UPM

Departamento de
Matemática Aplicada

Problema de Dinitz
Cuadrados latinos y Coloración por listas

Gregorio Hernández Peñalver

V Seminario de Matemática Discreta

27-3-2003

PROBLEMA DE DINITZ

SUMARIO

- CUADRADOS LATINOS
- COLORACIÓN POR LISTAS
- PROBLEMA DE DINITZ
  - NÚCLEO DE UN GRAFO $\leftrightarrow$ COLORACIÓN POR LISTAS
  - ESTABILIDAD EN EMPAREJAMIENTOS

El problema de los 36 oficiales

Euler, 1782
6 regimientos
6 graduaciones

En cada fila todos los regimientos y todas las graduaciones

¿Es posible disponer los oficiales en el desfile?

CUADRADOS LATINOS

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

a	b	c	d
c	d	a	b
d	c	b	a
b	a	d	c

Cuadrado latino de orden n es una tabla n×n en que cada uno de los n símbolos aparece una vez por fila y una vez por columna

CUADRADOS LATINOS

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

a	b	c	d
c	d	a	b
d	c	b	a
b	a	d	c

1a	2b	3c	4d
2c	1d	4a	3b
3d	4c	1b	2a
4b	3a	2d	1c

Cuadrados latinos ortogonales

El problema de los 36 oficiales

La solución es un par de cuadrados latinos ortogonales de orden 6

Euler conjeturó que no existían para n = 6, 10, 14, ...

Tarry demostró que no existían para n = 6

1959 Bose, Shrikande, Parker
la conjetura de Euler es falsa salvo para n = 6

(titulares en el New York Times)

CUADRADOS LATINOS

Diseños combinatorios

Experimento agrícola

- 4 variedades de trigo. La parcela se divide en 16 campos. Cada variedad se planta en cada fila y en cada columna.

Cuadrado latino

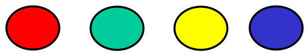
- 4 tipos de abono, a, b, c y d.

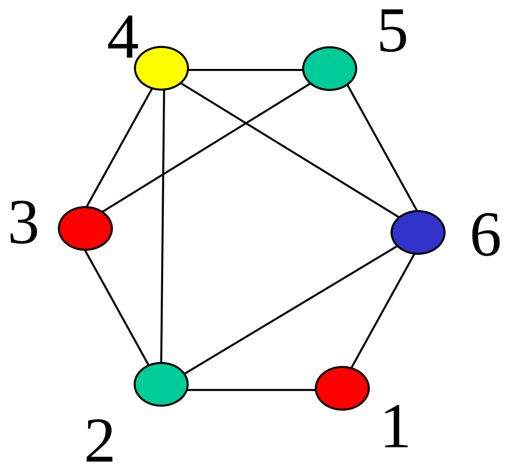
Cuadrados latinos ortogonales

1a	2b	3c	4d
2c	1d	4a	3b
3d	4c	1b	2a
4b	3a	2d	1c

COLORACIÓN POR LISTAS

Coloración de grafos

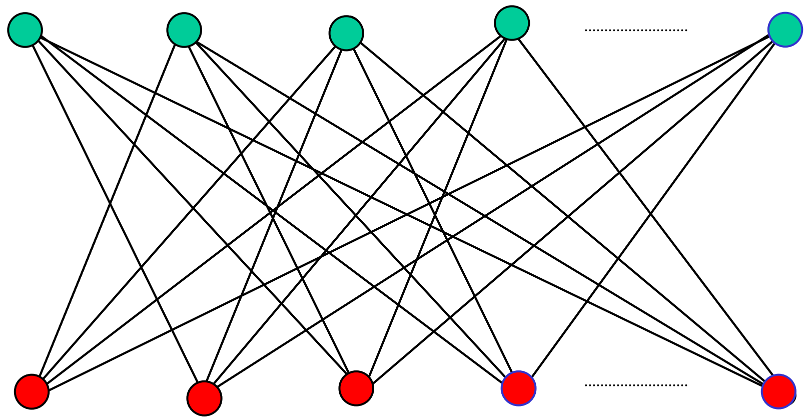
Colores = {  }



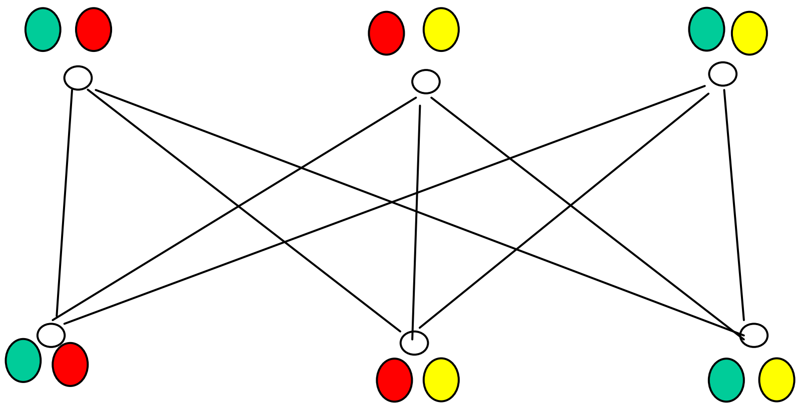
Si la lista de colores disponibles en cada vértice es distinta, tenemos la coloración por listas

Un grafo G es k-coloreable por listas (o *k-elegible*) si de cualquier asignación de una lista de k colores a cada uno de sus vértices se puede extraer una coloración válida

Si G es un grafo bipartido, entonces $\chi(G) = 2$

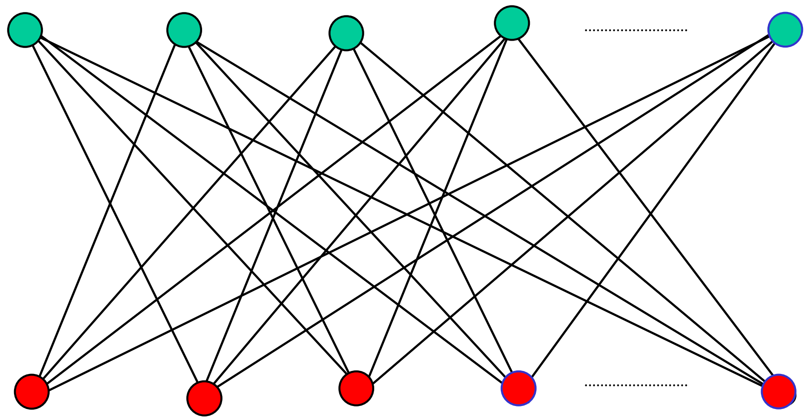


Pero hay grafos bipartidos que no son 2-coloreables por listas

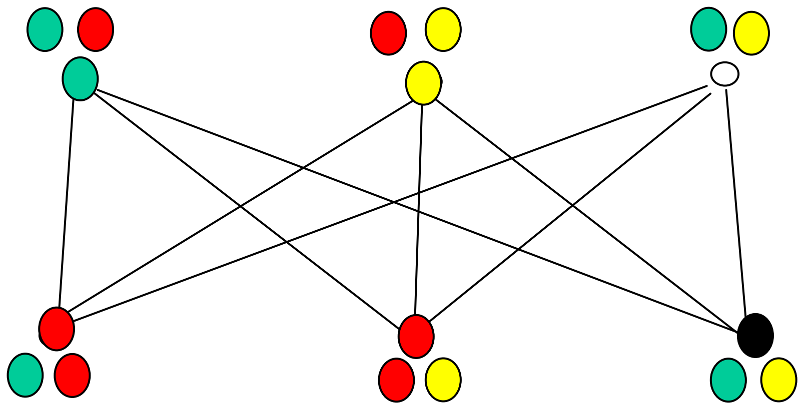


Con estas 2-listas, el grafo NO admite una coloración propia

Si G es un grafo bipartido, entonces $\chi(G) = 2$



Pero hay grafos bipartidos que no son 2-coloreables por listas



Con estas 2-listas, el grafo NO admite una coloración propia

COLORACIÓN POR LISTAS (Vizing, 1975)

Número cromático de un grafo, $\chi(G)$

Número cromático por listas de un grafo, $\chi_\ell(G)$

$\chi_\ell(G) = \min\{k \,/\, \forall\ C(v)$ con $|C(v)|=k$, existe una coloración de $G\}$

- $\chi(G) \leq \chi_\ell(G)$
- Existen grafos bipartidos con $\chi_\ell(G) >> 0$

Conjetura de Erdös, Rubin y Taylor (1979)

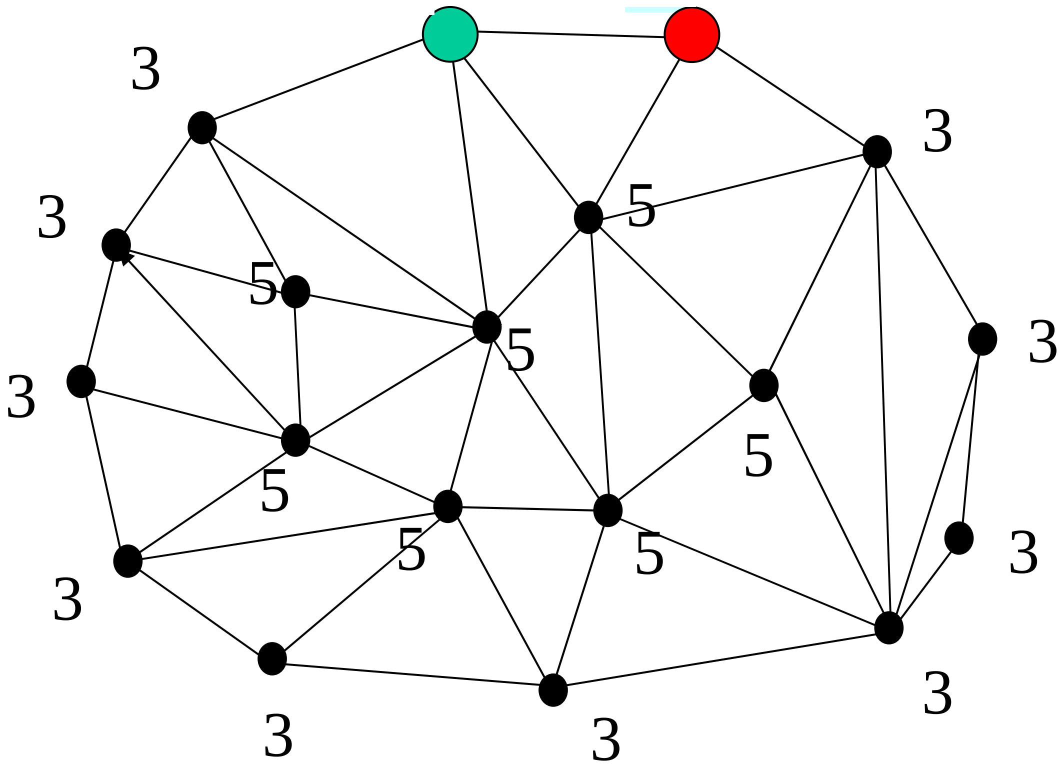
Si G es un grafo plano, entonces $\chi_\ell(G) \leq 5$

Voigt, en 1993, presenta un ejemplo de un grafo plano con 238 vértices que no es 4-elegible, es decir, $\chi_\ell(G) \geq 5$

Teorema (Thomassen, 1994)
Todo grafo plano es 5-elegible

En particular, $\chi(G) \leq 5$ para todo grafo plano G

Demostración:



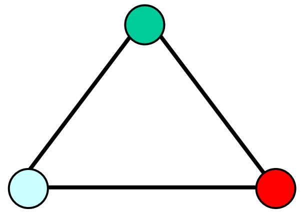
Sea G=(V,A) un grafo plano casi-triangulado (todas las caras acotadas son triángulos) y sea B el ciclo exterior. En cada vértice v se dispone de un conjunto de colores C(v) tal que:

(1) Existen dos vértices x,y de B ya coloreados con dos colores distintos (verde y rojo, por ej.)
(2) $|C(v)|\geq 3$ para los restantes vértices de B
(3) $|C(v)|\geq 5$ para los vértices del interior de B

Entonces la coloración de los vértices x, y puede extenderse a una coloración propia de G con colores elegidos de las listas C(v)

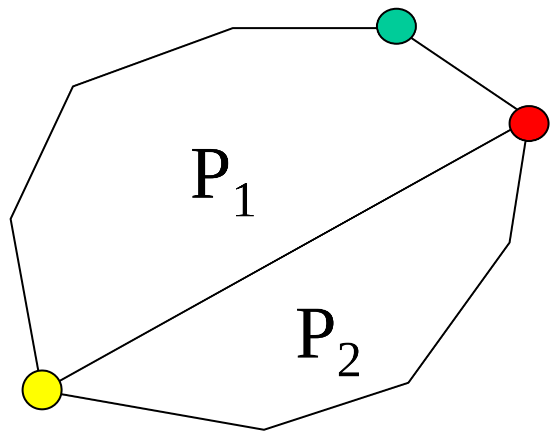
Inducción sobre n
n=3, obvio

3



Distinguimos dos casos:

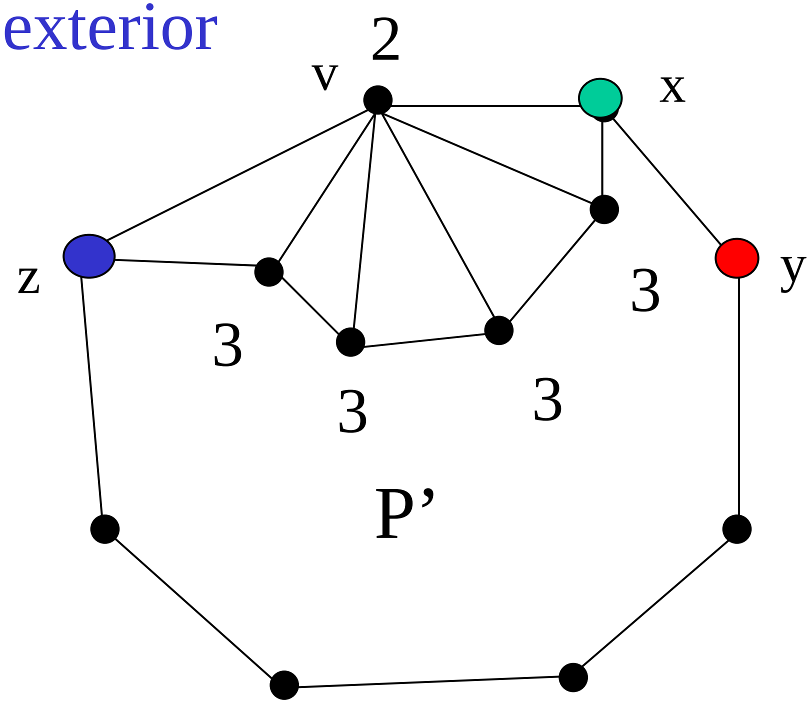
1) Hay diagonal en el polígono exterior



Por inducción se puede colorear P_1

y de nuevo aplicamos la hipótesis de inducción a P_2

2) No hay diagonal en el polígono exterior



Si x, y son los vértices con precolor,

tenemos 2 colores válidos para v
y los borramos de las listas de u's

Aplicamos inducción a P-{v}=P'

evitando el color de z, aún nos
queda un color libre para v

¡TODO COLOREADO!

PROBLEMA DE DINITZ

Un tablero cuadrado con n^2 casillas
En cada casilla (i,j) se dispone de los n colores del conjunto c(i,j)
¿Es posible colorear las casillas de forma que los colores de las casillas de cada fila y de cada columna sean distintos?

n=2

{1,2}	{2,3}
{1,3}	{2,3}

2	3
1	2

PROBLEMA DE DINITZ 1978

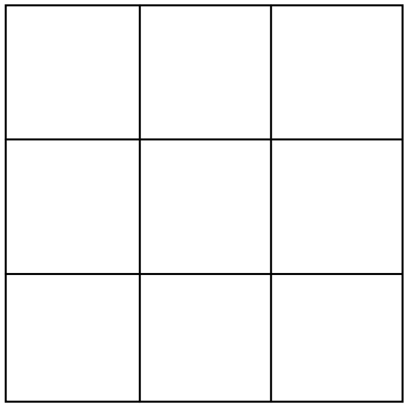
Un tablero cuadrado con n^2 casillas
En cada casilla (i,j) se dispone de los n colores del conjunto c(i,j)
¿Es posible colorear las casillas de forma que los colores de las casillas de cada fila y de cada columna sean distintos?

Si $c(i,j)=\{1, 2, ..., n\}$ $\Longrightarrow$ CUADRADO LATINO

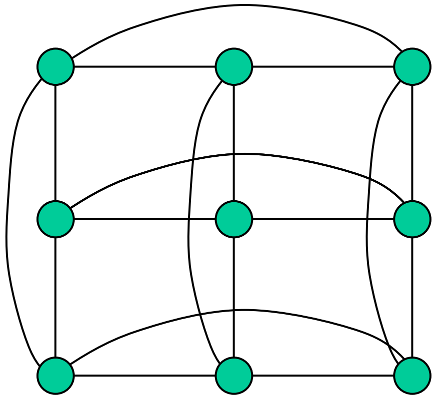
1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

PROBLEMA DE DINITZ

Traducción a un problema de coloración por listas en un grafo



Tablero



Grafo S_n

$$¿\ \chi_\ell(S_n) = n\ ?$$

$\chi_\ell(S_n) \geq n$ (las n casillas de una fila reciben diferente color)

$\chi_\ell(S_n) \leq n+1$ Janssen, 1991

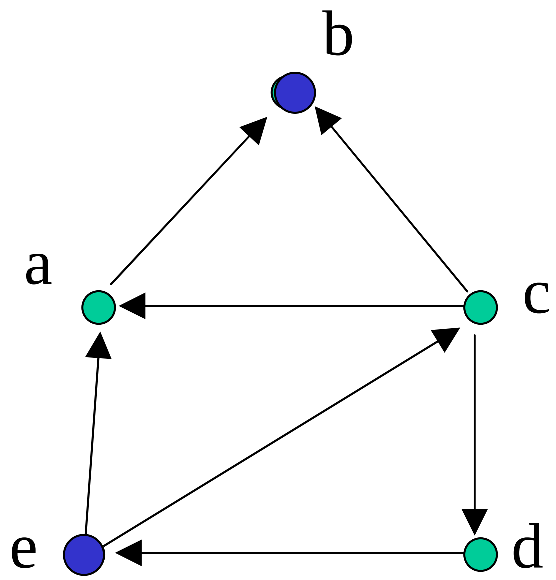
NÚCLEO DE UN DIGRAFO

D=(V,A) digrafo, $K \subset V$ es núcleo de D si

(1) K es independiente ($\forall$ x,y $\in$ K, x e y no adyacentes)

(2) K es dominante ($\forall$ u$\notin$K, existen v $\in$ K, y el arco uv)

D



K={e,b}

NÚCLEO Y COLORACIÓN POR LISTAS

LEMA

$D = (V,A)$ digrafo, $\forall\ v \in V$ tenemos $C(v)$ con $|C(v)| \geq d^+(v)+1$
Si cada subgrafo inducido de D posee núcleo, entonces se pueden colorear los vértices de D con los colores de las listas $C(v)$

Tenemos que colorear el grafo S_n con listas de tamaño n. Una vez probado este lema sólo necesitaremos orientar S_n de forma que:

(1) $d^+(v) = n - 1$
(2) cada subgrafo inducido tenga núcleo

NÚCLEO Y COLORACIÓN POR LISTAS

LEMA

$D = (V,A)$ digrafo, $\forall\, v \in V$ tenemos $C(v)$ con $|C(v)| \geq d^+(v)+1$
Si cada subgrafo inducido de D posee núcleo, entonces se pueden colorear los vértices de D con los colores de las listas C(v)

Dem.: Por inducción sobre n

Para n=1 nada que probar

Elegimos un color $z \in C = \bigcup_{v \in V} C(v)$ $\quad H(z) = \{v \in V / z \in C(v)\}$

El subgrafo inducido <H(z)> posee un núcleo K(z)
Coloreamos los vértices de K(z) con el color z

NÚCLEO Y COLORACIÓN POR LISTAS

Dem. (sigue)

Borramos $K(z)$ del grafo G y el color z de los colores C

$$G' = G - K(z) \qquad\qquad C'(v) = C(v) - \{z\}$$

si $v \in H(z) - K(z)$, $d^+(v)$ disminuye una unidad al menos

luego $d^+(v)+1 \leq |C'(v)|$ sigue siendo válido

si $v \notin H(z)$, $C'(v) = C(v)$

luego $d^+(v)+1 \leq |C'(v)|$ sigue siendo válido en todo G'

Así podemos aplicar la hipótesis de inducción a G'

NÚCLEO Y COLORACIÓN POR LISTAS

Dem. (sigue)

Los vértices de G’ se colorean con los colores de las listas C’(v)
Los vértices de K(z) se colorean con el color z

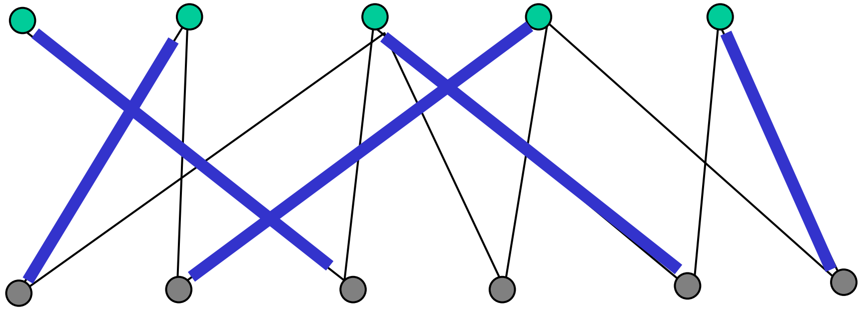
Luego podemos colorear G con los colores de las listas C(v)

Sólo falta orientar S_n de forma que:

(1) $d^+(v) = n - 1$
(2) cada subgrafo inducido tenga núcleo

EMPAREJAMIENTOS ESTABLES

Emparejamiento en un grafo bipartido $G=(U \cup V,A)$



es un conjunto independiente de aristas

Estabilidad en emparejamientos

Se atiende a las preferencias de las parejas.
Objetivo: "estabilidad"

{X,Y,Z,W} {A,B,C,D}

Listados de preferencias

X	A	B	C	D
Y	A	C	B	D
Z	C	D	A	B
W	C	B	A	D

A	Z	X	Y	W
B	Y	W	X	Z
C	W	X	Y	Z
D	X	Y	Z	W

El emparejamiento M={XA, YC, ZD, WB} no es estable
W y C se "divorciarán"

Estabilidad en emparejamientos

Un emparejamiento M de $G=(U \cup V,A)$ es estable si para cada arista uv de $A-M$ entonces, o bien existe $uy \in M$ con $y>v$ en $R(u)$, o bien existe $xv \in M$ con $x>u$ en $R(v)$ o bien existen ambas aristas

No es necesario que el grafo sea completo

Teorema (Gale, Shapley)
Siempre existe un emparejamiento estable

Estabilidad en emparejamientos

Algoritmo (Gale-Shapley)

Paso 1: Cada mujer propone su primera elección.
Paso 2: Los hombres con dos o más propuestas responden rechazando a todas menos a la más favorable.
Paso 3: Las mujeres rechazadas proponen su segunda elección. Las que no fueron rechazadas continúan con su propuesta.
Paso 4: Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que ninguna propuesta sea rechazada.

Estabilidad en emparejamientos

Algoritmo (Gale-Shapley)

X	A	B	C	D
Y	A	C	D	B
Z	C	D	A	B
W	C	B	A	D

A	Z	X	Y	W
B	Y	W	X	Z
C	W	X	Y	Z
D	X	Y	Z	W

X	A	A	A	~~A~~	B
Y	~~A~~	~~C~~	D	D	D
Z	~~C~~	D	~~D~~	A	A
W	C	C	C	C	C

$\boxed{\text{Teorema (Galvin)}}$

$\boxed{\chi_{\ell}(S_n) = n}$

Demostración

Orientamos S_n de forma que:

(1) $d^+(v) = n - 1$

(2) cada subgrafo inducido tenga núcleo

Se toma un cuadrado latino L sobre las n^2 casillas del tablero

$L(i,j)$ es el valor en la casilla (i,j)

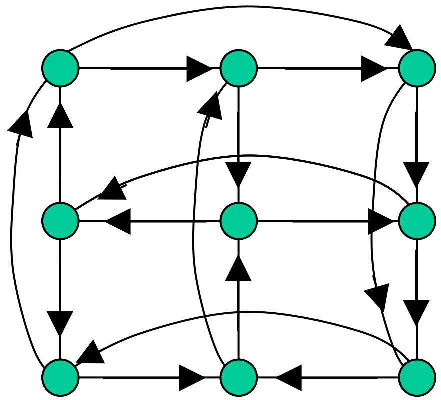
La orientación es $(i,j) \to (i,q)$ si $L(i,j) < L(i,q)$

$(i,j) \to (p,j)$ si $L(i,j) > L(p,j)$

Teorema (Galvin) $\chi_\ell(S_n) = n$

Demostración

1	2	3
3	1	2
2	3	1



(1) $d^+(i,j) = n - 1$

pues si $L(i,j) = k$ en su fila hay $n - k$ casillas mayores
y en su columna hay $k - 1$ menores

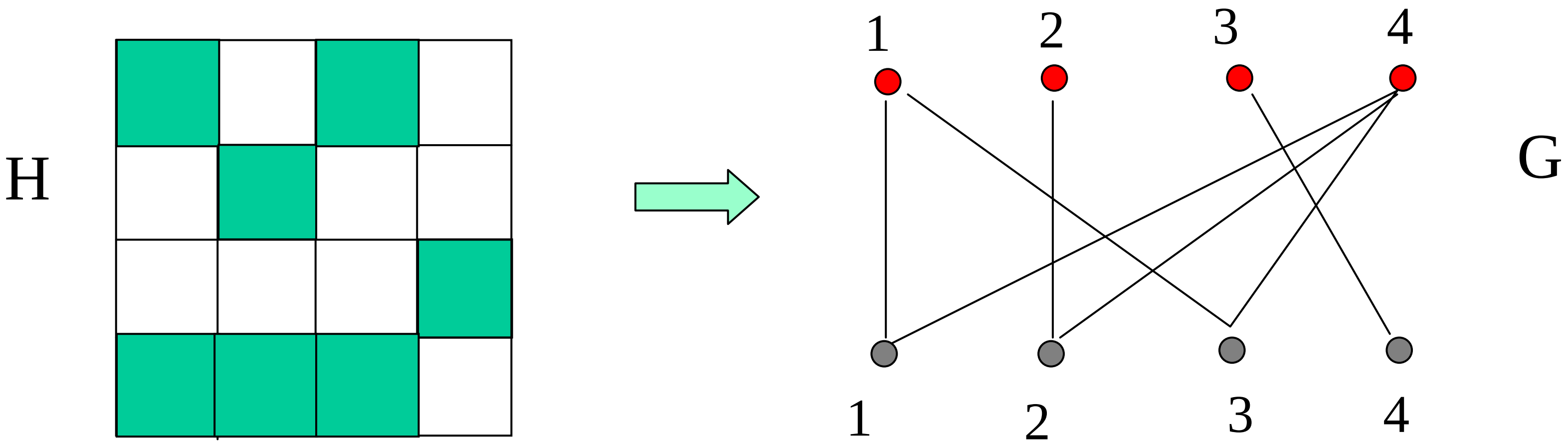
(2) cada subgrafo inducido tiene núcleo

Teorema (Galvin) $\chi_{\ell}(S_n) = n$

Demostración

Sea $H \subset V$. Llamemos X a las filas de H, Y columnas de H

$G = (X \cup Y, H)$ grafo bipartido



La orientación en S_n induce un orden de preferencia entre los vecinos de cada vértice de G

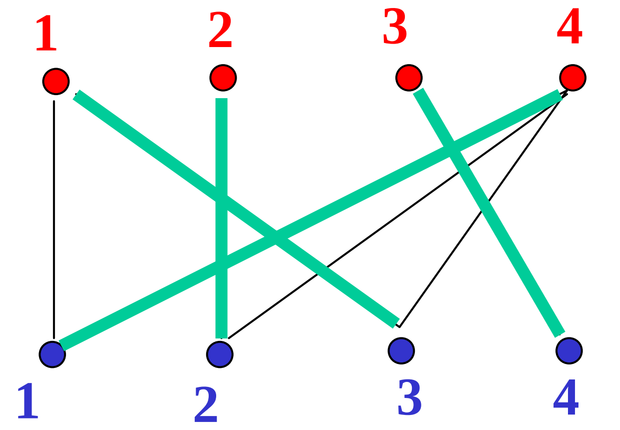
Teorema (Galvin)

$\chi_\ell(S_n) = n$

Demostración

H

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1



G

Preferencia en filas Rf(i) q>j si arista $(i,j) \to (i,q)$

Preferencia en columnas Rc(j) p>i si arista $(i,j) \to (p,j)$

Rf(1) ={3,1} Rf(2)={2} Rf(3)={4} Rf(4)={1,2,3}

Rc(1) ={1,4} Rc(2)={2,4} Rc(3)={4,1} Rc(4)={3}

Emparejamiento estable en G, M={13, 22, 34, 41}

$\boxed{\text{Teorema (Galvin)}}$

$\boxed{\chi_\ell(S_n) = n}$

Demostración

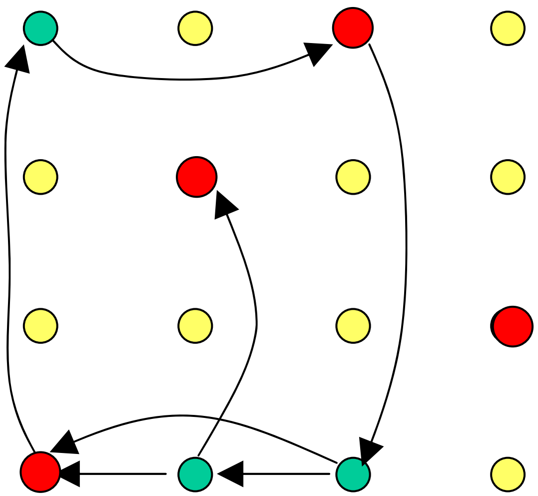
$M = \{13, 22, 34, 41\}$

H

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

S_n

<H>



El emparejamiento estable M en G es un núcleo de <H>

(1) Independencia
(2) Dominancia

Teorema (Galvin)

$\chi_\ell(S_n) = n$

Demostración

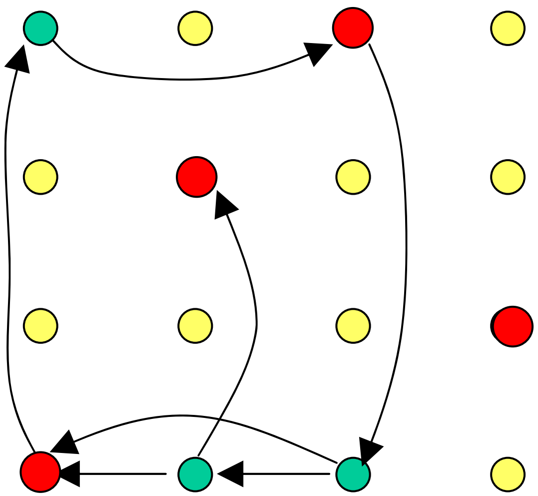
M={13, 22, 34, 41}

H

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

S_n

<H>



El emparejamiento estable M en G es un núcleo de <H>

(1) Independencia

Las aristas de M son independientes, no comparten ni fila ni columna, luego los vértices de M no son adyacentes en S_n

Teorema (Galvin)

$$\chi_{\ell}(S_n) = n$$

Demostración

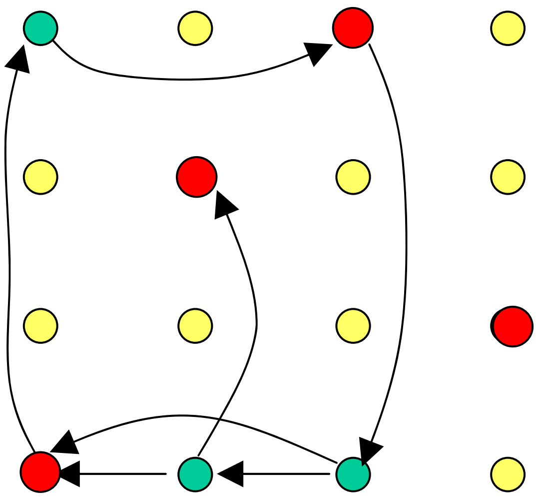
$M=\{13, 22, 34, 41\}$

H

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

S_n

<H>



El emparejamiento estable M en G es un núcleo de <H>

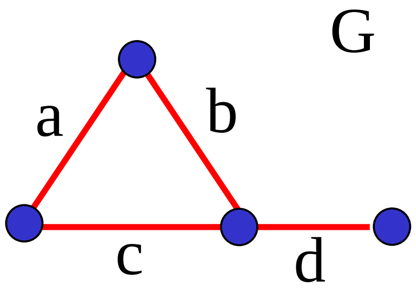
(2) Dominancia

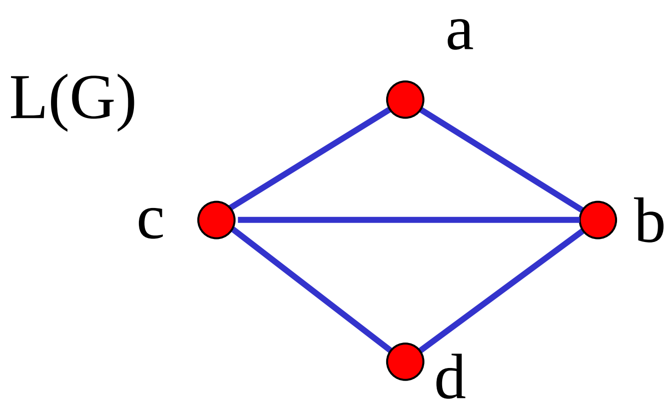
Si $(i,j)\in H-M$ debemos encontrar z en M con $(i,j)\rightarrow z$

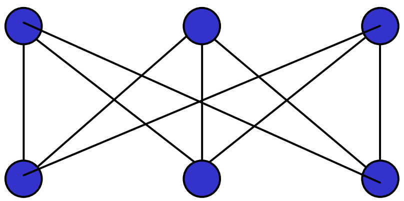
Por M estable o bien existe $(i,q)\in M$ con $q>j$, $(i,j)\rightarrow (i,q)$
o bien existe $(p,j)\in M$ con $p>i$, $(i,j)\rightarrow (p,j)$

Grafos lineales y coloración por listas

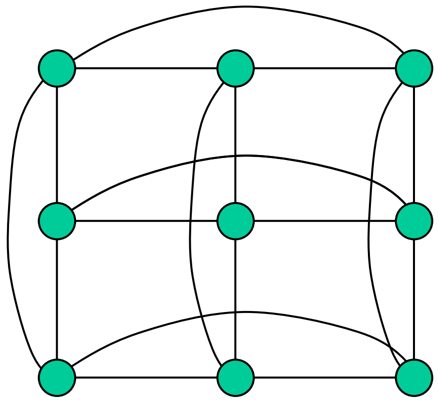
Grafo lineal







$S_n = L(K_{n,n})$



$$\boxed{\chi_\ell(S_n) = \chi(S_n) = n}$$

$$\boxed{\chi'_\ell(K_{n,n}) = n}$$

Grafos lineales y coloración por listas

Teorema (Galvin)

Si G es un grafo bipartido entonces

$$\chi_{\ell}(L(G)) = \chi(L(G))$$

Conjetura

¿Es cierto que $\chi_{\ell}(H) = \chi(H)$ para todo grafo lineal?

Bibliografía

- M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 1999
- D. Gale, L. S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, Amer. Math. Monthly, vol. 69, pág. 9-15, 1962
- F. Galvin, *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combinatorial Theory, Ser B vol. 63, pág. 153-158, 1995
- C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Combinatorial Theory, Ser B vol. 62, pág. 180-181, 1994
- M. Voigt, *List colorings of planar graphs*, Discrete Math., vol. 120, pág. 215-219, 1993