Facultad de Informática
UPM

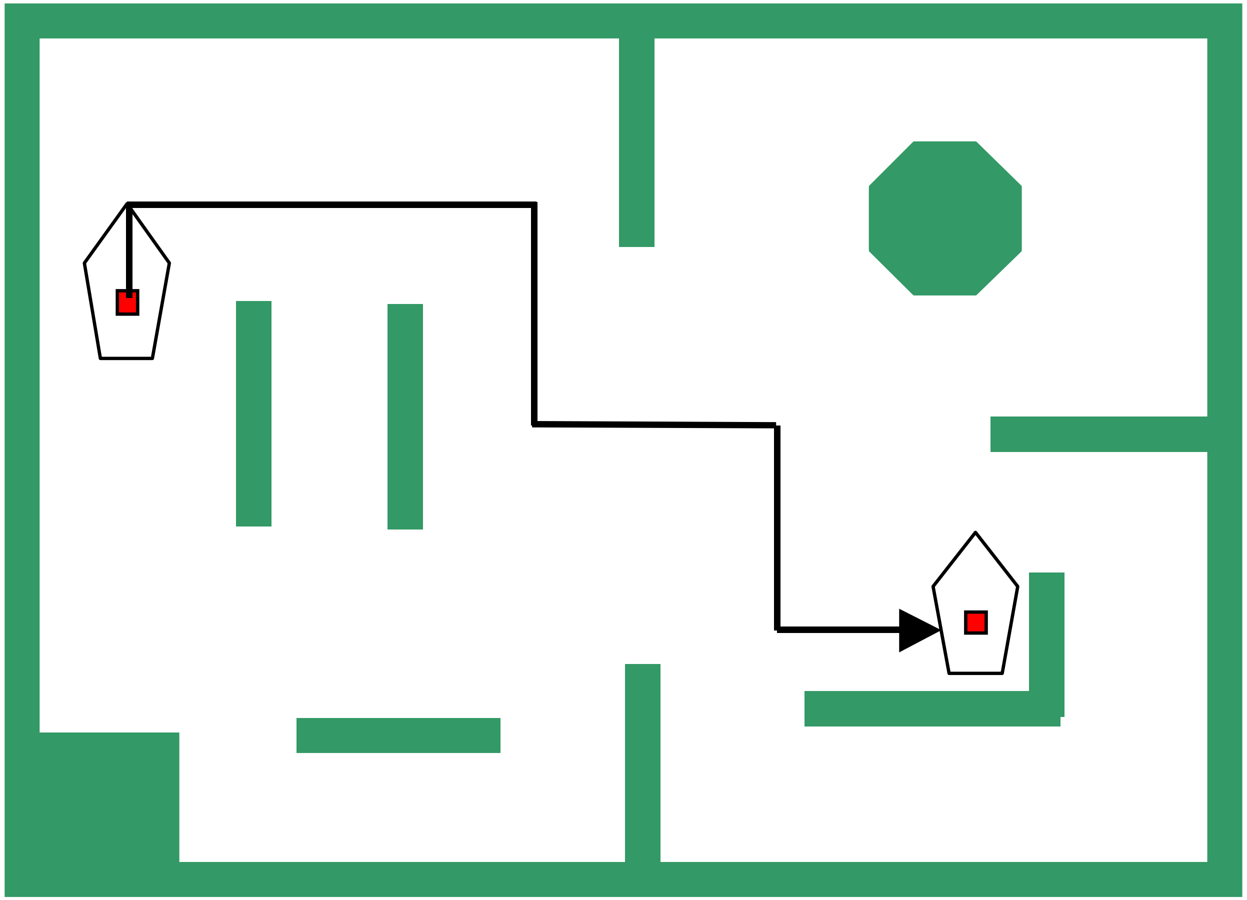
CACIC 2002

VISIBILIDAD E ILUMINACIÓN

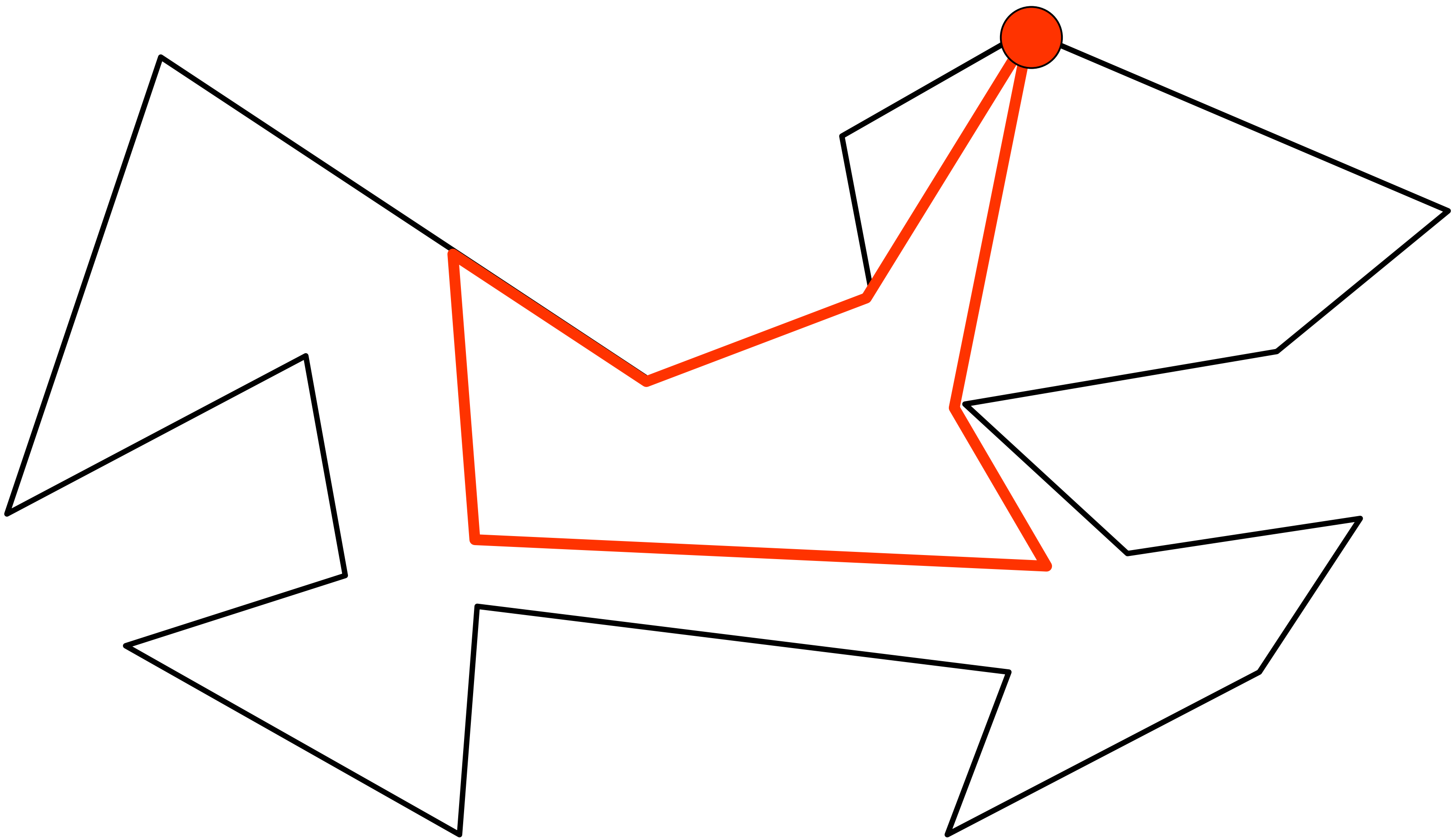
Gregorio Hernández Peñalver

Octubre 2002

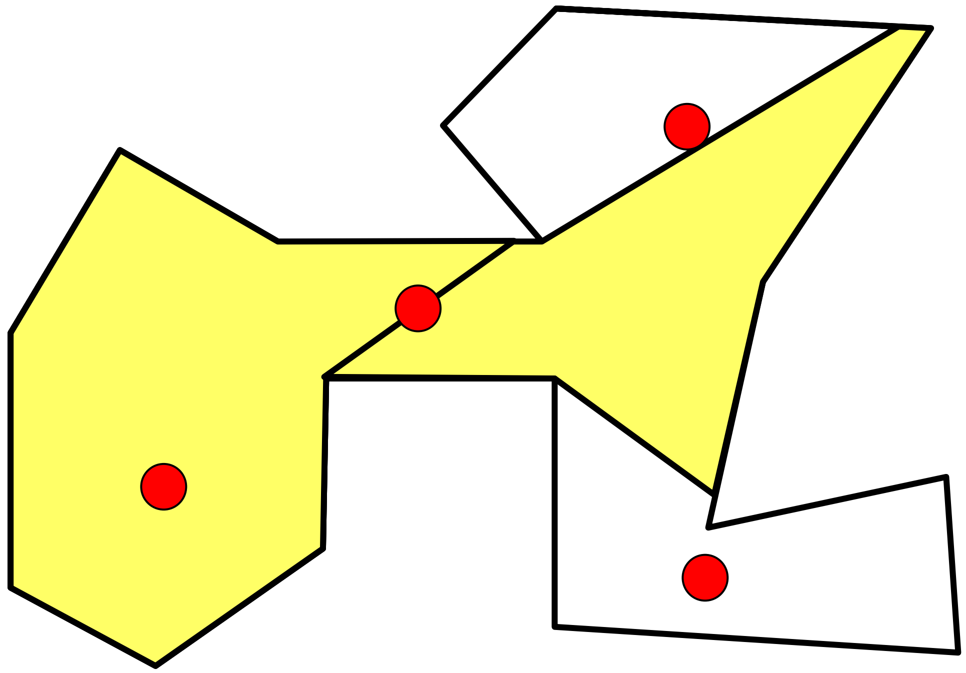
Planificación de movimientos



Rutas de vigilancia



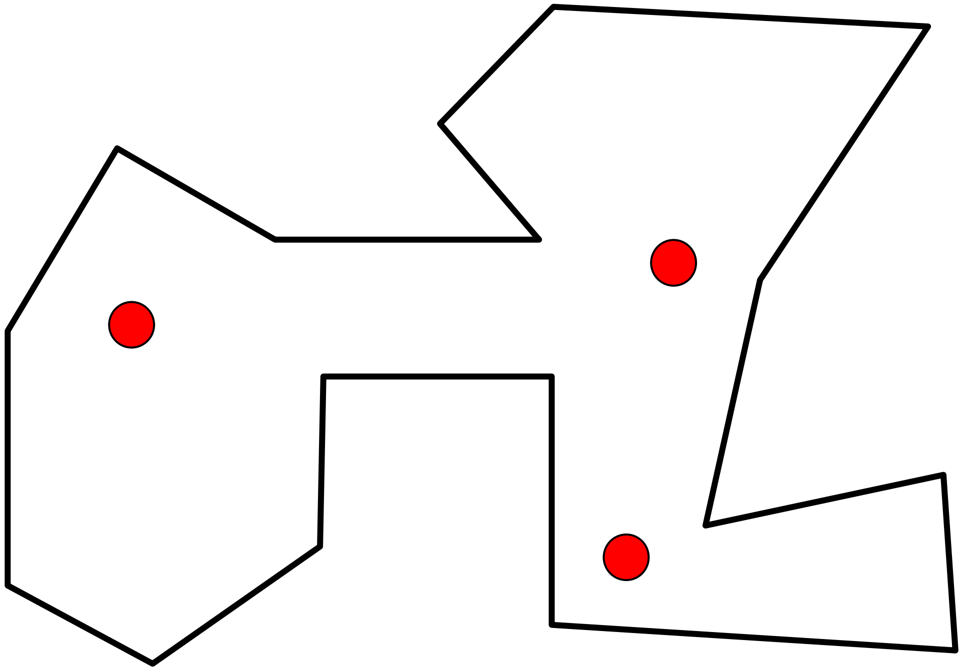
GALERÍAS DE ARTE



¿Cuántas luces? ¿Cuántos guardias?

PROBLEMA DE LAS GALERÍAS DE ARTE

GALERÍAS DE ARTE



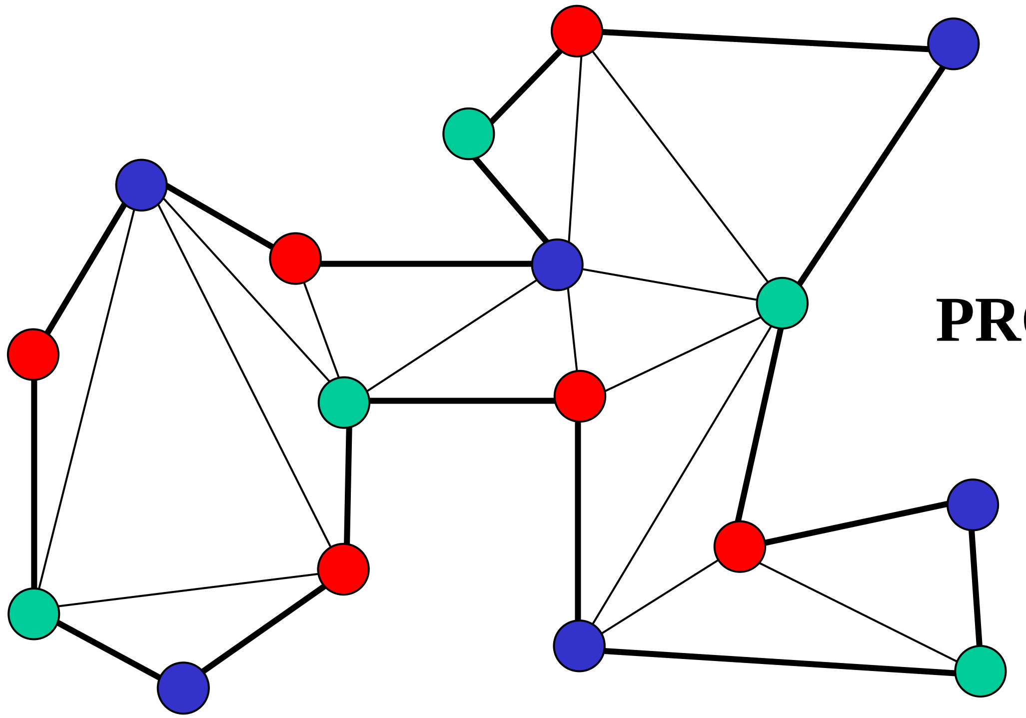
NP-completo

Colocar el menor nº de guardias **PROB. ALGORÍTMICO**

Dado n, hallar el nº de guardias suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados **PROB. COMBINATORIO**

Colocar ese nº de guardias **PROB. ALGORÍTMICO**

GALERÍAS DE ARTE

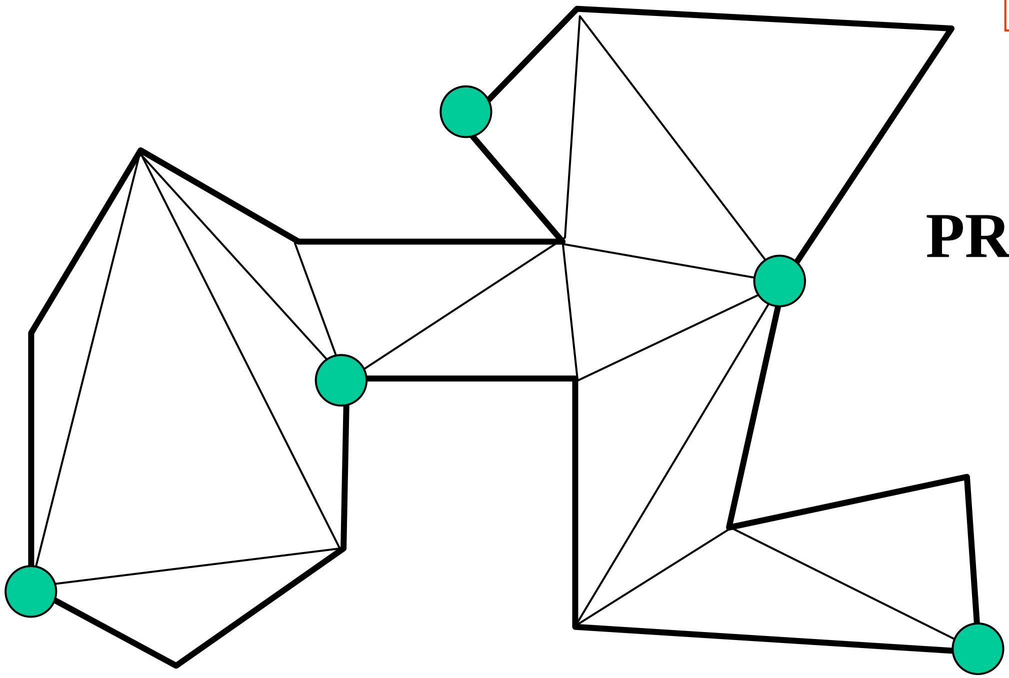


PROB. COMBINATORIO

1. TRIANGULAR

2. COLOREAR CON 3 COLORES

GALERÍAS DE ARTE



PROB. COMBINATORIO

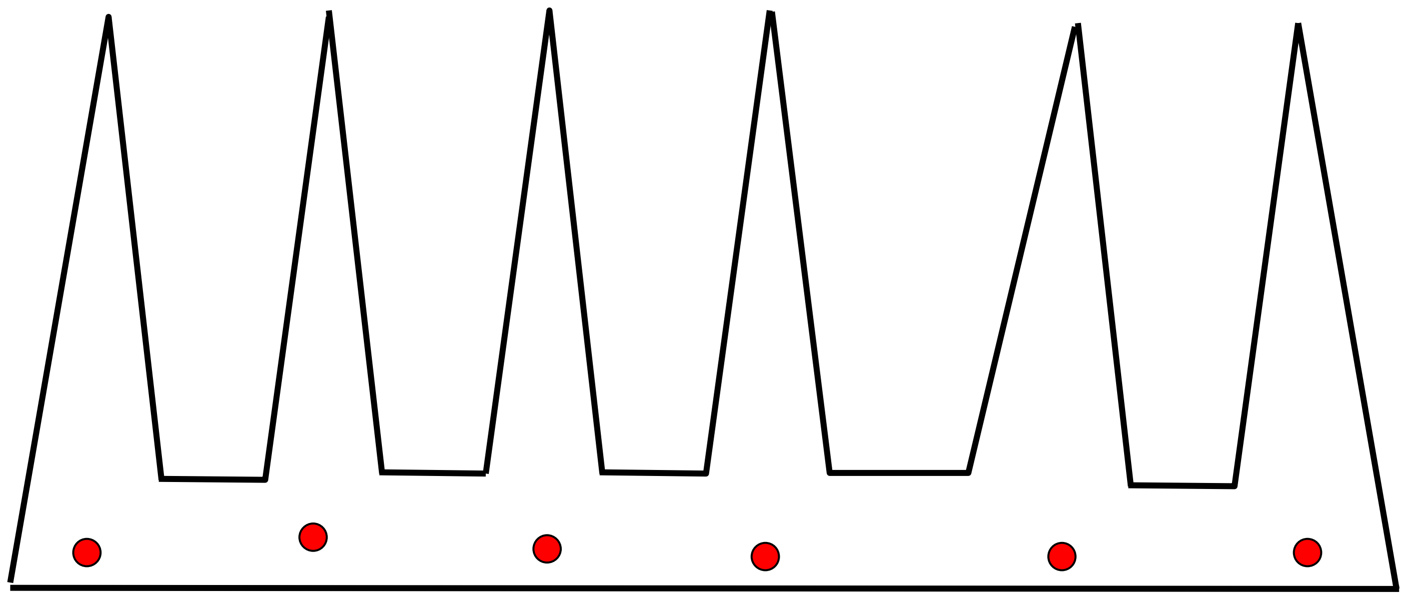
⌊n/3⌋ guardias siempre son suficientes

1. TRIANGULAR

2. COLOREAR CON 3 COLORES

3. PONER GUARDIAS EN EL COLOR MENOS FRECUENTE

GALERÍAS DE ARTE

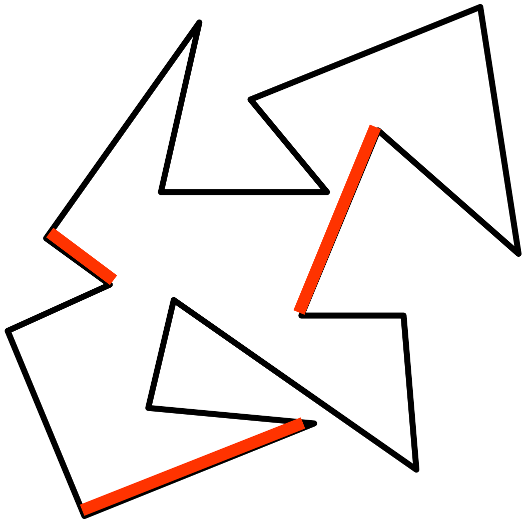


Teorema (Chvátal, 1978)

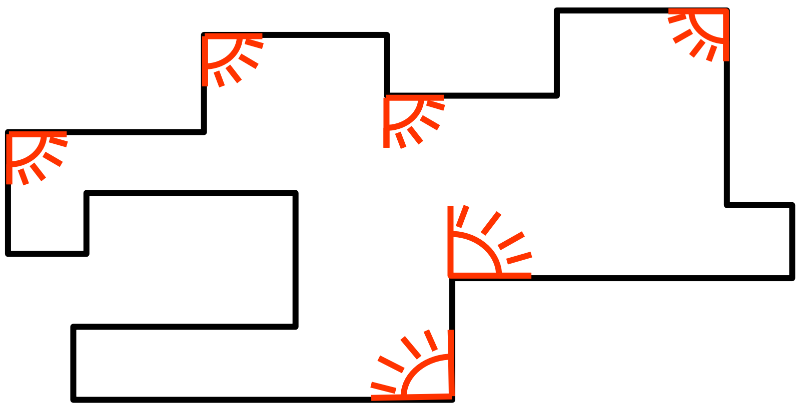
$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

Variantes del Problema de las Galerías de Arte

- Diferentes recintos
- Diferentes formas de mirar o iluminar



Guardias lado

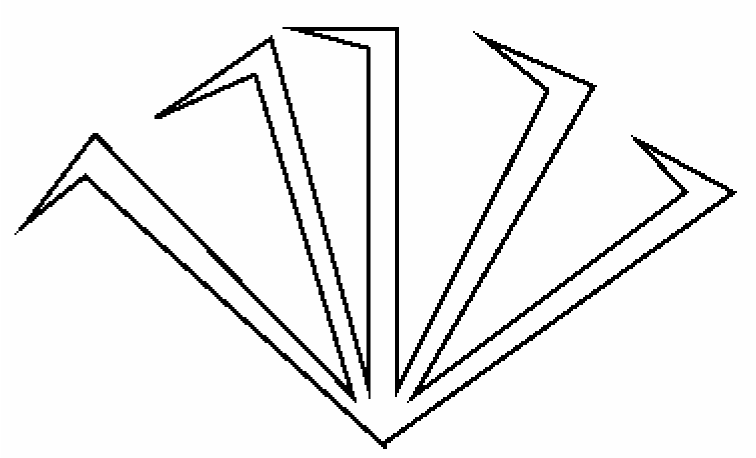


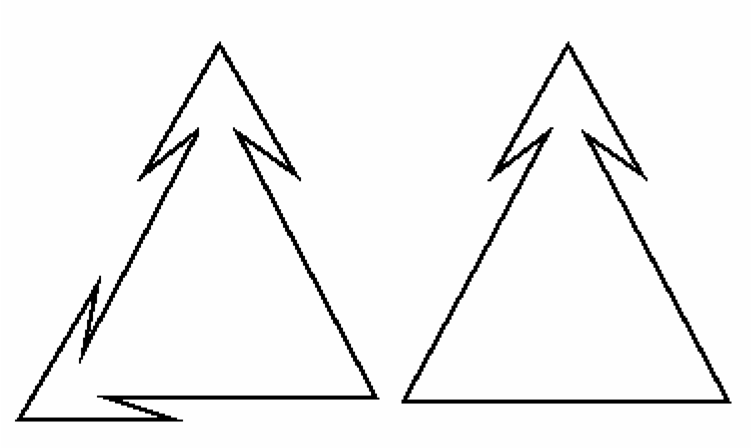
Reflectores

Problemas abiertos

Conjetura (Toussaint, 1983)

$\lfloor n/4 \rfloor$ guardias lado siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados (salvo para dos polígonos)

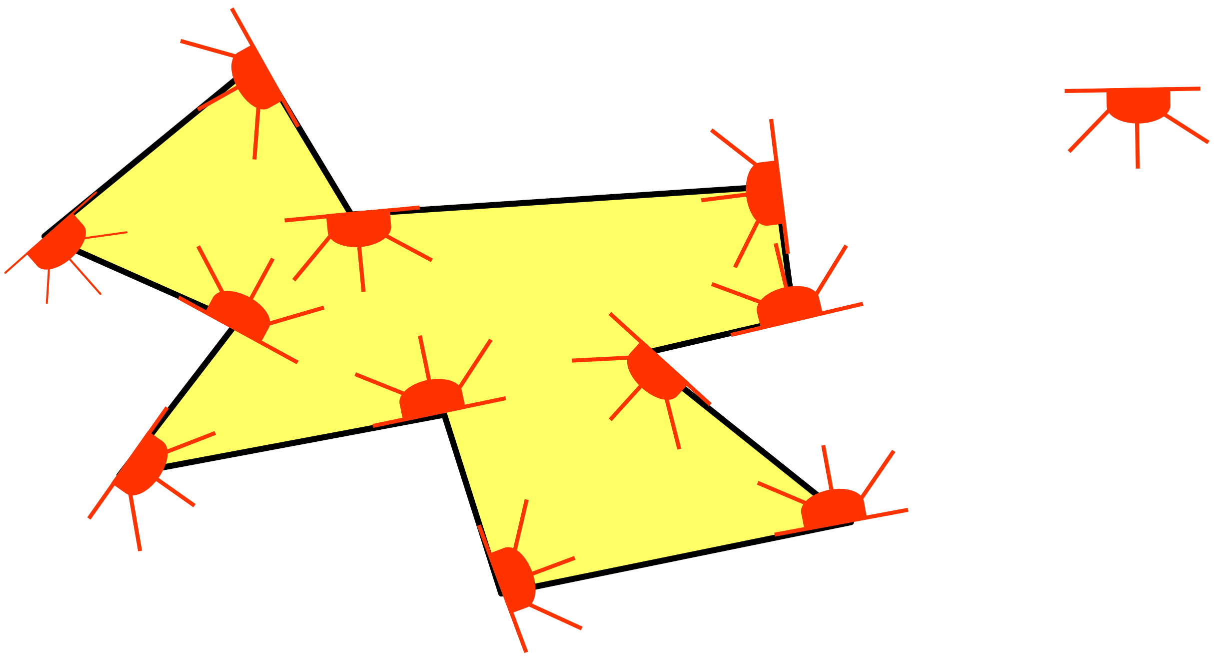




REFLECTORES IGUALES

Se dispone de n reflectores de igual amplitud α, uno por cada vértice. ¿Cuál es la menor amplitud necesaria para iluminar todo el polígono?

Si colocamos n reflectores de amplitud π, uno por vértice, el polígono queda iluminado



REFLECTORES IGUALES

Conjetura (Urrutia) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

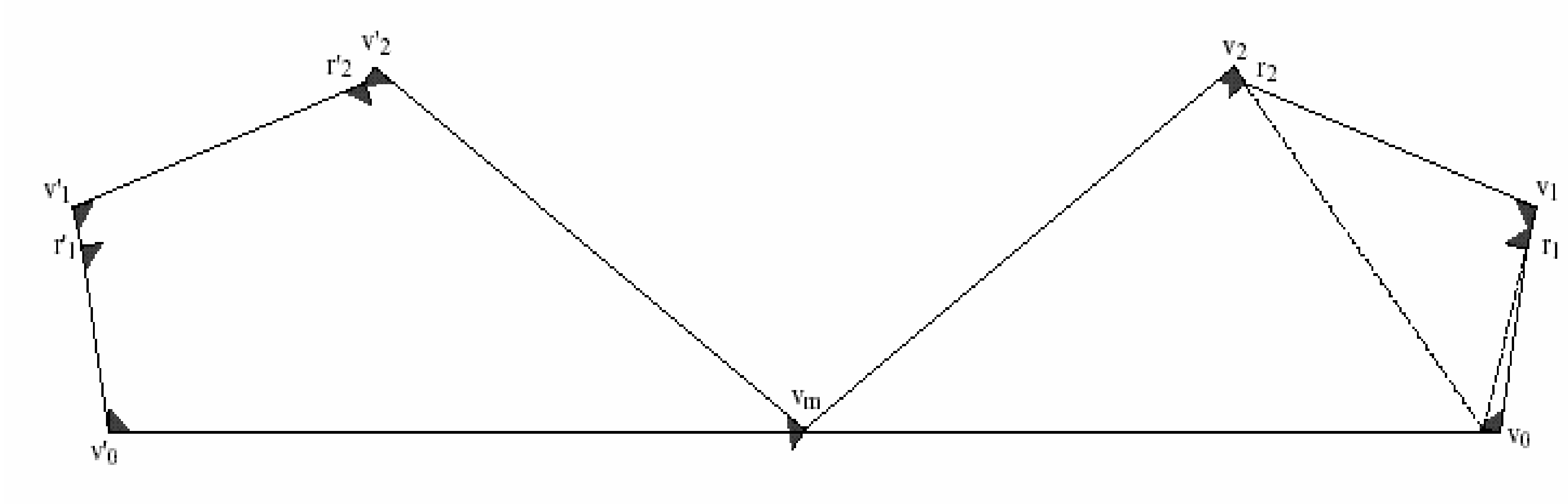
Teorema (O'Rourke, Xu, 1994)

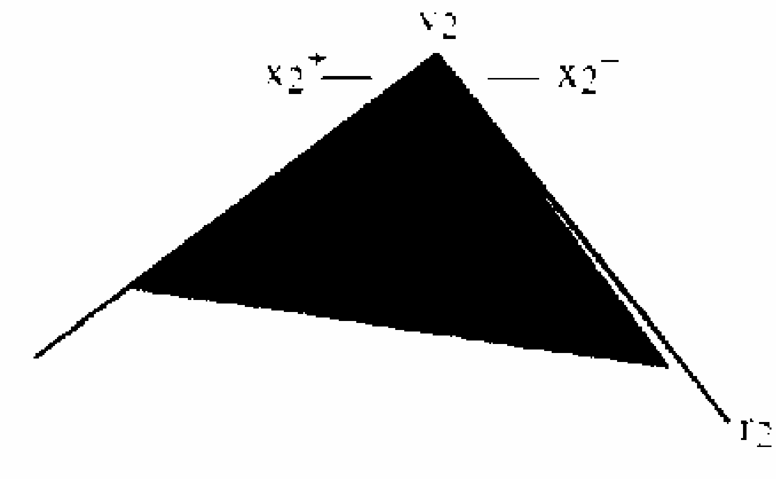
Existen polígonos que no se iluminan con reflectores de amplitud $\pi/2$ colocados uno en cada vértice

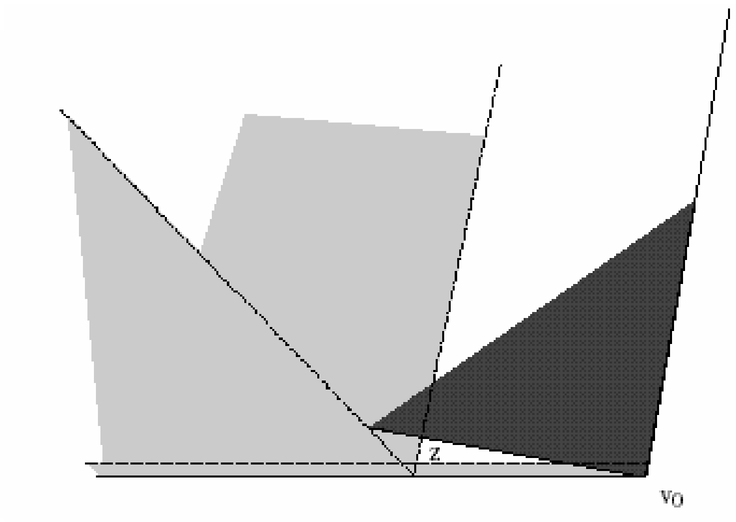
Teorema (ECOUX, 1995)

Para todo $\varepsilon > 0$ existen polígonos simples que NO pueden iluminarse con reflectores de amplitud $\leq \pi - \varepsilon$, colocados uno en cada vértice

Existen polígonos que no se iluminan con reflectores de amplitud $\pi/2$ colocados uno en cada vértice







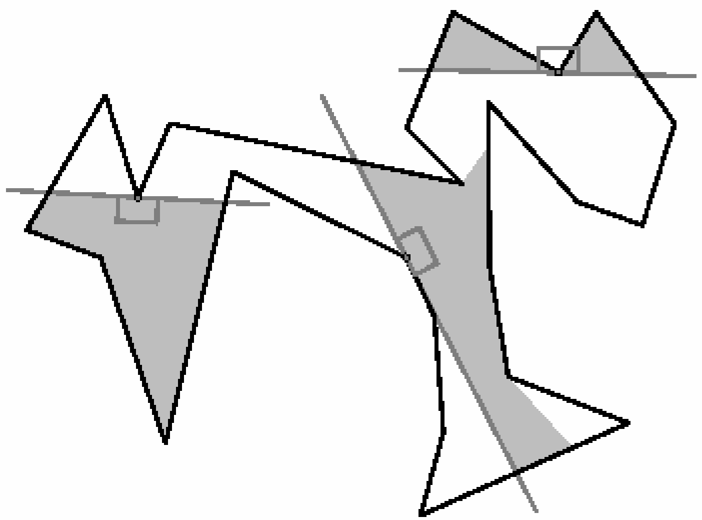
REFLECTORES DE AMPLITUD π

Teorema (C. Tóth, 2000, 2002)

Cualquier polígono de n lados puede iluminarse con, a lo más, los siguientes reflectores de amplitud π

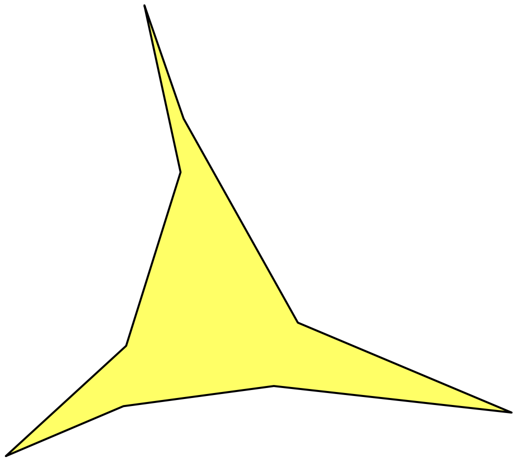
$\lfloor n / 3 \rfloor$ situados en puntos, $\lfloor n / 2 \rfloor$ situados en vértices y

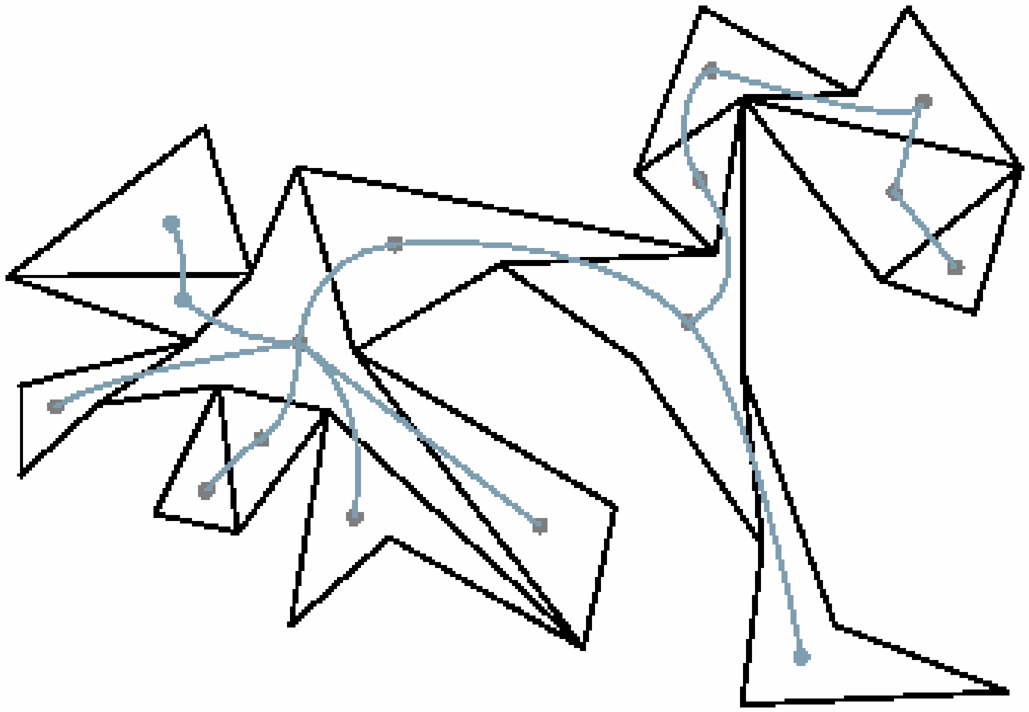
$\lfloor 2n - k / 3 \rfloor$ situados en vértices y alineados



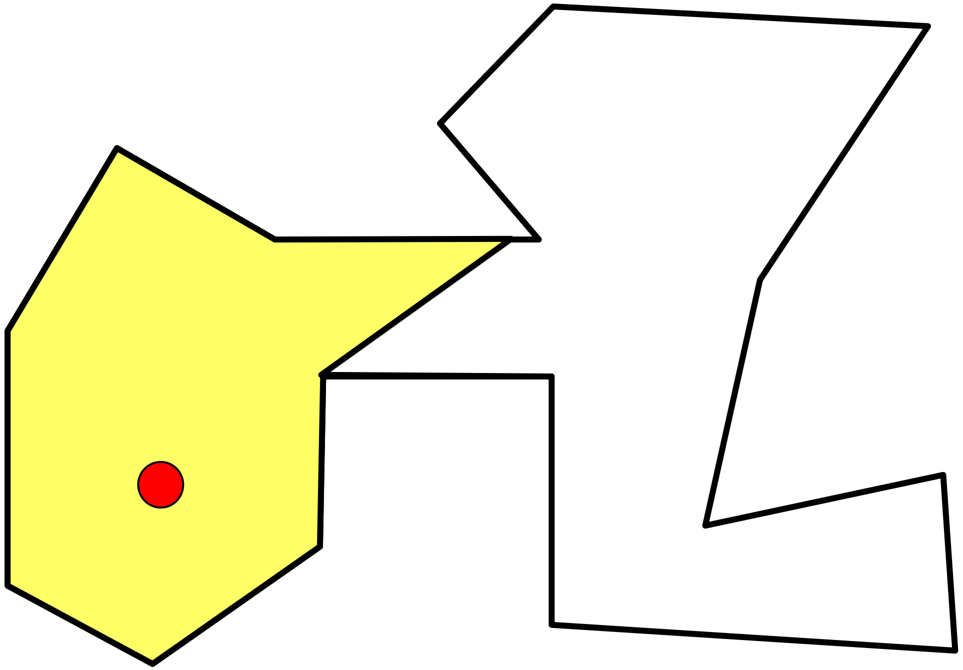
PSEUDOTRIANGULACIÓN

Pseudotriángulos





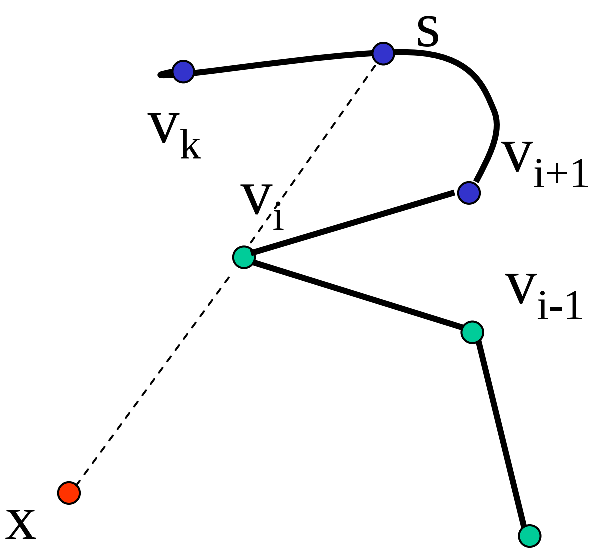
POLÍGONO DE VISIBILIDAD



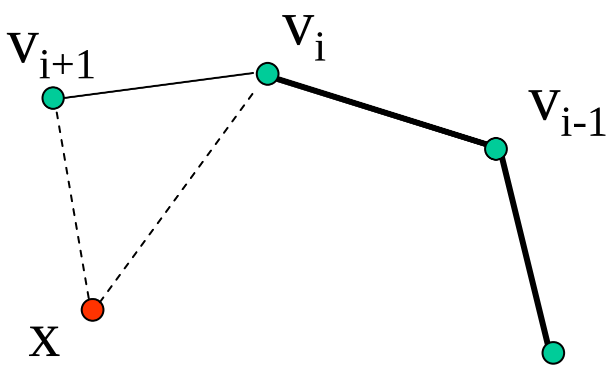
Dado P polígono, x punto de P, Vis(x,P)

POLÍGONO DE VISIBILIDAD

Se recorren los vértices del polígono en orden



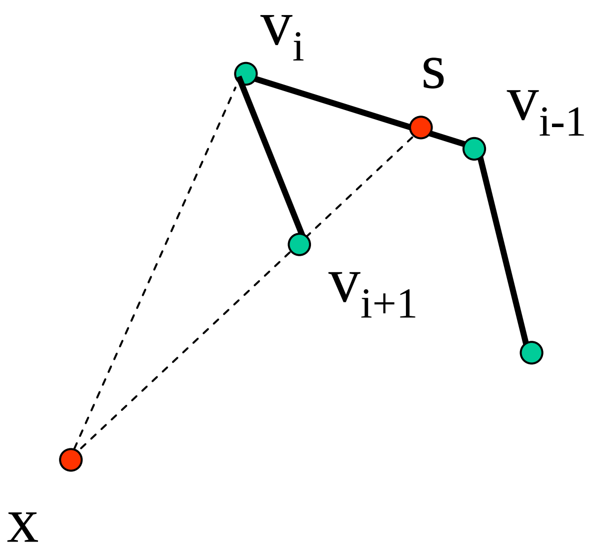
"En espera"

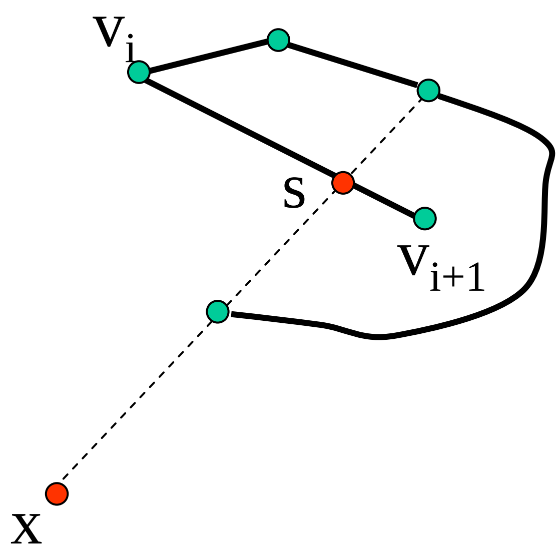


"Adelante"

POLÍGONO DE VISIBILIDAD

Se recorren los vértices del polígono en orden

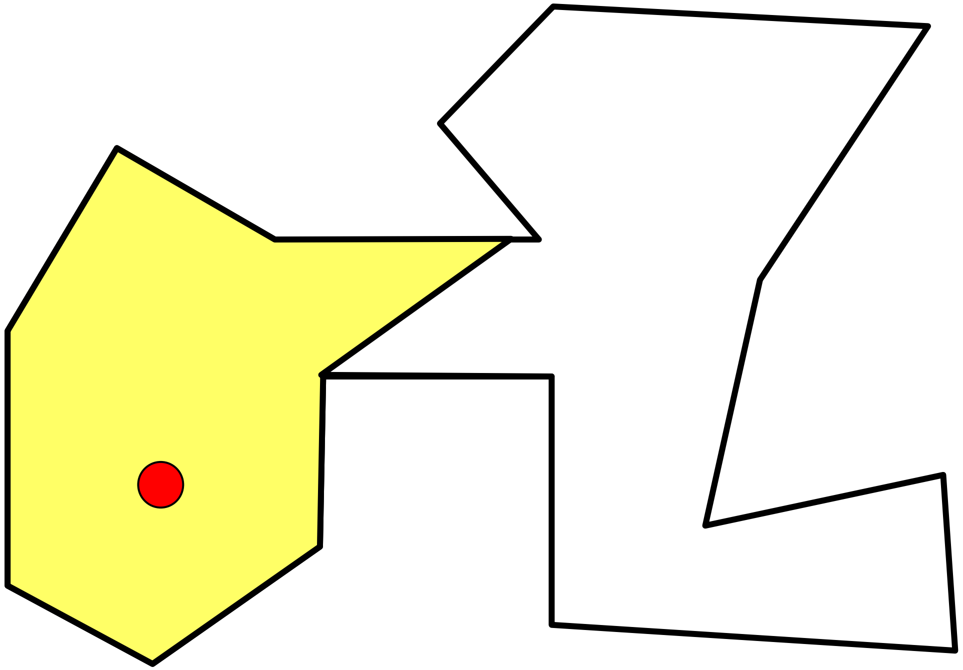




"Atrás"

Complejidad O(n)

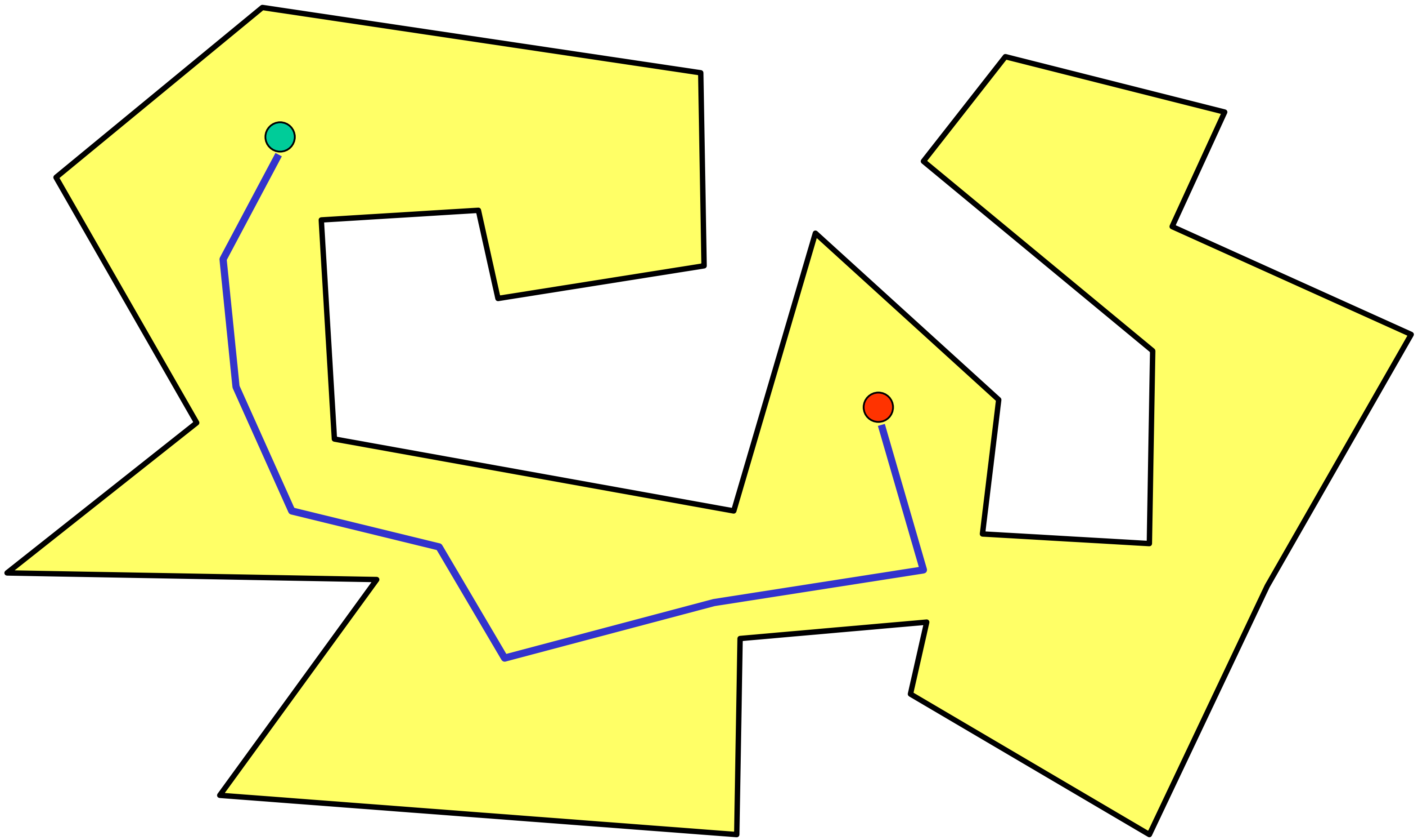
POLÍGONO DE VISIBILIDAD



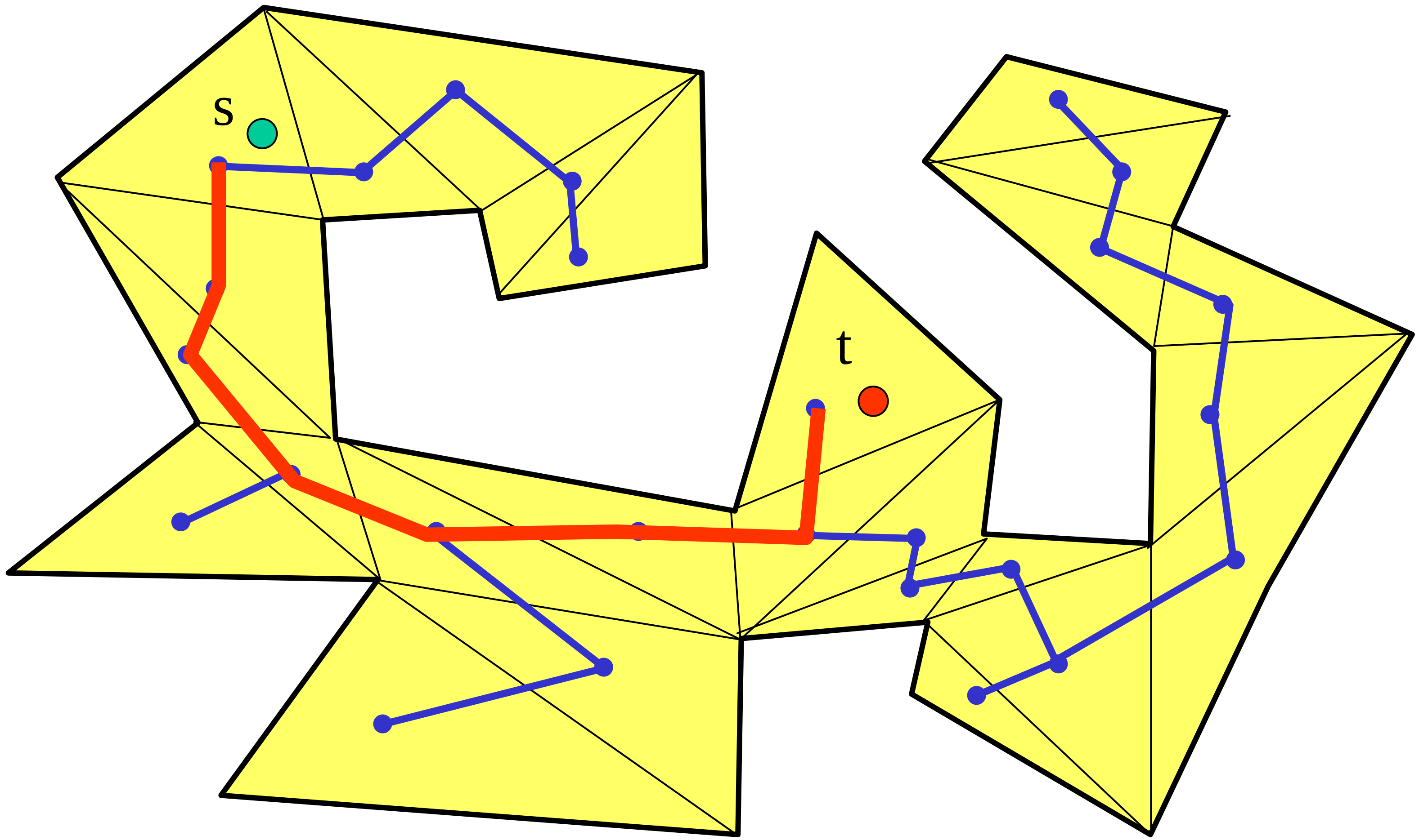
Hallar x tal que:
Vis(x,P) área máxima
Vis(x,P) área mínima

MaxVis Problem Vértices y lados, Ntafos, Tsoukalas (1991)
Puntos ¿?
MinVis Problem Polígonos ortogonales, Gewali (1996)

CAMINOS GEODÉSICOS EN UN POLÍGONO



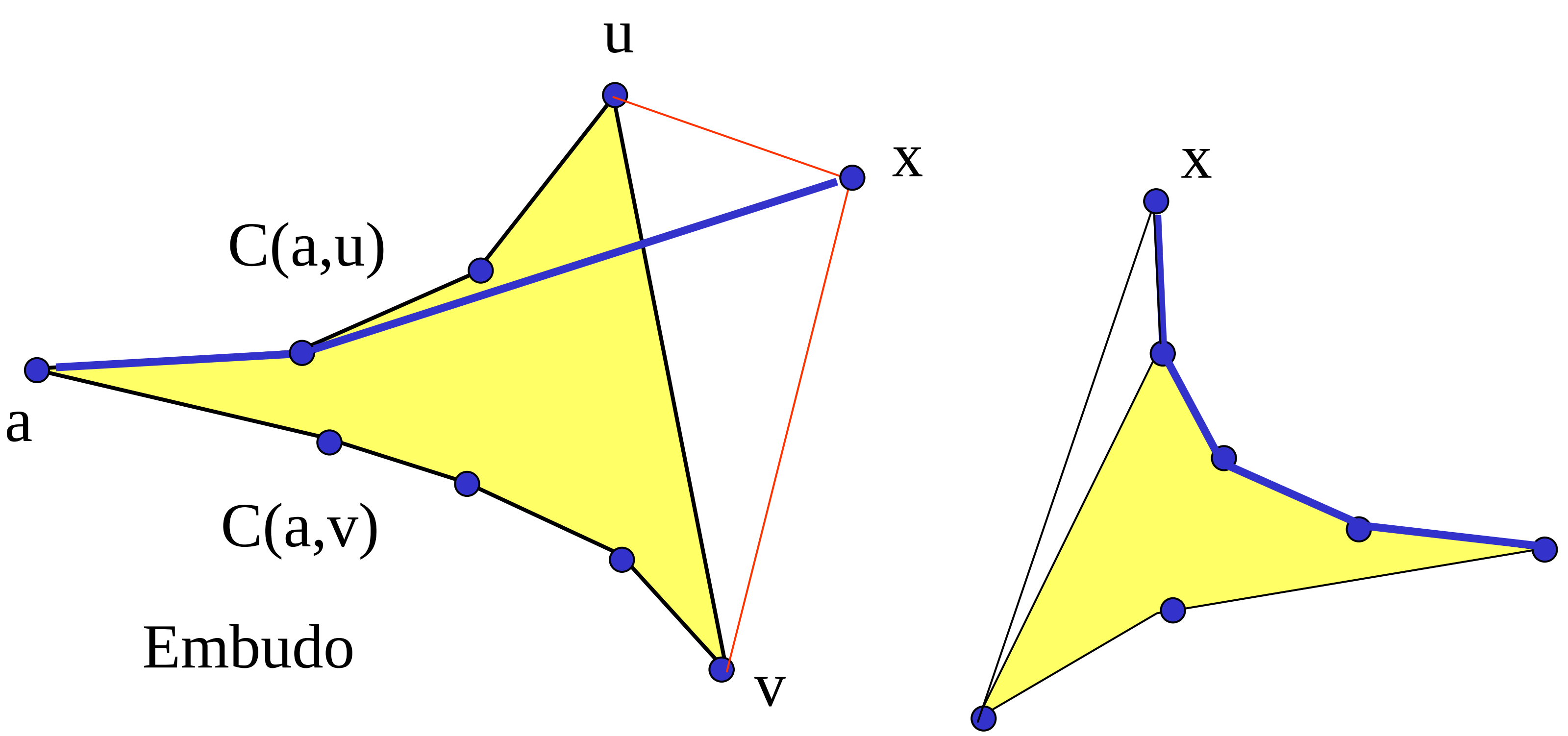
CAMINOS GEODÉSICOS EN UN POLÍGONO



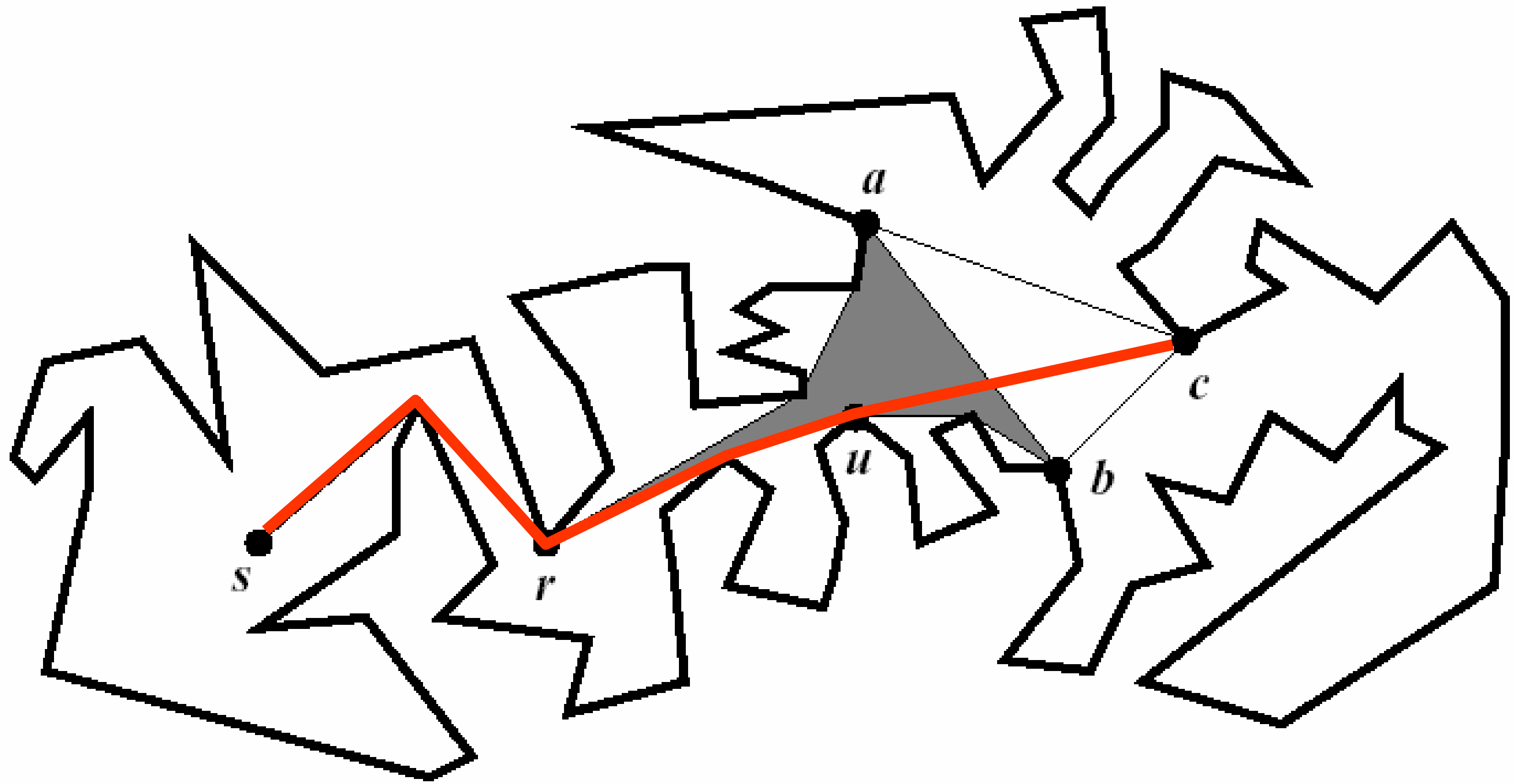
CAMINOS GEODÉSICOS EN UN POLÍGONO

Camino mínimo desde s hasta cada vértice del polígono (árbol de caminos mínimos)

uv diagonal o lado, a antecesor común



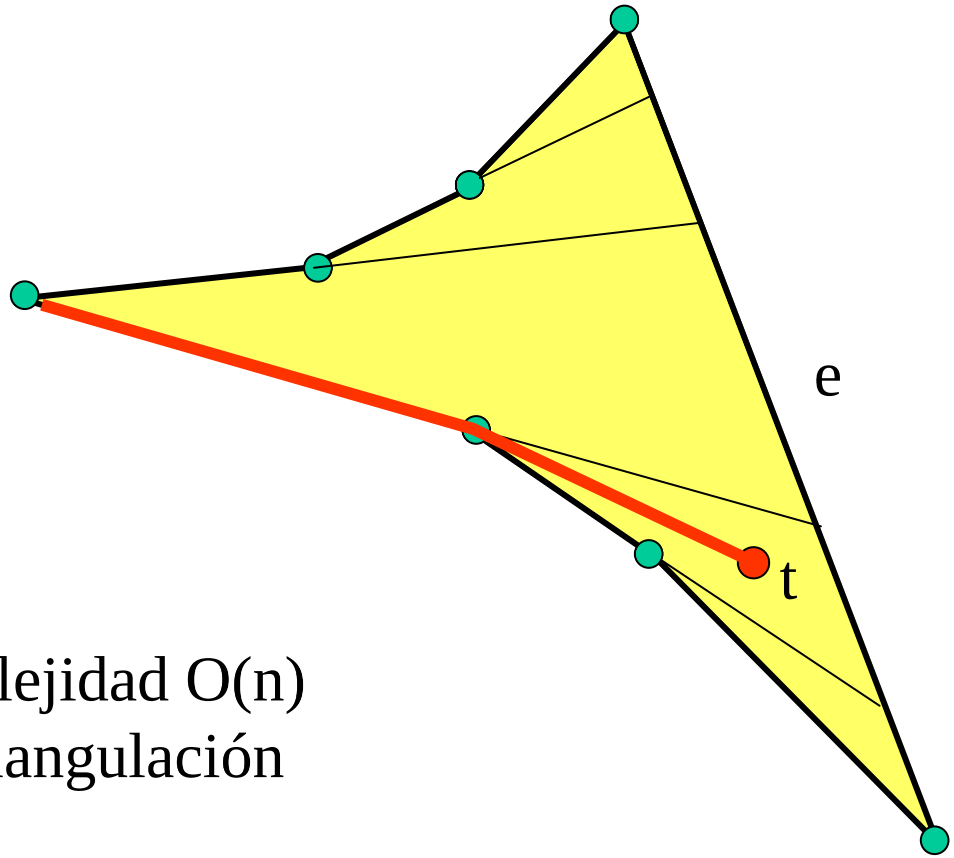
CAMINOS GEODÉSICOS EN UN POLÍGONO



CAMINOS GEODÉSICOS EN UN POLÍGONO

Camino de s a t

Embudo con tapa el lado e que contiene al punto t



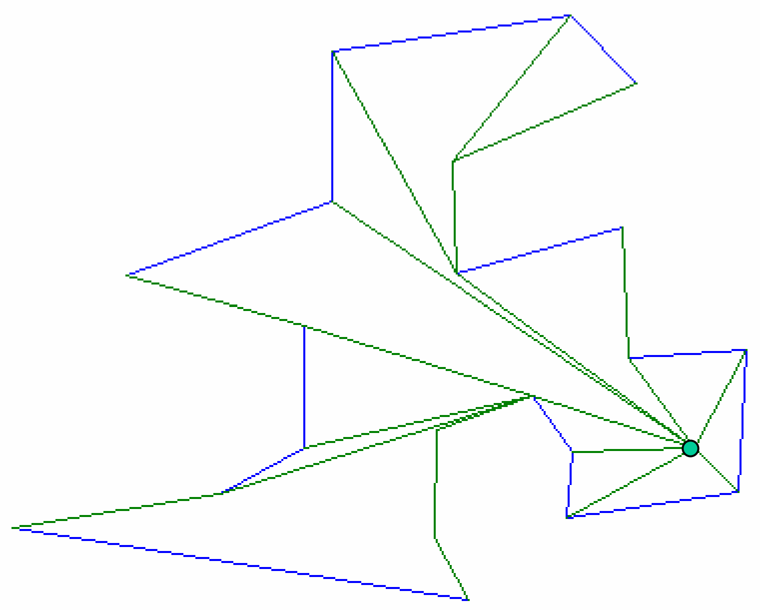
Complejidad O(n)
tras triangulación

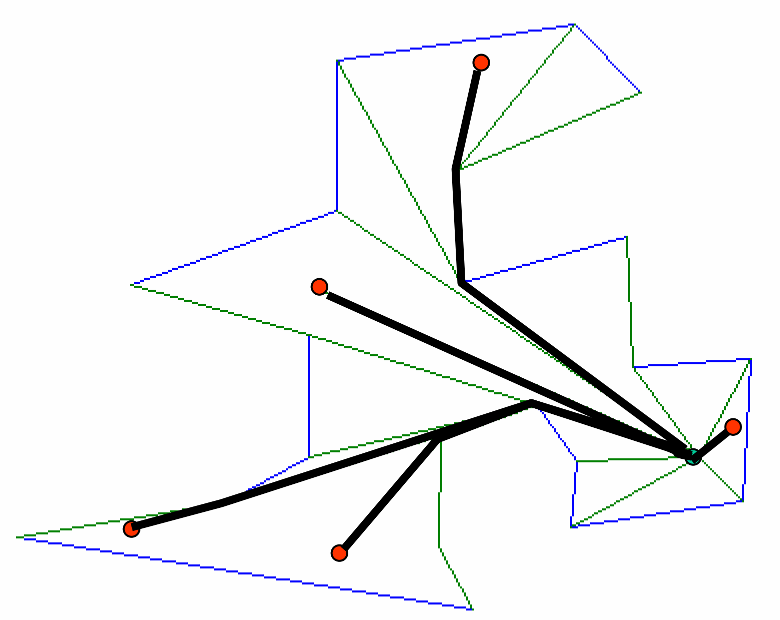
CAMINOS GEODÉSICOS EN UN POLÍGONO

¿Y si repetimos la pregunta?

• Con el mismo origen s

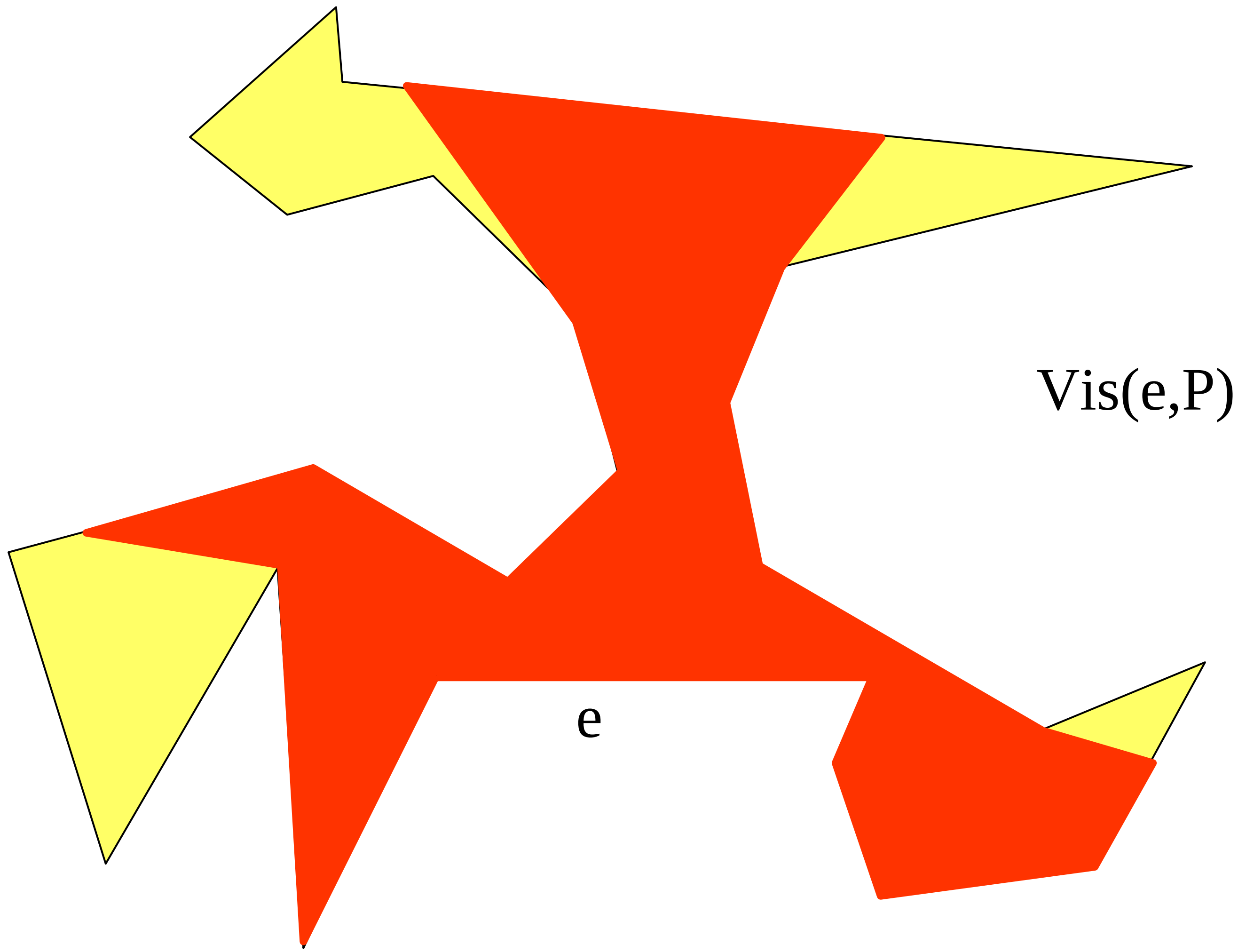
Árbol de caminos desde s, descompone el polígono en regiones con "casi" el mismo camino



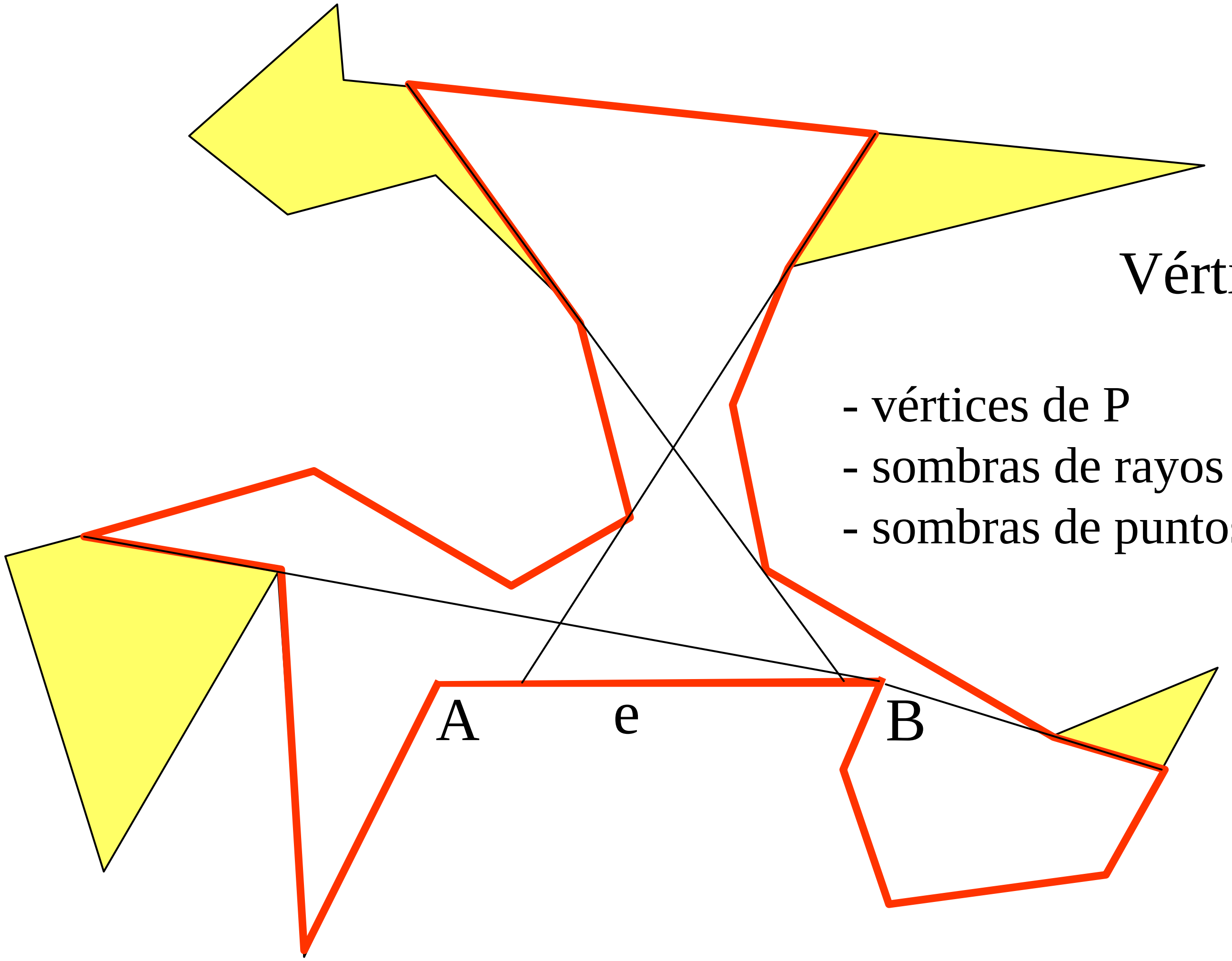


Estructura O(n)   Tiempo de consulta O(logn)

POLÍGONO DE VISIBILIDAD DESDE UN LADO



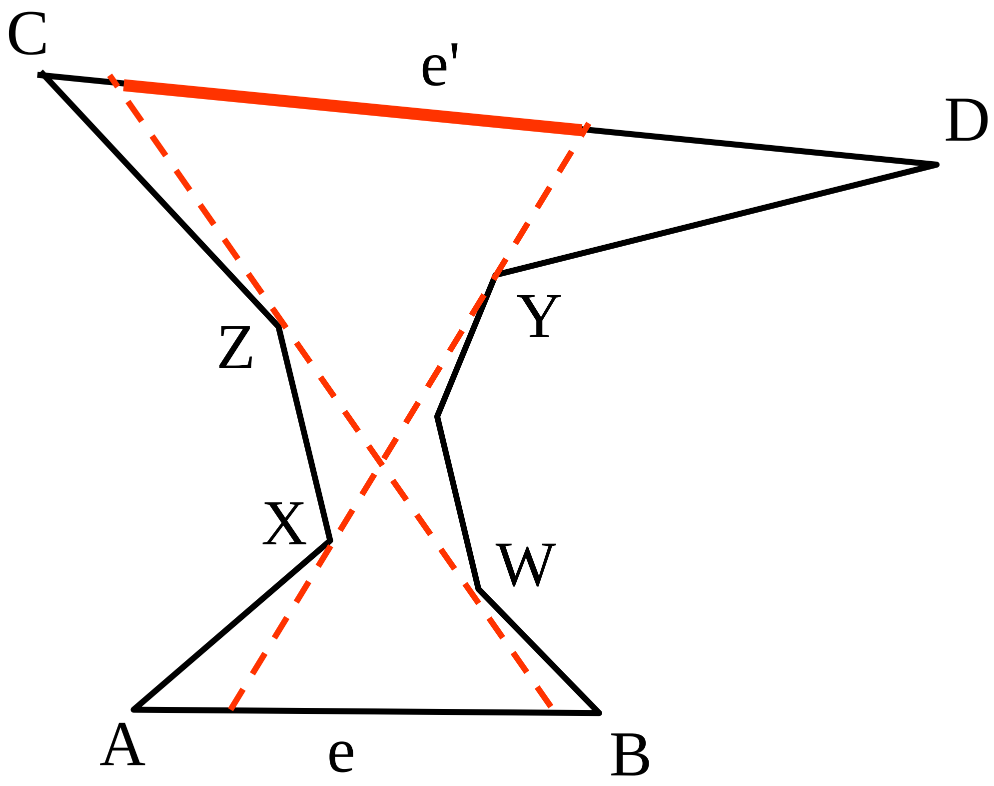
POLÍGONO DE VISIBILIDAD DESDE UN LADO



Vértices de Vis(e,P)

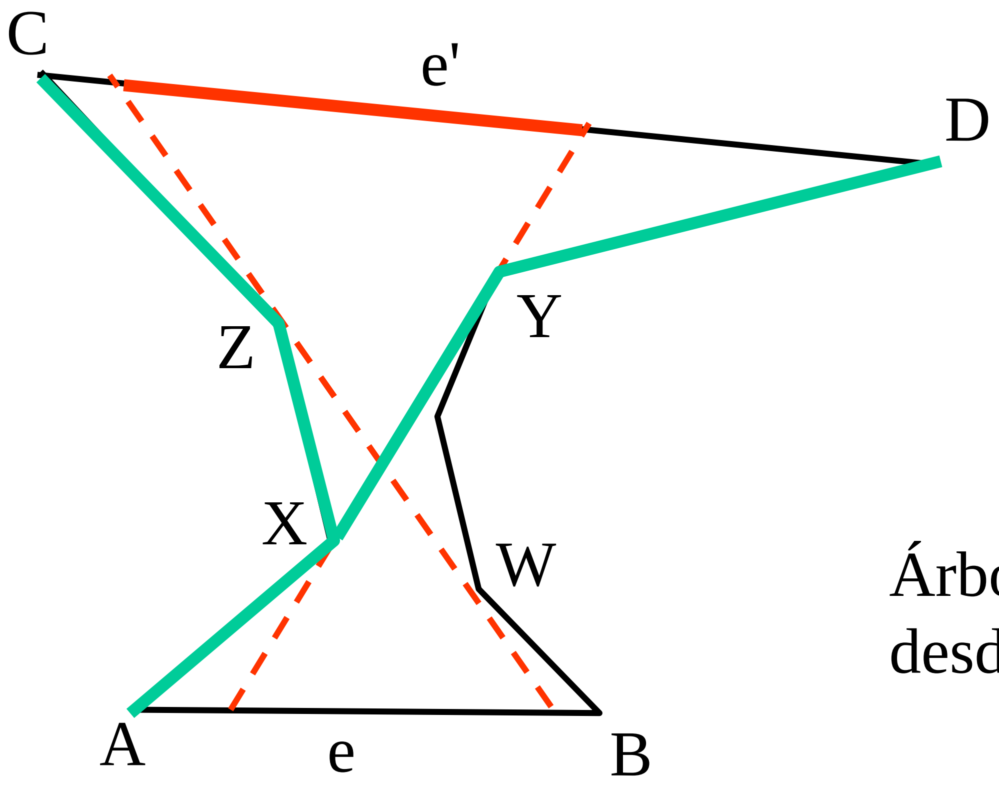
- vértices de P
- sombras de rayos que emanan de A ó B
- sombras de puntos interiores de e

POLÍGONO DE VISIBILIDAD DESDE UN LADO



Si e’ es visible
“reloj de arena”
Cam(A,C), Cam(B,D)

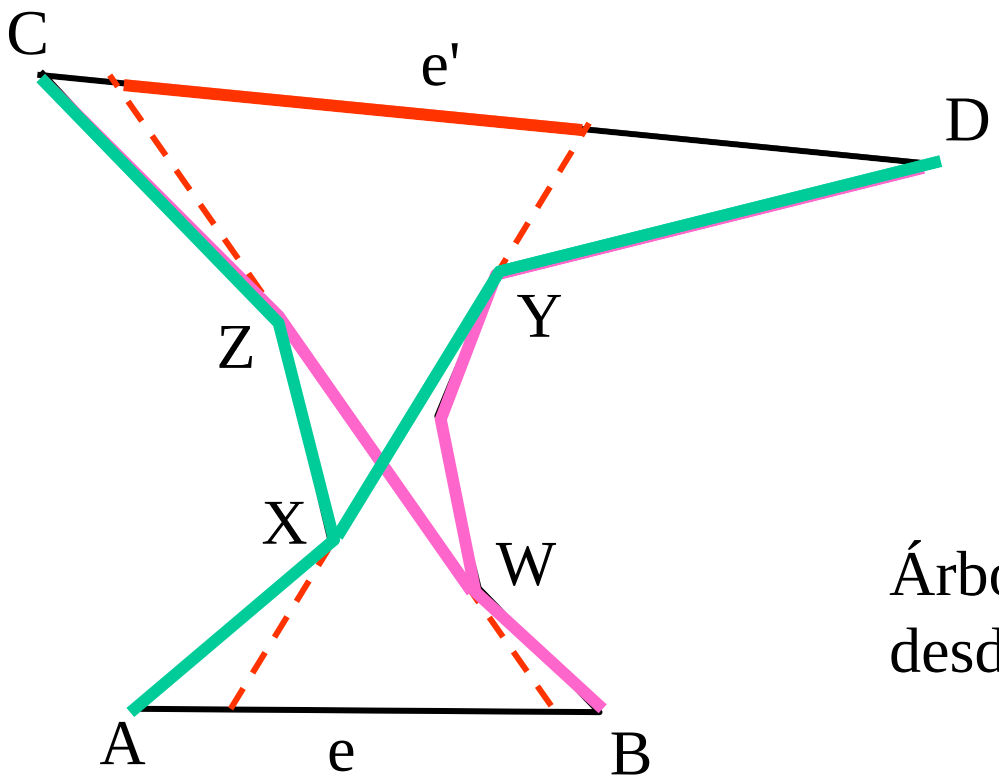
POLÍGONO DE VISIBILIDAD DESDE UN LADO



Si e’ es visible
“reloj de arena”
Cam(A,C), Cam(B,D)

Árbol de caminos mínimos
desde A

POLÍGONO DE VISIBILIDAD DESDE UN LADO



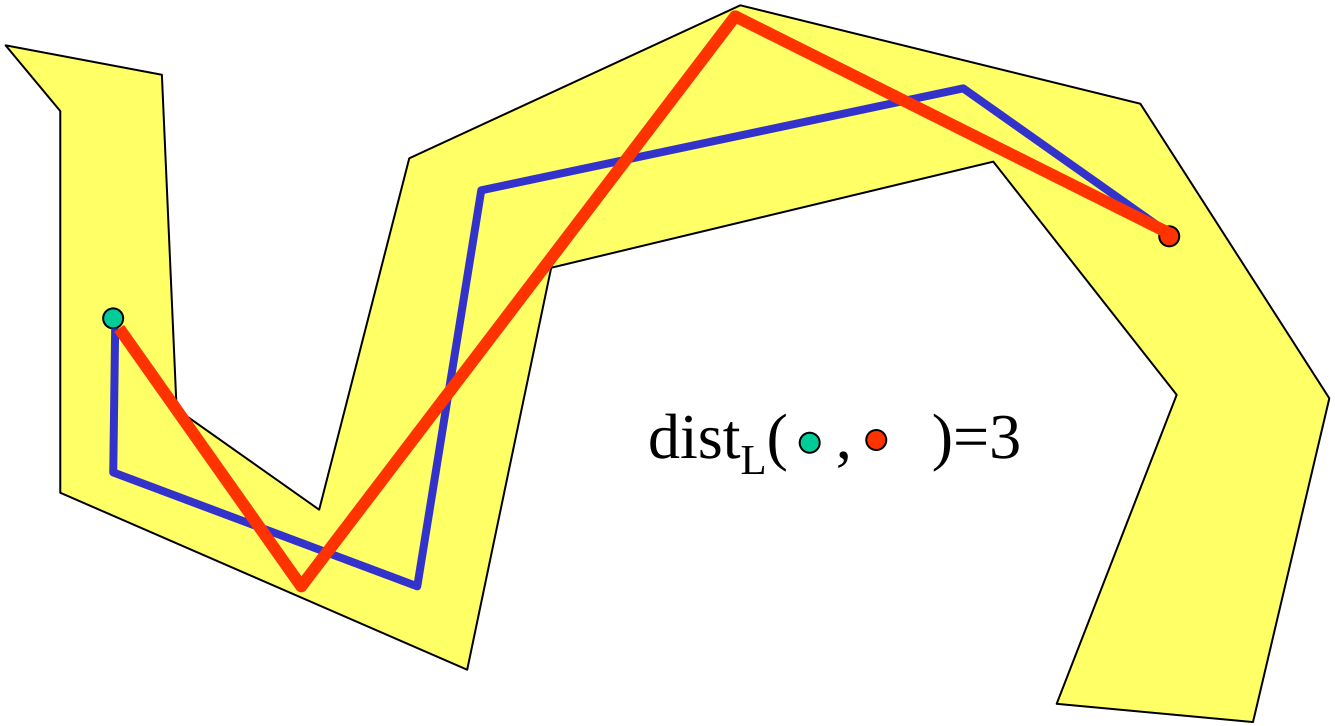
Si e’ es visible
“reloj de arena”
Cam(A,C), Cam(B,D)

Árbol de caminos mínimos
desde B

Complejidad O(n)

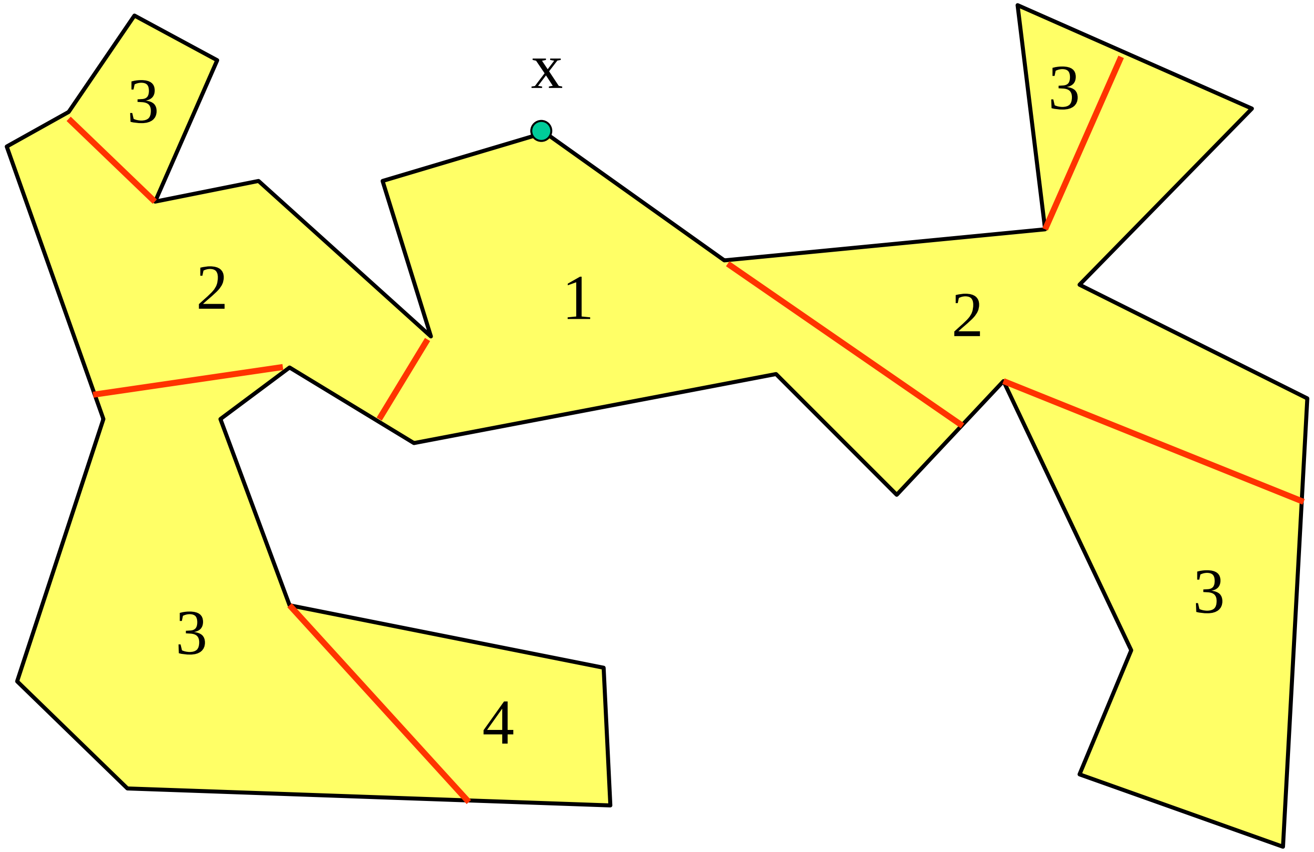
X, W ápices de los embudos del lado e’
Y, Z vértices comunes de los embudos

CAMINOS “LINK” EN UN POLÍGONO



O(n) si P triangulado

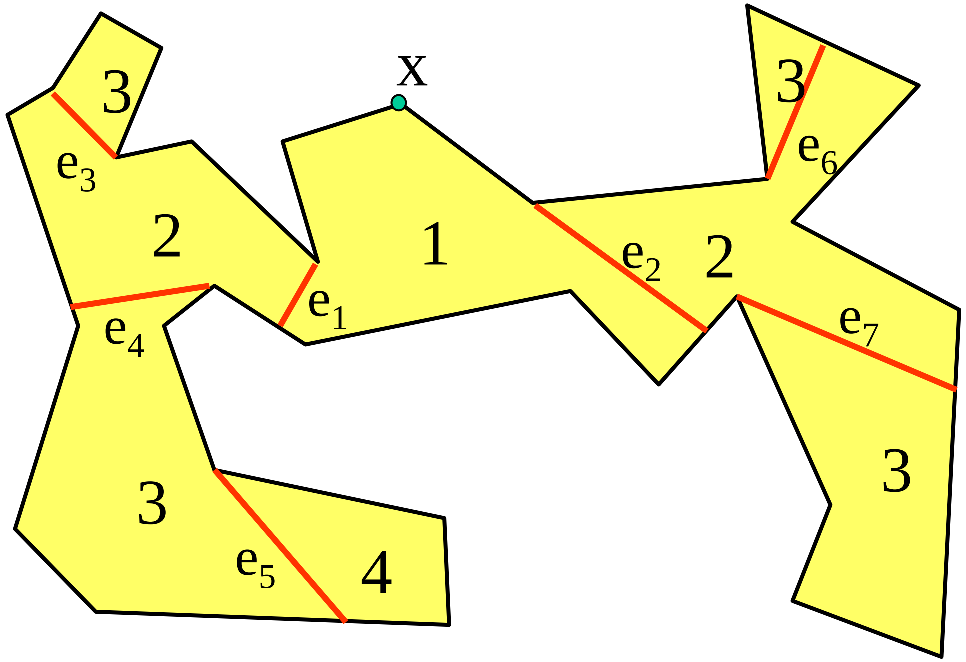
DISTANCIA "LINK" EN UN POLÍGONO

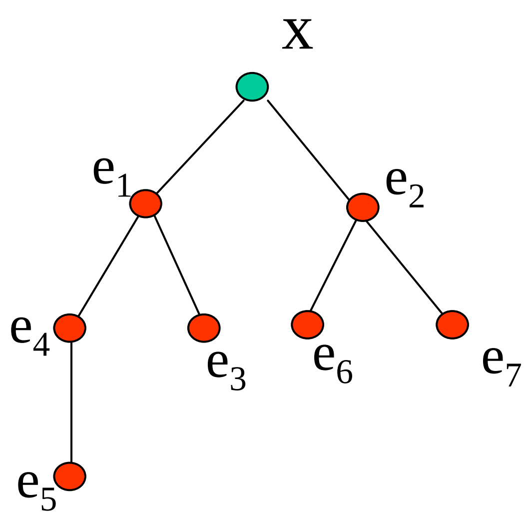


Partición por ventanas

- Construcción de polígonos de visibilidad O(n)
- Detección de la región O(n)

DISTANCIA “LINK” EN UN POLÍGONO





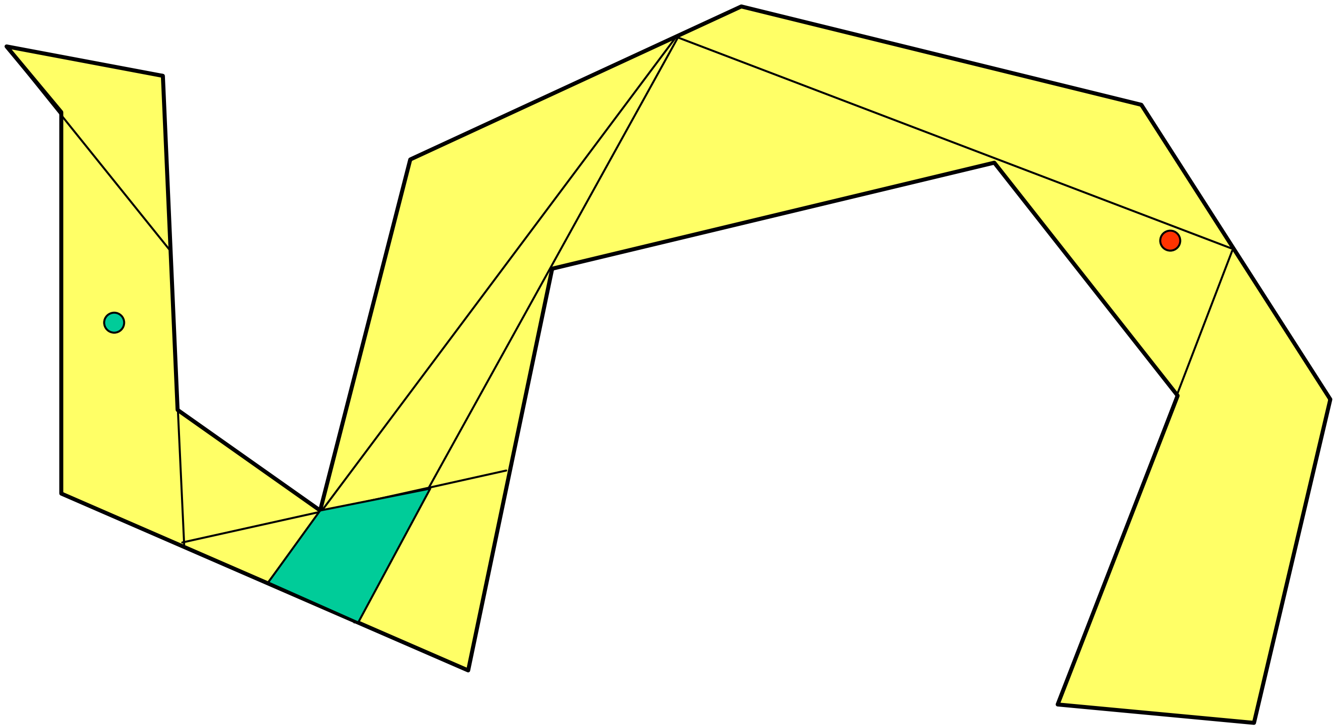
Distancias desde x fijo
Árbol de ventanas (Suri, 90)

- Tamaño de la estructura O(n)
- Tiempo de consulta O(logn)

Si x desconocido

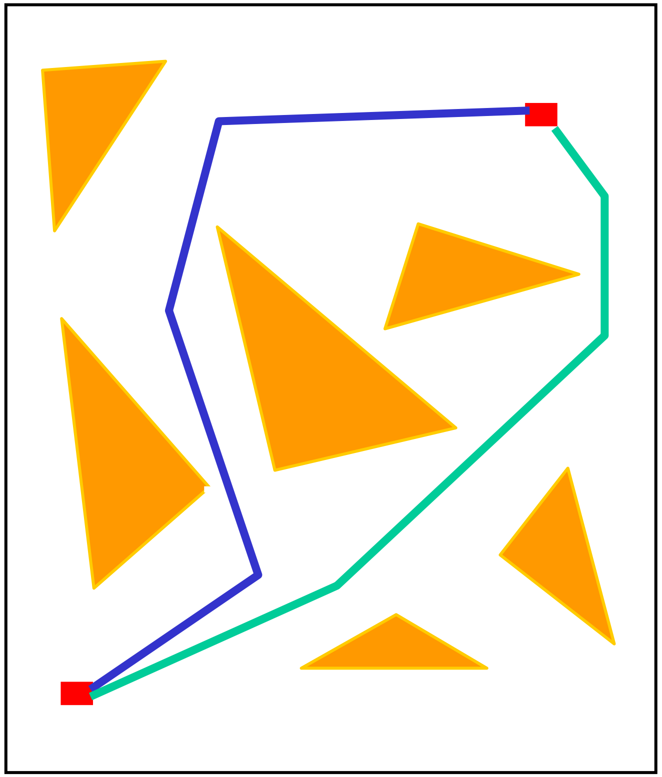
- Tamaño de la estructura $O(n^3)$
- Tiempo de consulta O(logn)

CAMINOS “LINK” EN UN POLÍGONO



Centro-link del polígono
O(nlogn)

CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS



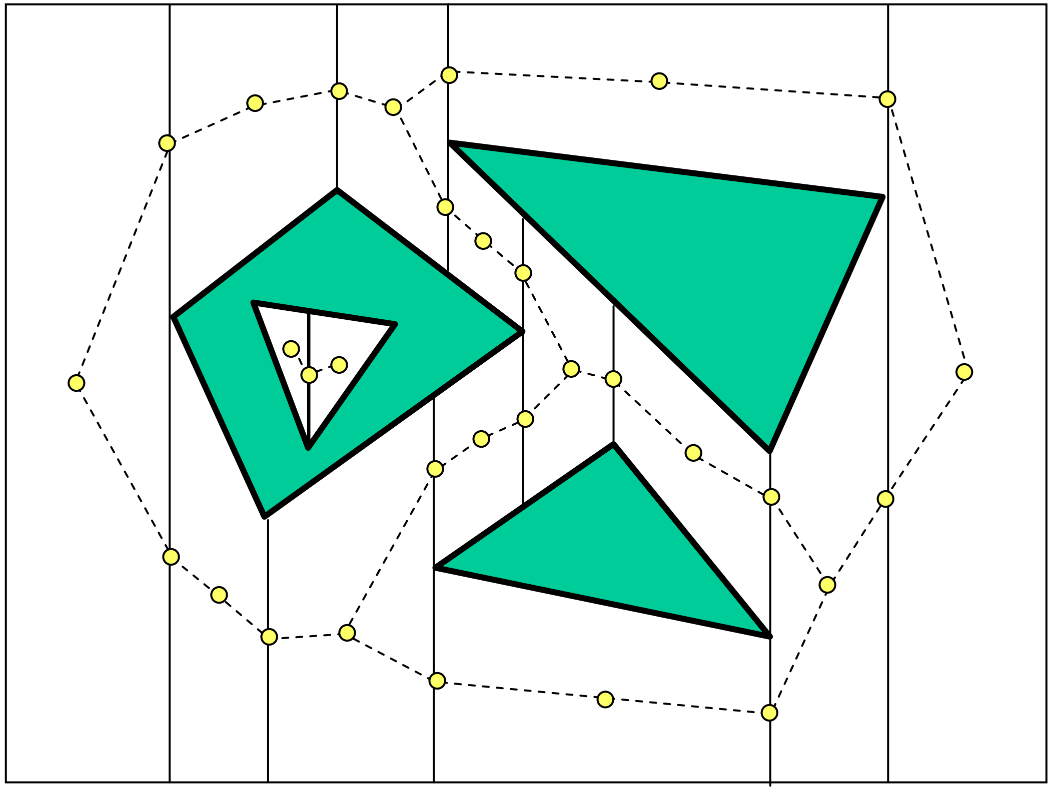
Un robot en una fábrica,
¿qué camino debe seguir?

- robot puntual
- obstáculos poligonales

El espacio libre es “continuo”,
hay que discretizar

CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS

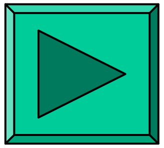
Discretizando el espacio libre



Descomposición en trapecios

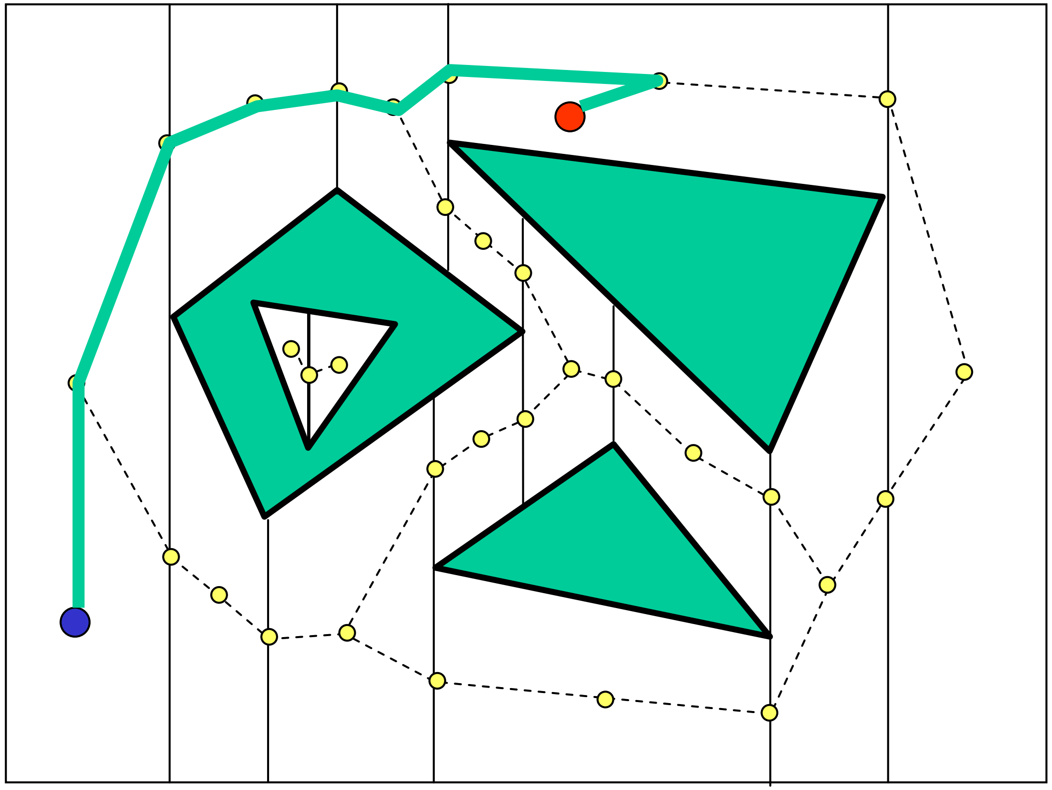
Mapa de carreteras

Algoritmo aleatorizado O(nlogn)



CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS

Mapa de carreteras (grafo geométrico)



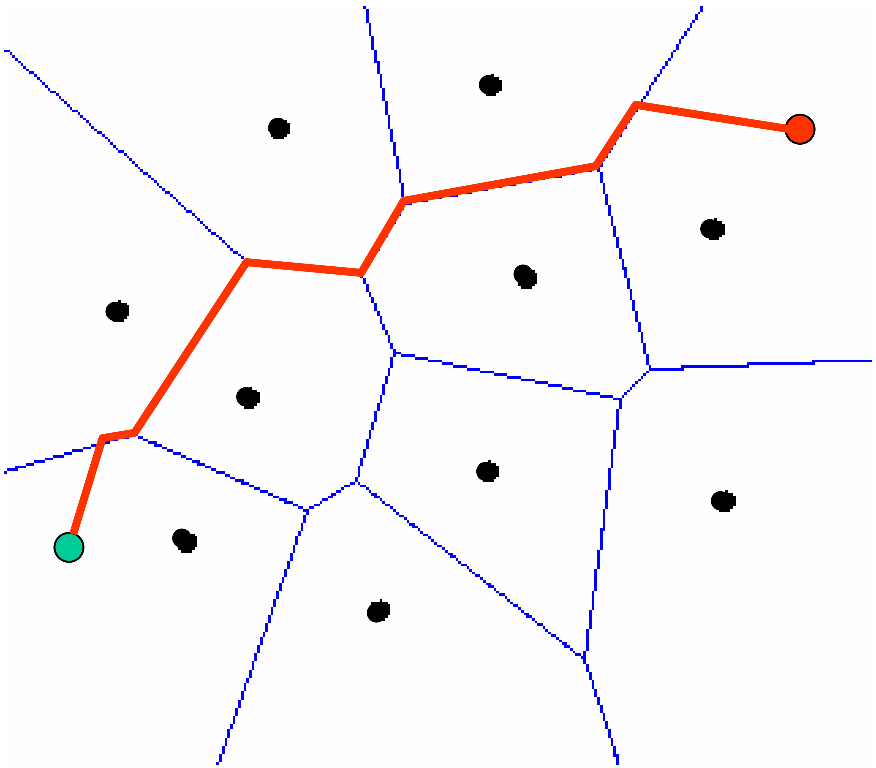
1. Detectar trapecio
2. Búsqueda BFS en el mapa

Tiempo O(n)

¿Podemos mejorar?

CAMINO SEGURO ENTRE OBSTÁCULOS

¿Y si buscamos el camino “más seguro”?

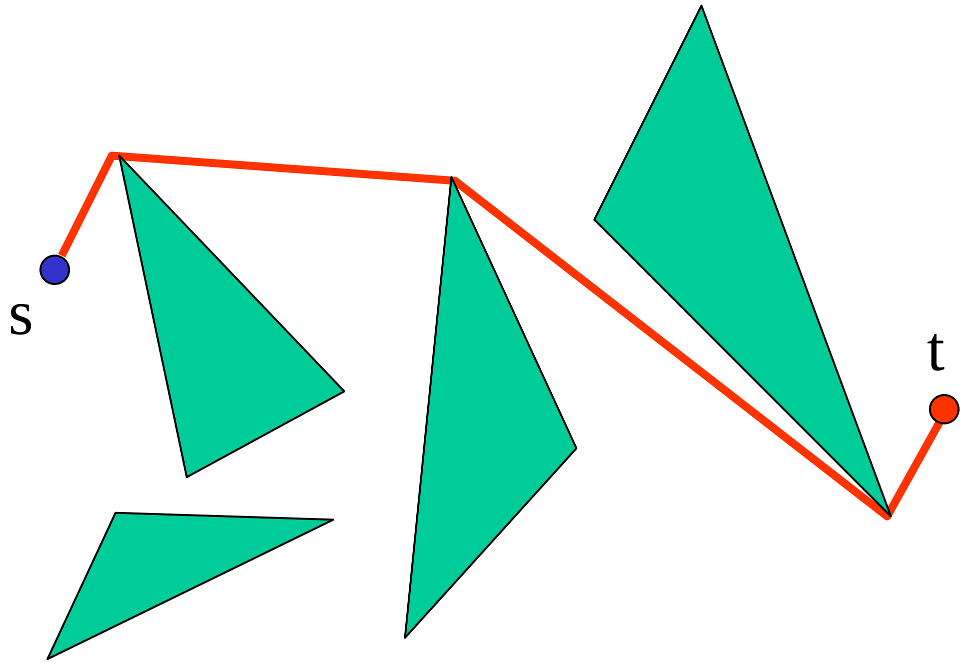


Mapa de carreteras

=

Diagrama de Voronoi

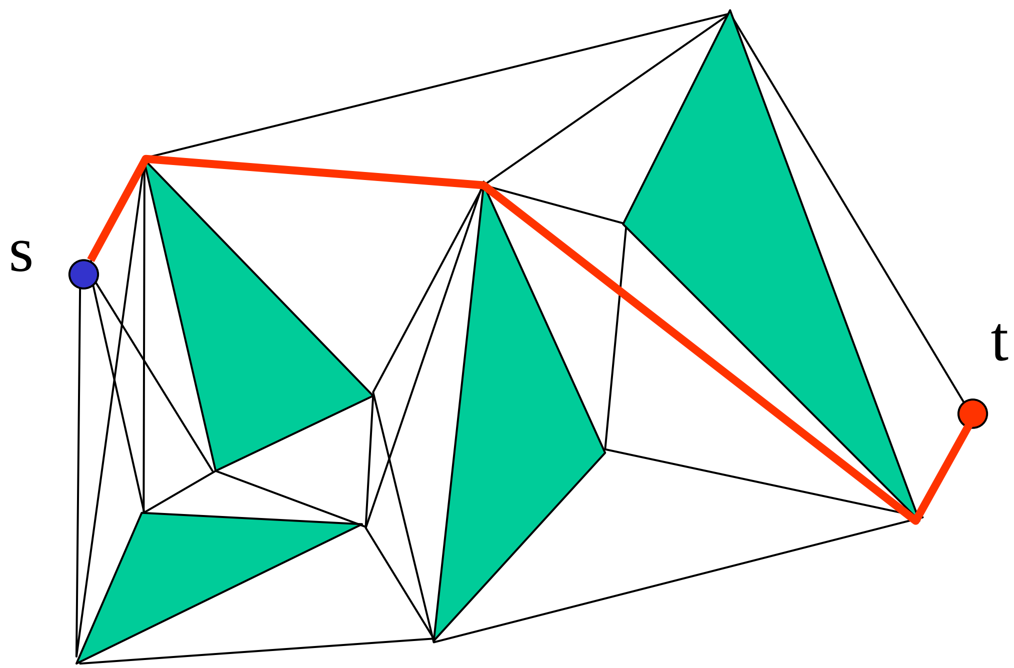
CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS



- El camino mínimo de s a t es una poligonal
- Los vértices del camino son vértices de los obstáculos
- Los segmentos del camino son aristas de visibilidad

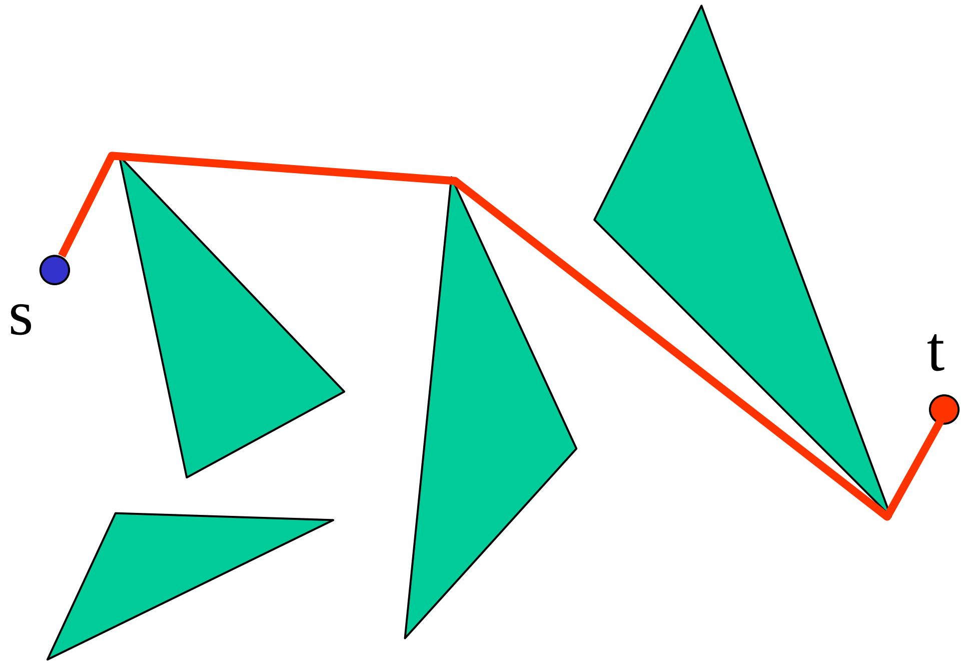
GRAFO DE VISIBILIDAD

Nuevo mapa de carreteras



El camino mínimo de s a t es un camino en el grafo de visibilidad

CAMINO MÍNIMO ENTRE OBSTÁCULOS



1) Construcción del grafo de visibilidad G
2) Construcción del camino mínimo en G de s a t
   Algoritmo de Dijkstra

Construcción del GRAFO DE VISIBILIDAD

Algoritmo fuerza bruta

Para cada par de vértices *a*, *b* comprobar si la arista *ab* es válida

Complejidad $O(n^3)$

Cota inferior

El número de aristas puede ser cuadrático. Cota inferior $\Omega(n^2)$

Algoritmo óptimo (Wezl) $O(n^2)$

Arreglo de rectas dual de los vértices. Ordenación topológica

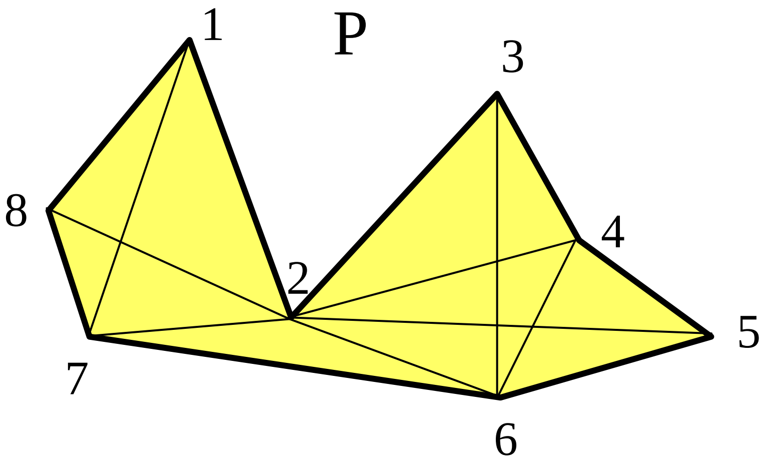
Algoritmo Ghosh y Mount (1991)

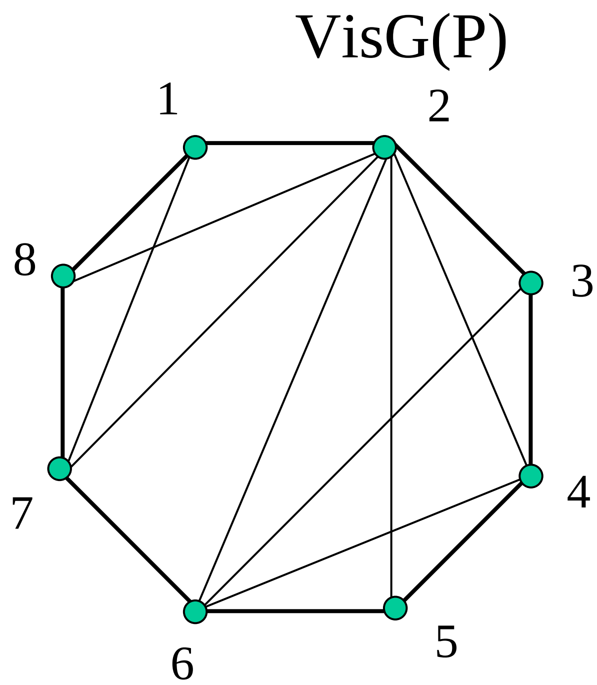
$O(n\log n + E)$

Construcción del camino mínimo

Algoritmo de Dijkstra $O(n\log n+E)$

GRAFO DE VISIBILIDAD de un polígono





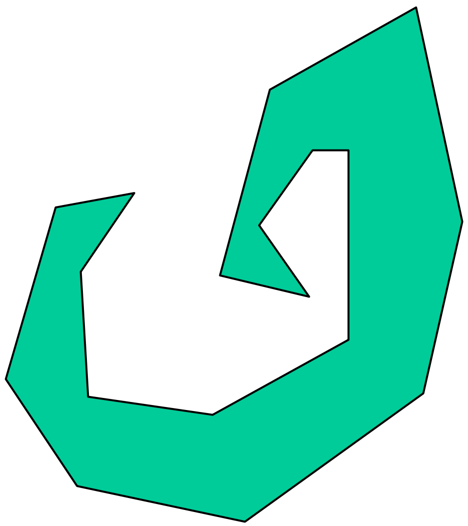
- Caracterización o reconocimiento

- No hay caracterización
- Condiciones necesarias (Ghosh, Everett)
- Subgrafos prohibidos (Grötzsch sí, árboles no)
- Si P es espiral entonces VisG(P) es grafo de intervalos

GRAFO DE VISIBILIDAD de un polígono

- Reconstrucción

Dado un grafo G, construir, si existe, un polígono P cuyo grafo de visibilidad sea isomorfo a G?

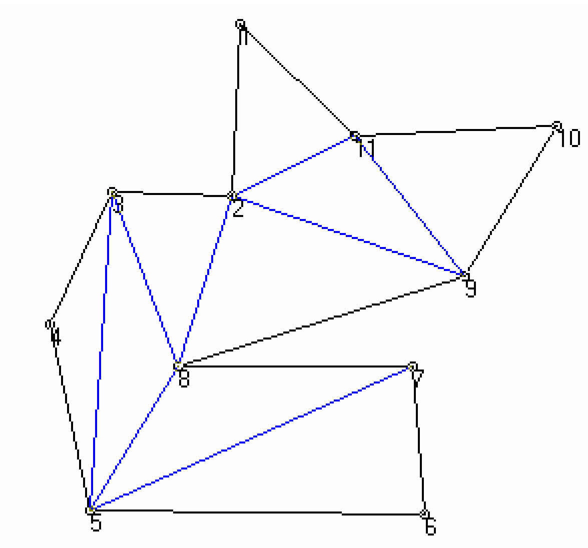


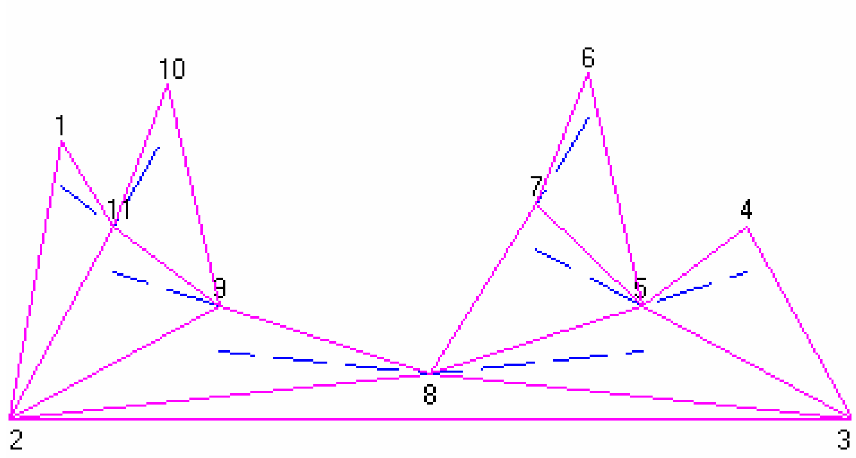
- Grafos de visibilidad de espirales (Everett, Corneil)
- Cierre convexo de P a partir de VisG(P) y VisExG(P) (O'Rourke)
- Si se conocen las distancias entre vértices visibles, Coullard y Lubiw algoritmo para el problema de reconstrucción en O(E)

GRAFO DE VISIBILIDAD de un polígono

- Reconstrucción

• Si G es el grafo de la triangulación de un polígono (grafo periplano maximal) existe P monótono tal que G≈VisG(P)
ElGindy O(nlogn)





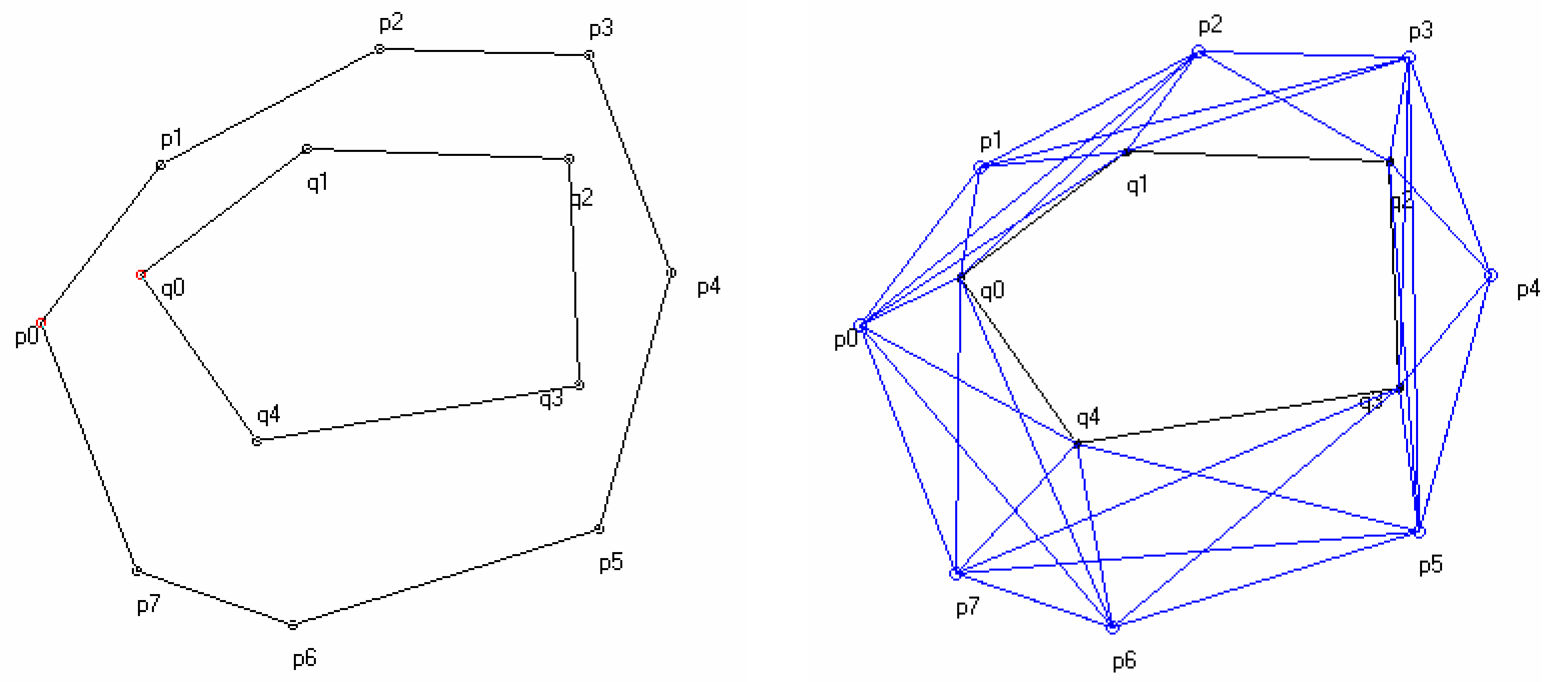
GRAFO DE VISIBILIDAD de un polígono

Problemas abiertos

- Encontrar una caracterización de los grafos de visibilidad que pueda comprobarse en tiempo polinómico
- Dado un grafo de visibilidad G y un ciclo hamiltoniano H determinar en tiempo polinómico si existe un polígono P de borde H y tal que G=VisG(P)
  (No se sabe si este problema es NP)

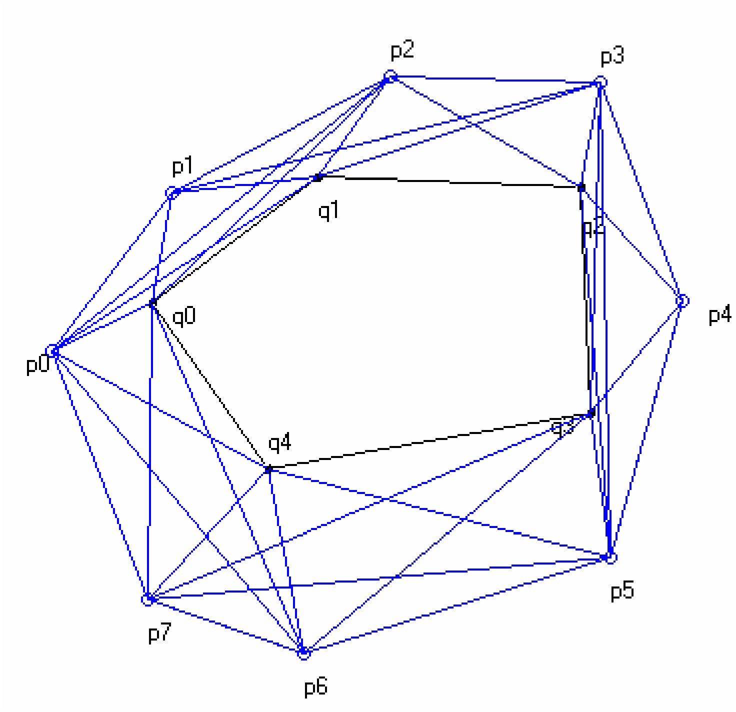
GRAFO DE VISIBILIDAD de un anillo poligonal

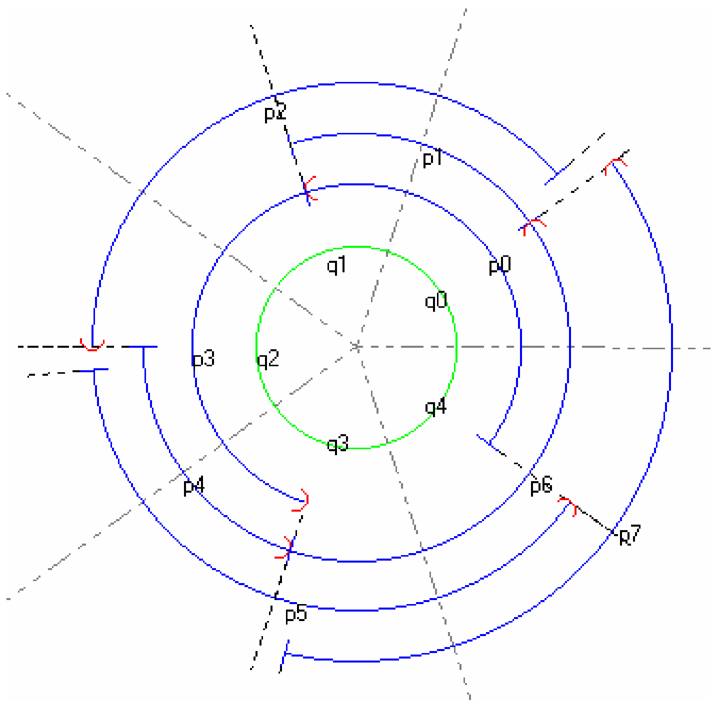
El grafo de visibilidad de un anillo poligonal con n vértices interiores y m exteriores se construye en tiempo O(n+m) (Cay, Everett)



GRAFO DE VISIBILIDAD de un anillo poligonal

Representación con modelo de arcos circulares   O(n+m)

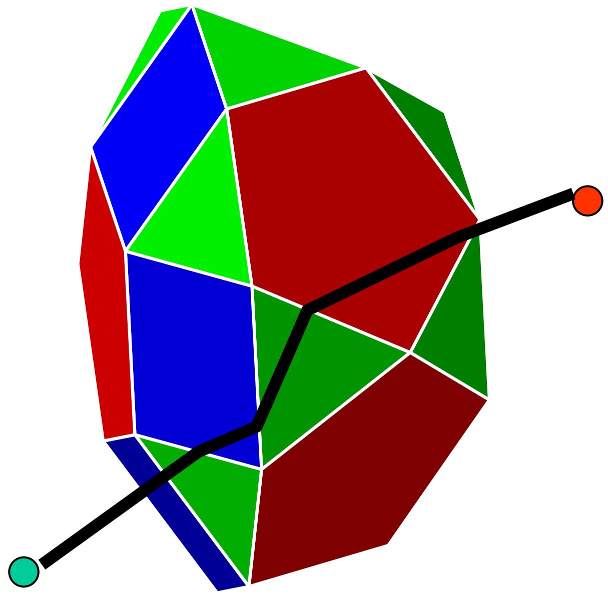




CAMINO MÍNIMO EN 3 D

En 2D se discretiza el problema porque los puntos de inflexión del camino están restringidos a un conjunto finito

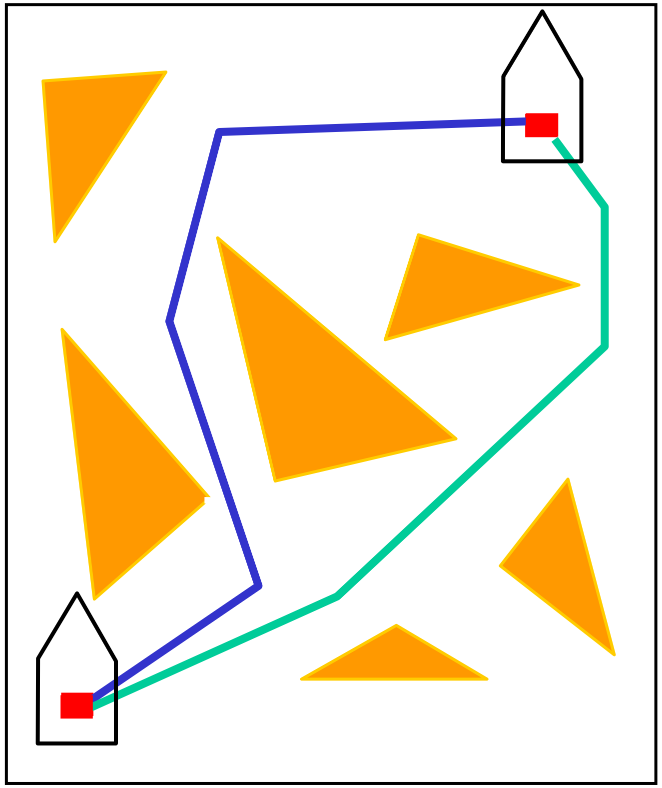
En 3D todos los puntos de las aristas de los obstáculos poliédricos pueden ser inflexiones

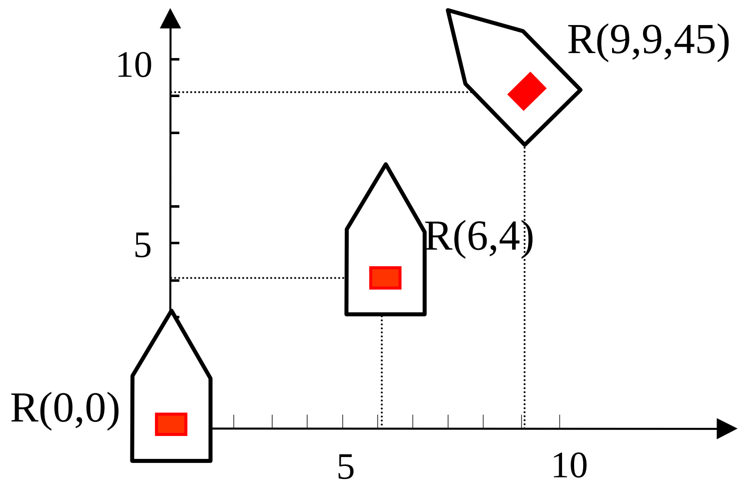


NP-duro
algoritmos aproximados con puntos adicionales

PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

R robot, $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ obstáculos poligonales





Traslación: 2 grados de libertad

Traslación + Rotación: 3 grados de libertad

PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

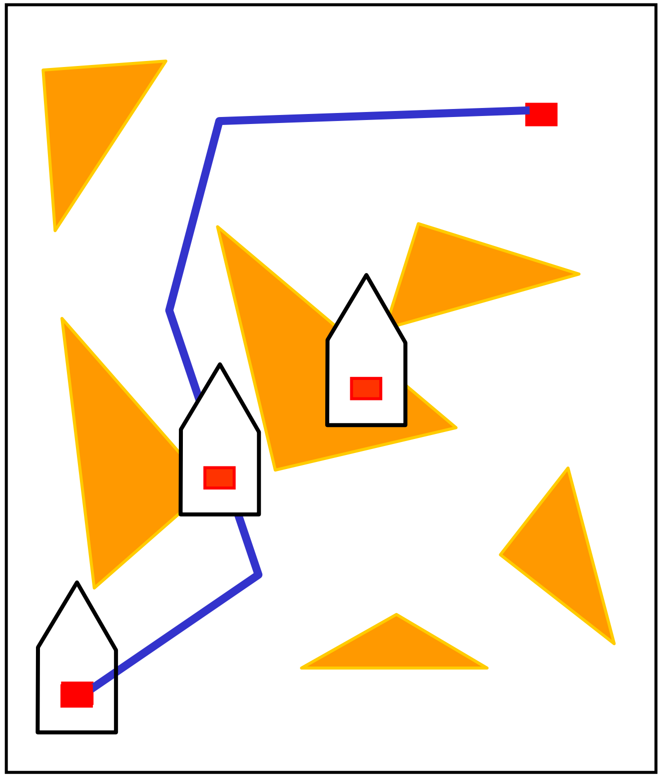
Espacio de trabajo R^2 ó R^3 (donde el robot se mueve)

Espacio de parámetros o espacio de configuración C(R)
Un punto p en C(R) es una ubicación R(p) del robot

- Si sólo traslaciones C(R) es el espacio de trabajo
- Si además permitimos rotaciones en el plano
  p=(x,y,α) corresponde a la ubicación R(x,y,α)
  C(R) es $R^2 \times [0,360)$ (un cilindro)

¿Todos los puntos p en C(R) corresponden a posiciones posibles del robot?

PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT



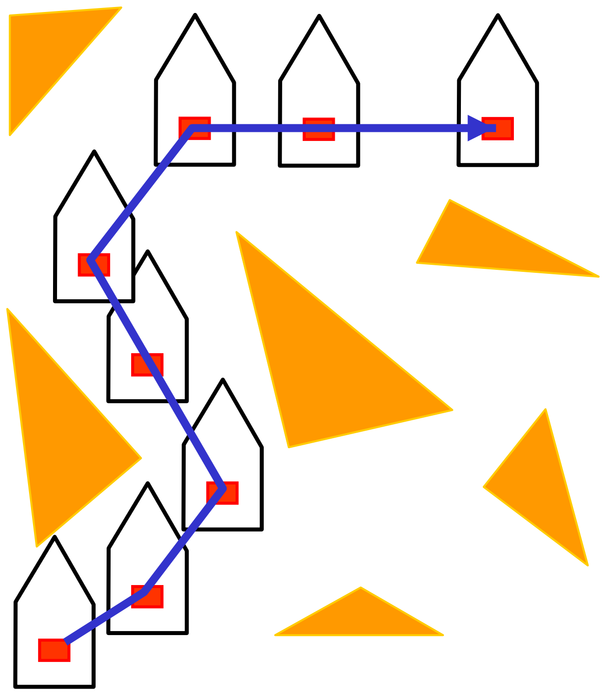
R(p) puede intersecar a los obstáculos
Hay puntos en C(R) prohibidos
para los obstáculos S

Espacio prohibido $C_{proh}(R,S)$

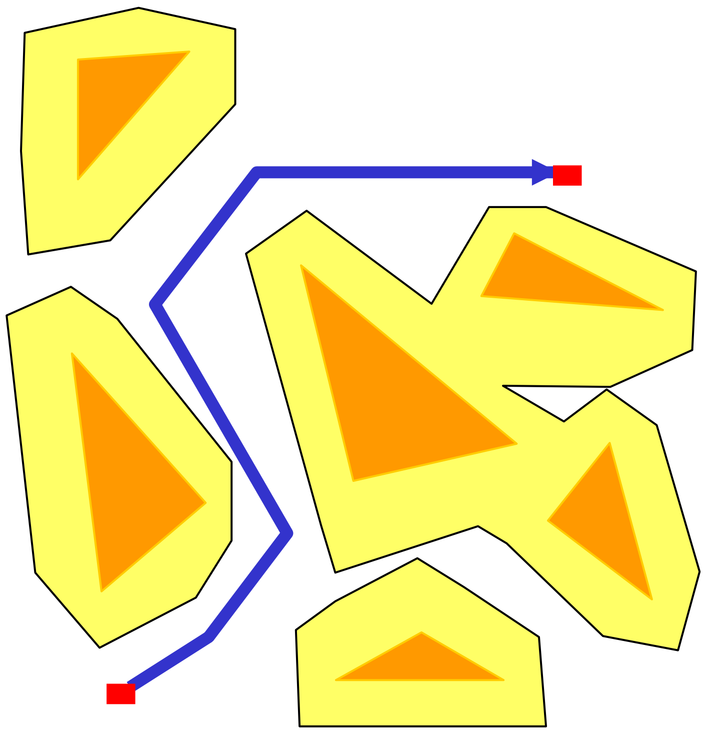
Espacio libre $C_{lib}(R,S)$

El camino del robot es una curva en el espacio libre

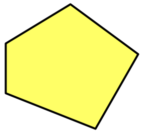
Espacio de trabajo



Espacio de configuración



Espacio prohibido $C_{proh}(R,S)$



PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

1) Construcción del espacio libre $C_{lib}(R,S)$

SUMA DE MINKOWSKI

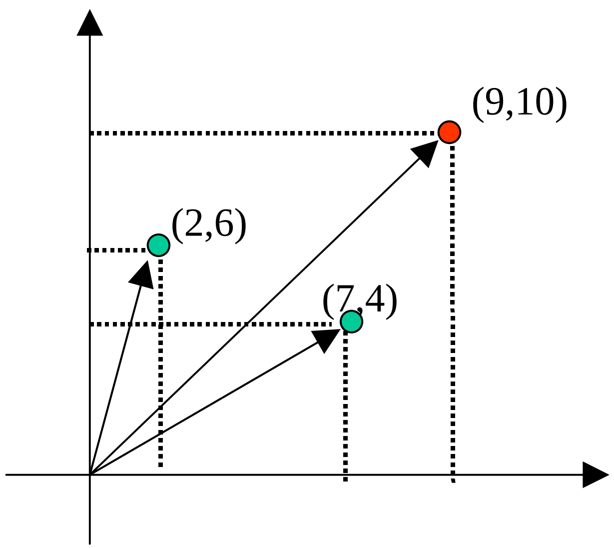
2) Construcción del camino mínimo para un robot puntual en el espacio libre

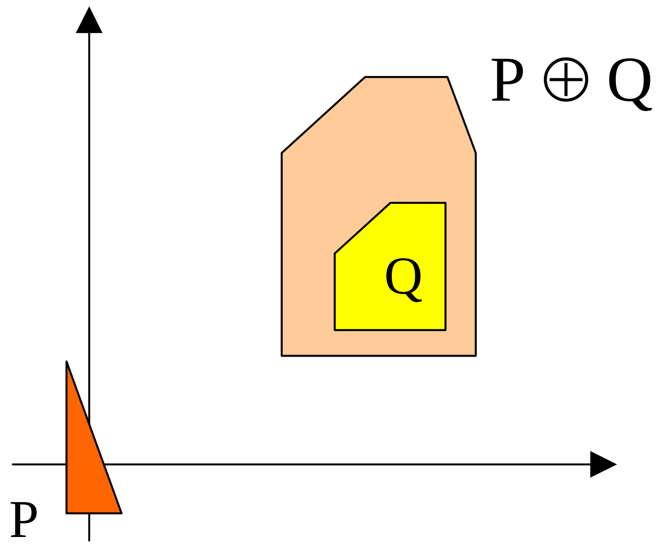
GRAFO DE VISIBILIDAD
ALGORITMO DE DIJKSTRA

SUMA DE MINKOWSKI

P, Q conjuntos de R^2

$P \oplus Q = \{ p + q \,/\, p \in P,\ q \in Q \}$

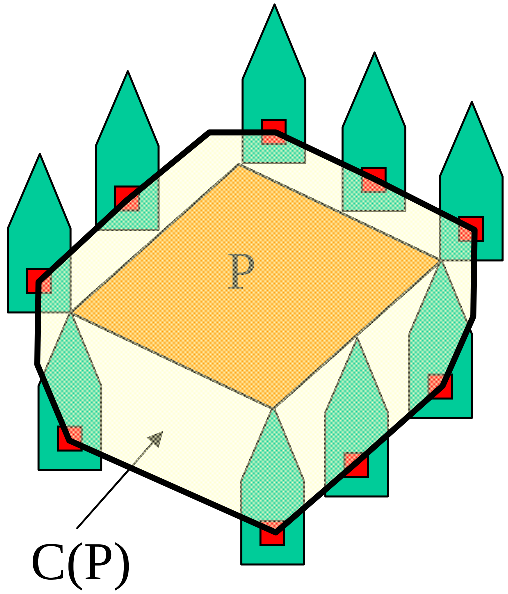




SUMA DE MINKOWSKI

Si R es un robot convexo, P obstáculo poligonal, el espacio prohibido (o C-obstáculo de P) es

$$C(P)=\{(x,y)\ /\ R(x,y) \cap P \neq \emptyset\}$$

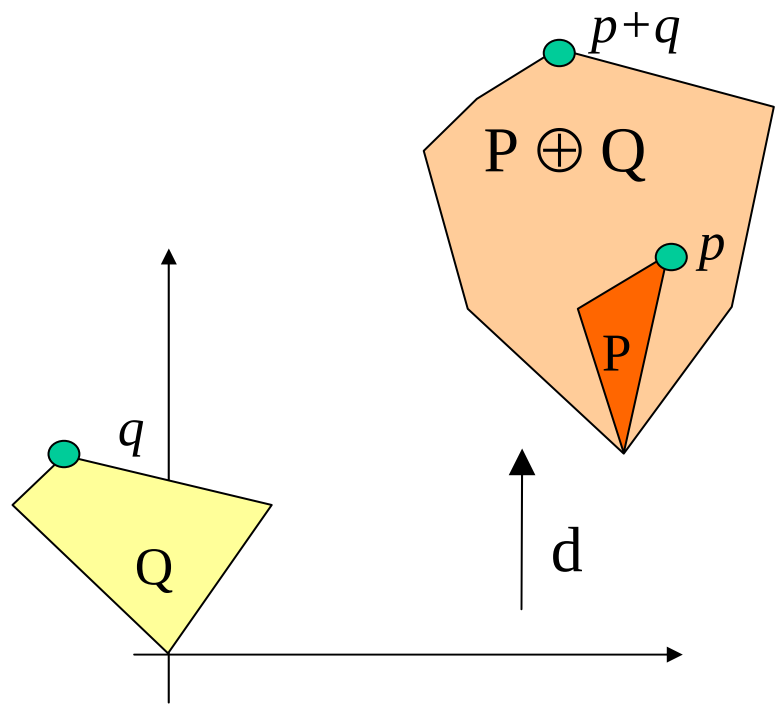


Teorema

$$\boxed{C(P) = P \oplus (-R(0,0))}$$

SUMA DE MINKOWSKI

En P ⊕ Q, un punto extremo en una dirección d debe ser suma de puntos extremos de P y de Q



Teorema

Si P y Q son polígonos convexos de m y n vértices entonces P ⊕ Q es un polígono convexo de, a lo más, m+n lados

SUMA DE MINKOWSKI

Algoritmo 1 (Suma de P y Q convexos)

1) Para cada par de vértices p, q de P y Q, respectivamente, se calcula $p \oplus q$
2) Cierre convexo de los puntos así obtenidos

Complejidad O(nm)

Algoritmo 2 (Suma de P y Q convexos)

La observación sobre direcciones permite utilizar el método de los calibres para obtener un algoritmo lineal O(n+m)

SUMA DE MINKOWSKI

¿Y si los polígonos no son convexos?

Clave: $P \oplus (Q \cup R) = (P \oplus Q) \cup (P \oplus R)$

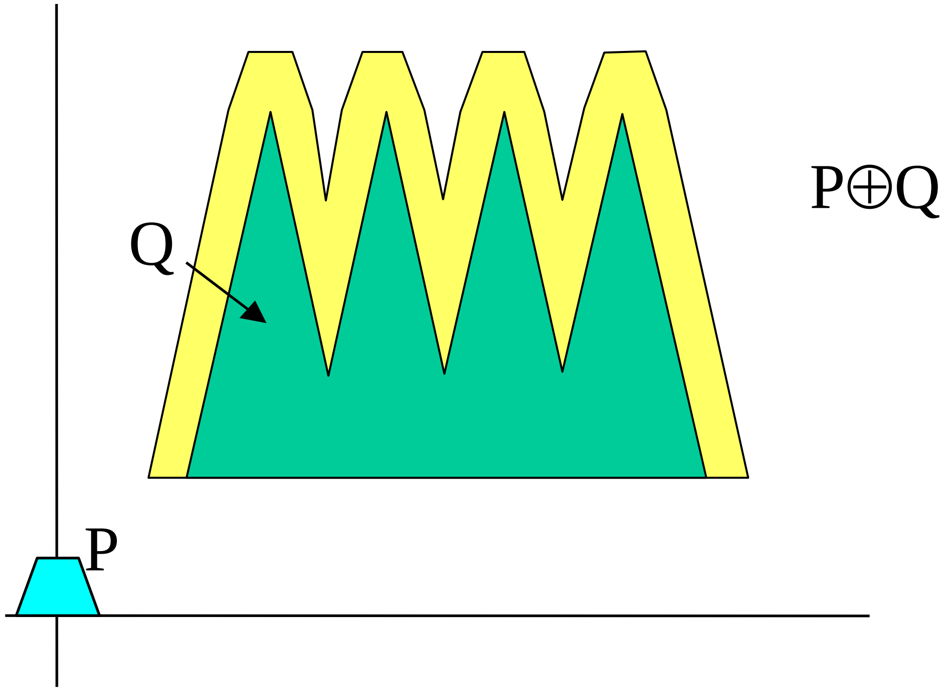
Si P es convexo y Q no convexo

1) Se triangula Q en m-2 triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_{m-2}$
2) Se calculan las sumas $P \oplus T_k$
   Cada una es un polígono de a lo más n+3 vértices
3)

$$P \oplus Q = \bigcup_{k=1}^{m-2} P \oplus T_k$$

Complejidad O(nm)

SUMA DE MINKOWSKI

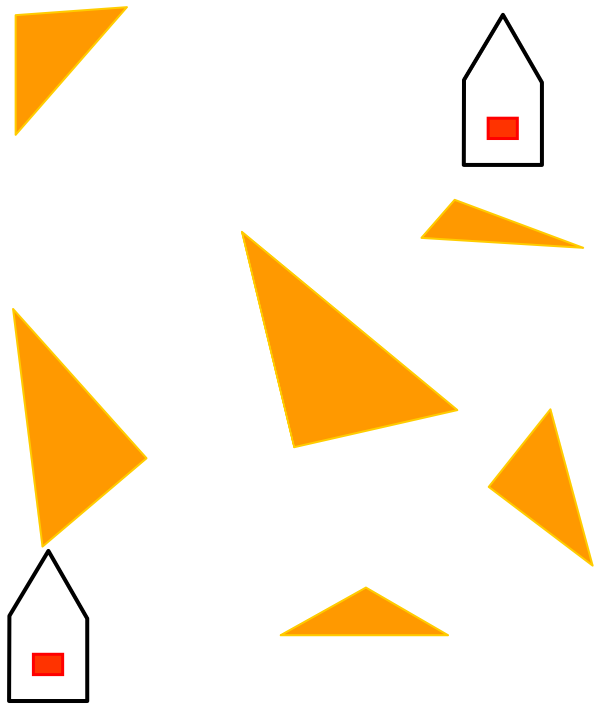


Si P polígono de n lados,
Q polígono de m lados, la
complejidad de P ⊕ Q es:

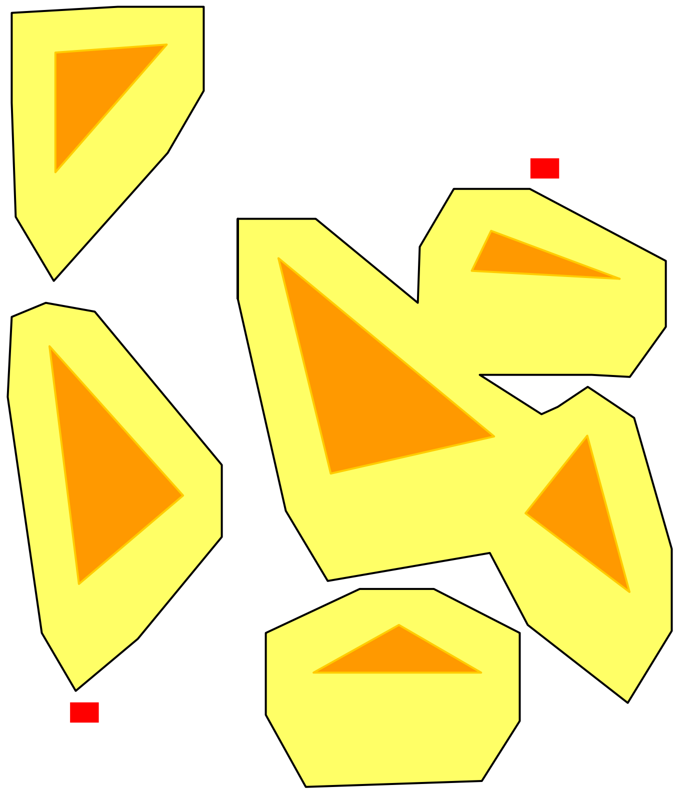
O(n+m) si P y Q convexos
O(nm) si uno es convexo y el otro no
O(n^2m^2) si ambos son no convexos

PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

Espacio de trabajo

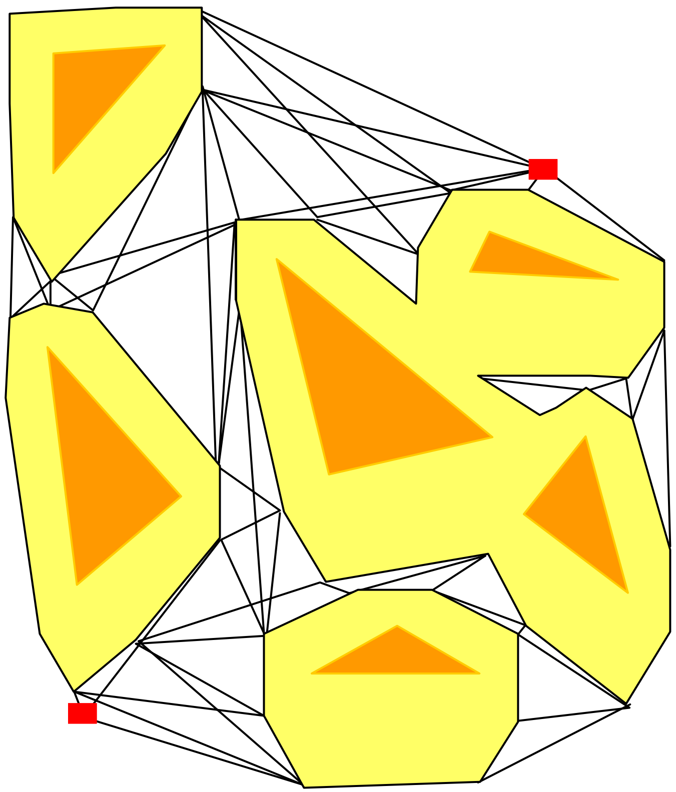


Espacio de configuración

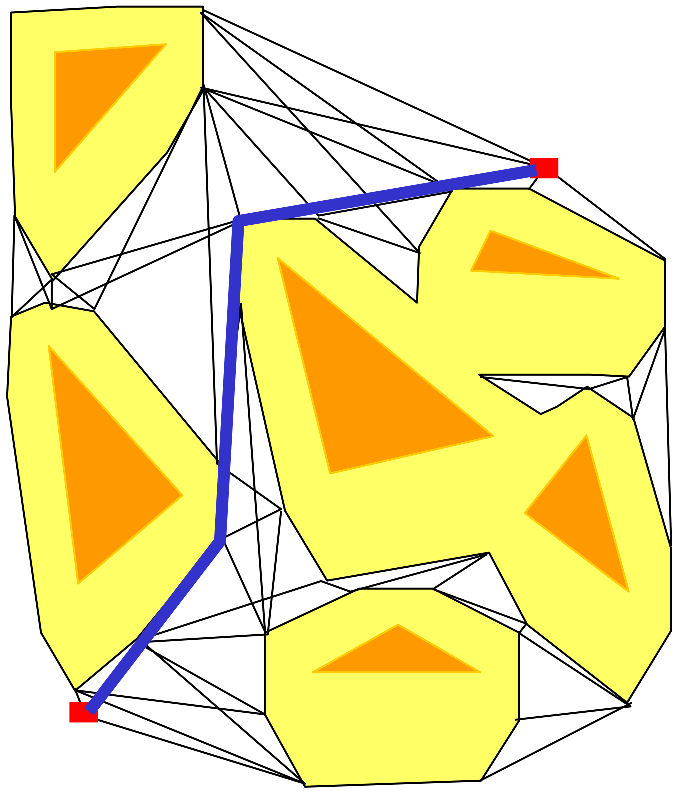


PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

Grafo de visibilidad



Camino mínimo



PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS DE UN ROBOT

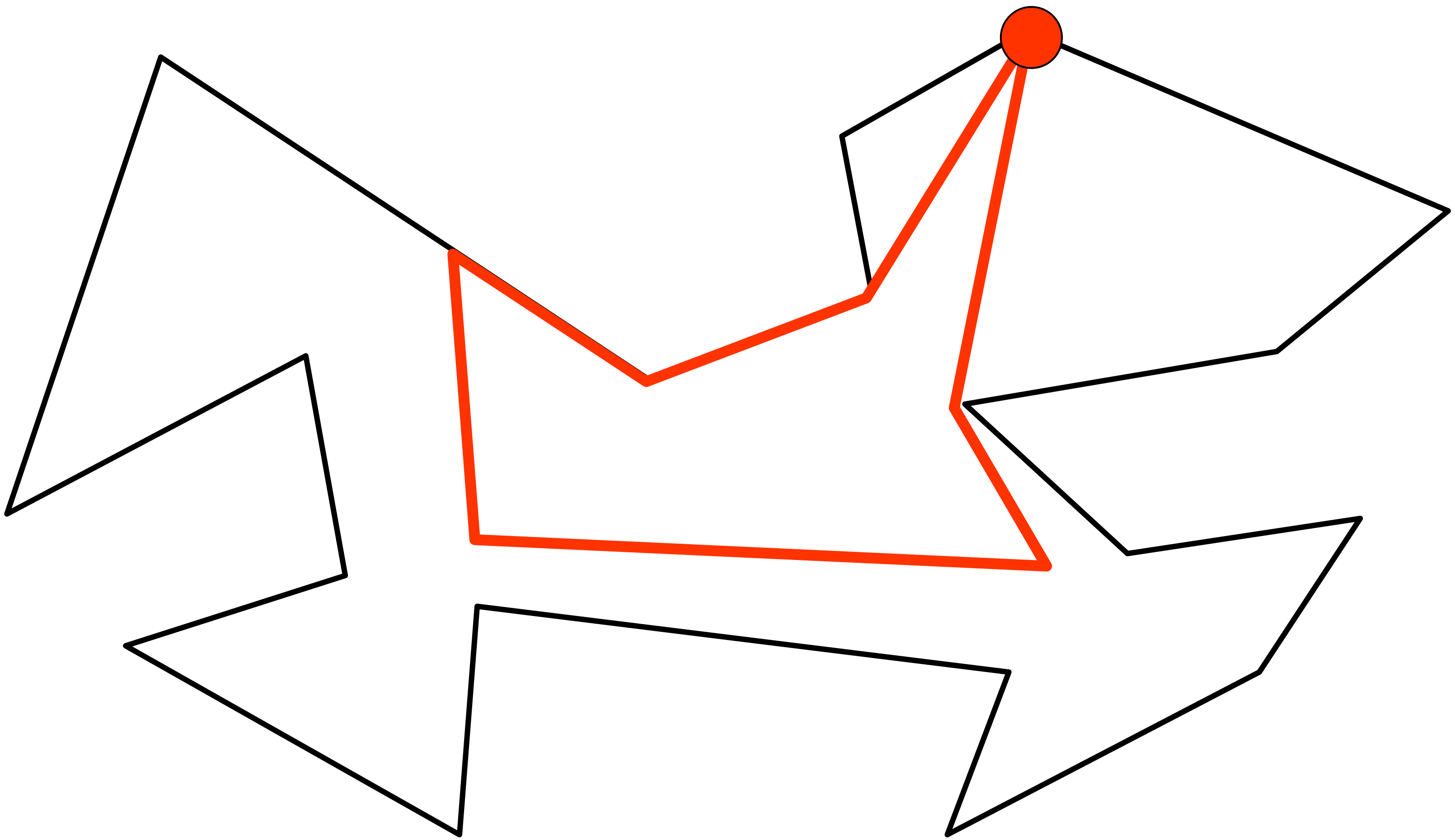
Complejidad

1) Si el robot R es convexo y de complejidad constante, el espacio libre entre polígonos con n lados en total se calcula en $O(n\log^2 n)$ y tiene complejidad $O(n)$

2) El grafo de visibilidad del espacio libre se calcula en $O(n^2\log n)$

3) El camino mínimo para R entre dos lugares puede calcularse en $O(n^2\log n)$

Rutas de vigilancia

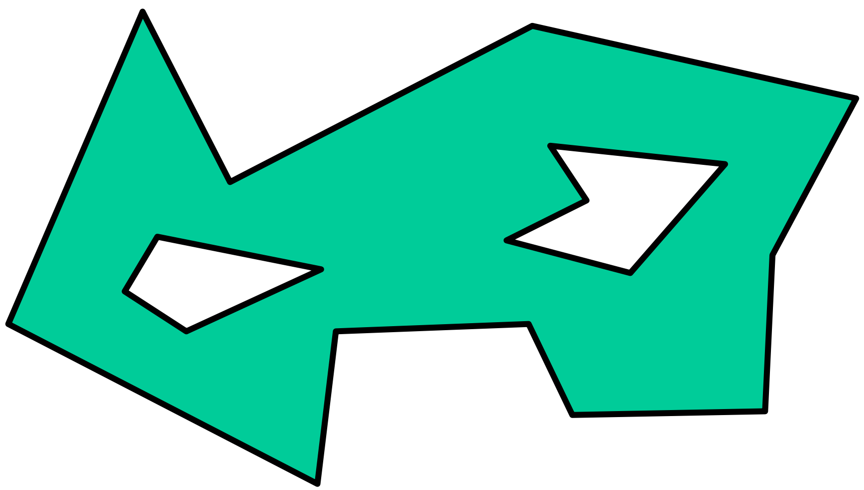


Chin, Ntafos, 1992 $O(n^4)$

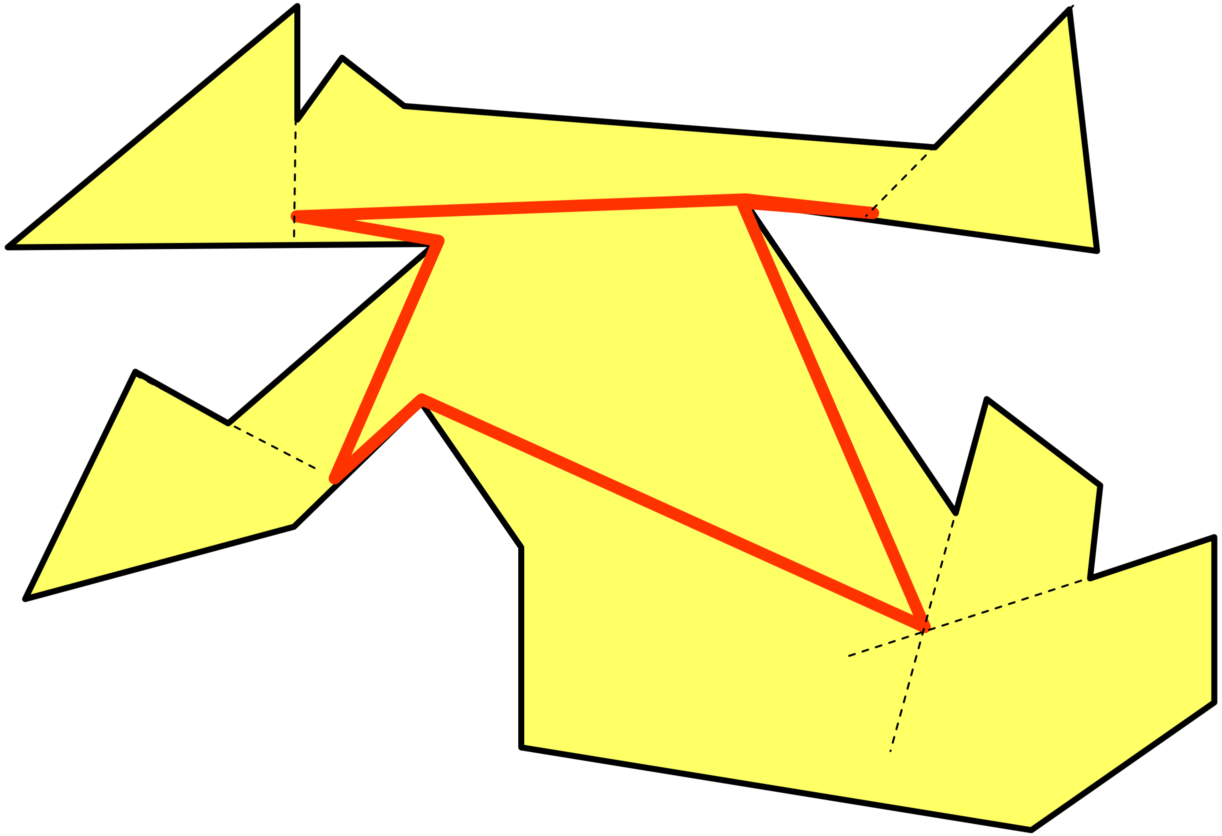
Rutas de vigilancia

- El Problema del viajante es NP-completo
- El Problema de vigilancia en un polígono es NP-completo

Determinar la ruta del vigilante en polígonos con agujeros es NP-completo

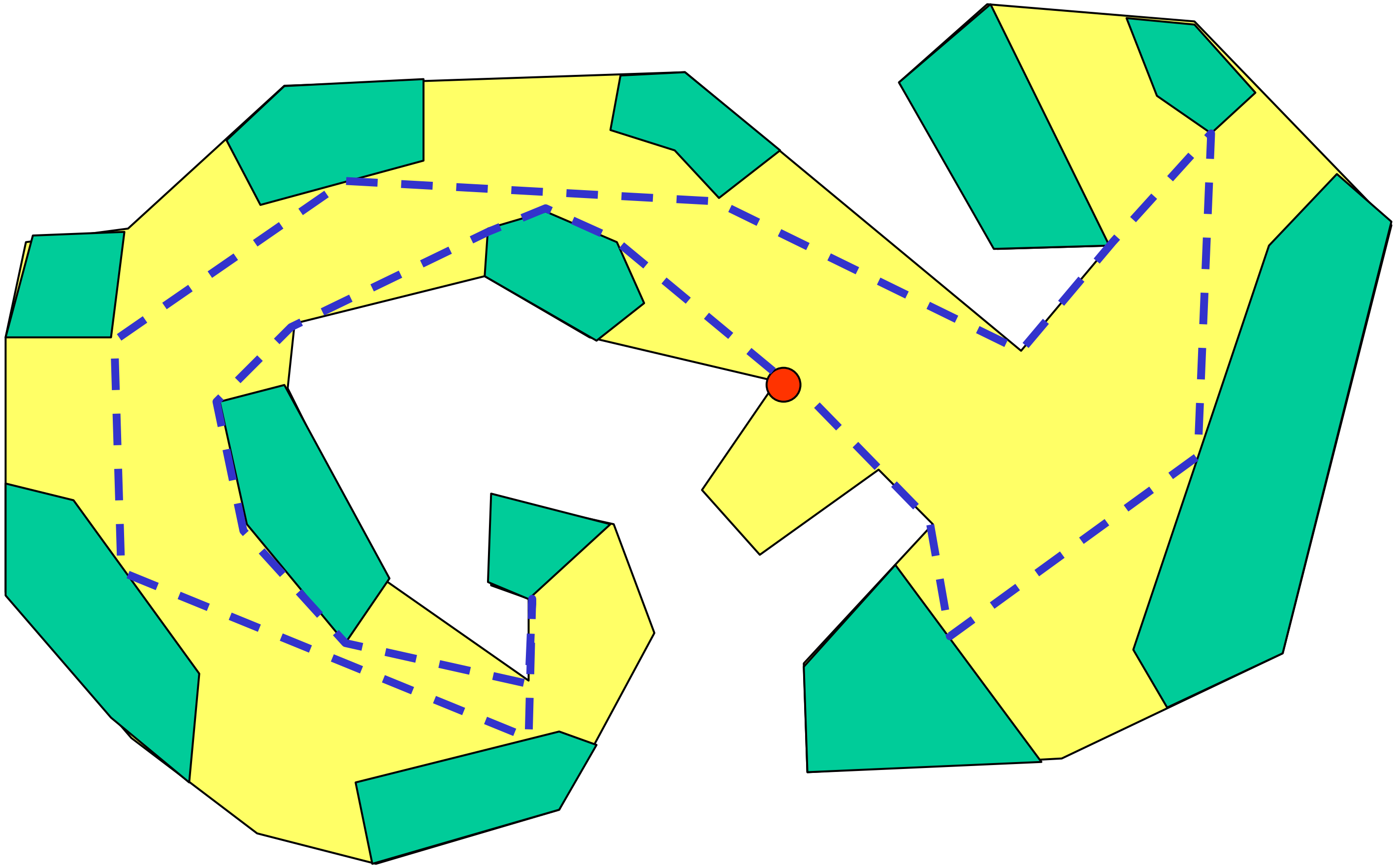


Rutas de vigilancia



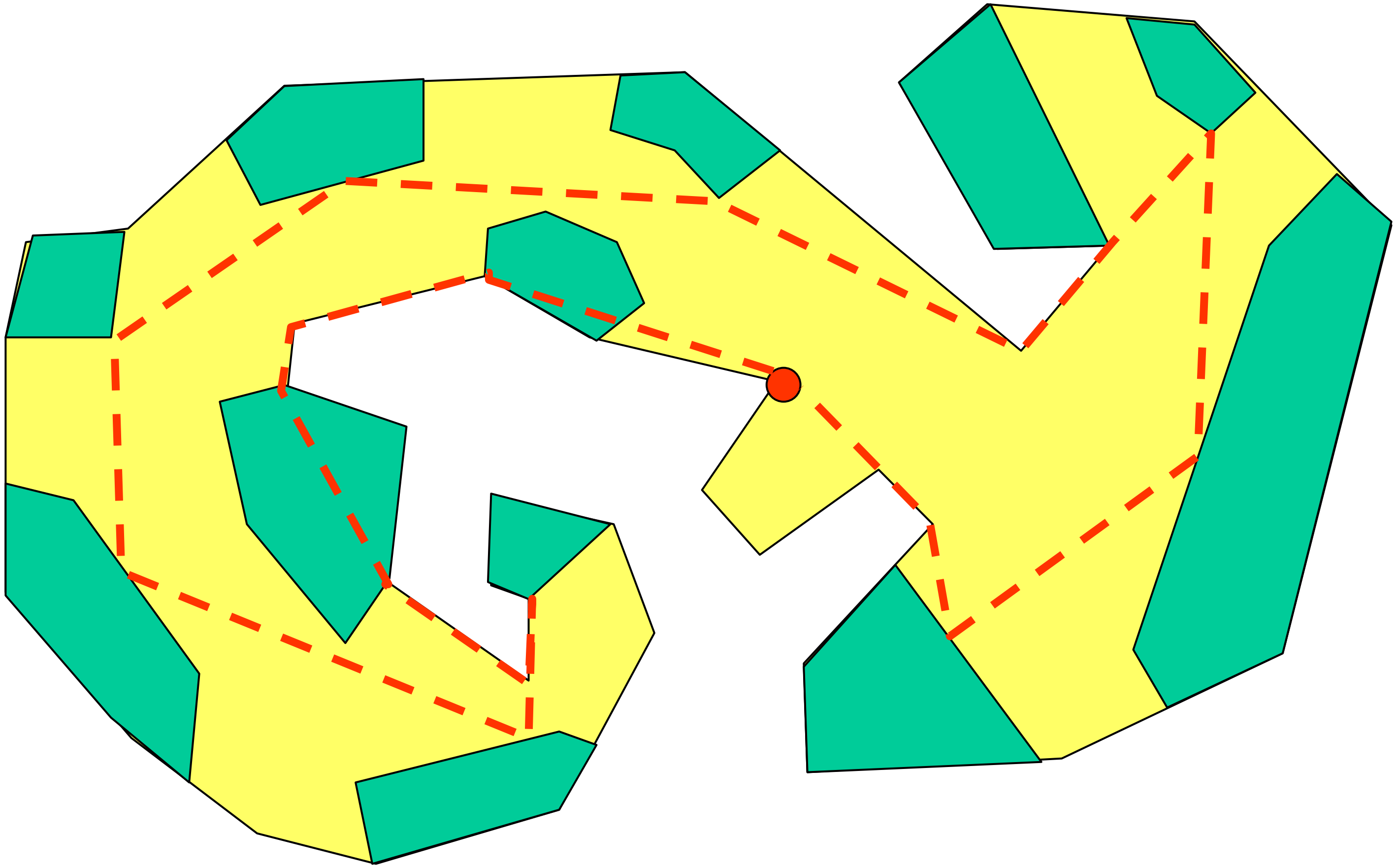
Carlsson y otros, 1999 $O(n^6)$

PROBLEMA DEL ZOO



NP-duro si las jaulas no están en el borde Chin, Ntafos
O(nlogn) Bespamyatnikh, 99

PROBLEMA DEL SAFARI



NP-duro si las zonas no están en el borde Chin, Ntafos

$O(n^3)$ Ntafos, 92

REFERENCIAS BÁSICAS

- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry*, Springer, 1997
- J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge, 1994
- J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, Handbook on Computational Geometry, (J.-R. Sack, J. Urrutia, ed.) Elsevier, 2000
- J. Mitchell, *Shortest paths and networks*, Handbook of Discrete and Computational Geometry, (J. Goodman, J. O'Rourke, ed.) CRC, 1997

Problemas abiertos

- J. O´Rourke, *Open Problems in the Combinatorics of Visibility and Illumination*, Contemporary Mathematics, 2000
- Página web de J. Urrutia
  http://www.matem.unam.mx/~urrutia/
- Página web de J. O’Rourke
  http://cs.smith.edu/~orourke/Welcome.html

Software en la red

http://www.dma.fi.upm.es/docencia/trabajosfindecarrera/programas/geometriacomputacional/

Robot en un polígono

http://wwwpi6.fernuni-hagen.de/Geometrie-Labor/apps/stip/

Calibres

http://cgm.cs.mcgill.ca/~orm/rotcal.html

Planificación de movimientos

http://www.cs.uu.nl/~markov/kids/motion/