CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

Universidad Politécnica de Madrid

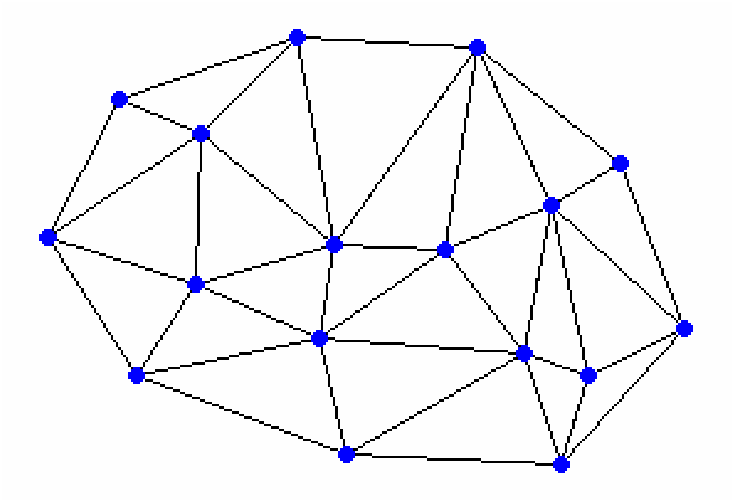
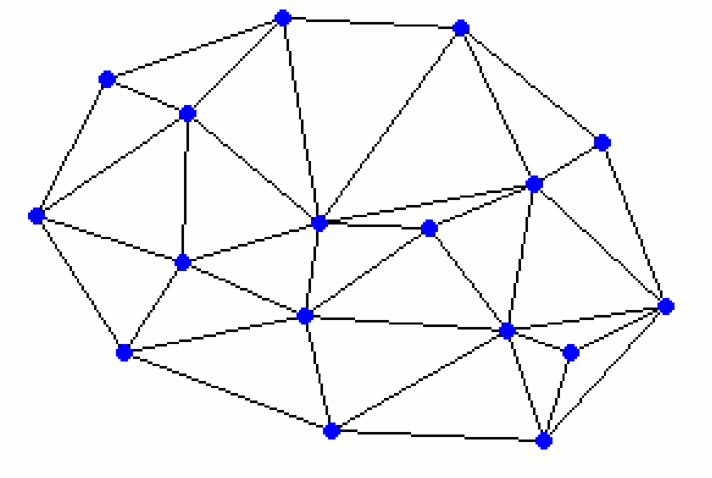
Jornadas sobre Multirresolución en Modelización Geométrica
Cercedilla, 19-20 Diciembre 2001

# TRAZADO DE TRIANGULACIONES DE PESO MÍNIMO

Gregorio Hernández Peñalver

UPM

# TRIANGULACIONES

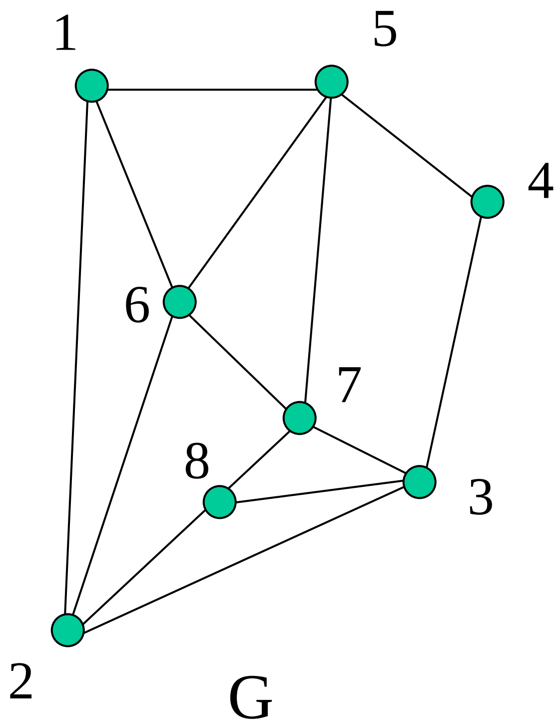
Peso de una triangulación T $$w(T) = \sum_e w(e)$$

PROBLEMA:
Dado S, nube de puntos en el plano, construir la trangulación de peso mínimo de S, MWT(S)

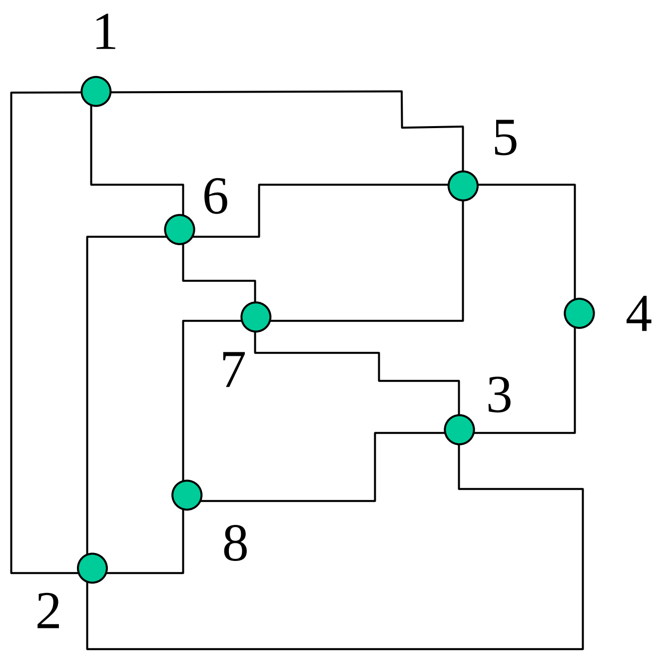
¿es un problema NP-completo?

# TRAZADO DE GRAFOS “GRAPH DRAWING”

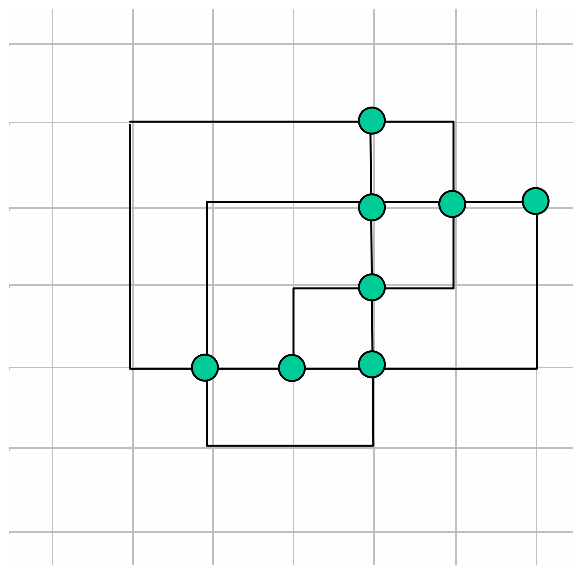
G=(V,A) V={1,2,3,4,5,6,7,8}, A={12,15,16,23,26,28,34,37,38,45,56,57,67,78}




G




G



G

## TRIANGULACIONES

Dado S, nube en el plano, construir la triangulación MWT(S)

## TRAZADO DE GRAFOS

Dado un grafo G, que es una triangulación (grafo plano en el que todas las caras, salvo a lo más una, son triángulos) construir una nube de puntos S, tal que MWT(S) $\approx$ G

Si existe S diremos que G admite un *trazado de peso mínimo*

PROBLEMA:
¿Todo grafo triangulación admite un trazado de peso mínimo?

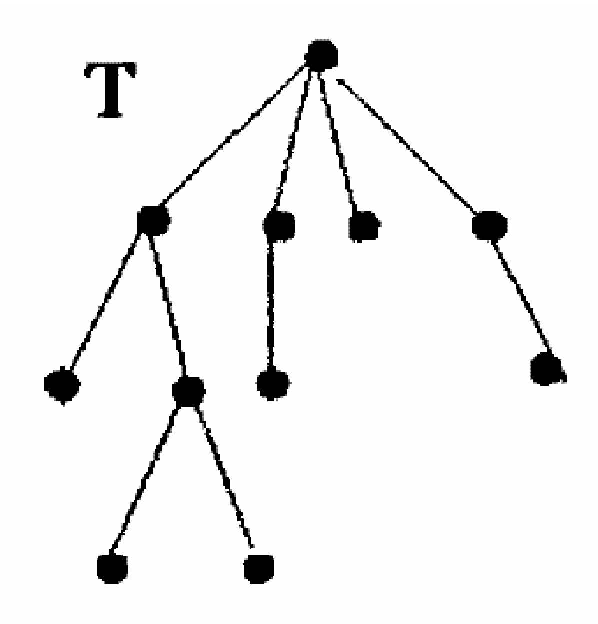
## TRAZADOS DE PESO MÍNIMO

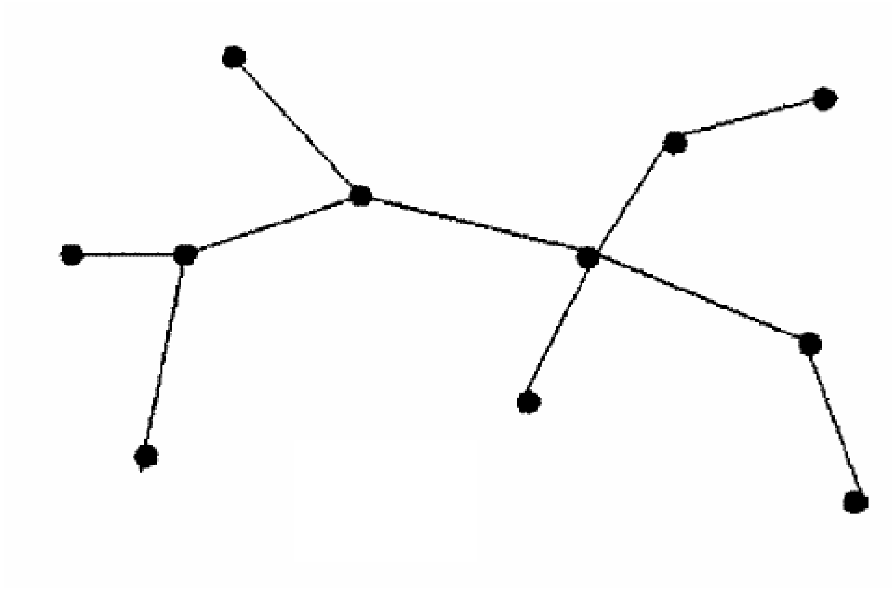
Dada C, clase de grafos, S nube de puntos en el plano, un grafo G de la clase C, tal que V(G)=S, las aristas rectilíneas sin cortes y suma de longitudes de aristas mínima respecto de todos los grafos de C.
Tal grafo G es el representante de peso mínimo de C
Un grafo G de C admite un trazado de peso mínimo si G es el representante de peso mínimo para algún conjunto S

C, clase de ÁRBOLES
El árbol T admite un trazado de peso mínimo si existe S tal que EMST(S) $\approx$ T

¿Todo árbol admite un trazado de peso mínimo?

# TRAZADOS DE PESO MÍNIMO de ÁRBOLES



## TRAZADOS DE PESO MÍNIMO de ÁRBOLES

91, Monma y Suri

si $\Delta(T) \leq 5$, T admite un trazado de peso mínimo

construcción en tiempo O(n)

si $\Delta(T) > 6$, T NO admite trazado de peso mínimo

94, Eades y Whitesides

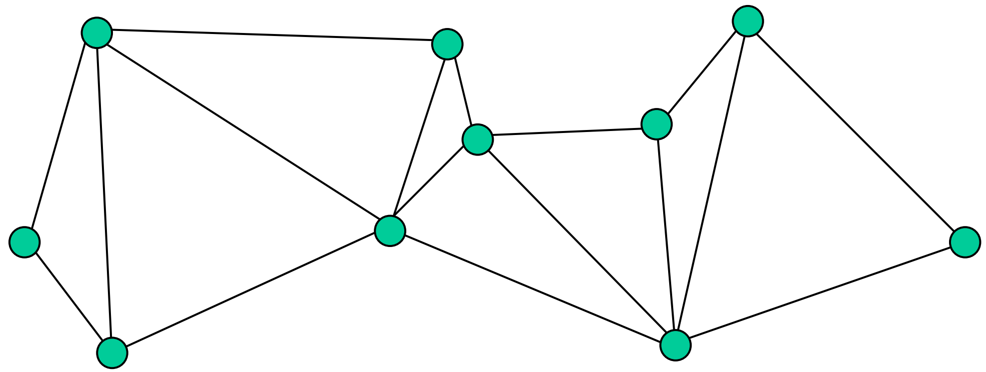
si $\Delta(T) = 6$ , es un problema NP-completo decidir si T admite un trazado de peso mínimo

95, Liotta y Di Battista

estudian la representabilidad de árboles como MST en 3-d

# TRAZADOS DE PESO MÍNIMO de TRIANGULACIONES

96, Lenhart y Liotta
Las triangulaciones periplanas maximales son MWT-trazables
Construcción en tiempo O(n)

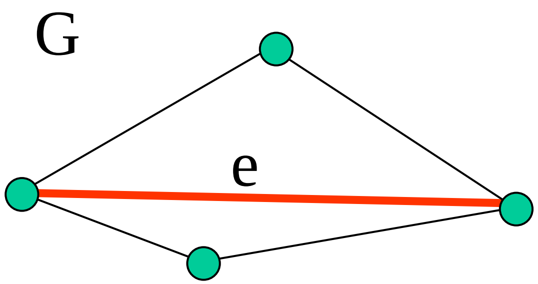


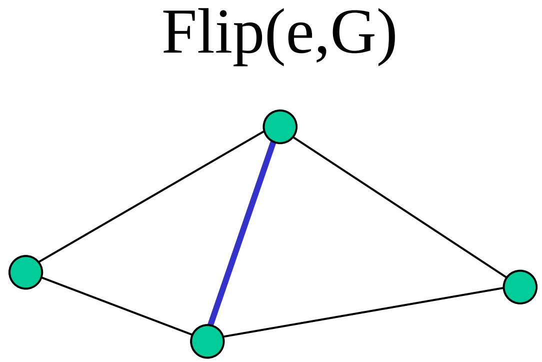
97, Lenhart y Liotta
- familias de triangulaciones que son MWT-trazables
- familias de triangulaciones que no son MWT-trazables
- relación con los grafos que pueden ser trazados como
  triangulaciones de Deloné de un conjunto S de puntos

# TRAZADOS DE PESO MÍNIMO de TRIANGULACIONES

Propiedades básicas

1. Dado S, la triangulación MWT(S) contiene la arista más corta y todas las aristas de CH(S)
2. MWT(S) no siempre contiene a MST(S)
3. Si G no puede trazarse como MWT-local tampoco puede trazarse como MWT

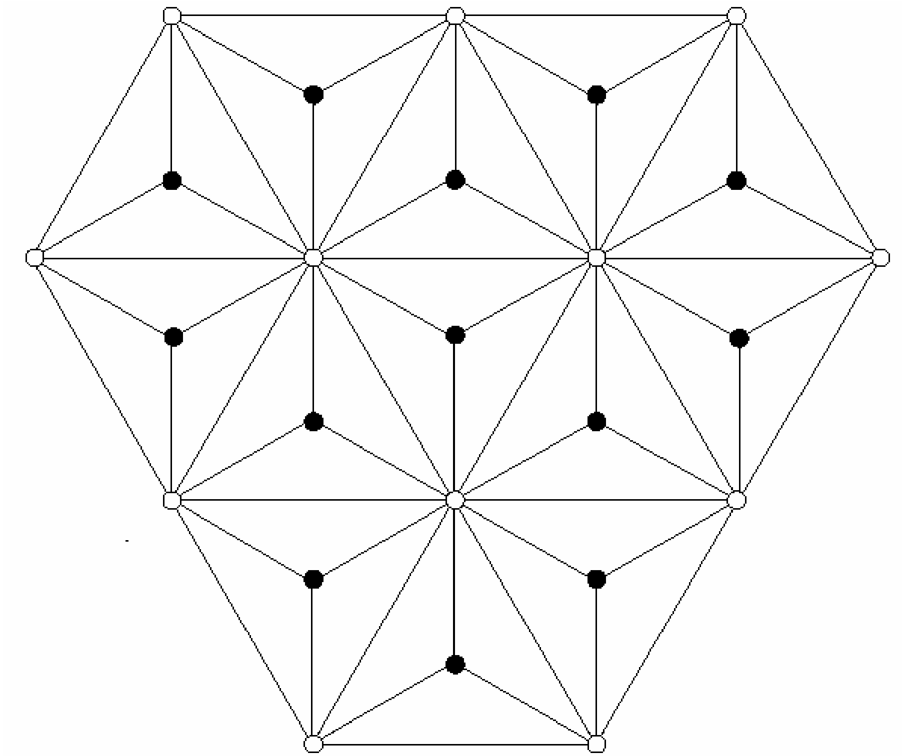


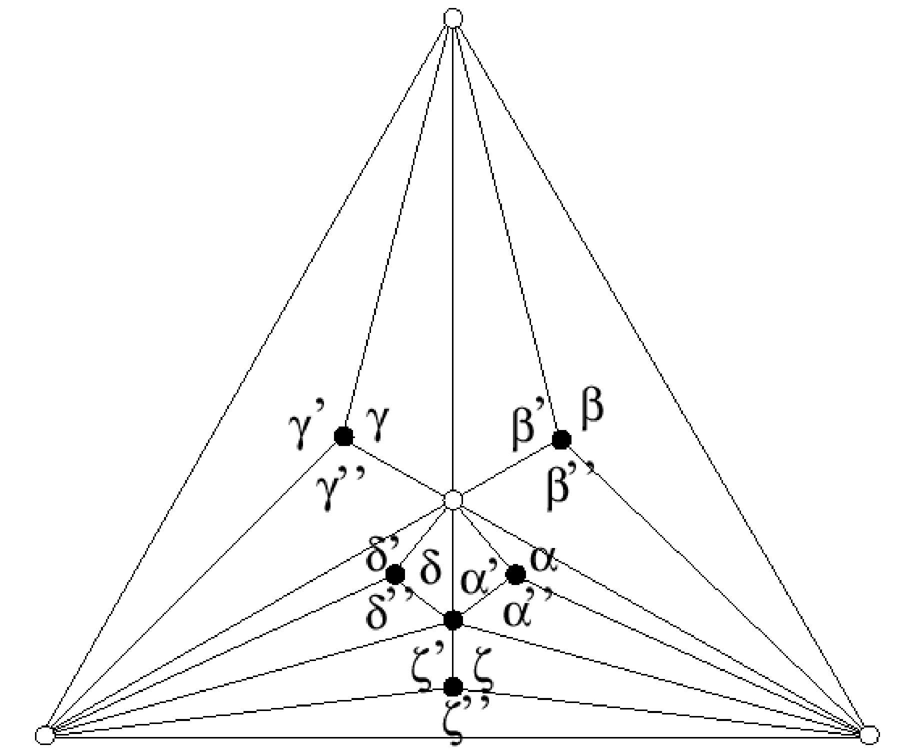




G es MWT-local si ningún flip reduce su peso

Si G es MWT-local, los ángulos opuestos a e no son ambos obtusos

Triangulaciones no MWT-trazable






Configuraciones prohibidas

**TRAZADOS DE PESO MÍNIMO $\Leftrightarrow$ TRAZADOS DELONÉ**

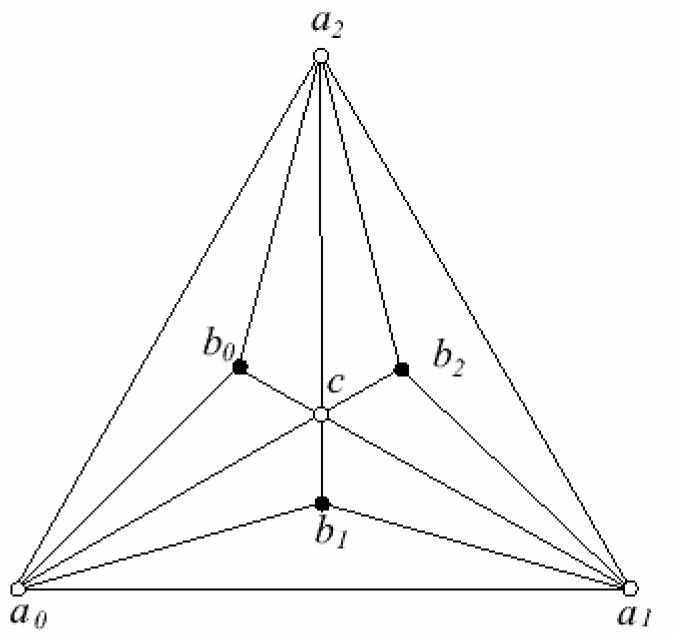
Una triangulación G es trazable-Deloné si existe S, nube de puntos en el plano, tal que $G \approx DT(S)$

No hay caracterización combinatoria completa de los grafos TD
Dillencourt (90), Di Battista, Vismara (96)

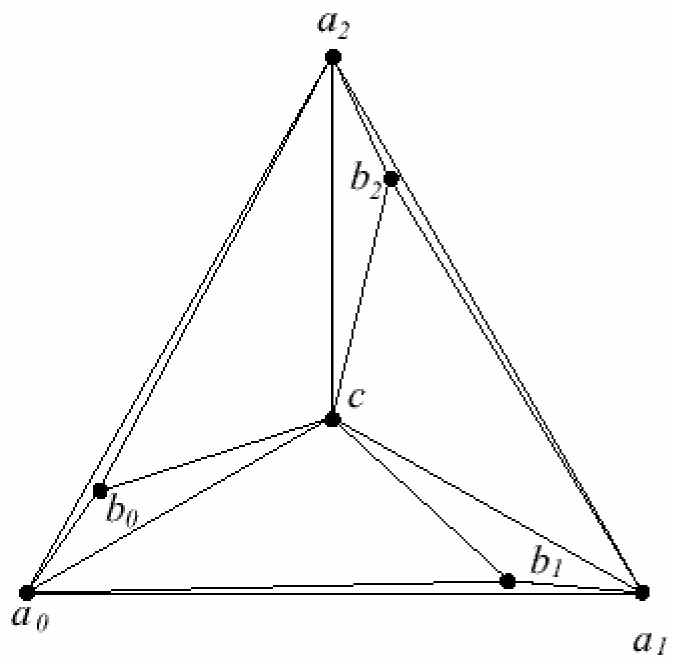
Teorema (Dillencourt, 90)
Si G es trazable-Deloné, entonces para todo $P \subset V(G)$ se tiene que
1.- $G - P$ tiene a lo más $|P|$ componentes (G es 1-tough)
2.- $G - P$ contiene a lo más $|P| - 2$ componentes que no tienen ningún vértice de la cara exterior de G

Los grafos anteriores no son trazables-Deloné

**TRAZADOS DE PESO MÍNIMO ⇔ TRAZADOS DELONÉ**

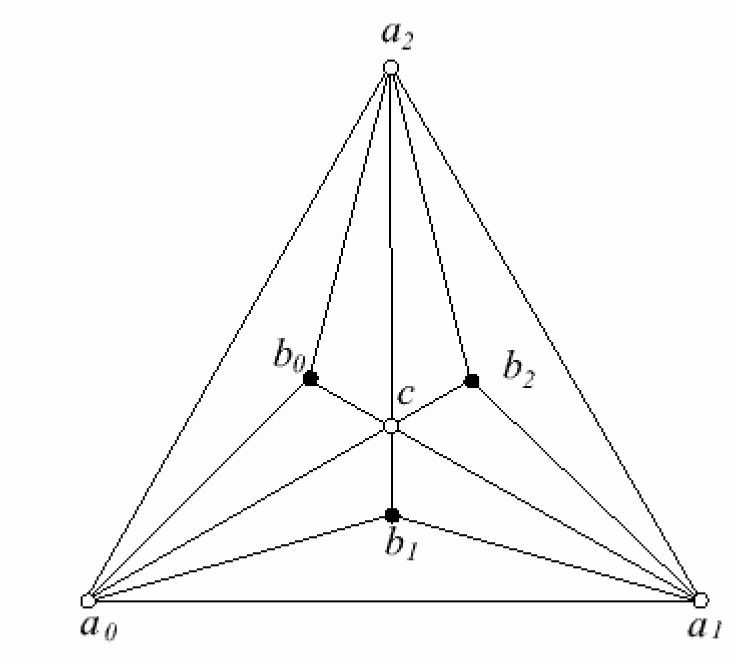



G no es trazable-Deloné

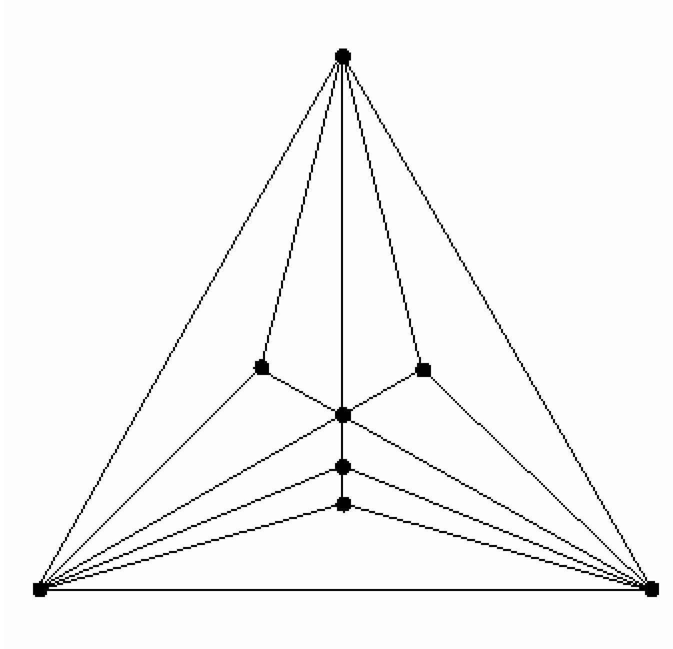



G sí es MWT-trazable

**TRAZADOS DE PESO MÍNIMO $\Leftrightarrow$ TRAZADOS DELONÉ**




G no es trazable-Deloné



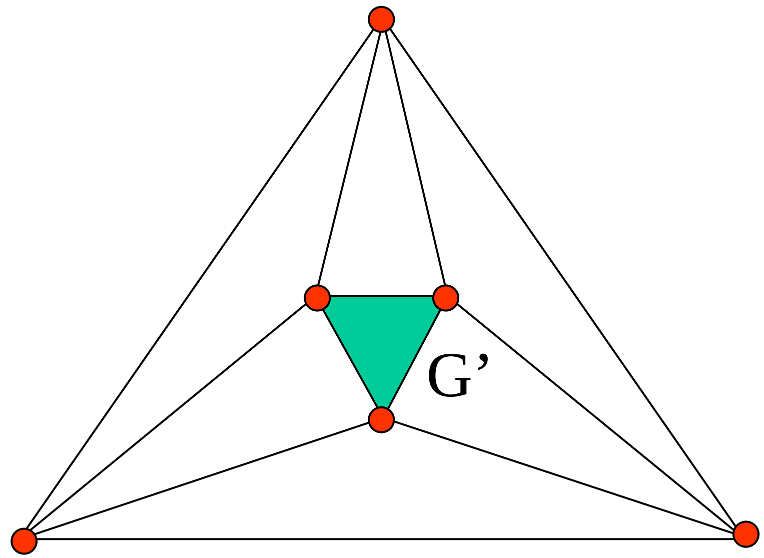
Familia no trazable-Deloné

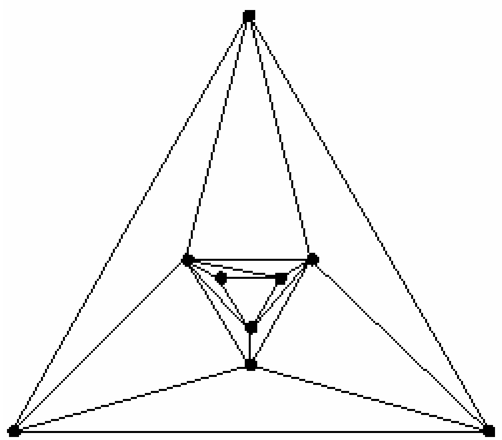
¿Existen triangulaciones trazables-Deloné pero no MWT-trazables?

# TRIANGULACIONES QUE SÍ SON MWT-TRAZABLES

Abanicos, Ruedas

Lema
Si G es triangulación con ...
y G’ es trazable, también lo es G



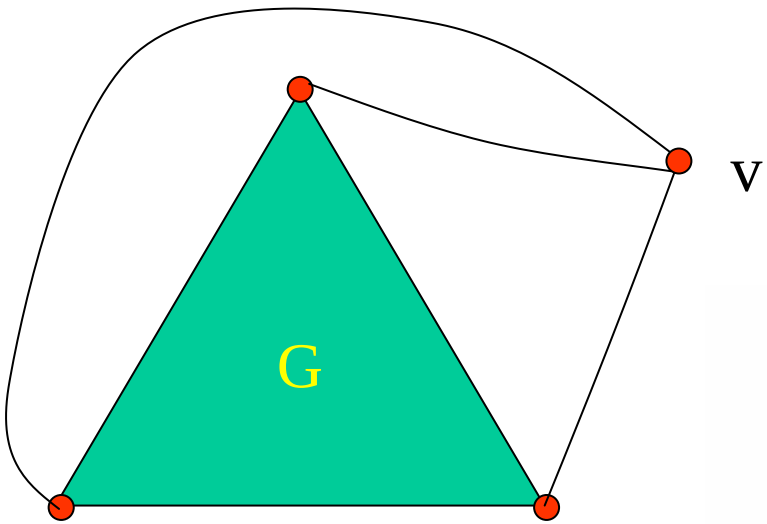



Triangulaciones k-nested

# TRIANGULACIONES QUE SÍ SON MWT-TRAZABLES

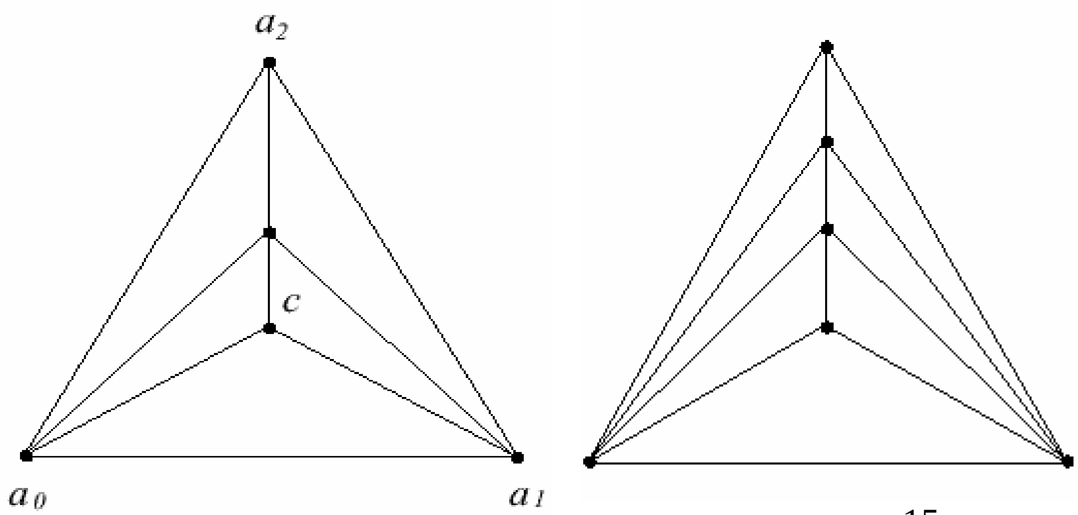
Lema

Si G es triangulación con cara exterior triangular y G’ se obtiene ...



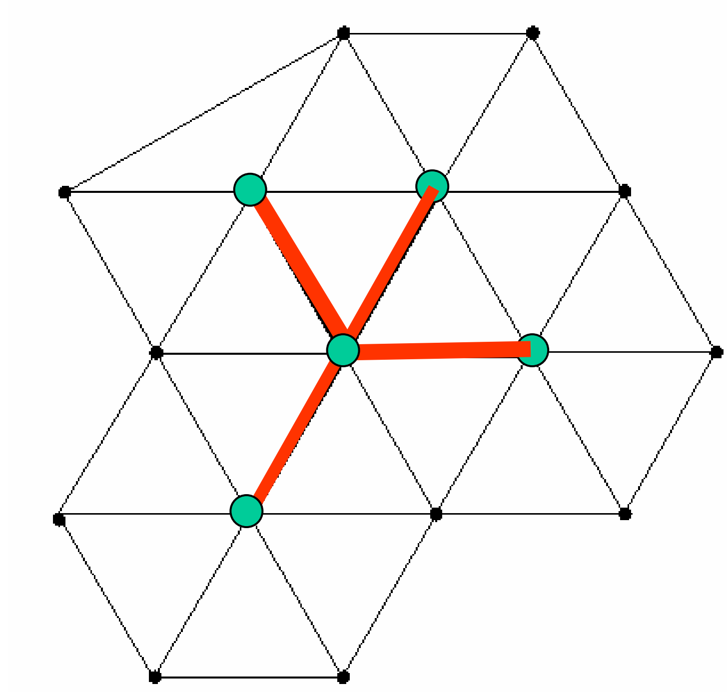

Entonces si G es MWT-trazable
también lo es G’

Triangulaciones
k-espinales



# ESQUELETO Y TRIANGULACIONES MWT-TRAZABLES

El esqueleto de G es el subgrafo
generado por sus vértices internos

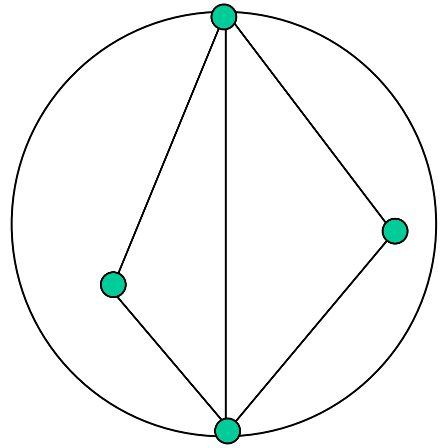


Teorema
Todo bosque es el esqueleto de
alguna triangulación de mínimo peso

Conjetura (Lenhart, Liotta 97)
Toda triangulación cuyo esqueleto es un bosque es MWT-trazable

# CONDICIÓN DE NO MWT-TRAZABILIDAD

Wang, Chin, Yang, 2000



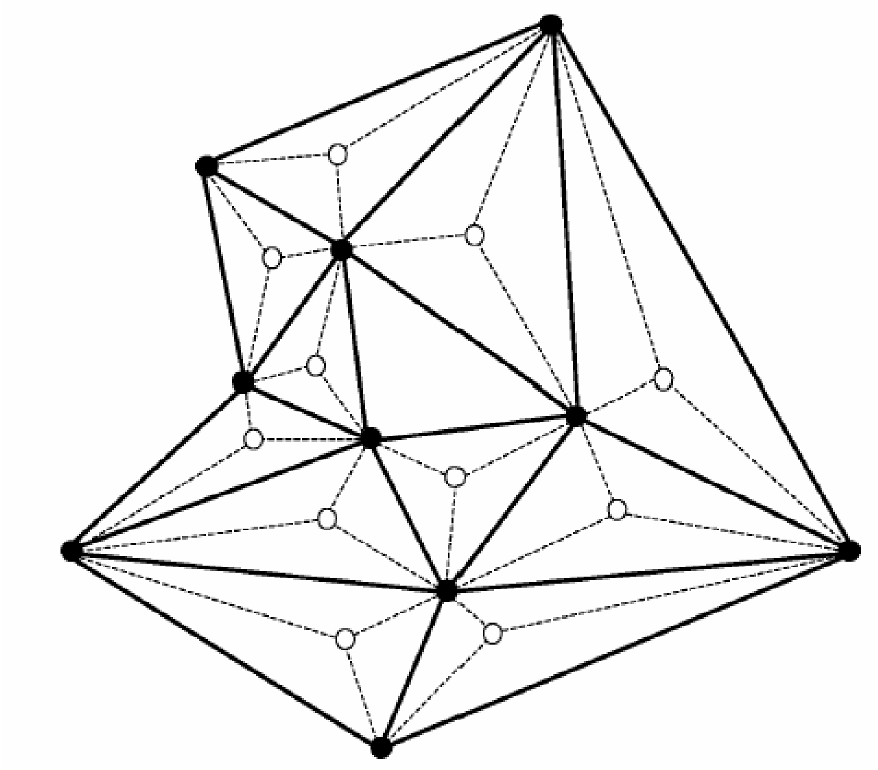
**Lema**
Si en todo trazado de una triangulación aparece un cuadrilátero como en la figura, entonces G no es MWT-trazable

Se traduce esta condición geométrica a otra combinatoria sobre G

1. G tiene un ciclo C con conjunto de vértices internos S no vacío
2. Si S' $=\{v \in S \ / \ d(v)=3\}$, r = nº de caras de int(C) tras borrar S' entonces (a) $|S - S'| > 1$

(b) $$r < |S'| + \frac{|S - S'| - 1}{2}$$

# CONDICIÓN DE NO MWT-TRAZABILIDAD



|S| = 15

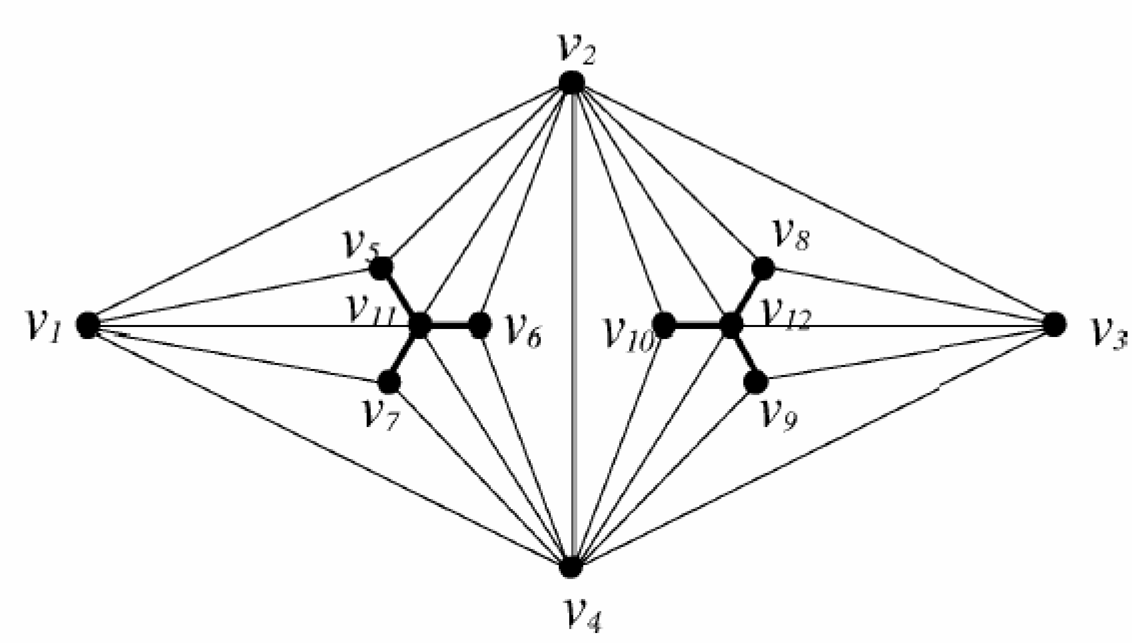
|S'| = 11, |S - S'| = 4

r = 12

**Teorema**

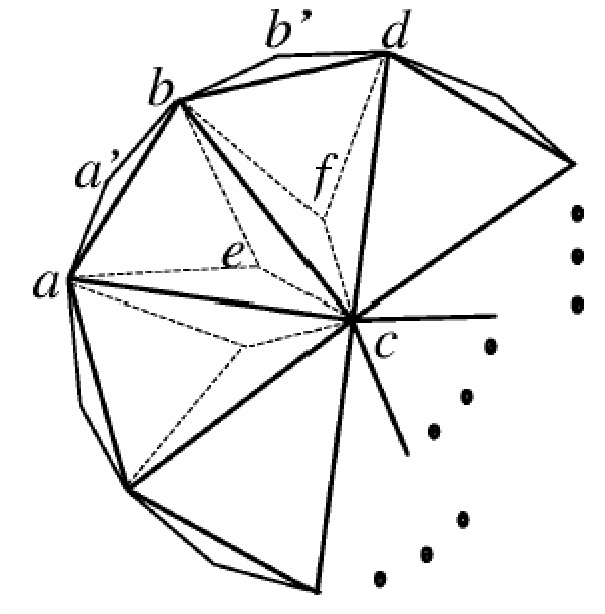
Si G satisface la condición anterior entonces no es MWT-trazable

CONTRAEJEMPLOS




Una triangulación cuyo esqueleto es
un bosque pero no es MW-trazable

CONTRAEJEMPLOS




n >12
al menos 3 obtusos consecutivos

Triangulación de esqueleto árbol pero no MWT-trazable

# REFERENCIAS


- W. Lenhart, G. Liotta, *Drawable and Forbidden Minimum Weight Triangulations*, in Proc GD'97, LNCS, v. 1353, pp. 1-12, Springer
- C. A. Wang, F. Chin, B. Yang, *Triangulations without minimum weight drawing*, Inf. Proc. Letters, 74, pp. 183-189, 2000

- G. Di Battista, W. Lenhart, G. Liotta. *Proximity Drawability: a survey*, in Proc. GD'94, LNCS vol. 894, pp. 328-339, Springer, 1994
- G. Di Battista, L. Vismara. *Angles of planar triangular graphs*. SIAM J. Discrete Math. 9(3), pp. 349-359, 1996.
- M. Dillencourt, *Toughness Delaunay triangulations*. Discrete Comput. Geometry 5, pp. 575-601, 1990
- W. Lenhart, G. Liotta, *Drawing outerplanar minimum weight triangulations*, Inf. Proc. Letters, 57, pp. 253-260, 1996
- C. Monma, S. Suri, *Transitions in geometric minimum spaning trees*. Discrete Comput. Geom, 8, pp. 265-293, 1992