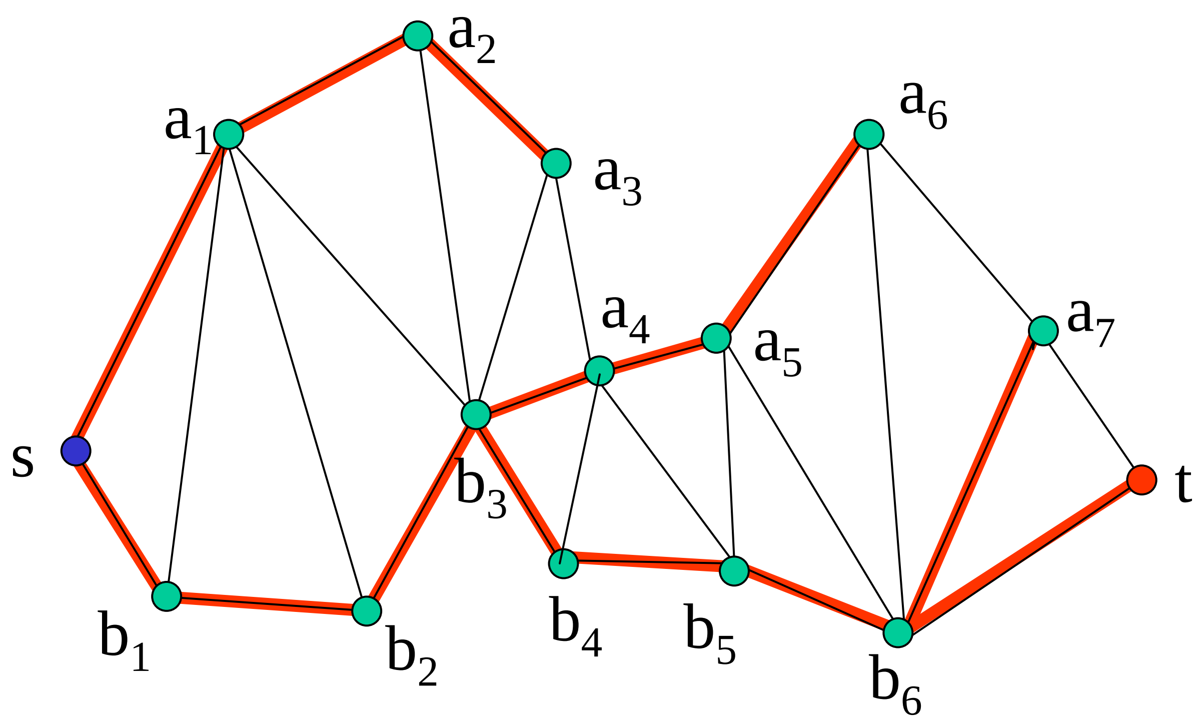
Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas

1. Detección con memoria constante

b_j es de ramificación si

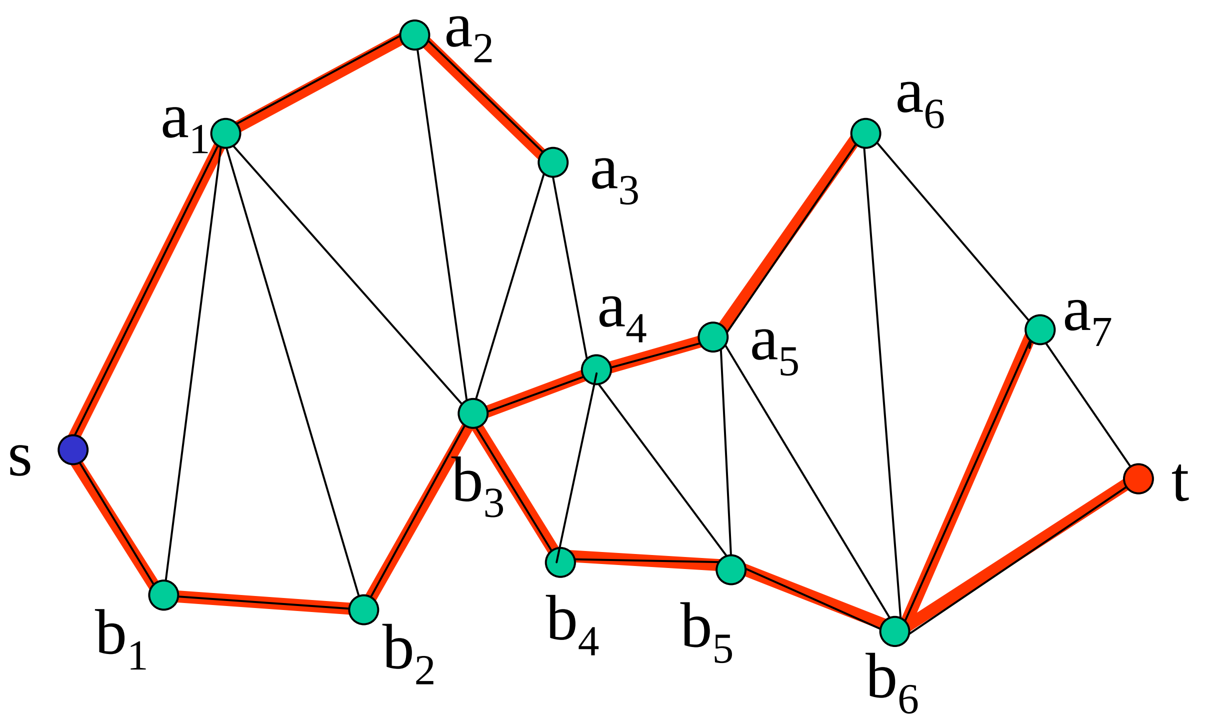
$$|SP(s,b_j)| + dist(b_j, a_i) < |SP(s, a_{i-1})| + dist(a_{i-1}, a_i)$$



Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas

2. Moverse de un nodo a otro
   Sólo hay que explorar dos caminos (por la cadena superior o por la inferior)



La estrategia de Baeza consigue partir de un nodo x y alcanzar el siguiente y después de a lo más 9 SP(x,y)

Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones serpentinas

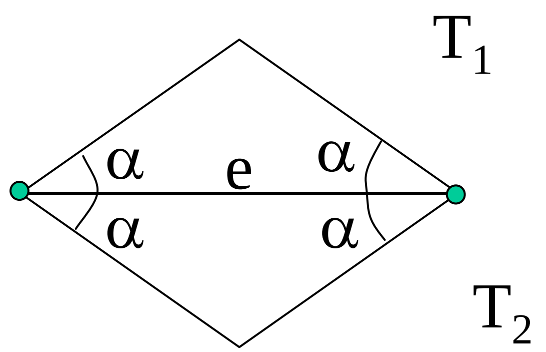
Estrategia:
1. Detectar los nodos de ramificación
2. Moverse de un nodo a otro de forma competitiva

El algoritmo descrito alcanza el vértice t habiendo viajado a lo más 9 veces SP(s,t). Por tanto es 9-competitivo

Algoritmo con memoria constante

Triangulaciones diamantinas

La arista e es α-diamantina
si o en T_1 o en T_2 no hay vértices



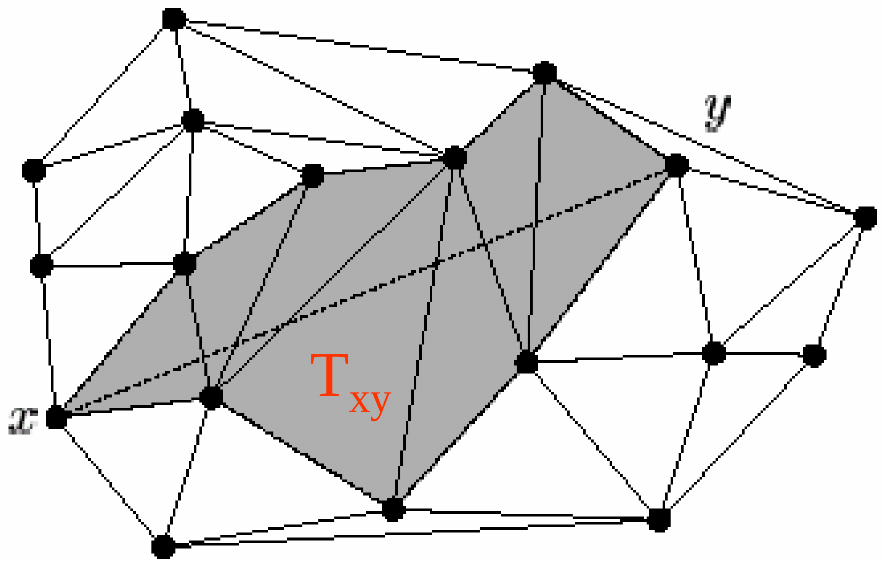
La triangulación de Delaunay
es $(\pi/4)$-diamantina

Estas triangulaciones aproximan el grafo completo euclídeo

Si T es una triangulación α-diamantina existe una constante d_α tal que $SP(T,x,y) < d_\alpha \, dist(x,y)$

Algoritmo con memoria constante

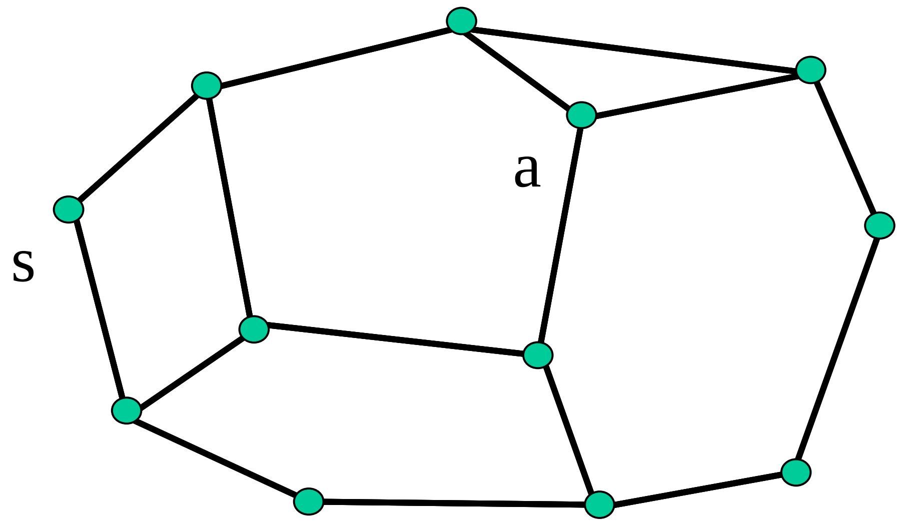
Triangulaciones diamantinas



$9\ SP(x,y) < 9\ d_\alpha\ dist(x,y)$

Dada una triangulación T, α-diamantina, y los vértices x, y, existe un algoritmo de ruteo con memoria constante que envía un paquete de x hasta y recorriendo una distancia a lo más $9\ d_\alpha\ dist(x,y)$

Distancia de enlace (“link”)



dist link (s,a)=3

En esta métrica no hay algoritmos competitivos para las triangulaciones de Delaunay, voraz ni de mínimo peso

¿Para qué grafos geométricos hay algoritmos competitivos?

REFERENCIAS BÁSICAS

- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry*, Springer, 1997
- J. Mitchell, *Shortest paths and networks*, Handbook of Discrete and Computational Geometry, (J. Goodman, J. O'Rourke, ed.) CRC, 1997

RUTEO

- P. Bose, P. Morin, *Online routing in triangulations*, ISAAC'99
- E. Kranakis, H. Singh, J. Urrutia, *Compass routing on geometric networks*, CCCG'99
- P. Bose, P. Morin, *Competitive online routing in geometric graphs*, 2002

Software en la red

http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomcomp/aplicaciones.html

Robot en un polígono

http://web.informatik.uni-bonn.de/I/GeomLab/index.html.en