Facultad de Informática
UPM

Año Mundial de
las Matemáticas

NUBES BICOLORES

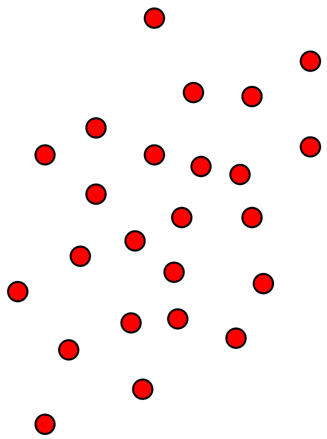
Geometría Discreta y Algorítmica

Gregorio Hernández Peñalver
Facultad de Informática
U.P.M.

Sumario

- Geometría Discreta y Combinatoria
- Complejidad algorítmica
- Cuestiones sobre calibres
- NUBES BICOLORES
  - El bocadillo de jamón
  - Realizabilidad de árboles en nubes bicolores

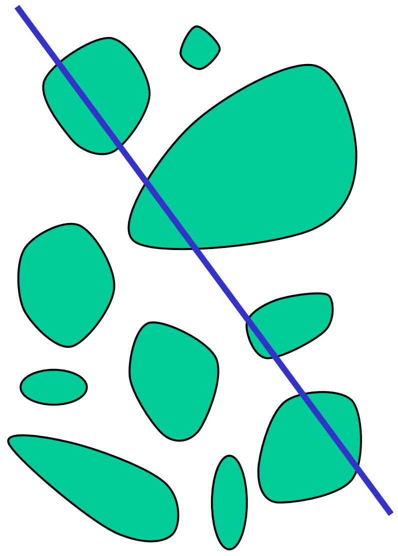
Configuraciones de puntos



n puntos

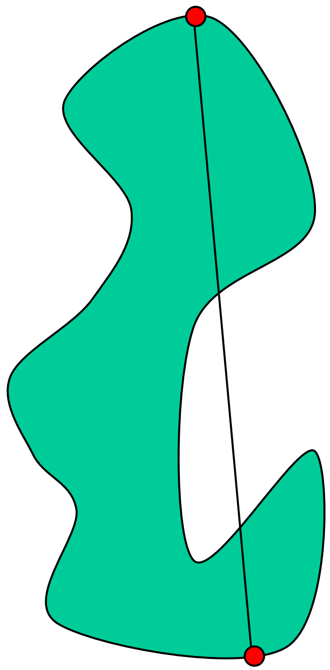
- Existe una recta ordinaria (Sylvester)
- ¿Cuántas rectas?
- ¿Cuántas pendientes distintas?
- ¿Cuántos en posición convexa?
- ¿Cuántos puntos se necesitan para tener n en posición convexa? (Problema de Erdös-Szekeres)

Familias de cuerpos convexos



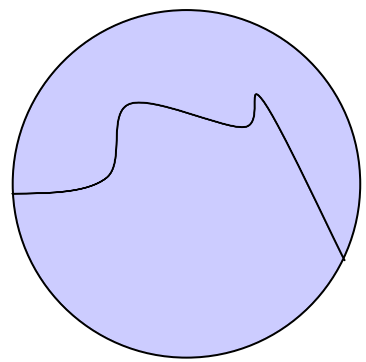
- Transversalidad
  - Condiciones para la existencia (Teorema de Hadwiger)
  - Algoritmo para cada familia
- Recubrimientos y empaquetamientos

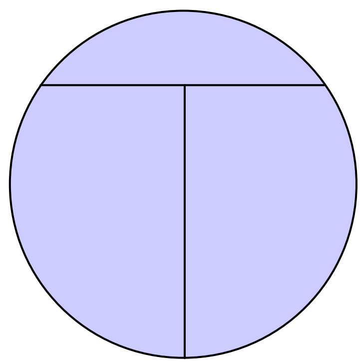
El Problema de Borsuk (1933)

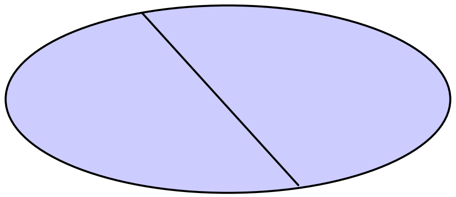


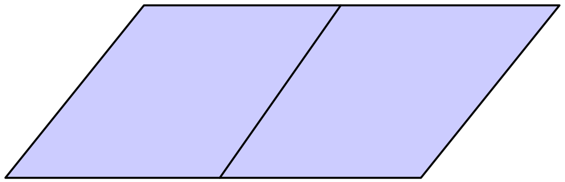
Diámetro de F

diám(F)=máx{dist(p,q) / p,q$\in$F}









Problema: Dividir F en partes de diámetro menor que F. ¿Cuál es el mínimo número de partes necesarias?

Conjetura de Borsuk

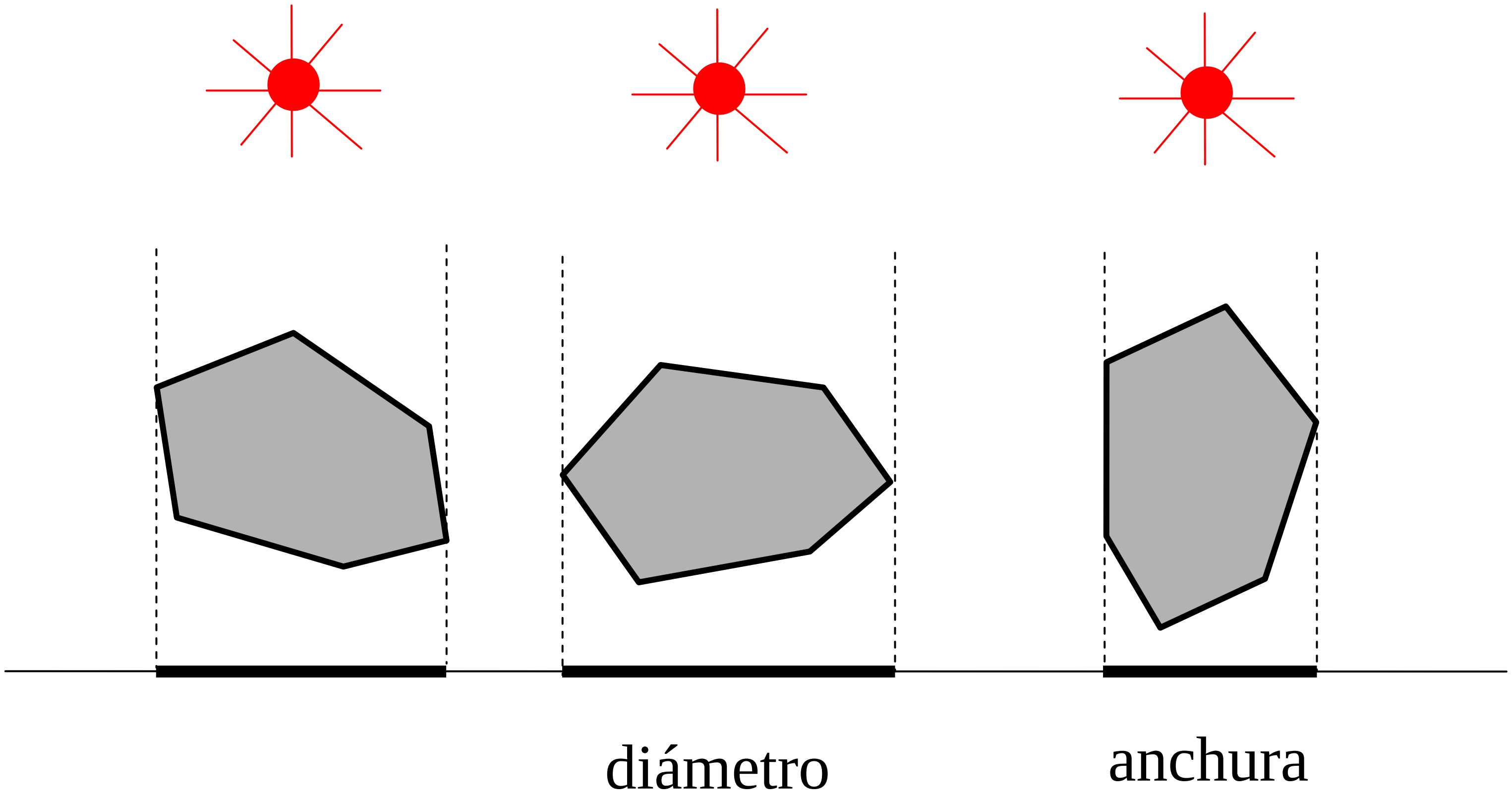
Todo conjunto $S \subseteq R^d$ de diámetro acotado diam(S)>0 puede partirse en, a lo más, d+1 partes de menor diámetro

Borsuk demuestra que en el plano $a(F) \leq 3$

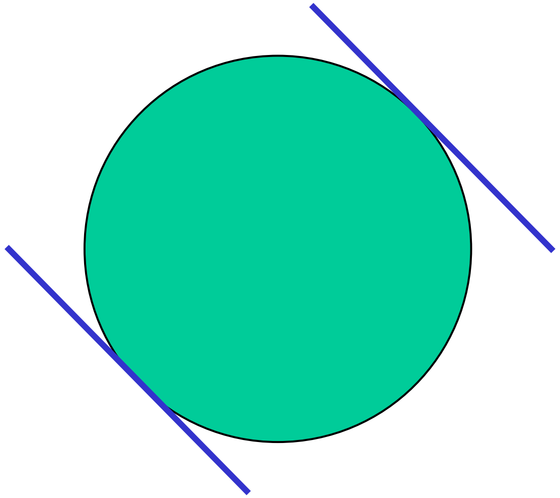
Eggleston (1955) para d=3

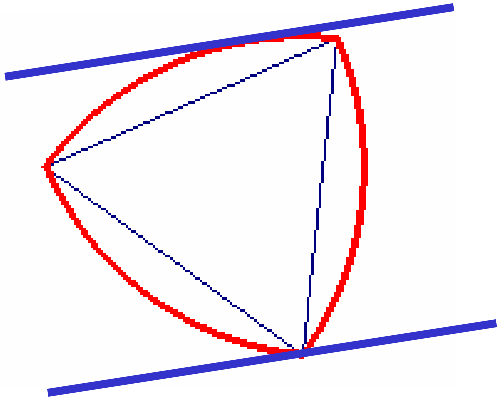
¿Para qué figuras planas a(F)=3 ?

- Anchura

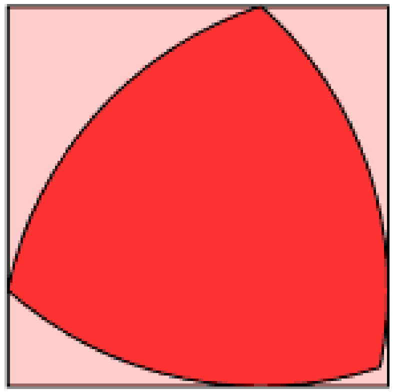


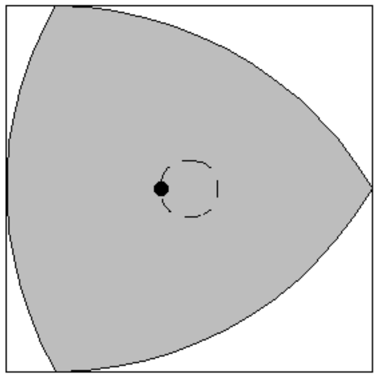
Figuras de anchura constante





Triángulo
de Reuleaux





Teorema (Boltianski, 1969)

Para una figura plana F de diámetro k, se cumple que a(F)=3 si y sólo si F se completa de modo único a una figura de anchura constante k

Teorema (Kahn, Kalai, 1993)

La conjetura de Borsuk es falsa

Si f(d) es el menor nº tal que todo conjunto acotado $S \subseteq R^d$ se puede descomponer en f(d) partes de menor diámetro, entonces para d suficientemente grande se tiene

$$f(d) \geq (1{,}1)^{\sqrt{d}}$$

Diámetro,
anchura,…
¿cómo se calculan?

Queremos algoritmos EFICIENTES

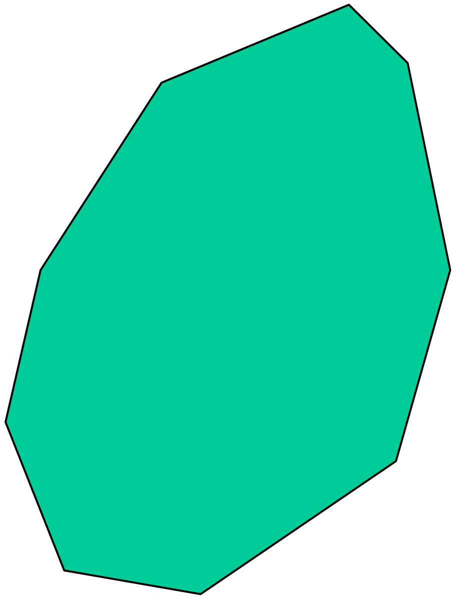
Complejidad algorítmica

- Eficiencia de un algoritmo
- Rapidez de ejecución
- Modelo teórico de máquina
- Modelo RAM real
    - Un nº real se almacena en una unidad de memoria
    - Operaciones primitivas de coste unitario
- Análisis en el peor caso

- Coste del algoritmo $T(n)$
- Comportamiento asintótico de $T(n)$
- $T(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow \exists k \in N, \exists a \in R^+$, tales que $T(n) \leq af(n)\ \forall n \geq k$
- Comparar algoritmos es comparar las funciones de coste
- Un problema con 10000 datos, unidad de medida miliseg.

Coste del algoritmo	**Tiempo**
$O(n)$	10 segundos
$O(nlogn)$	40 segundos
$O(n^2)$	28 horas
$O(n^4)$	3 millones de años

Diámetro de un polígono convexo



$\text{Diam}(P)=\text{máx}\{\text{dist}(p,q) \,/\, p,q \in P\}$

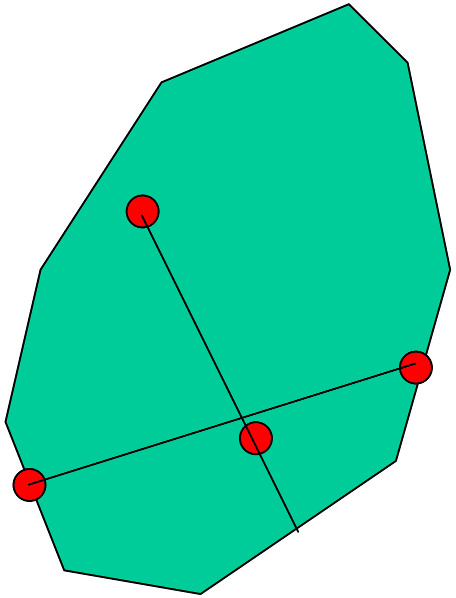
Algoritmo 1-DIAM

1. Para cada par de puntos p y q de P, hallar dist(p,q)
2. Elegir la máxima de las distancias anteriores

Complejidad ??

Primera Reducción

El diámetro de P se alcanza en vértices de P



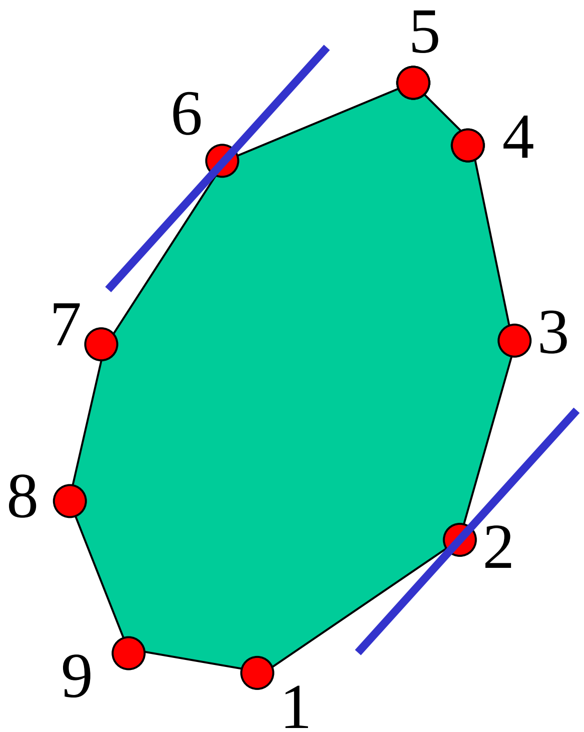
Algoritmo 2-DIAM

1. Para cada par de vértices p y q del polígono P, hallar dist(p,q)
2. Elegir la máxima de las distancias anteriores

Complejidad $O(n^2)$

Segunda Reducción

ANTÍPODAS



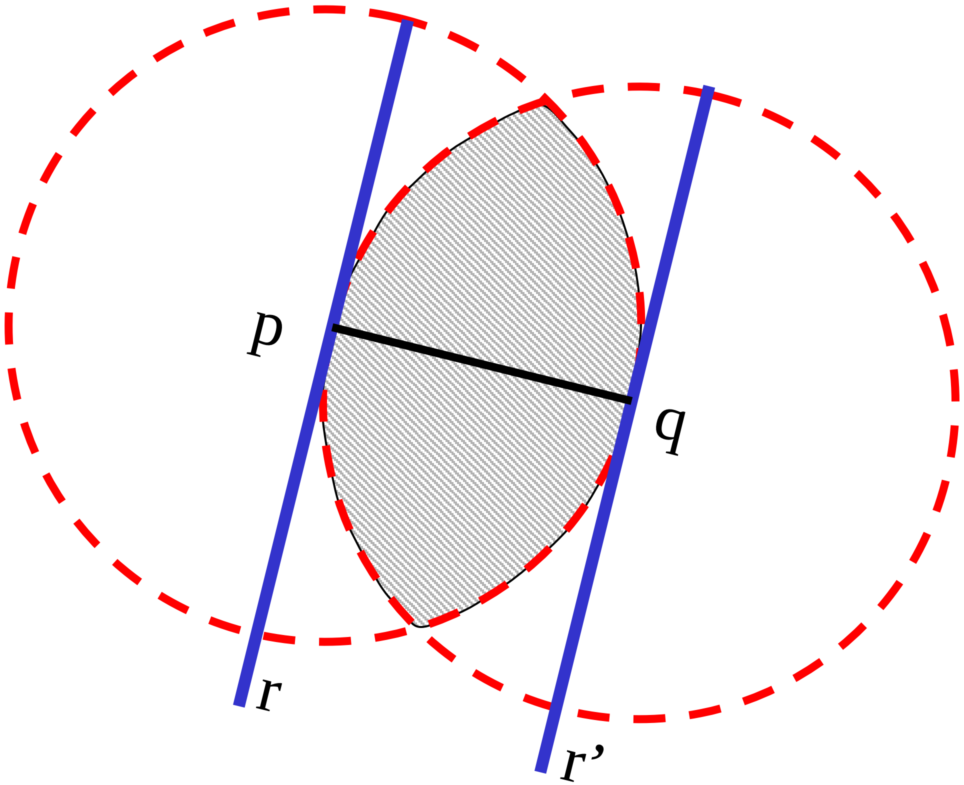
2 y 6 forman un par de antípodas

3 y 6 no forman un par de antípodas

Los vértices a y b del polígono convexo P forman un par de **antípodas** si existen dos rectas paralelas r y s, que pasan por a y b, y encierran una banda que contiene a P

Segunda Reducción

El diámetro de P se alcanza en un par de **antípodas**



Segunda Reducción

Algoritmo 3-DIAM

1. Hallar los pares de antípodas de P

2. Para cada par de antípodas (p,q), hallar dist(p,q)

3. Elegir la máxima de las distancias anteriores

Complejidad:

- ¿Cuántos pares de antípodas puede tener un polígono?
- ¿Cómo calcular todos los pares de antípodas?

Lema

Sea m el número de pares de antípodas de un polígono convexo P de n vértices.

- Si P no tiene lados paralelos entonces

$$m = n$$

- Si P tiene n' pares de lados paralelos entonces

$$m = n + n'$$

Complejidad:

$t_2(n), t_3(n) \in O(n)$

$t_1(n)$??

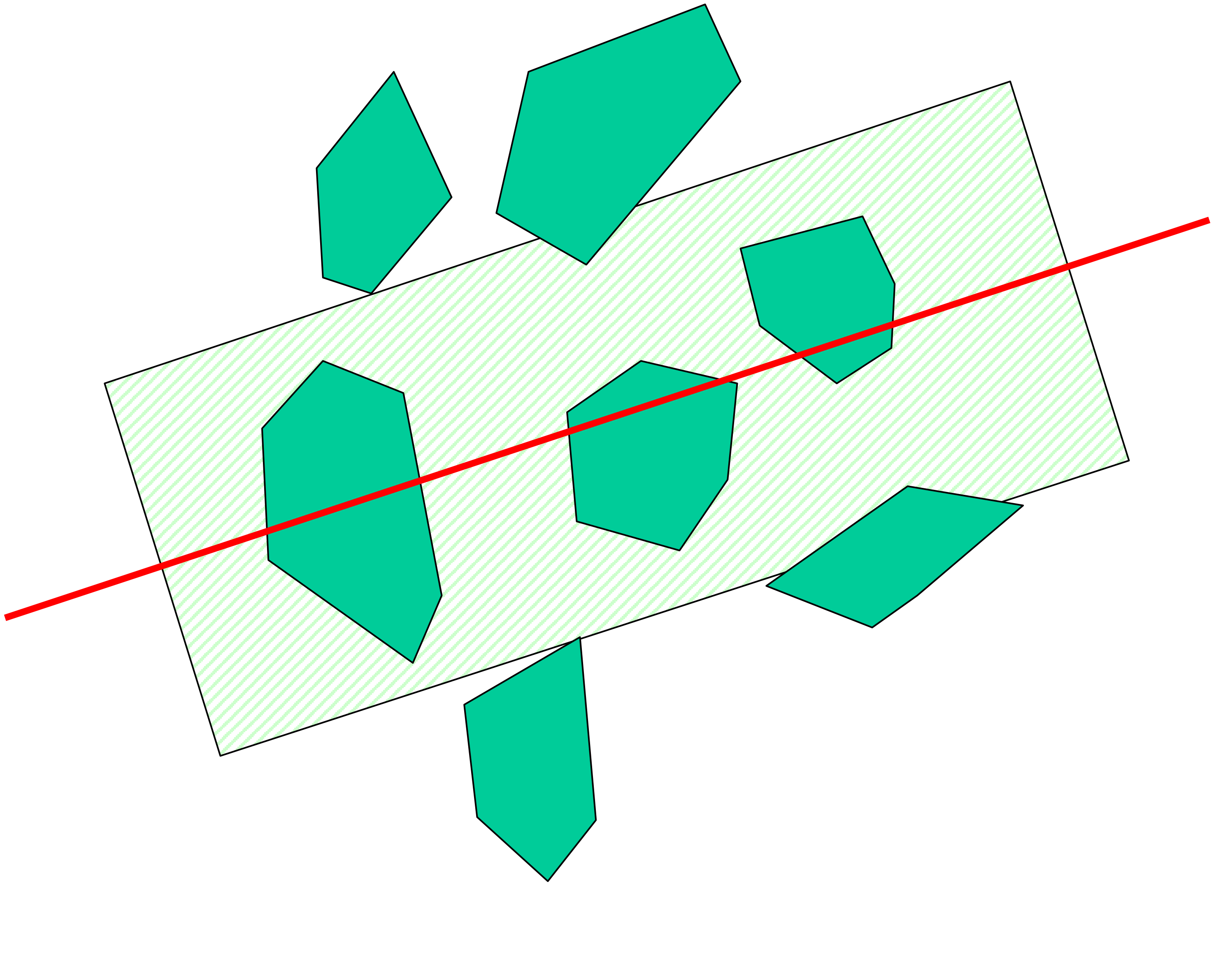
Teorema

El diámetro de un polígono convexo de n vértices puede calcularse en tiempo O(n)

Método del calibre giratorio

Otros problemas que se resuelven con calibres

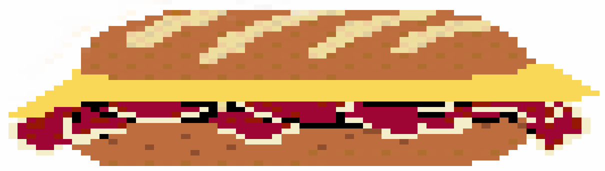
- Anchura
- Rectángulo circunscrito de área mínima
- Mínima distancia entre dos polígonos convexos
- Máxima distancia entre polígonos convexos
- Localización de servicios:
  Recta a distancia mínima de una familia de polígonos convexos



NUBES BICOLORES

- Bocadillo de jamón y queso
- Inmersiones bipartidas de árboles

El bocadillo de jamón y queso



Existe siempre un corte que parte por la mitad el pan, el queso y el jamón

Teorema

Dados d conjuntos medibles y acotados en R^d, existe un hiperplano que biseca simultáneamente todos los conjuntos

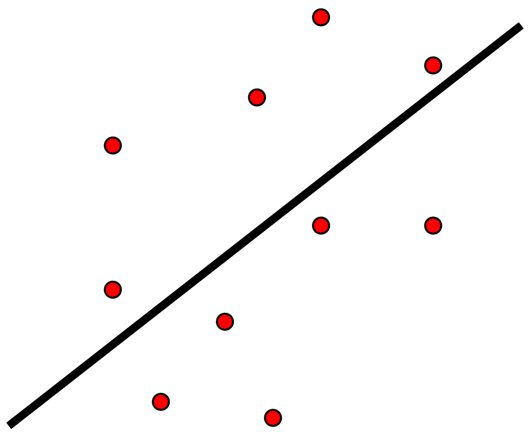
Teorema de Borsuk-Ulam

Si $f: S^d \dashrightarrow R^d$ es continua, entonces existe x en S^d tal que $f(x)=f(-x)$

Versión discreta

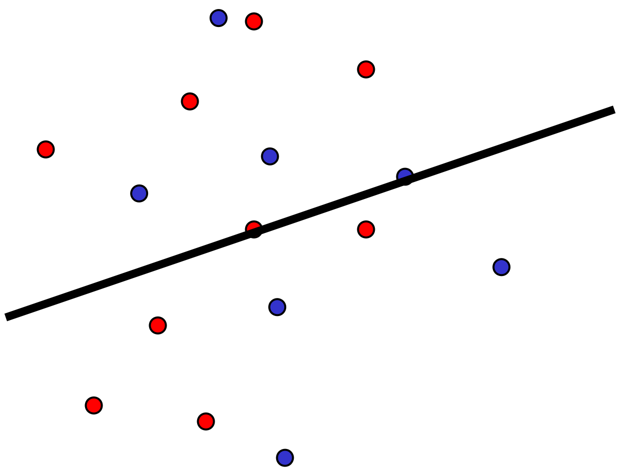
Teorema

Dados $P_1, P_2, \ldots, P_d$ conjuntos disjuntos de puntos de R^d, existe un hiperplano que biseca simultáneamente todos los conjuntos



Una recta h **biseca** el conjunto P de n puntos si no más de n/2 puntos quedan en cada uno de los semiplanos abiertos definidos por la recta

Basta estudiar el caso n impar



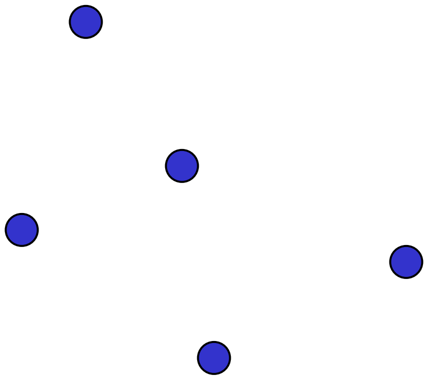
Dados A y B, conjuntos de puntos en R^2, hallar una recta bisectora

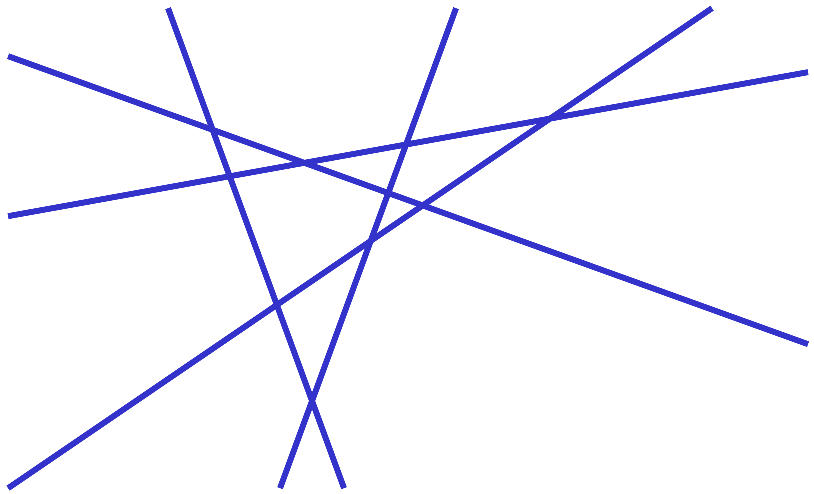
Algoritmo "fuerza bruta"
Complejidad $O(n^3)$

Apliquemos dualidad

Puntos de la nube $\longleftrightarrow$ Rectas de un arreglo

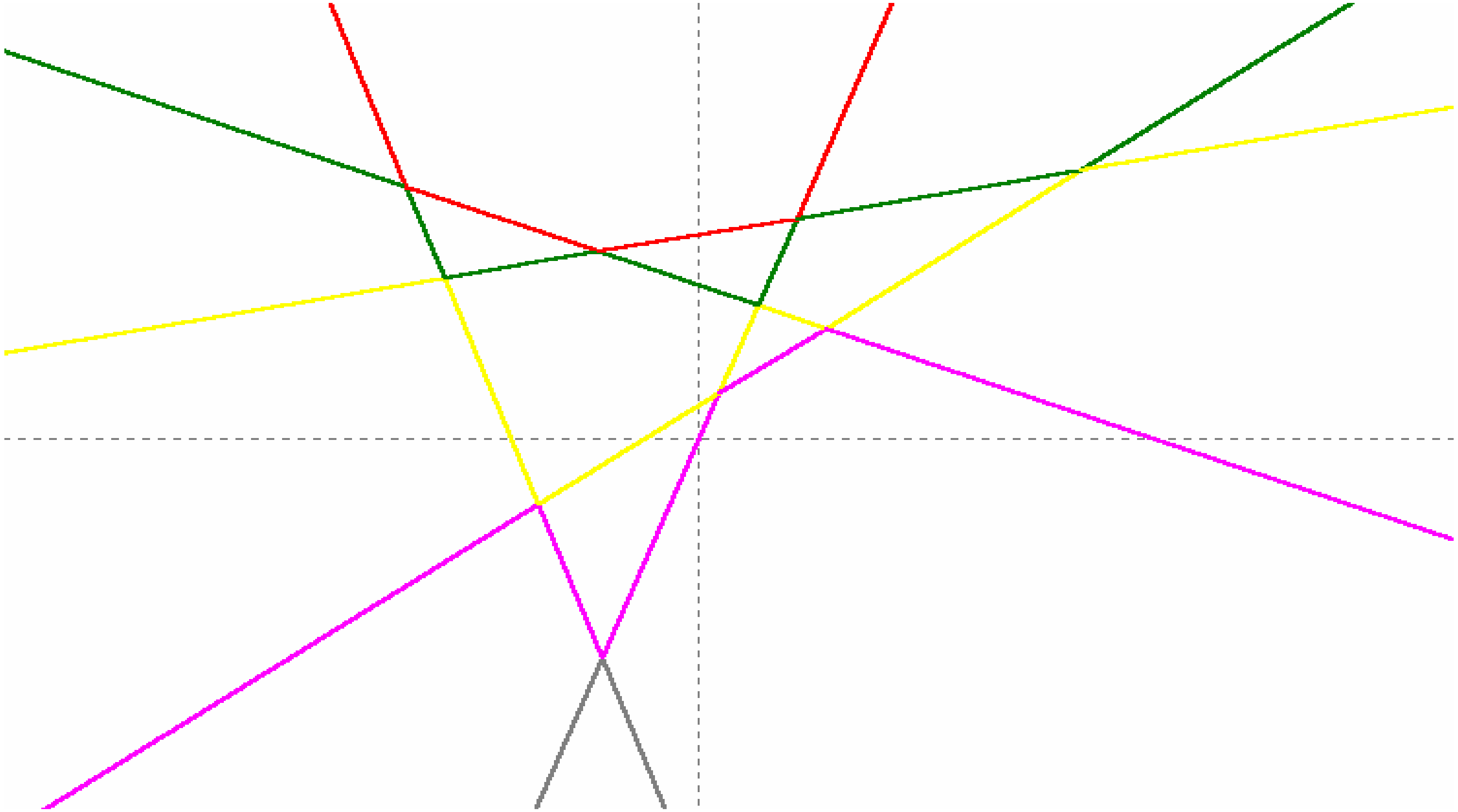
punto ***(a,b)*** recta $y = ax - b$





Propiedades

Niveles de un arreglo

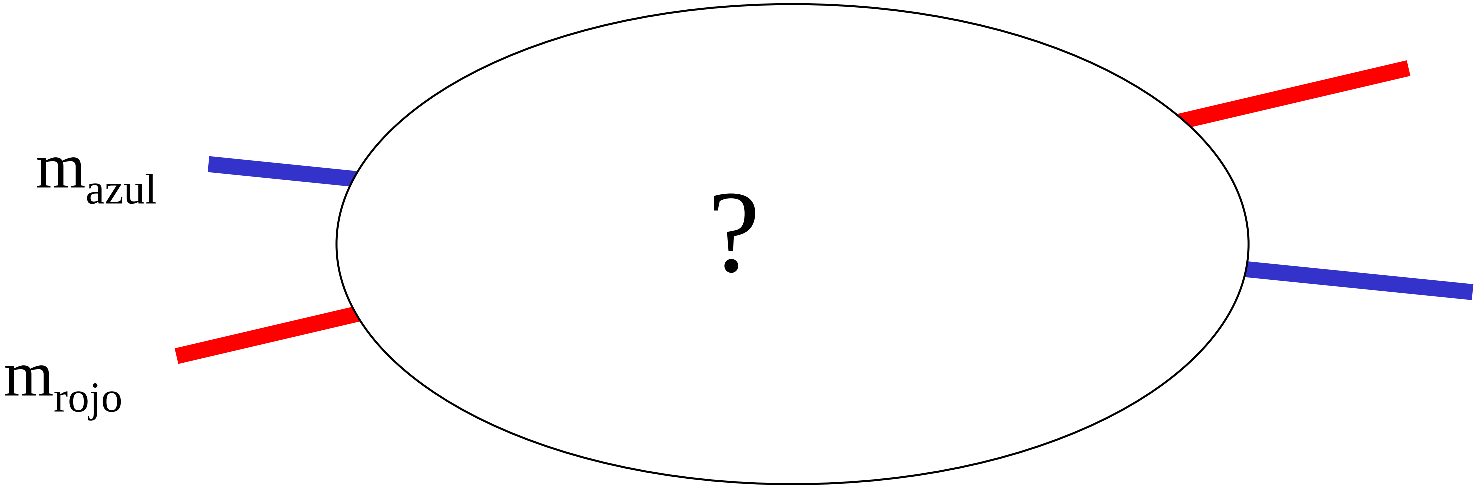


- Los niveles son cadenas poligonales monótonas
- El nivel medio empieza y termina en la misma recta

Plano primal		*Plano dual*
Puntos de la nube	$\leftrightarrow$	Rectas de un arreglo
P^* recta bisectora de la nube	$\leftrightarrow$	P punto del nivel medio del arreglo

Las rectas bisectoras de los conjuntos A (puntos rojos) y B (puntos azules), son las rectas duales de los puntos de intersección de los niveles medios M_{rojo} y M_{azul} en los arreglos duales

Pero, ¿existen los puntos de intersección?

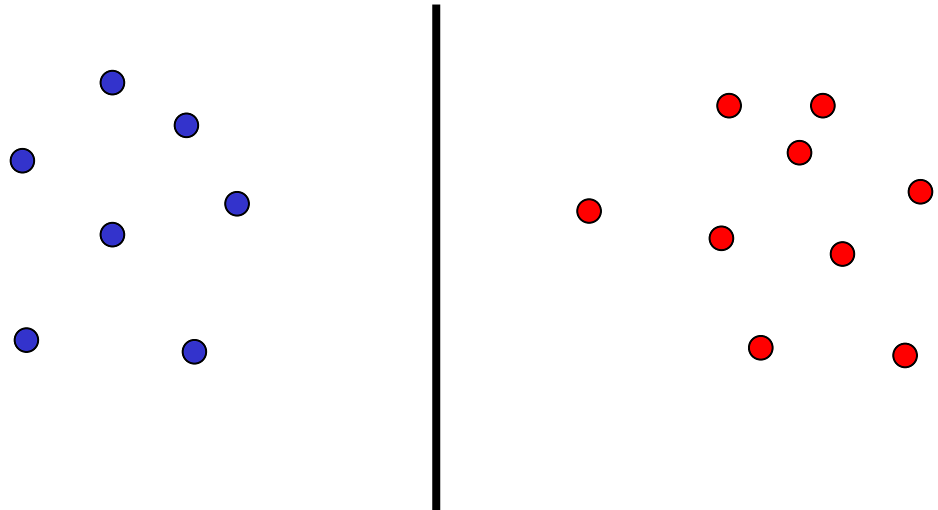


Los niveles medios se cortan en un nº impar de puntos

Existe un nº impar de rectas bisectoras

Caso particular

Los conjuntos A y B están linealmente separados



Puntos de B (azules)

$x<0$

Puntos de A (rojos)

$x>0$

¿qué significa en el dual?

ALGORITMO

A y B conjuntos de n_1 y n_2 puntos del plano

1) Obtener los arreglos duales de A y B

2) Hallar los niveles medios M_A y M_B

3) Hallar los puntos de intersección de M_A y M_B

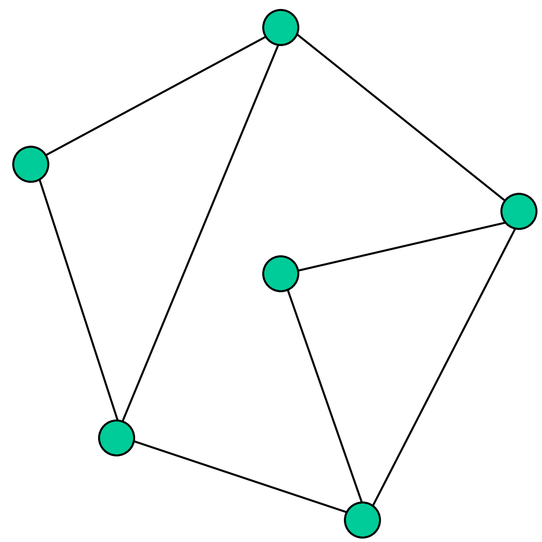
4) Hallar las rectas duales de los puntos anteriores

Complejidad O(n)

Grafo geométrico

- vértices, puntos
- aristas, segmentos

SIN CORTES

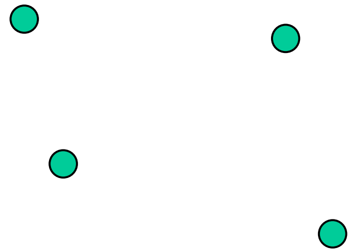


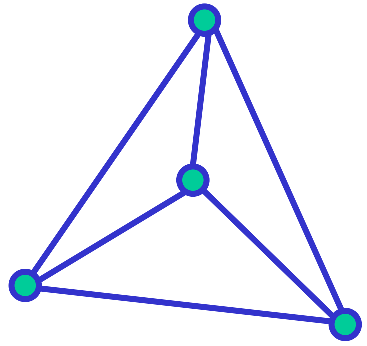
Dados G=(V,A), grafo, y S conjunto de puntos en el plano, ¿se puede representar G sobre S como grafo geométrico?

- Inmersión rectilínea de G en S
- S admite la estructura combinatoria G

No siempre
es posible

K_4





Si nos permiten elegir el conjunto S, SÍ es posible

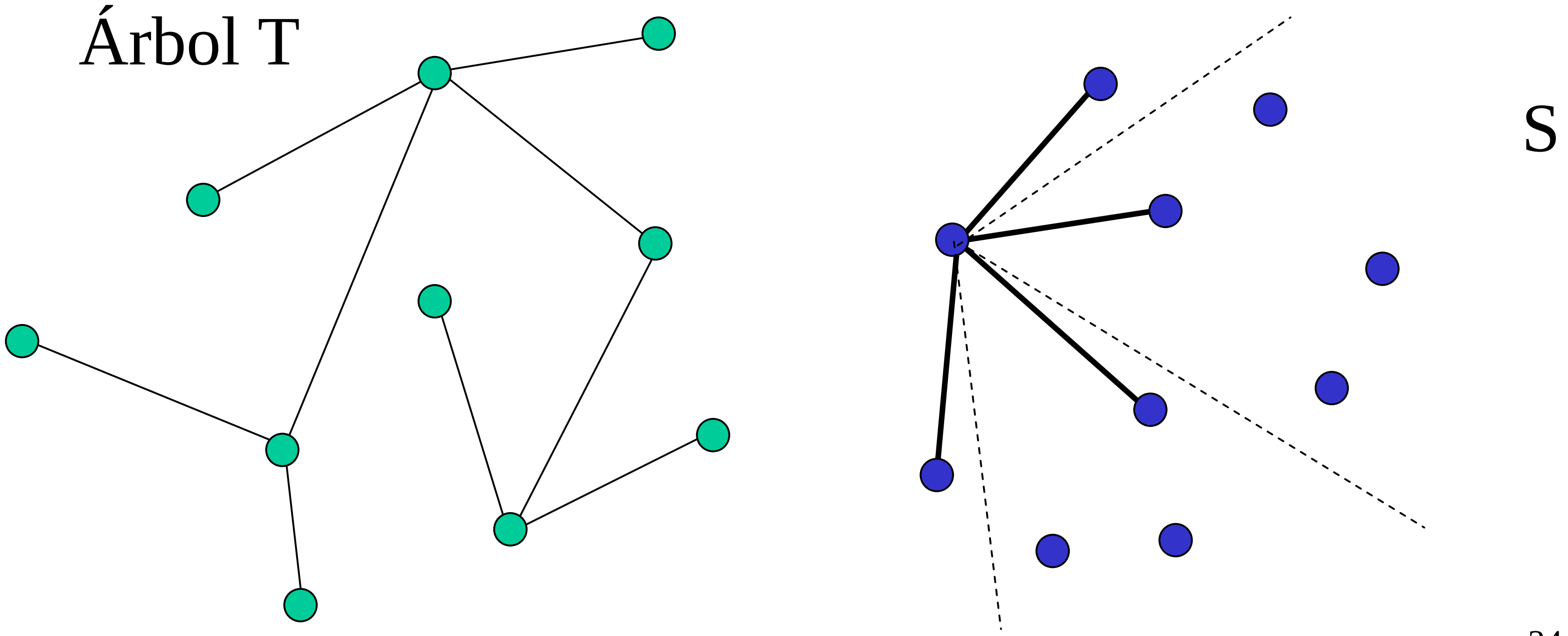
Teorema (Wagner, Fáry)

Todo grafo planar admite una representación plana cuyas aristas son segmentos de recta

Y si el grafo es un árbol,…

Teorema

Si S es un conjunto de *n* puntos del plano, en posición general, y T un árbol con *n* vértices, entonces existe una inmersión rectilínea de T en S



Problemas

1. Dado S, hallar un árbol T que cumpla determinadas condiciones y una inmersión de T en S

    - raíz en un punto determinado
    - sucesión de grados prefijada

(Bose, McAllister, Snoeyink, 1995)

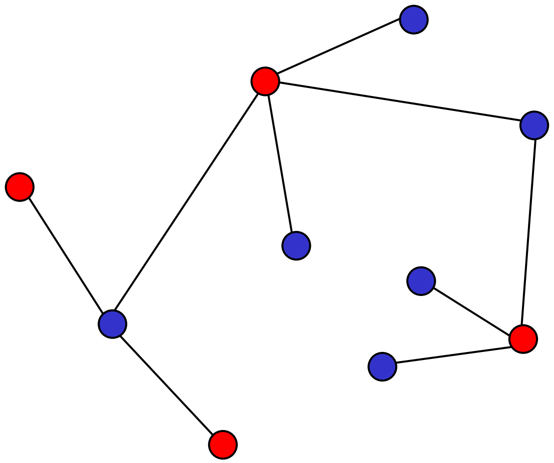
2. Dado T, construir S y una inmersión de T en S tal que

    - T sea el AGM de S
    - el área de la inmersión sea mínima

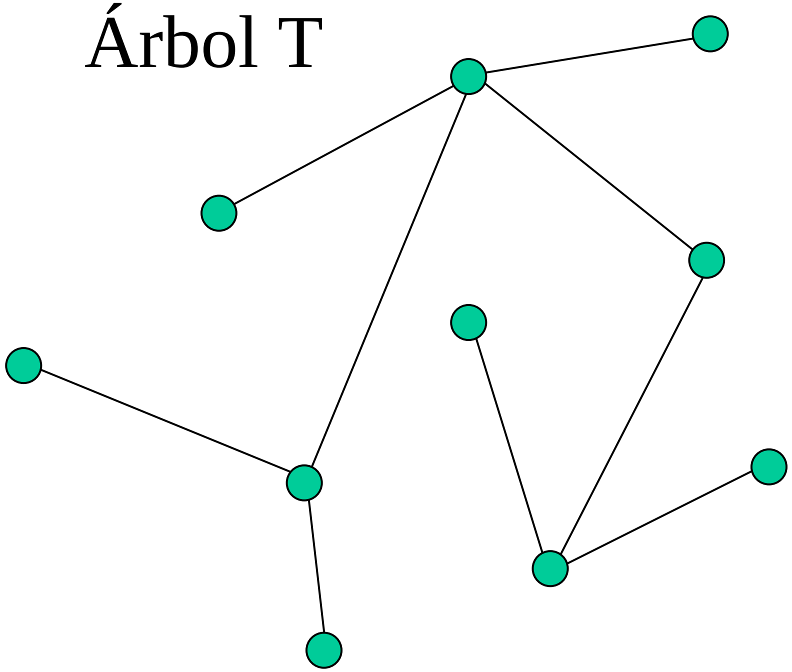
(GRAPH DRAWING)

INMERSIONES BIPARTIDAS

$S = R \cup B$

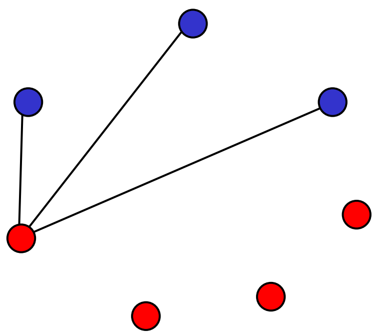


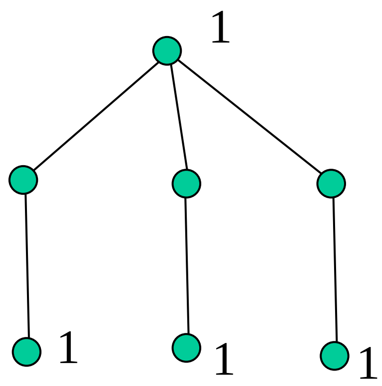
Árbol T



Dados $S = R \cup B$ y T, ¿existe inmersión bipartida?

- Todo árbol es bipartido de una única manera $V=V_1 \cup V_2$
- $|B|=b$ y $|R|=r$ deben coincidir con $|V_1|$ y $|V_2|$
- Esta condición NO es suficiente





Problemas

Dado $S = R \cup B$, hallar un árbol T que cumpla determinadas condiciones y una inmersión de T en S

- grado máximo acotado
- sucesión de grados prefijada
- T sea un camino

Posición de los puntos de S

- Posición general
- S linealmente separable
- Posición convexa

Referencias

Generales

- M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 1999
- V. Boltjanski, I. Gojberg, *“Results and problems in Combinatorial Geometry”*, Cambridge Univ. Press, 1985
- F. Hurtado, *Geometría Computacional: una instántanea*, Gaceta de la RSME, vol. 2, 372-380, 1999
- J. Pach, P. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, Wiley & Sons, 1995

Sobre calibres

- G. Toussaint, *“Solving geometric problems with the “rotating calipers”*, Proc. of IEEE Melecon, 1983
- http://www.cs.duke.edu/~sariel/CG/applets/bounding_rectangle/main.html
- http://cgm.cs.mcgill.ca/~orm/rotcal.html

El Problema del Bocadillo de Jamón

- C. Lo, J. Matousek, W. Steiger, *“Algorithms for Ham-Sandwich Cuts”*, Disc. Comp. Geom., vol. 11, 433-452, 1994
- J. O’Rourke, *“Computational Geometry in C”*, Cambridge Univ. Press, 1994

Inmersiones de árboles

- P. Bose, M. McAllister, J. Snoeyink, *"Optimal Algorithms to Embed Trees in a Point Set"*, Proc. Graph Drawing '95, 64-75, 1995
- M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy, P. Ramos, *"Bipartite embeddings of trees in the plane"*, Discrete Applied Mathematics, vol. 93, 141-148, 1999
- G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I. Tollis, *"Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs"*, Prentice-Hall, 1999