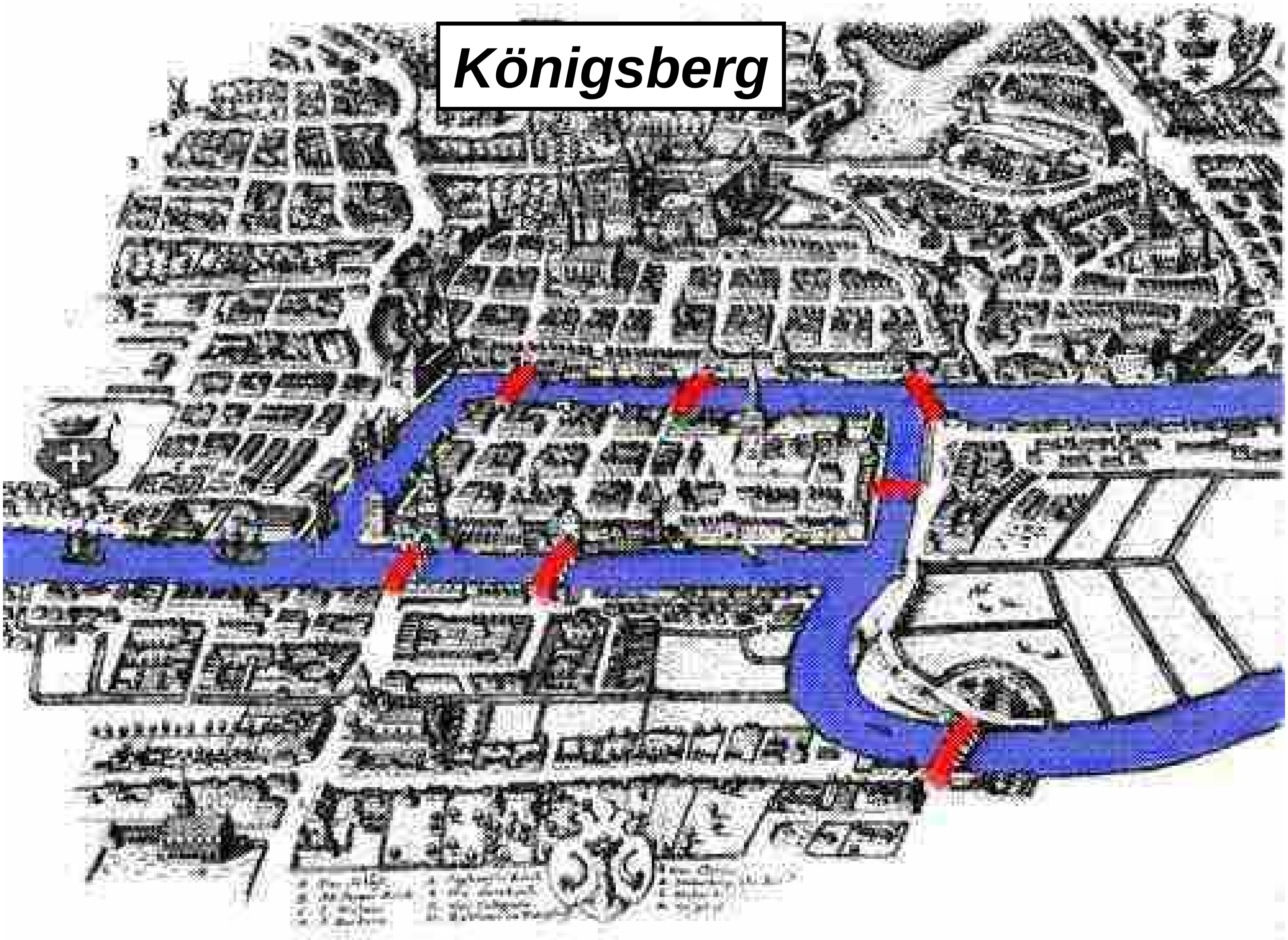
Nociones básicas

Gregorio Hernández

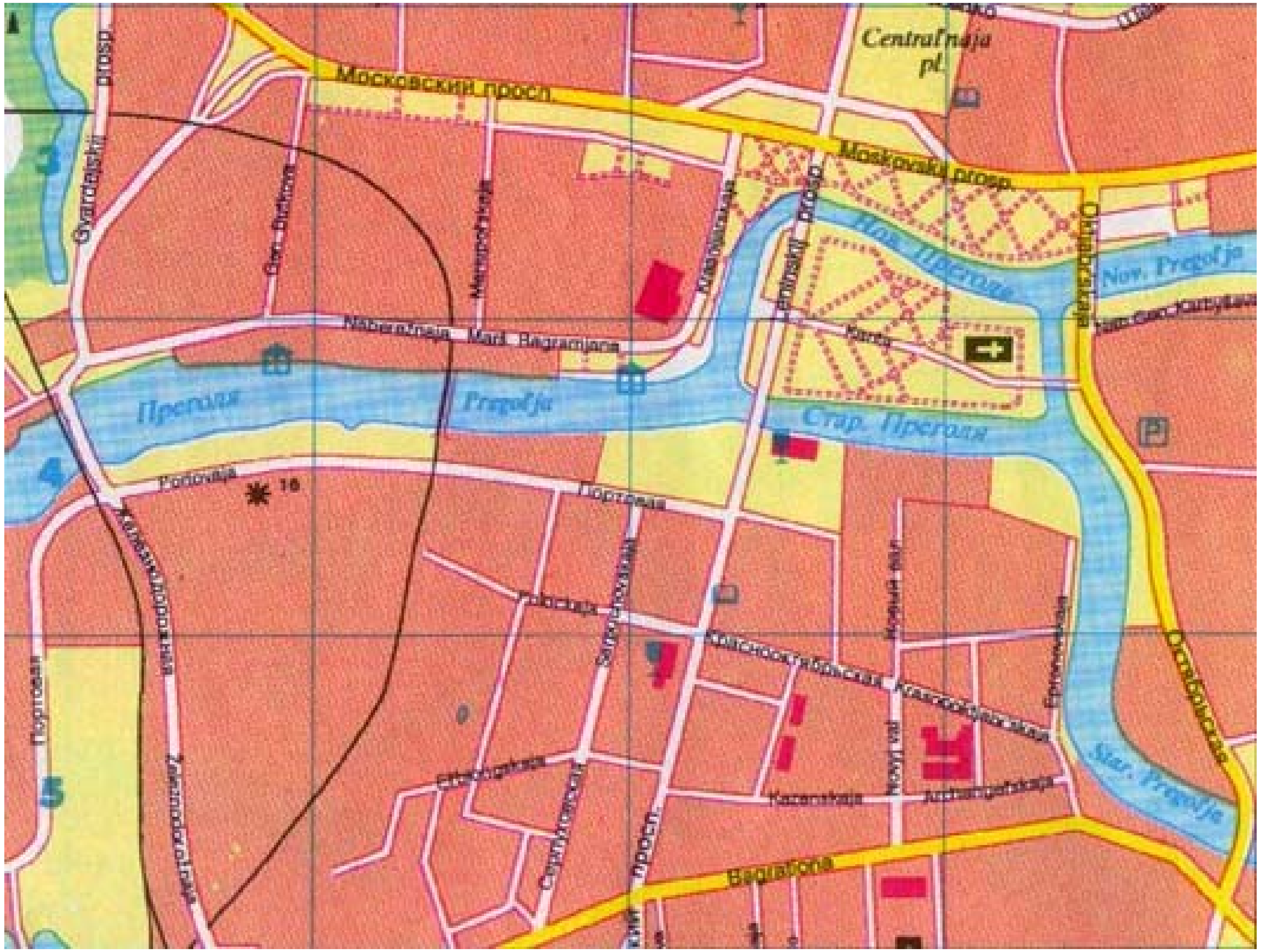
UPM

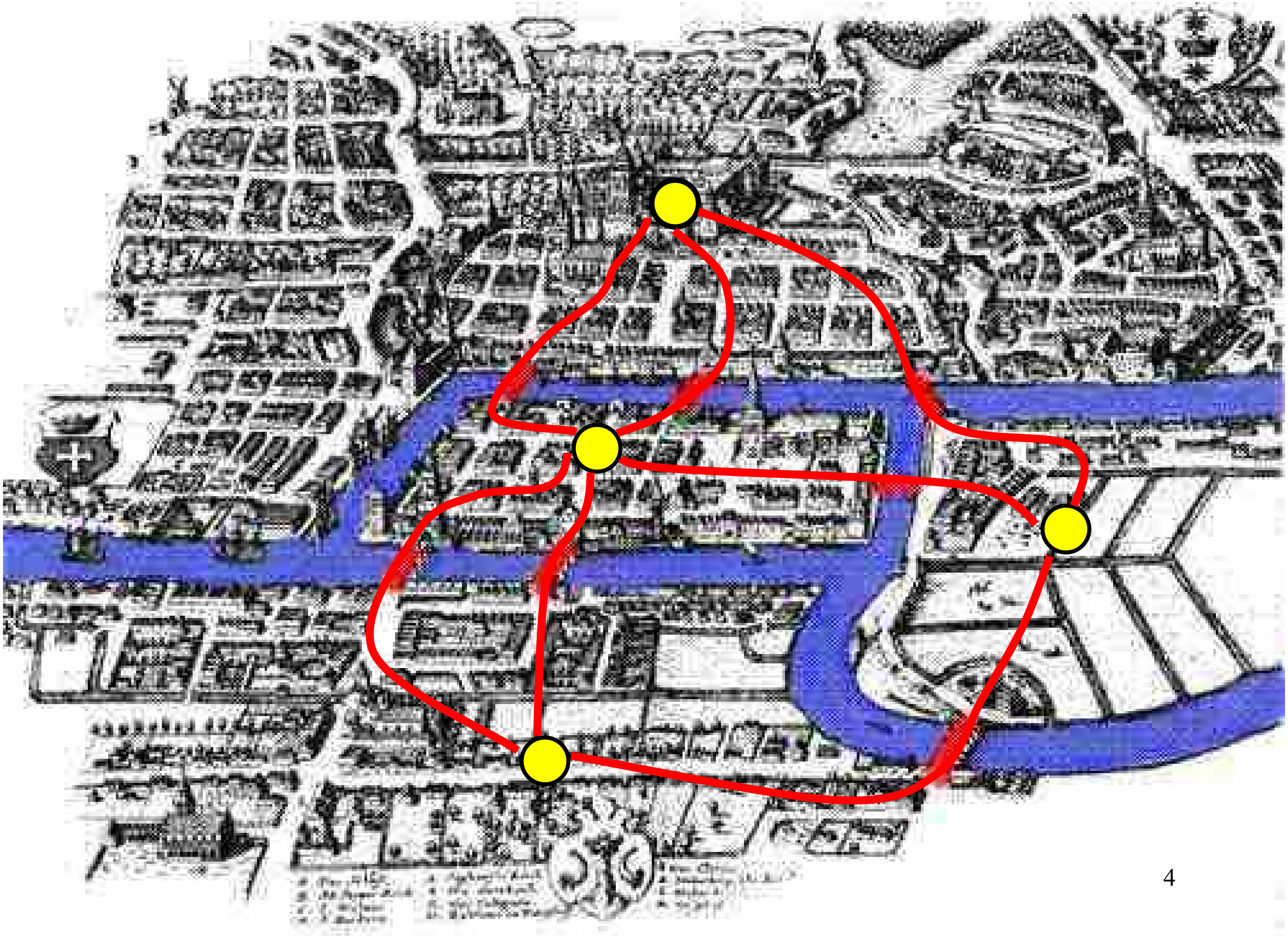
Matemática Discreta II

(MI)

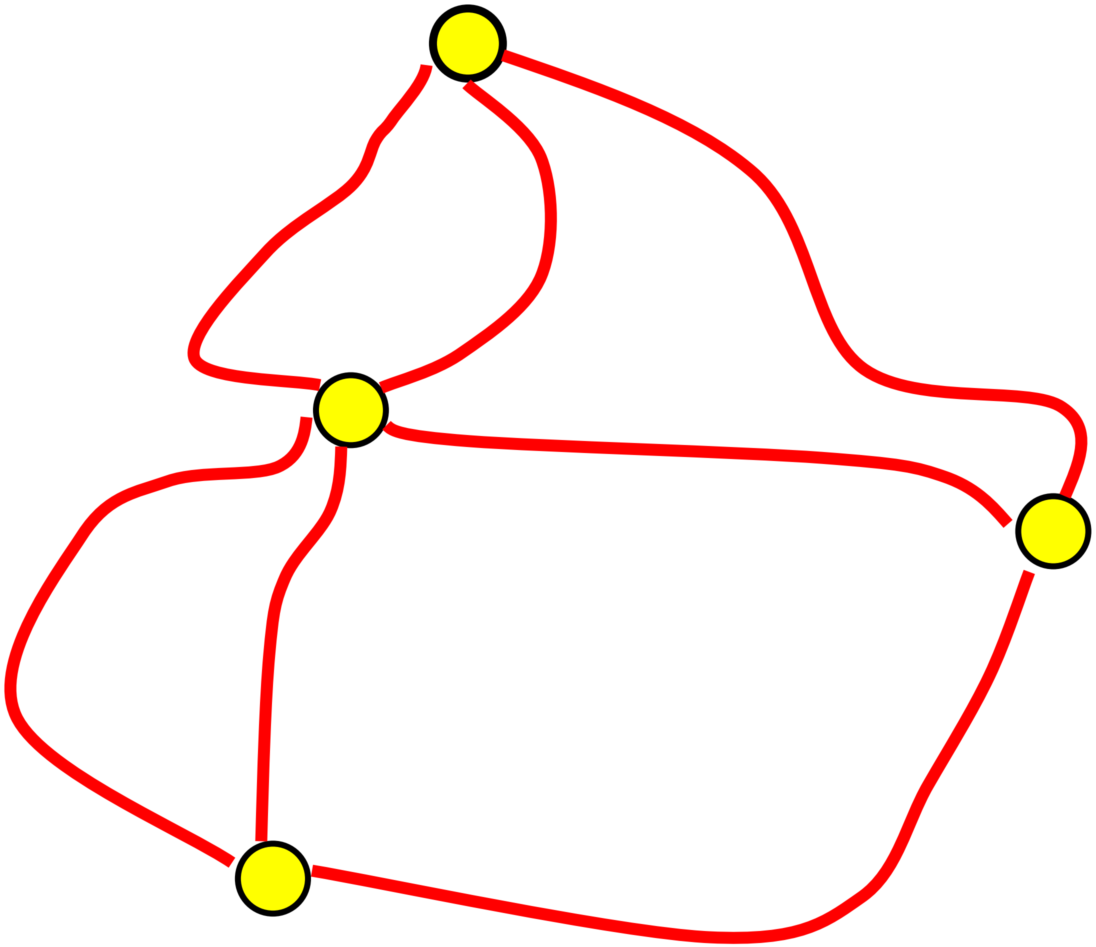

Königsberg

Kaliningrado



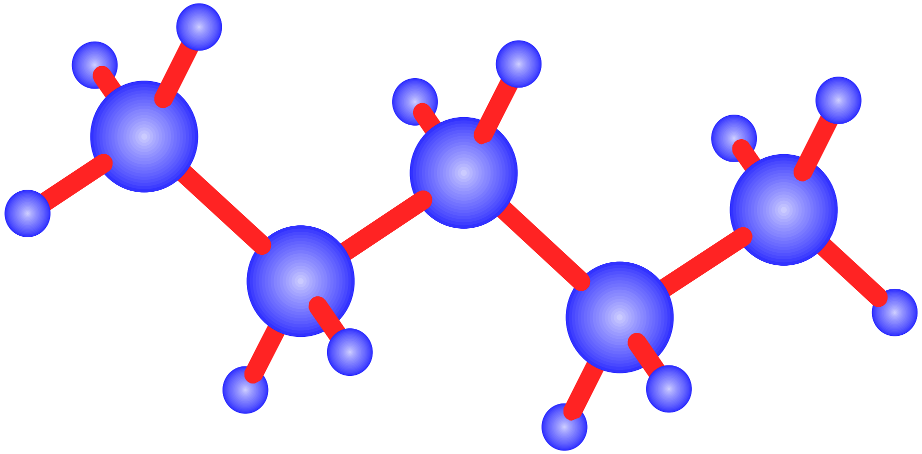


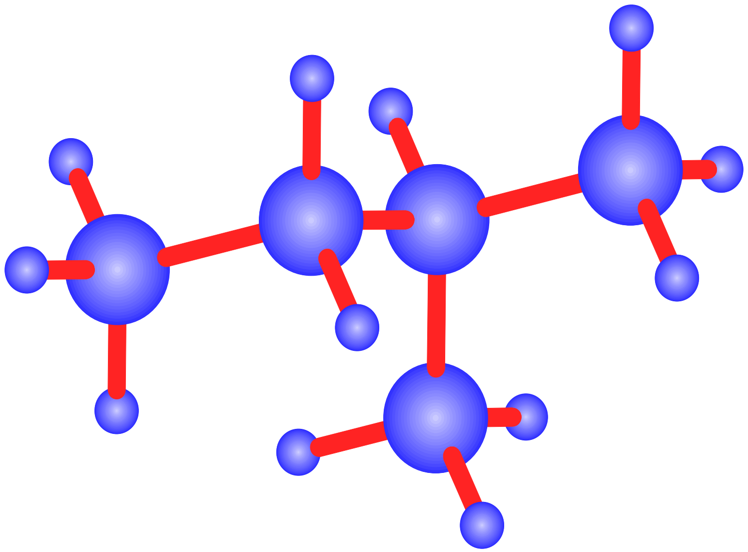
Euler 1736

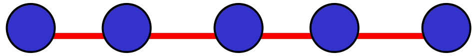


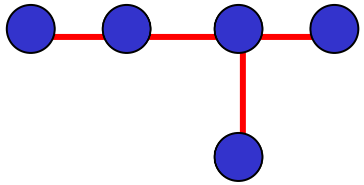
Isómeros químicos

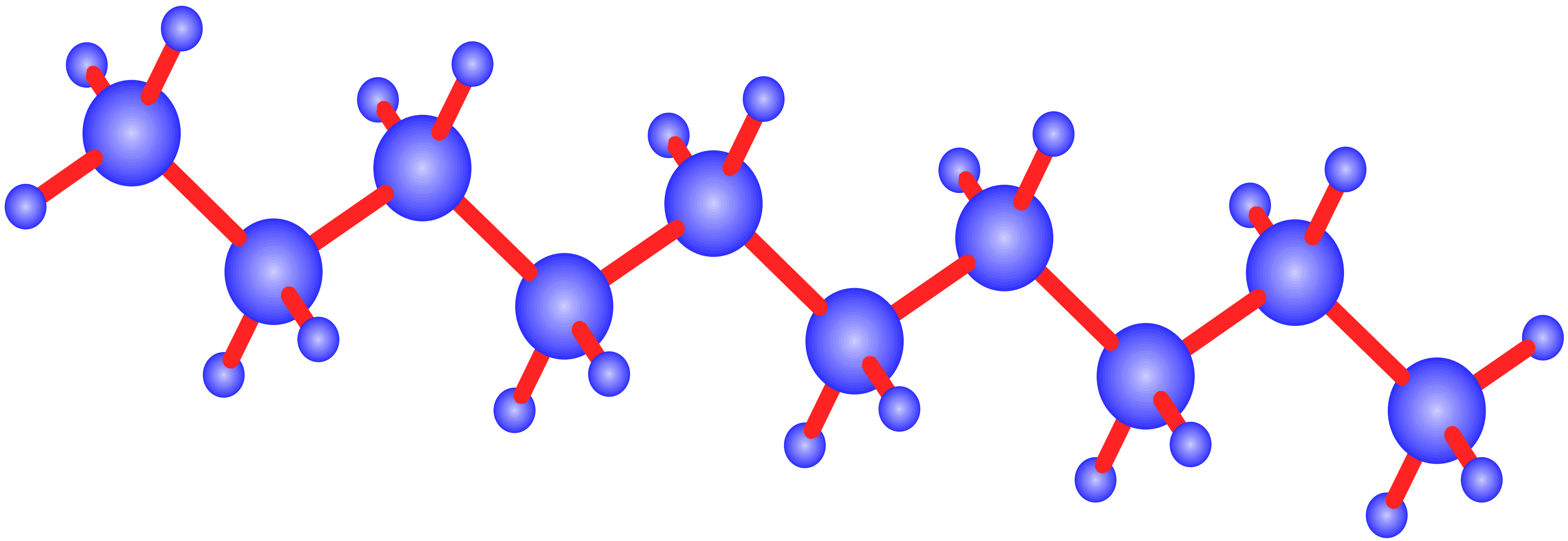
Cayley 1857

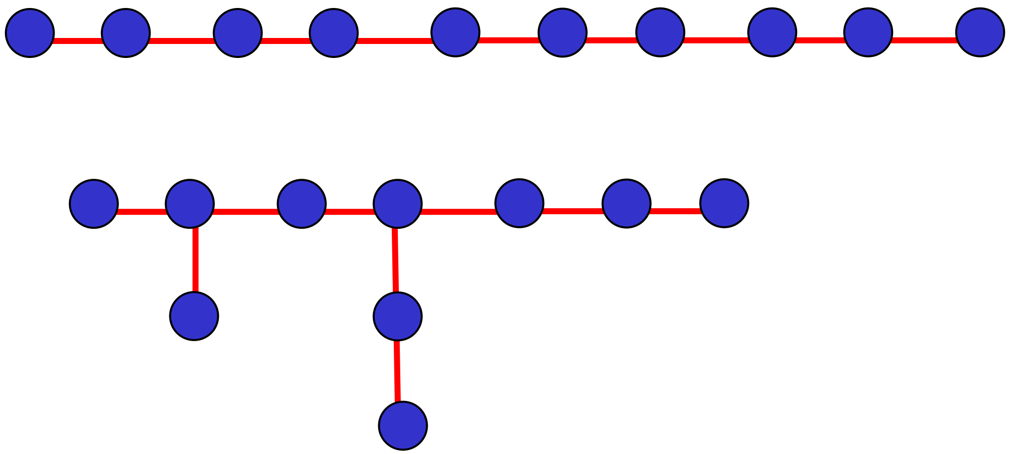








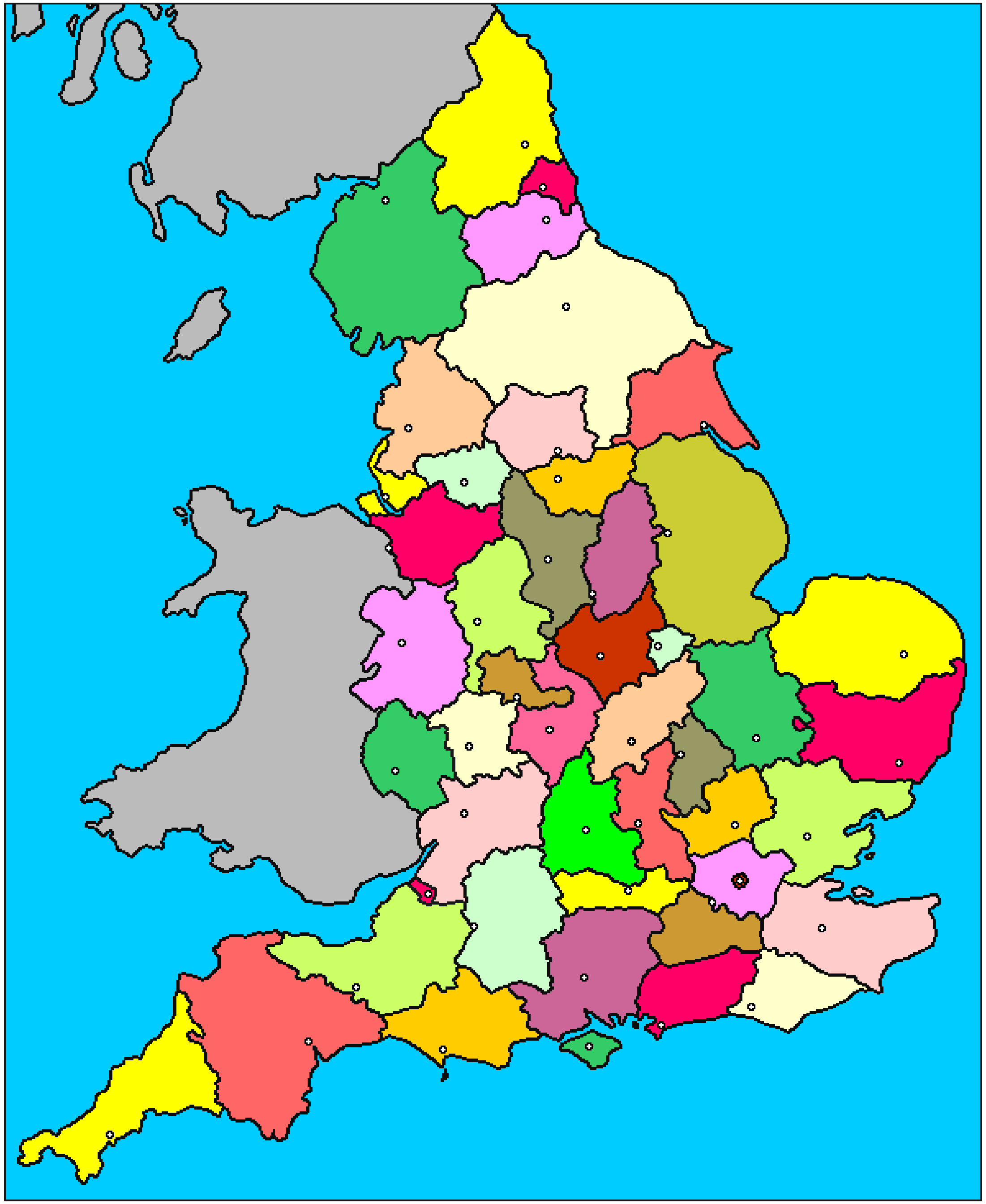




$C_{10}H_{22}$ tiene 75 isómeros

$C_{167}H_{336}$ tiene más isómeros que partículas hay en el Universo

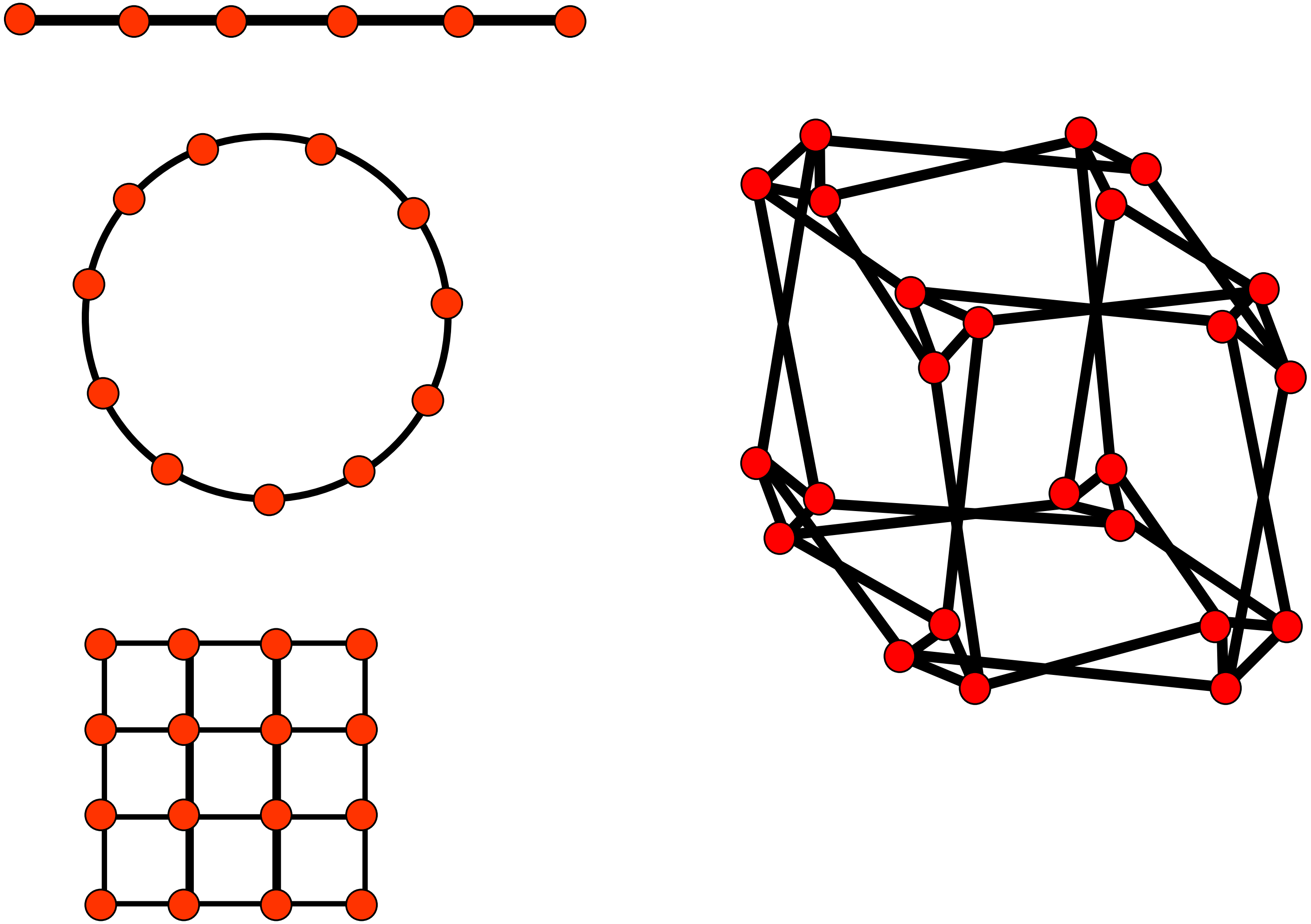
Coloración de mapas
F. Guthrie, 1850

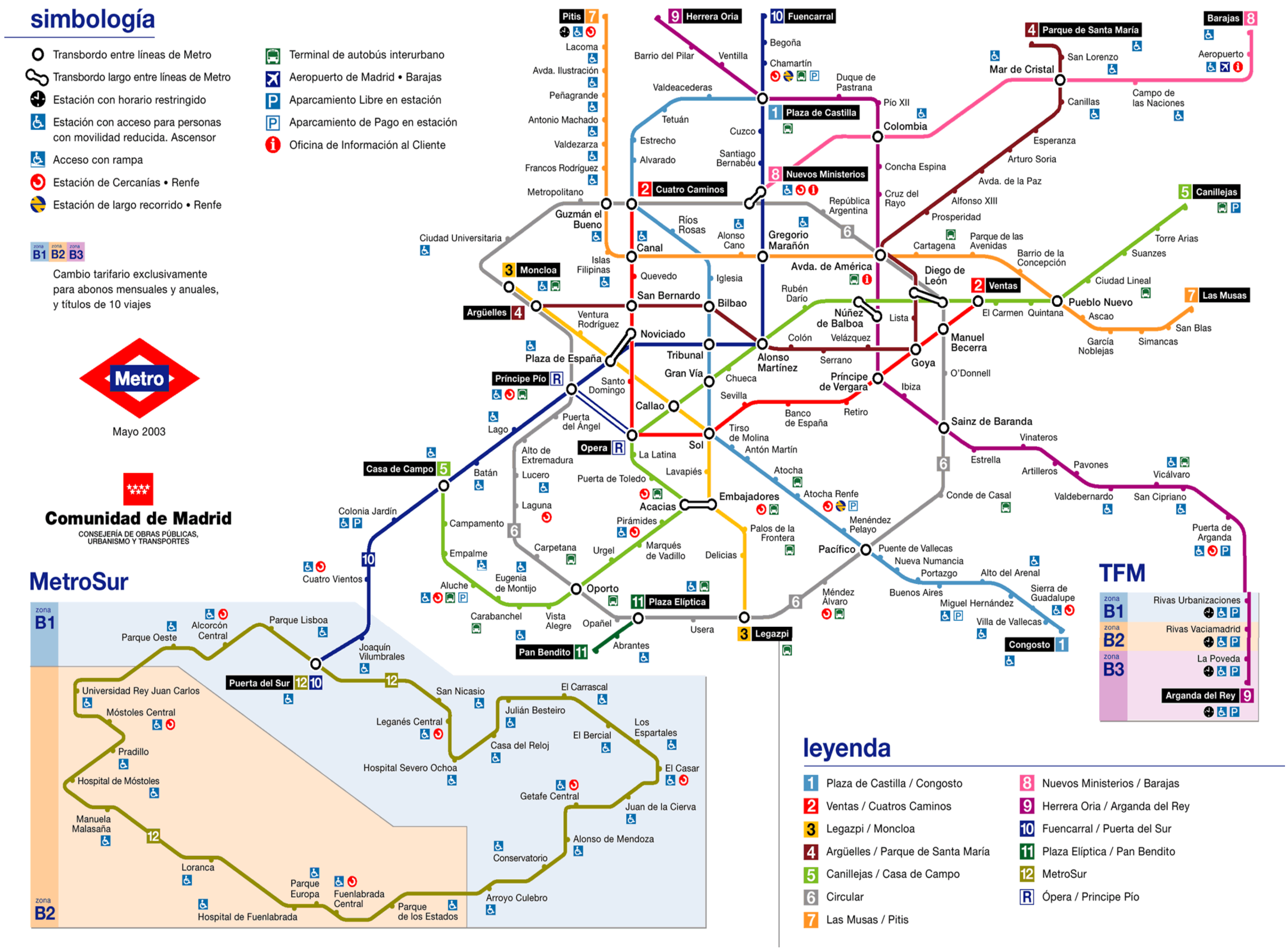


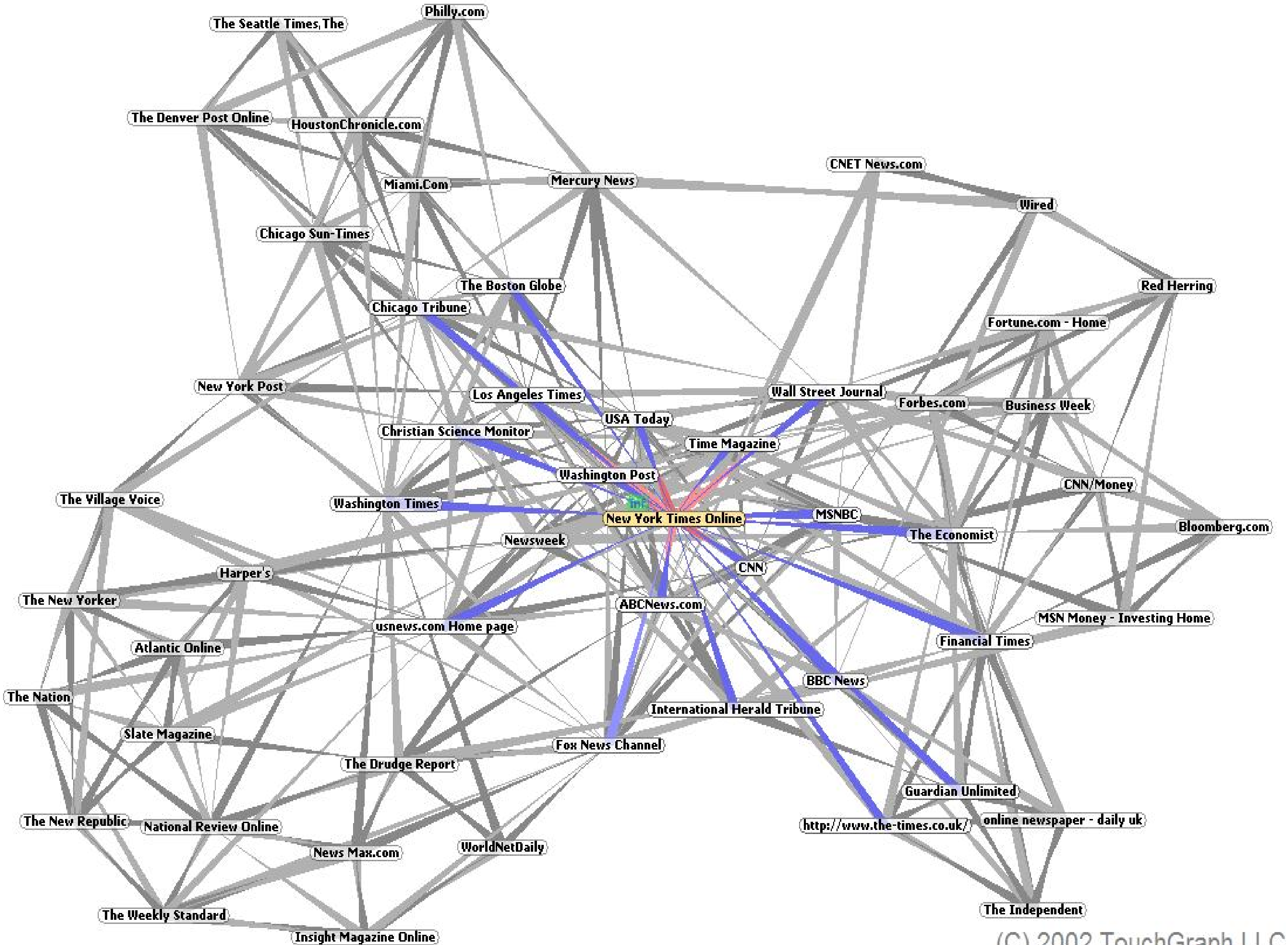
Coloración de mapas
F. Guthrie, 1850

Número cromático del grafo

REDES DE ORDENADORES



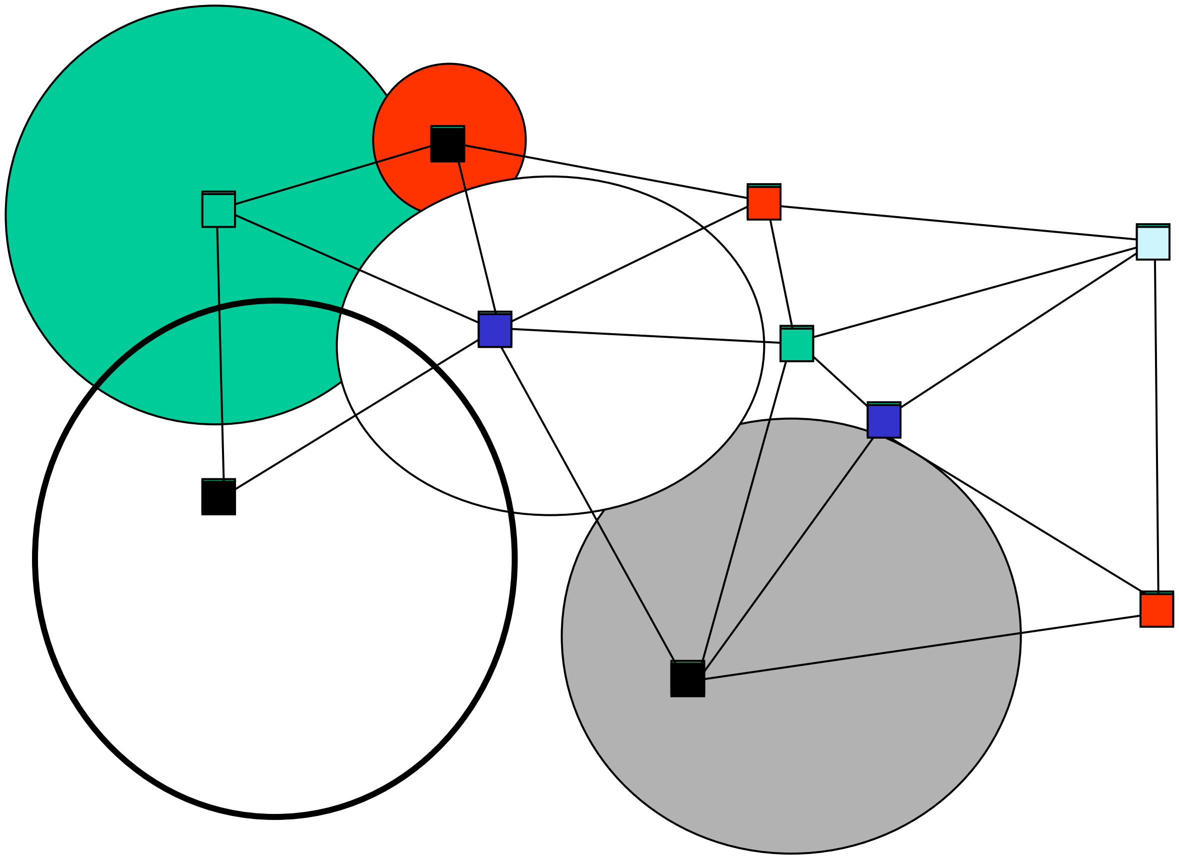

simbología
Transbordo entre líneas de Metro
Transbordo largo entre líneas de Metro
Estación con horario restringido
Estación con acceso para personas con movilidad reducida. Ascensor
Acceso con rampa
Estación de Cercanías • Renfe
Estación de largo recorrido • Renfe
Terminal de autobús interurbano
Aeropuerto de Madrid • Barajas
Aparcamiento Libre en estación
Aparcamiento de Pago en estación
Oficina de Información al Cliente
B1 B2 B3
Cambio tarifario exclusivamente para abonos mensuales y anuales, y títulos de 10 viajes
Metro
Mayo 2003
Comunidad de Madrid
CONSEJERÍA DE OBRAS PÚBLICAS, URBANISMO Y TRANSPORTES
MetroSur
Pitis 7
Lacoma
Avda. Ilustración
Peñagrande
Antonio Machado
Valdezarza
Francos Rodríguez
Metropolitano
Guzmán el Bueno
Ciudad Universitaria
Islas Filipinas
3 Moncloa
Argüelles 4
Ventura Rodríguez
Plaza de España
Príncipe Pío R
Lago
Casa de Campo 5
Batán
Colonia Jardín
Cuatro Vientos
9 Herrera Oria
Barrio del Pilar
Ventilla
Valdeacederas
Tetuán
Estrecho
Alvarado
2 Cuatro Caminos
Ríos Rosas
Canal
Quevedo
San Bernardo
Noviciado
Santo Domingo
Callao
Sol
Opera R
La Latina
Puerta del Ángel
Alto de Extremadura
Lucero
Laguna
Campamento
Empalme
Aluche
Eugenia de Montijo
Carabanchel
Vista Alegre
Oporto
Opañel
Carpetana
Urgel
Marqués de Vadillo
Puerta de Toledo
Pirámides
Acacias
Embajadores
Lavapiés
Palos de la Frontera
Delicias
Usera
3 Legazpi
11 Plaza Elíptica
Abrantes
Pan Bendito 11
10 Fuencarral
Begoña
Chamartín
Duque de Pastrana
Pío XII
1 Plaza de Castilla
Cuzco
Santiago Bernabéu
8 Nuevos Ministerios
Alonso Cano
Iglesia
Bilbao
Tribunal
Gran Vía
Chueca
Sevilla
Alonso Martínez
Gregorio Marañón
Avda. de América
Rubén Darío
Colón
Núñez de Balboa
Velázquez
Serrano
Príncipe de Vergara
Banco de España
Retiro
Tirso de Molina
Antón Martín
Atocha
Atocha Renfe
Menéndez Pelayo
Pacífico
Puente de Vallecas
Nueva Numancia
Portazgo
Buenos Aires
Alto del Arenal
Miguel Hernández
Sierra de Guadalupe
Villa de Vallecas
Congosto 1
Méndez Álvaro
Colombia
Concha Espina
Cruz del Rayo
República Argentina
Prosperidad
Cartagena
Diego de León
Lista
Goya
Ibiza
Manuel Becerra
O'Donnell
Sainz de Baranda
Estrella
Vinateros
Artilleros
Pavones
Valdebernardo
Vicálvaro
San Cipriano
Puerta de Arganda
Conde de Casal
4 Parque de Santa María
San Lorenzo
Mar de Cristal
Canillas
Esperanza
Arturo Soria
Avda. de la Paz
Alfonso XIII
Parque de las Avenidas
Barrio de la Concepción
2 Ventas
El Carmen
Quintana
Pueblo Nuevo
Ascao
García Noblejas
Simancas
San Blas
7 Las Musas
5 Canillejas
Torre Arias
Suanzes
Ciudad Lineal
Barajas 8
Aeropuerto
Campo de las Naciones
TFM
Rivas Urbanizaciones
Rivas Vaciamadrid
La Poveda
Arganda del Rey 9
zona B1
zona B2
zona B3
Parque Oeste
Alcorcón Central
Parque Lisboa
Joaquín Vilumbrales
Puerta del Sur 12 10
Universidad Rey Juan Carlos
Móstoles Central
Pradillo
Hospital de Móstoles
Manuela Malasaña
Loranca
Hospital de Fuenlabrada
Parque Europa
Fuenlabrada Central
Parque de los Estados
Arroyo Culebro
Conservatorio
Alonso de Mendoza
Getafe Central
Juan de la Cierva
El Casar
Los Espartales
El Bercial
El Carrascal
Julián Besteiro
Casa del Reloj
Hospital Severo Ochoa
Leganés Central
San Nicasio
leyenda
1 Plaza de Castilla / Congosto
2 Ventas / Cuatros Caminos
3 Legazpi / Moncloa
4 Argüelles / Parque de Santa María
5 Canillejas / Casa de Campo
6 Circular
7 Las Musas / Pitis
8 Nuevos Ministerios / Barajas
9 Herrera Oria / Arganda del Rey
10 Fuencarral / Puerta del Sur
11 Plaza Elíptica / Pan Bendito
12 MetroSur
R Ópera / Principe Pío



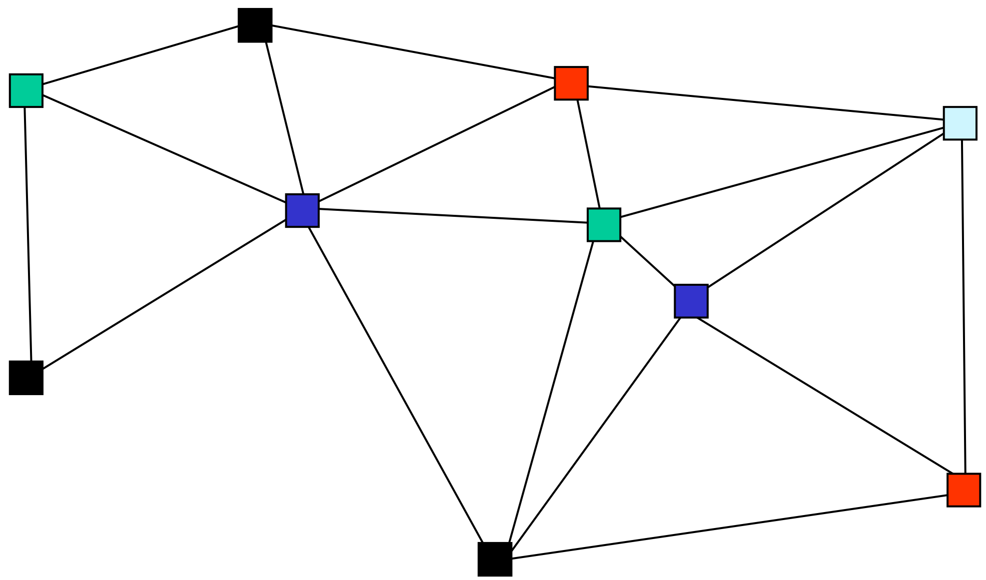
Philly.com
The Seattle Times, The
The Denver Post Online
HoustonChronicle.com
Miami.Com
Mercury News
CNET News.com
Wired
Chicago Sun-Times
The Boston Globe
Chicago Tribune
Red Herring
Fortune.com - Home
New York Post
Los Angeles Times
Wall Street Journal
Forbes.com
Business Week
USA Today
Christian Science Monitor
Time Magazine
Washington Post
CNN/Money
The Village Voice
Washington Times
New York Times Online
MSNBC
The Economist
Bloomberg.com
Newsweek
Harper's
CNN
The New Yorker
ABCNews.com
MSN Money - Investing Home
usnews.com Home page
Financial Times
Atlantic Online
The Nation
BBC News
International Herald Tribune
Slate Magazine
Fox News Channel
The Drudge Report
Guardian Unlimited
http://www.the-times.co.uk/
online newspaper - daily uk
The New Republic
National Review Online
News Max.com
WorldNetDaily
The Weekly Standard
Insight Magazine Online
The Independent
(C) 2002 TouchGraph LLC

RED DE COSTE MÍNIMO

ASIGNACIÓN DE FRECUENCIAS DE RADIO



ASIGNACIÓN DE FRECUENCIAS DE RADIO

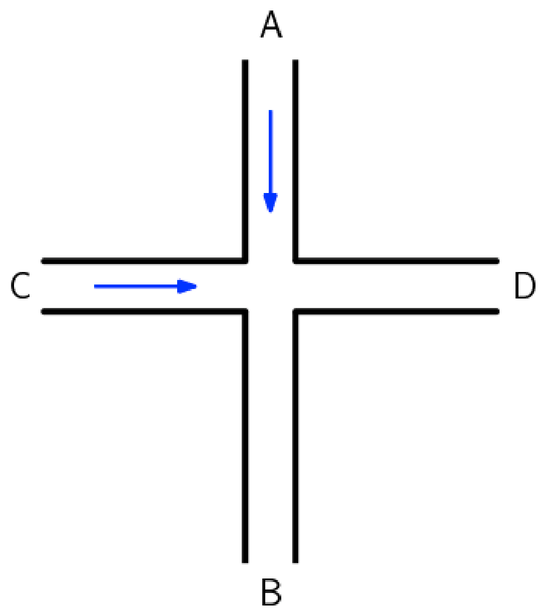


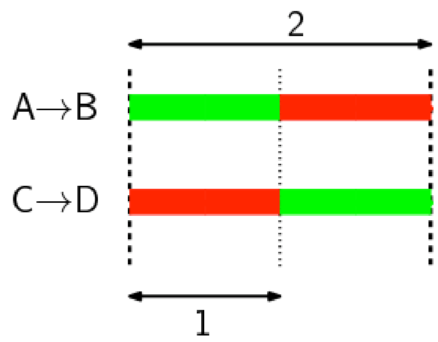
Cada color corresponde a una frecuencia

Número cromático del grafo

SEMÁFOROS

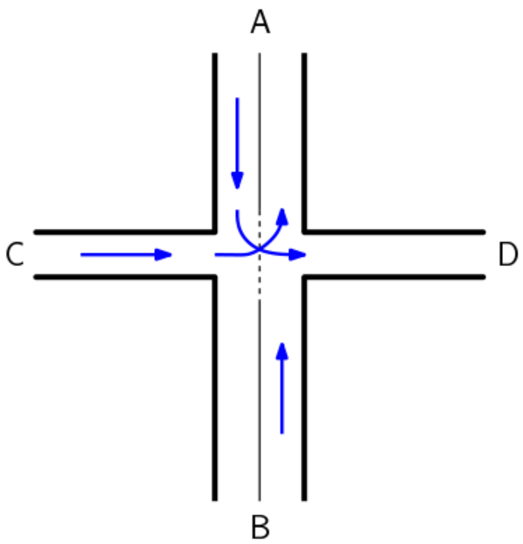
Tiempo de espera

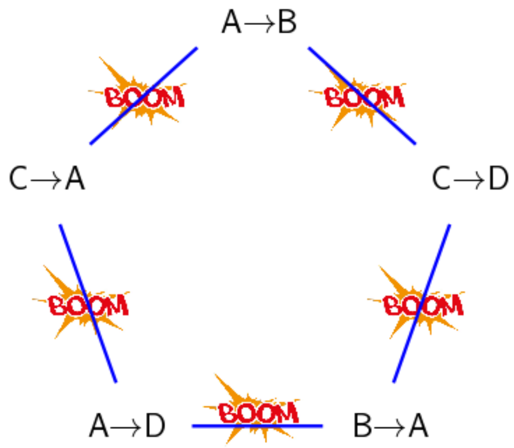




SEMÁFOROS

Un cruce más complejo



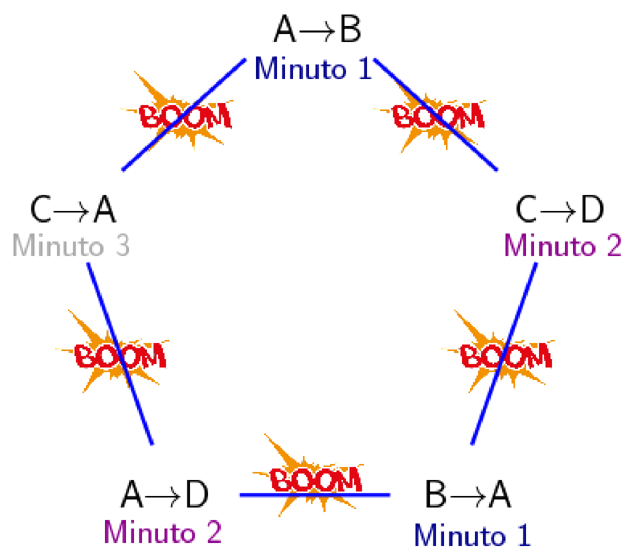


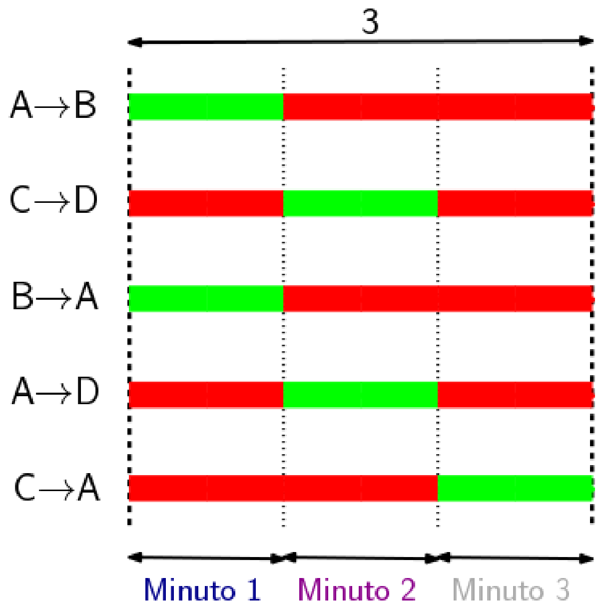
Esquema de movimientos incompatibles

Movimientos incompatibles en minutos distintos

SEMÁFOROS

Movimientos incompatibles en minutos distintos



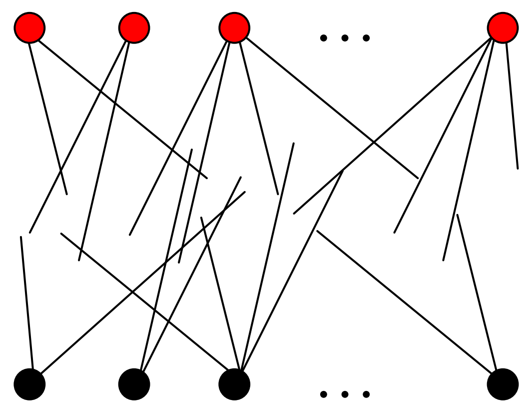


¿Podemos disminuir el tiempo de espera?

Número cromático circular

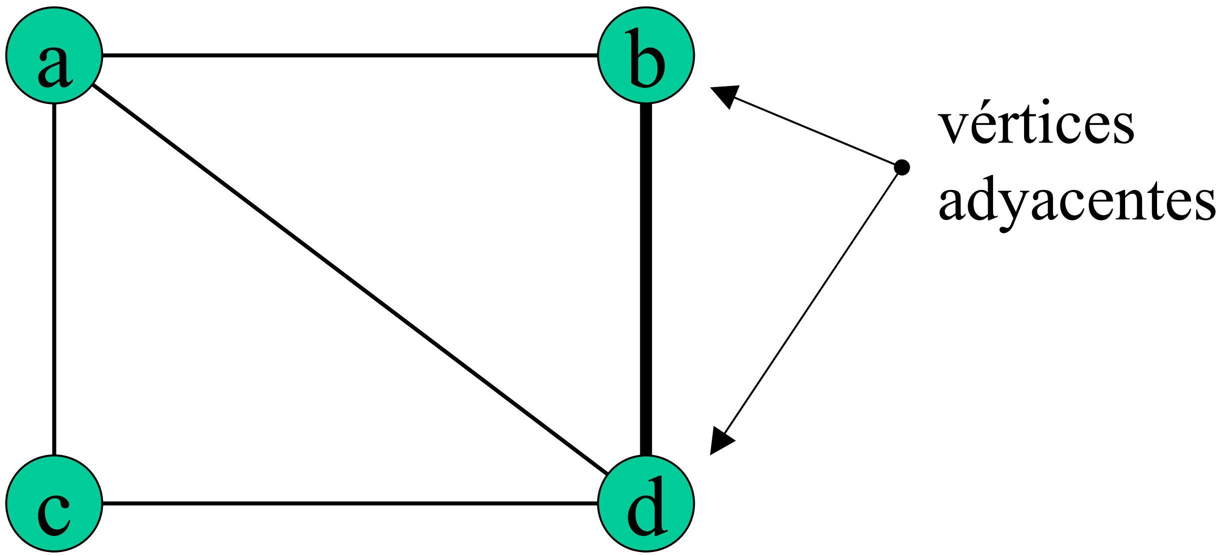
Problema en el baile

En cierta universidad se organiza el baile de fin de curso. Hay 300 asistentes, cada chica conoce a 50 chicos y cada chico a 50 chicas. Las parejas de baile deben formarse entre conocidos. ¿Es posible que todos bailen simultáneamente?



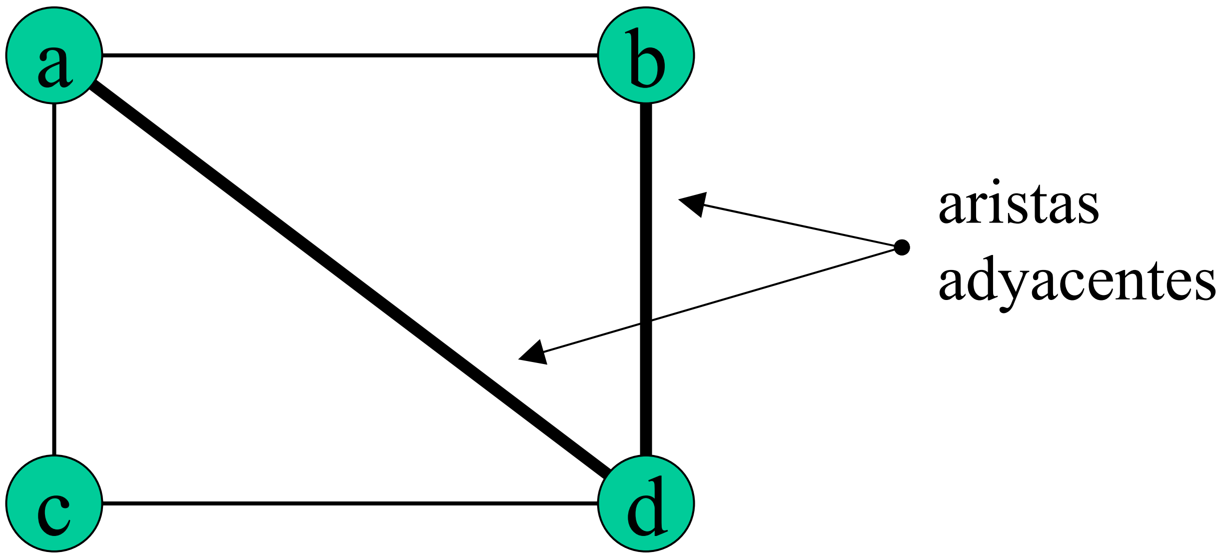
EMPAREJAMIENTO

Grafo o grafo simple $G = (V, A)$



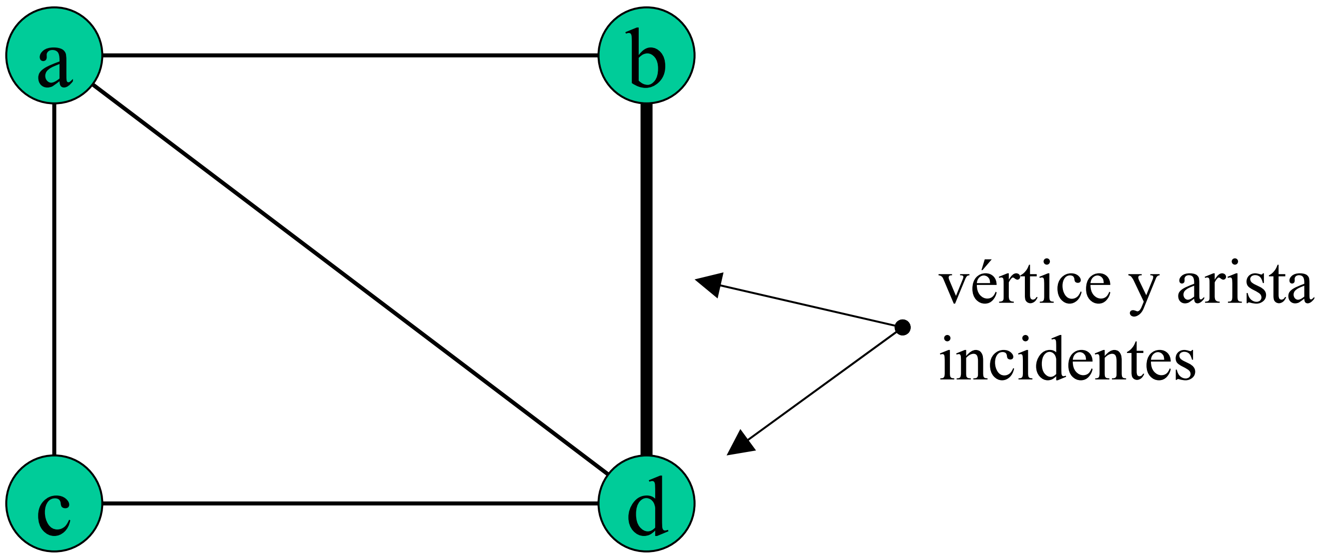
$V=\{a,b,c,d\}$ $A=\{ab,bd,cd,ac,ad\}$

Grafo o grafo simple G=(V,A)



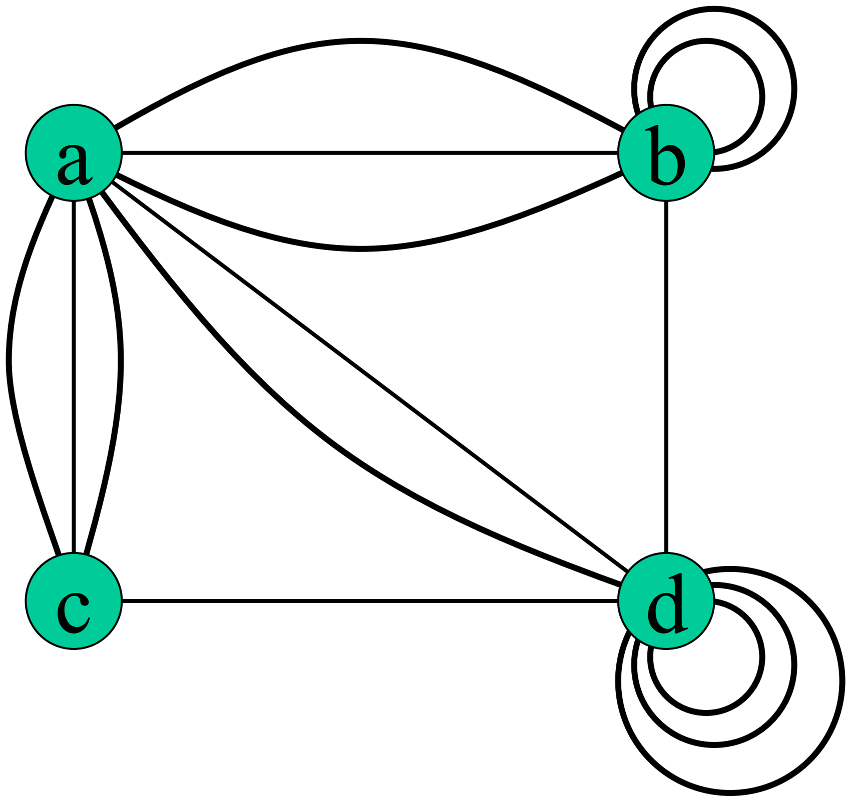
V={a,b,c,d} A={ab,bd,cd,ac,ad}

Grafo o grafo simple $G=(V,A)$



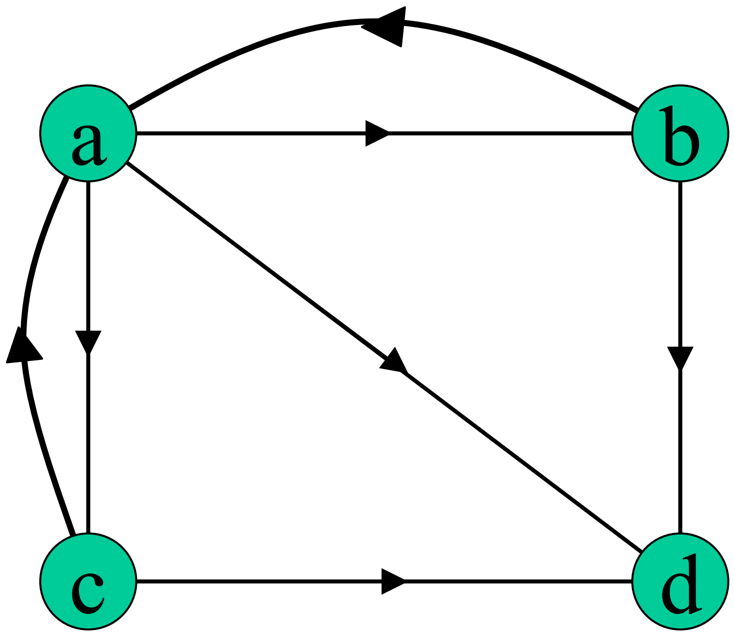
$V=\{a,b,c,d\}$ $A=\{ab,bd,cd,ac,ad\}$

En un grafo se admiten aristas múltiples (multigrafo)



En un grafo se admiten bucles (seudografo)

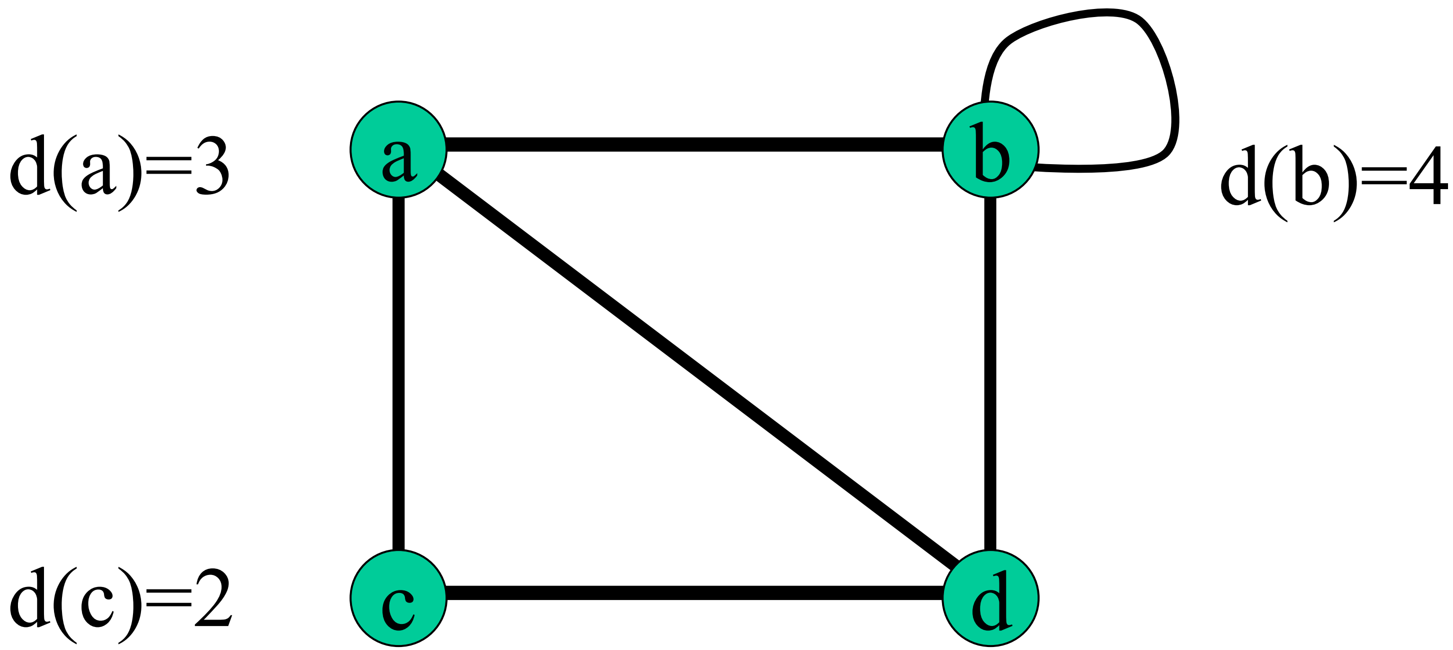
- Grafo dirigido   DIGRAFO



Grafo $G=(V,A)$

- Número de vértices $|V| = n$
- Número de aristas $|A| = q$
- Grado de un vértice v $d(v)$

Notación



Teorema de Euler

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q$$

Consecuencia

En un grafo, el nº de vértices de grado impar es siempre un nº par

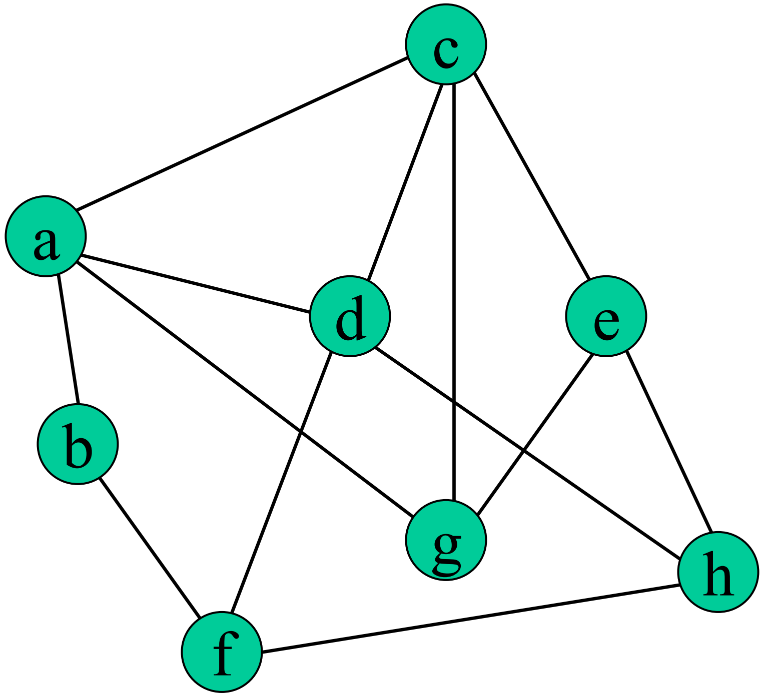
$$\sum_{v\in V} d(v) = \sum_{d(v)\text{ impar}} d(v) + \sum_{d(v)\text{ par}} d(v) = 2q$$

Luego el nº de sumandos impares es siempre par

Sucesión de grados

4, 2, 4, 4, 3, 3, 3, 3,

4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2

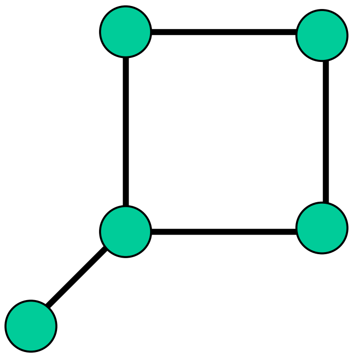


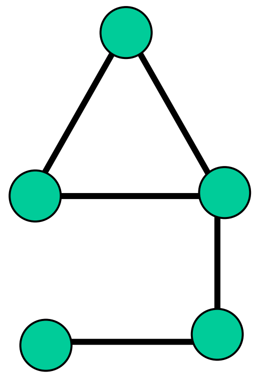
$G = (V,A)$

¿La sucesión determina el grafo?

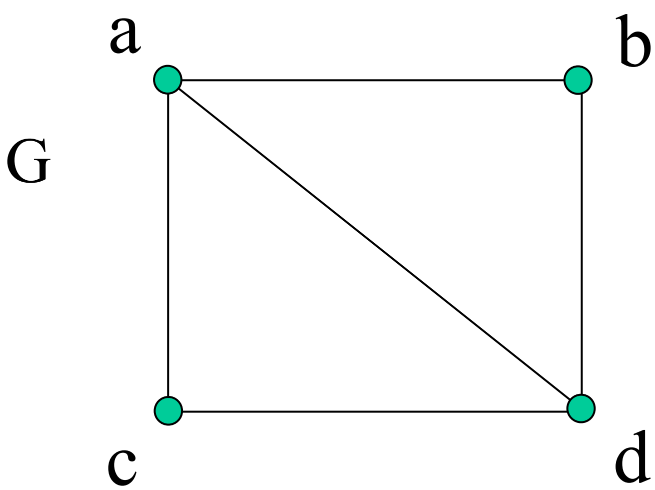
3, 2, 2, 2, 1

¡NO!

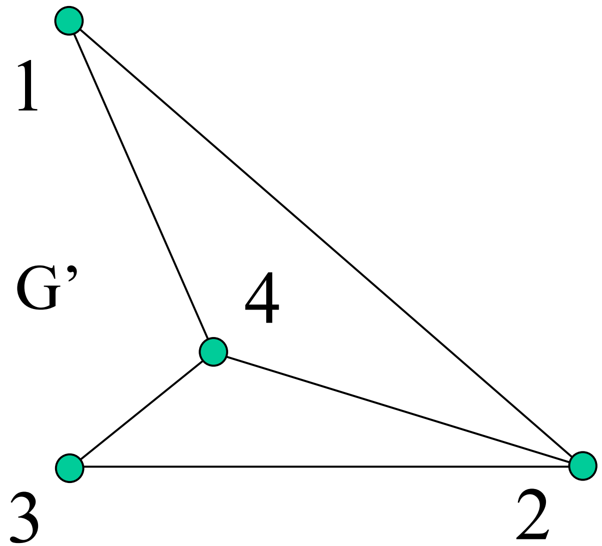




ISOMORFISMO DE GRAFOS



$a \to 4$
$b \to 1$
$c \to 3$
$d \to 2$

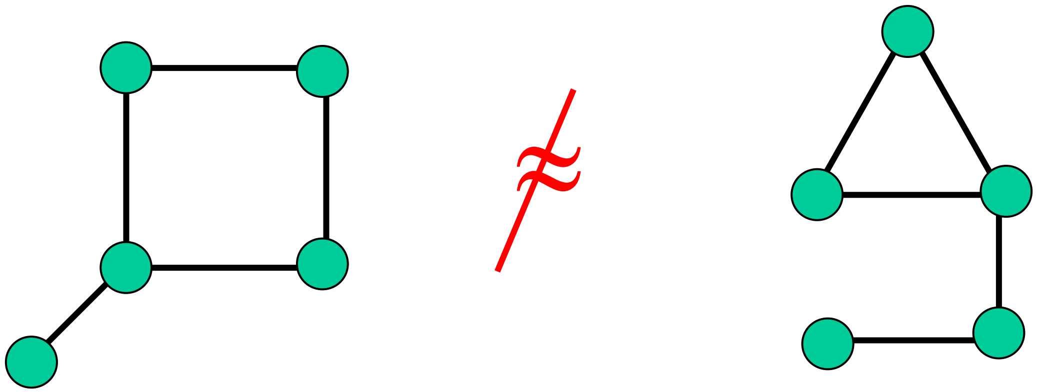


G y G' son isomorfos si
existe f: $V \to V'$ que conserva la adyacencia

u,v son adyacentes $\Leftrightarrow$ f(u), f(v) son adyacentes

ISOMORFISMO DE GRAFOS

Si G ≈ G’ entonces las sucesiones de grados de G y G’ coinciden



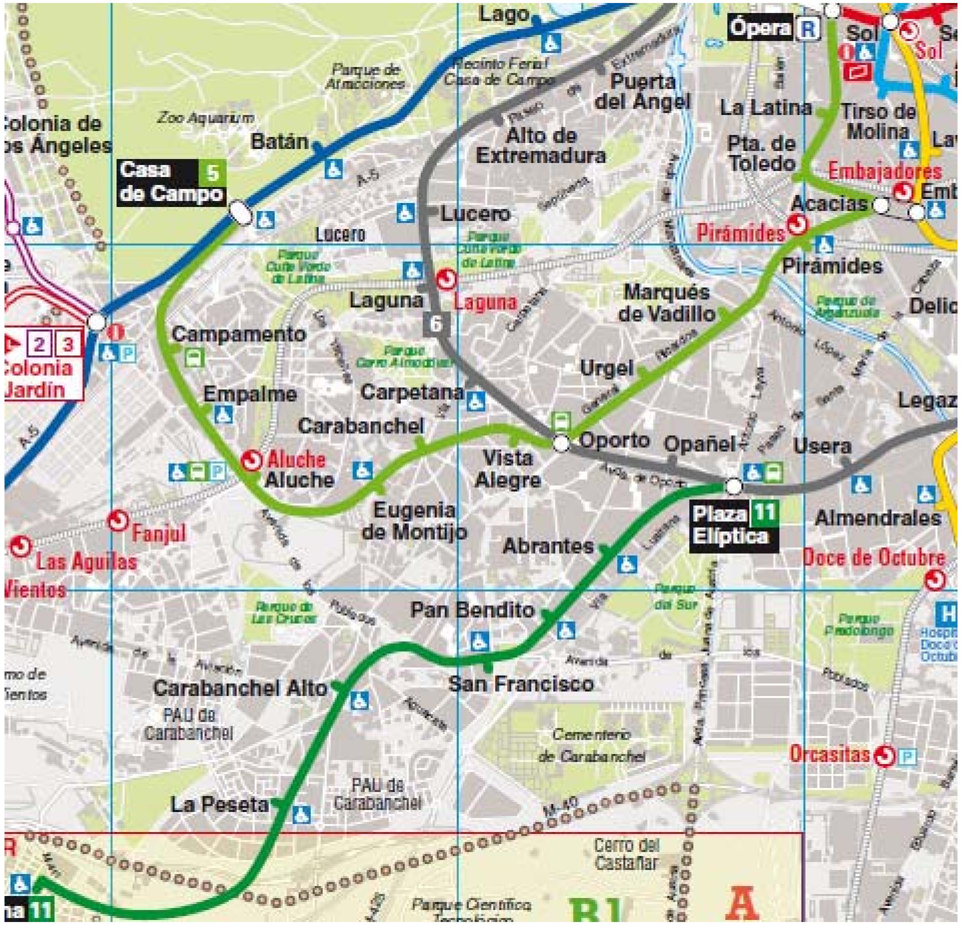
Vértice de grado 1 adyacente a vértice de grado 3

Vértice de grado 1 adyacente a vértice de grado 2

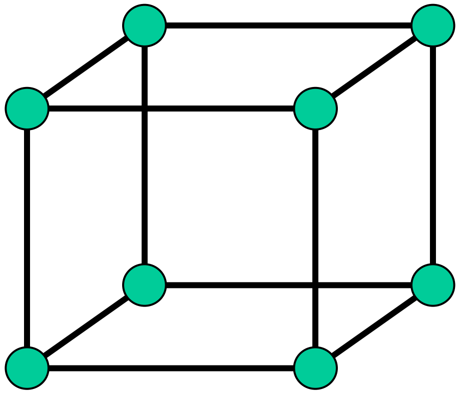
ISOMORFISMO DE GRAFOS

Dados G y G’ grafos con n vértices ¿ G ≈ G’ ?

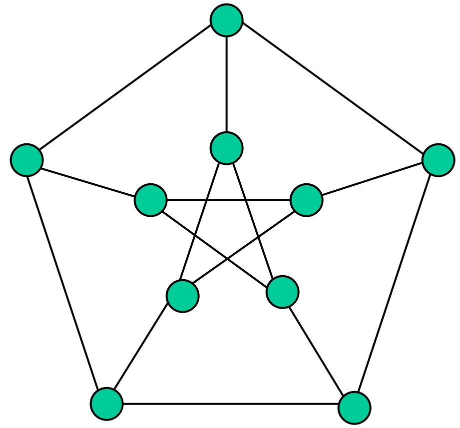
GRAPH ISOMORPHISM PROBLEM



- Grafos regulares

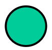


Regular de grado 3



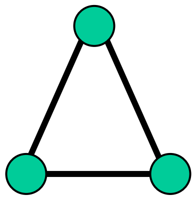
Grafo de Petersen

- Grafos completos K_n

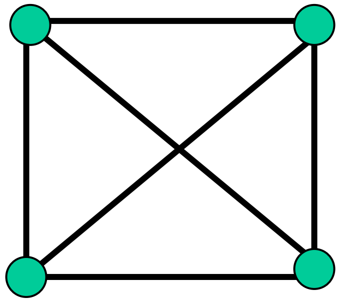


K_1

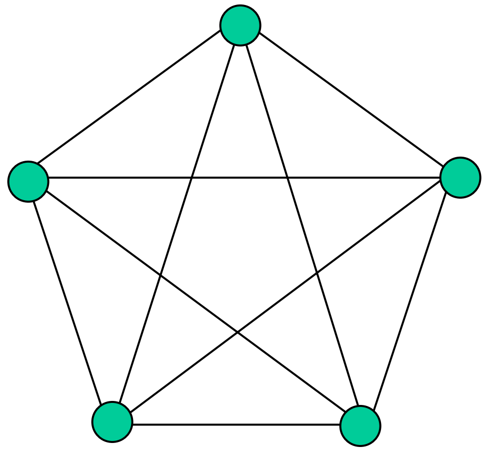
K_2



K_3

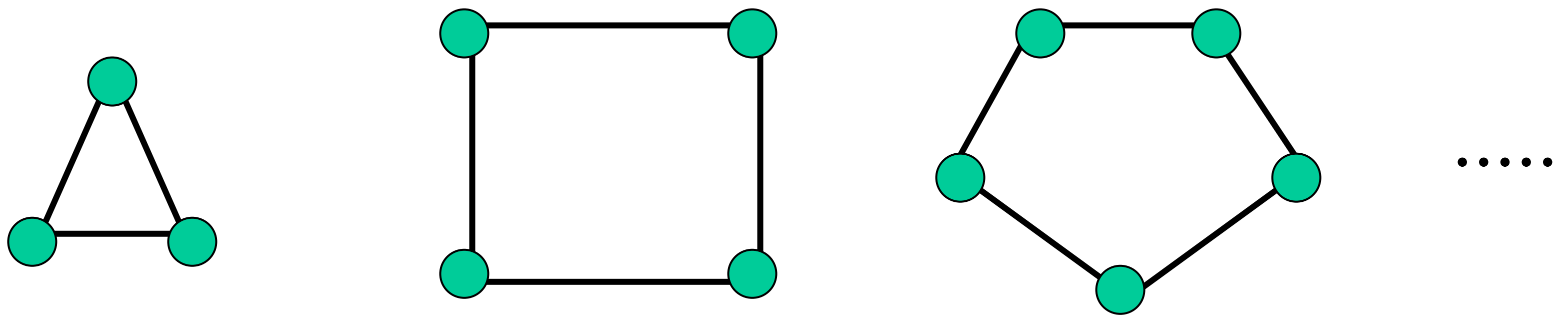


K_4



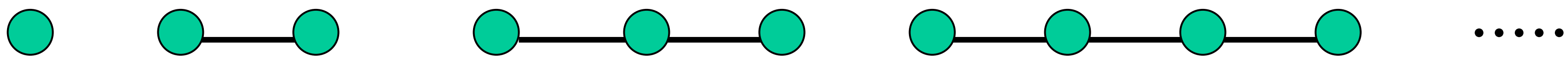
K_5

- Ciclos C_n



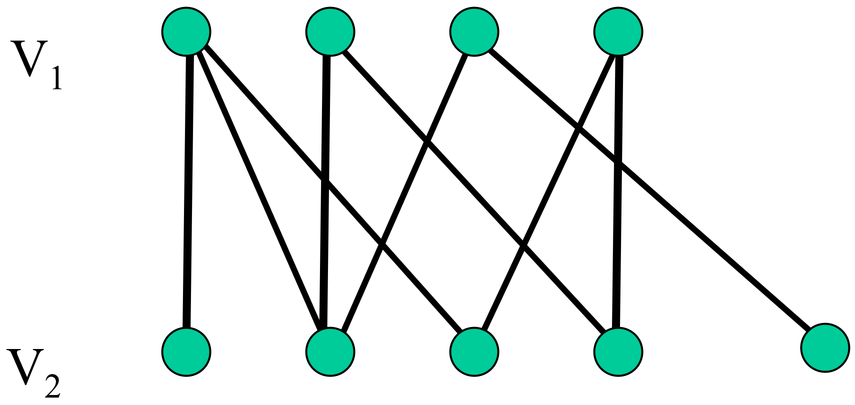
C_3 C_4 C_5

- Caminos P_n

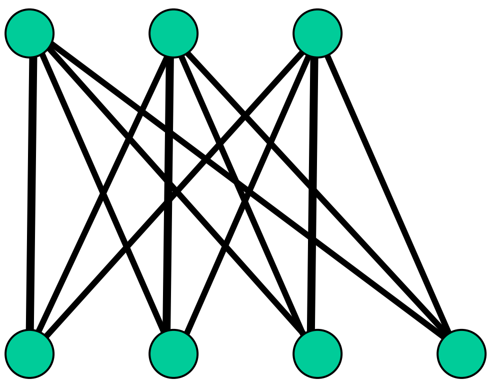


P_1 P_2 P_3 P_4

• Grafos bipartidos



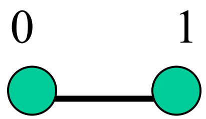
$G=(V_1 \cup V_2, A)$



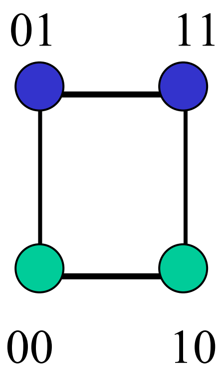
Grafo bipartido completo

$K_{3,4}$

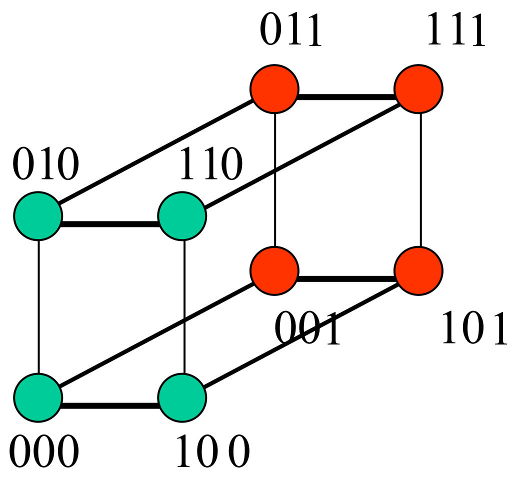
• Grafos Q_n



Q_1



Q_2



Q_3

Q_4? Vértices: Cuaternas de 0's y 1's

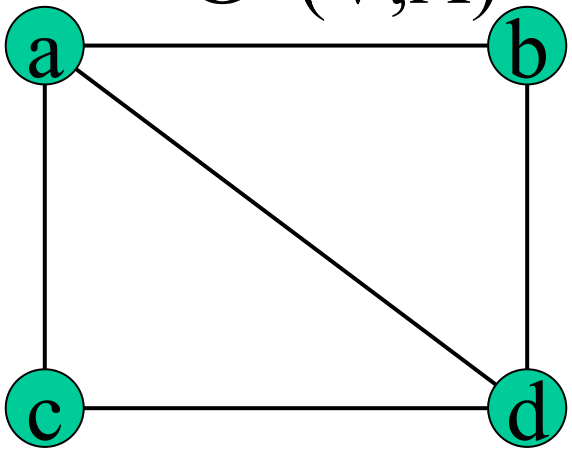
Adyacencia: Si difieren sólo en un dígito

Q_n es n-regular, tiene 2^n vértices y $n2^{n-1}$ aristas

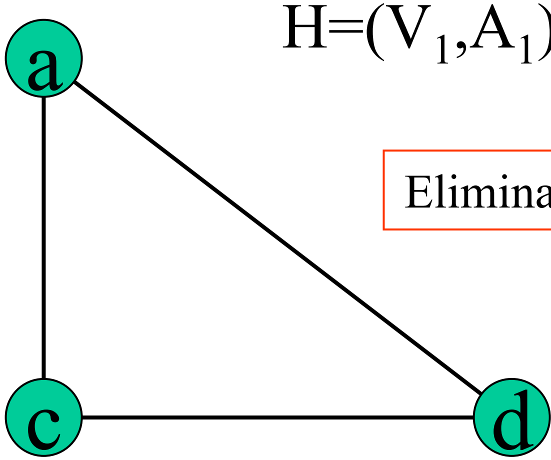
Q_n es bipartido

Subgrafos

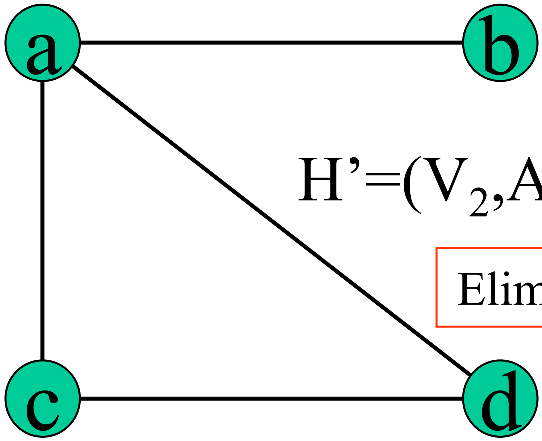
$G=(V,A)$



$H=(V_1,A_1)=G-\{b\}$

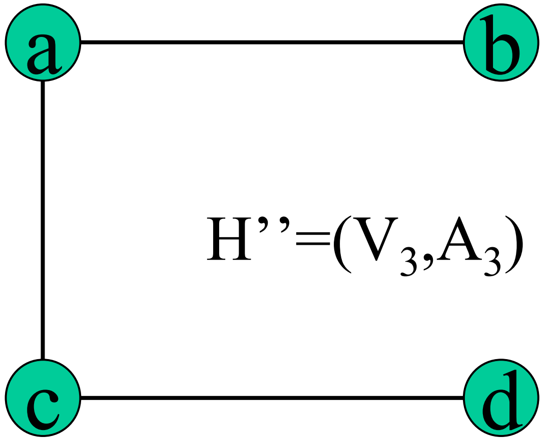


Eliminar un vértice



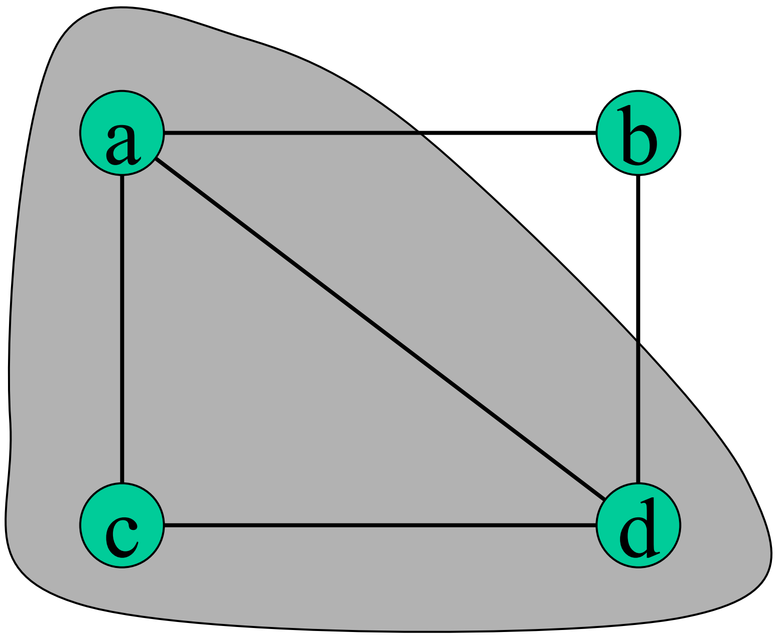
$H'=(V_2,A_2)=G-\{bd\}$

Eliminar una arista



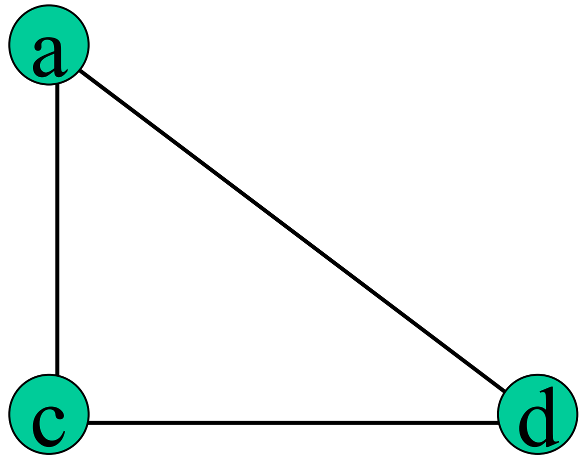
$H''=(V_3,A_3)$

Subgrafos inducidos



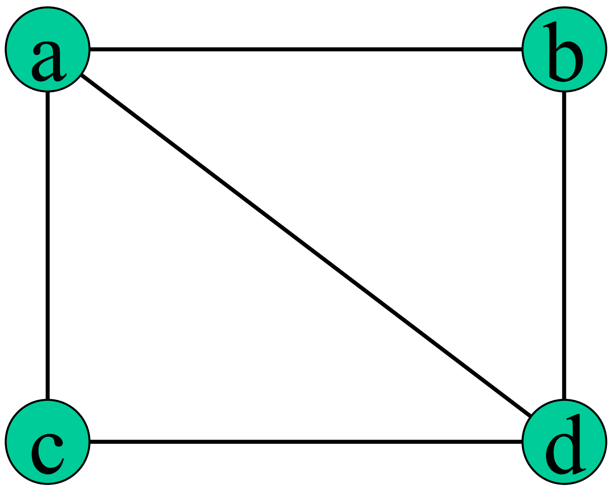
$G=(V,A)$

$S = \{a,c,d\}$

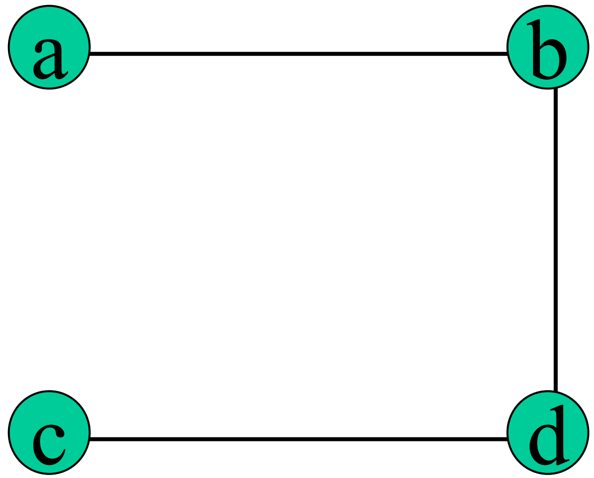


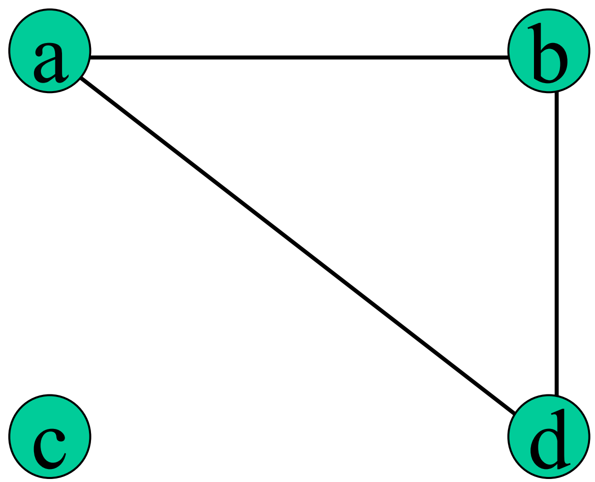
$G(S)$

Subgrafos generadores

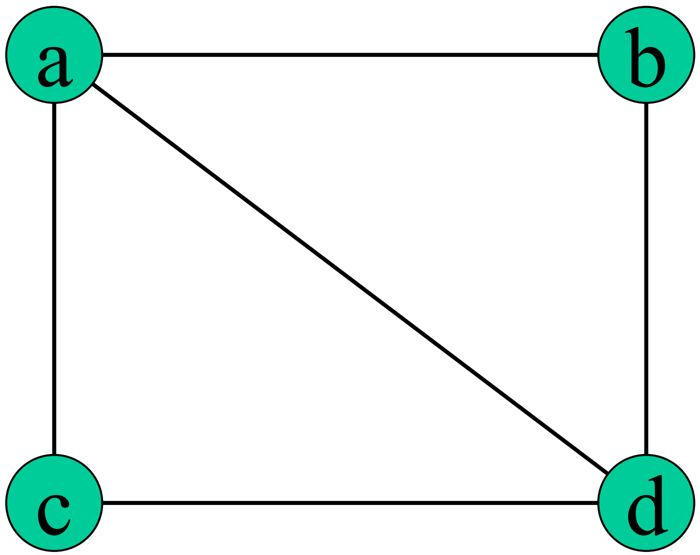


G=(V,A)





Matriz de adyacencia



$G=(V,A)$

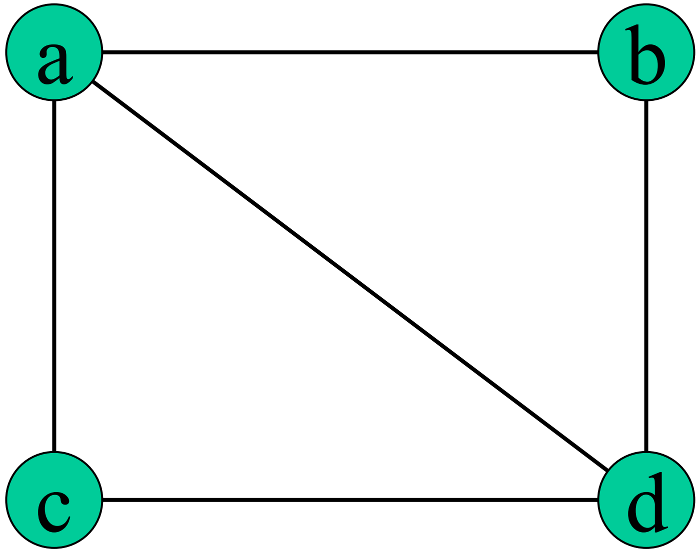
Orden en V: a, b, c, d

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Matriz de G:

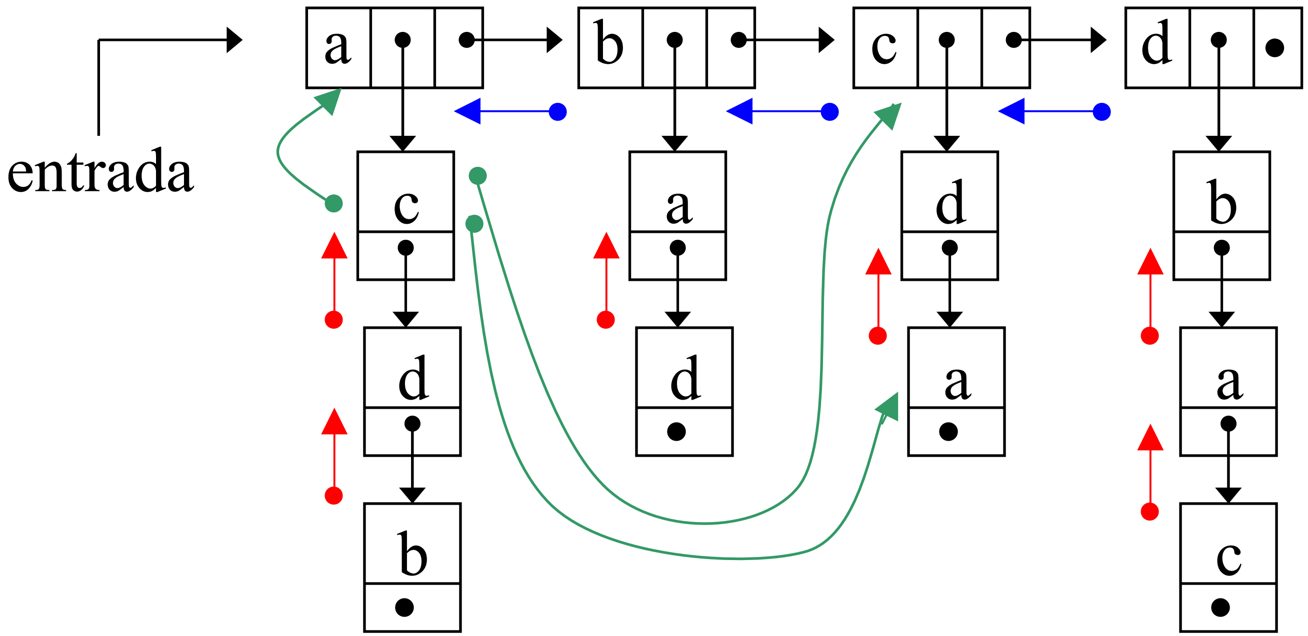
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Listas de adyacencia

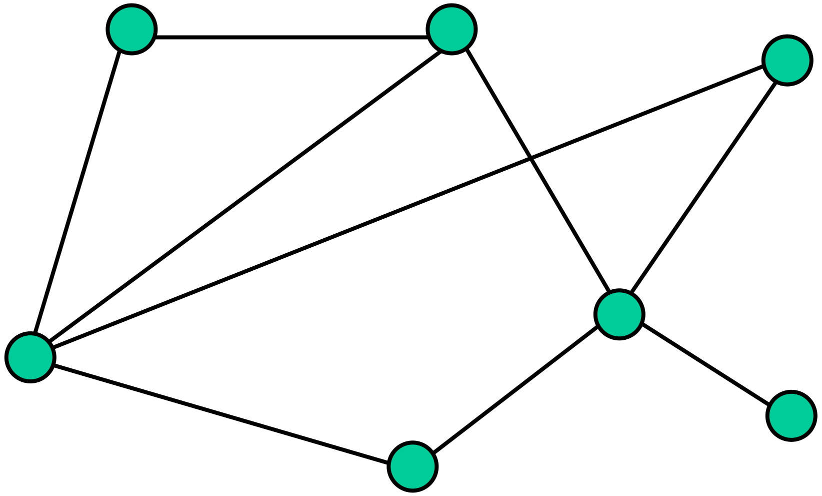


Orden en V: a, b, c, d

Listas: [[c,d,b],[a,d],[d,a],[b,a,c]]

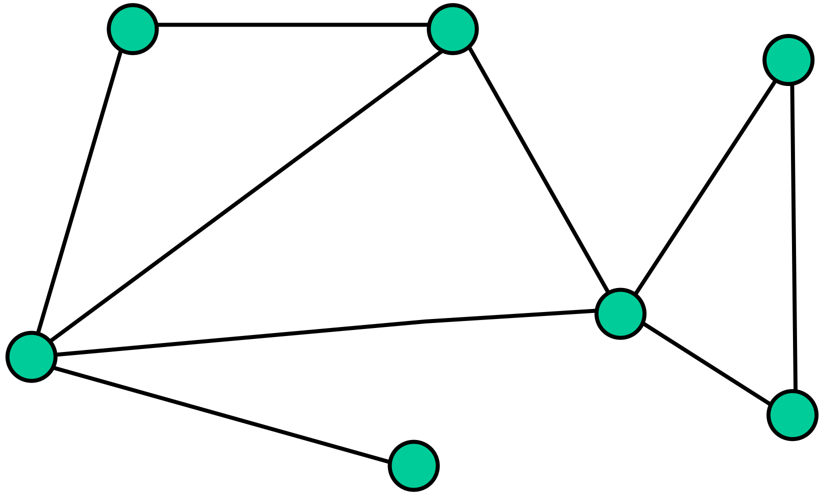


Sucesiones gráficas



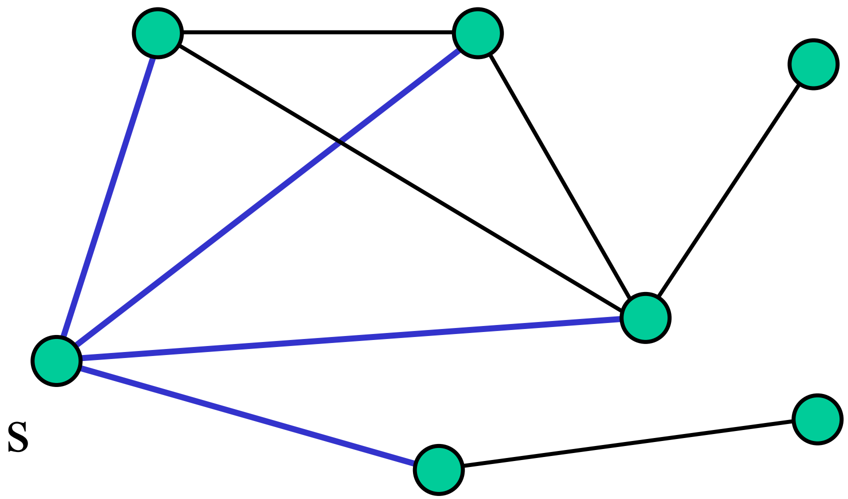
4, 4, 3, 2, 2, 2, 1

Hay grafos simples no isomorfos con la misma sucesión de grados



Condiciones para que una sucesión sea gráfica

- La suma debe ser par
- El valor máximo debe ser menor que la longitud   6, 4, 4, 2, 1, 1
- Si la sucesión $t_1-1, t_2-1, \dots, t_s-1, d_1, \dots, d_k$ es gráfica, entonces también lo es la sucesión $s, t_1, t_2, \dots, t_s, d_1, \dots, d_k$



3, 2, 2, 1, 1, 1

$\Downarrow$

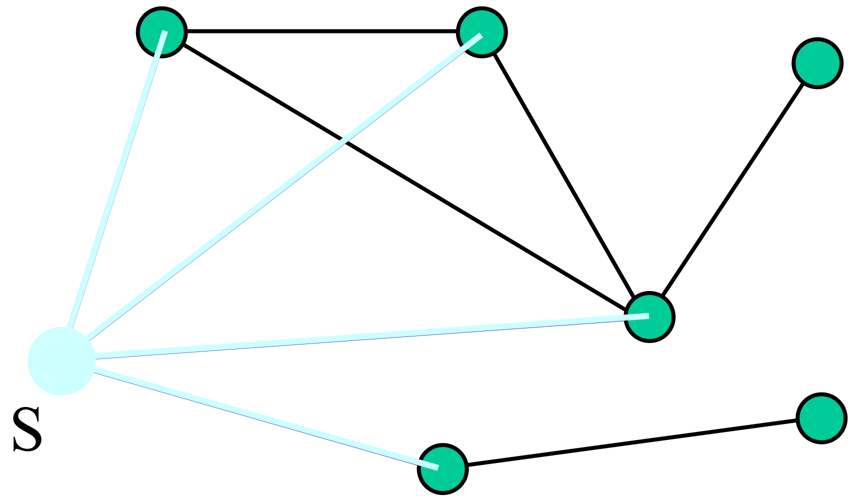
4, 4, 3, 3, 2, 1, 1

Caracterización de las sucesiones gráficas

La sucesión s, t_1, t_2, … , t_s, d_1, … ,d_k es gráfica $\Leftrightarrow$
lo es la sucesión $t_1 - 1$, $t_2 - 1$, … , $t_s - 1$, d_1, … ,d_k

Dem. Sea G el grafo cuya sucesión es s, t_1, t_2, … , t_s, d_1, … ,d_k
y sean S, T_1, T_2, …T_s , D_1, … , D_k los vértices correspondientes

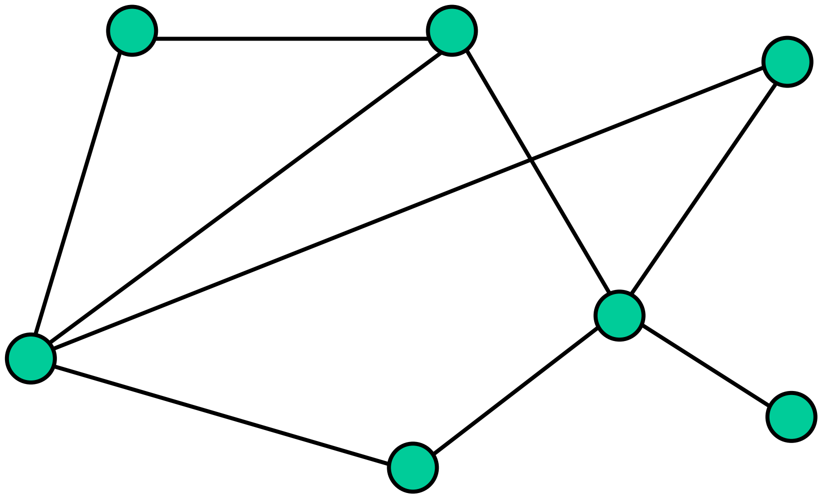
- Si S es adyacente a T_1, T_2, …T_s, borramos S y el grafo H=G – {S} es el grafo buscado



4, 4, 3, 3, 2, 1, 1

3, 2, 2, 1, 1, 1

- Si no es así, S no es adyacente a un T_i pero SÍ es adyacente a un vértice D_j con $t_i \geq d_j$



4, 4, 3, 2, 2, 2, 1

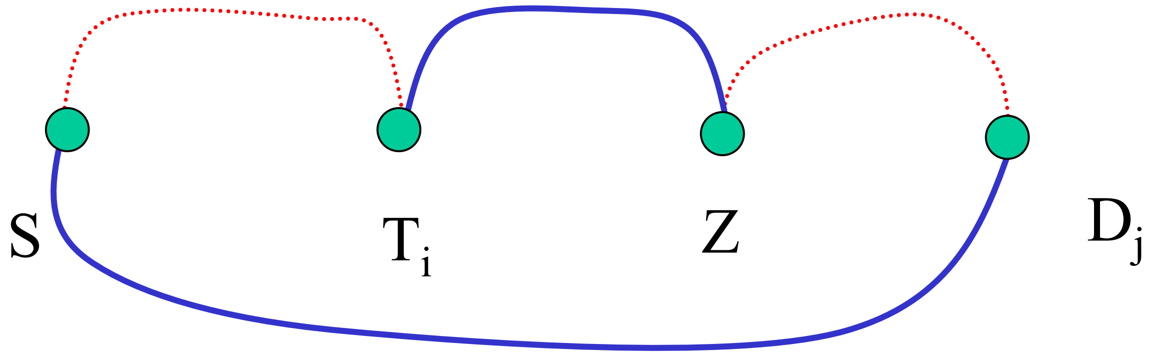
4, 4, 3, 2, 2, 2, 1

4, 2, 1, 1, 1, 1

¡pero queremos 3, 2, 1, 1, 1, 1 !

Si $t_i = d_j$, basta intercambiar los papeles de T_i y de D_j

Si $t_i > d_j$



T_i tiene más vecinos que D_j

Sea Z vecino de T_i pero no vecino de D_j

Cambiamos el carácter de las aristas rojas y azules.
Tenemos así un grafo G_1 con la misma sucesión en el que el vértice S tiene un vecino entre los T_i más que en el grafo G.

Si en G' ya es S adyacente a T_1, T_2, …T_s, se procede como antes. Y si no lo es se repite el cambio rojo-azul. Como s es finito se alcanza en algún momento un grafo G_m cuya sucesión es la dada.

Algoritmo SUCESIÓN GRÁFICA

Dada una sucesión no creciente de enteros positivos o nulos decidir si es una sucesión gráfica o no

La idea es aplicar la caracterización anterior hasta que, o bien se obtiene un nº negativo (la sucesión NO es gráfica), o bien se alcanza una sucesión de 0's (la sucesión SÍ es gráfica)

4	4	3	2	2	2	1
	3	2	1	1	2	1

reordenamos

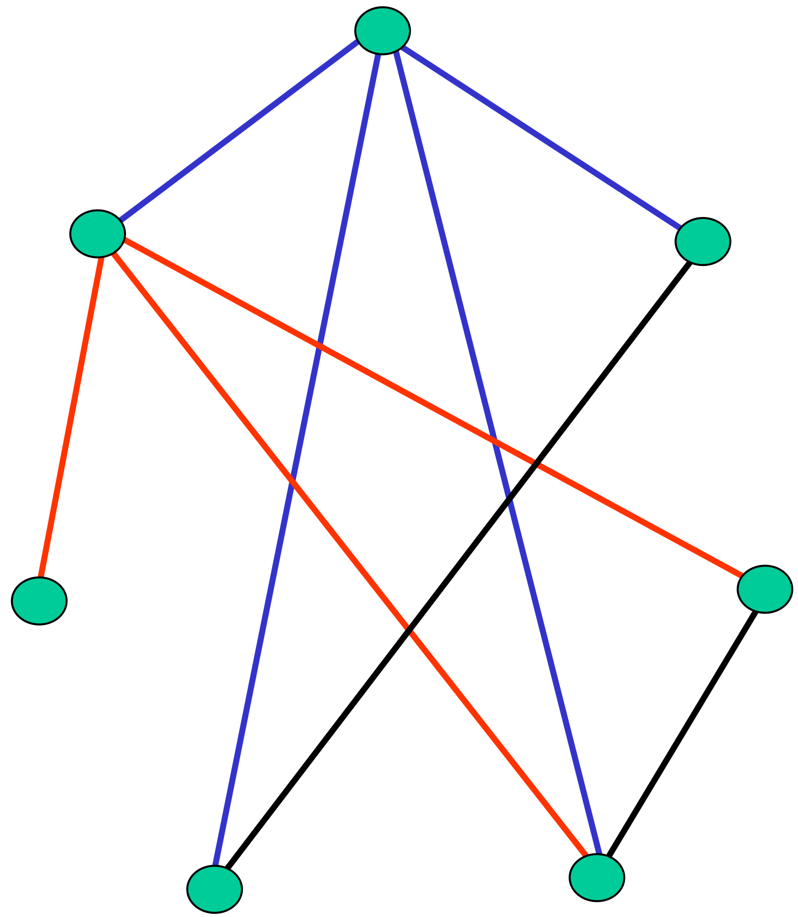
	3	2	2	1	1	1
		1	1	0	1	1

reordenamos

		1	1	1	1	0
			0	1	1	0

reordenamos

			1	1	0	0
				0	0	0



6	**6**	**6**	**4**	**3**	**3**	**2**
	5	**5**	**3**	**2**	**2**	**1**
		4	**2**	**1**	**1**	**0**
			1	**0**	**0**	**-1**

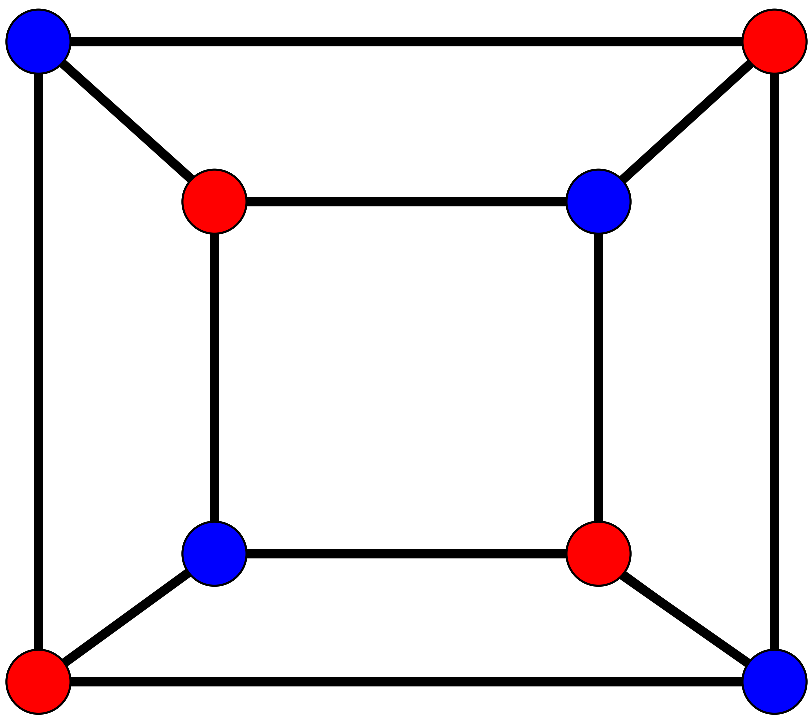
NO es sucesión gráfica

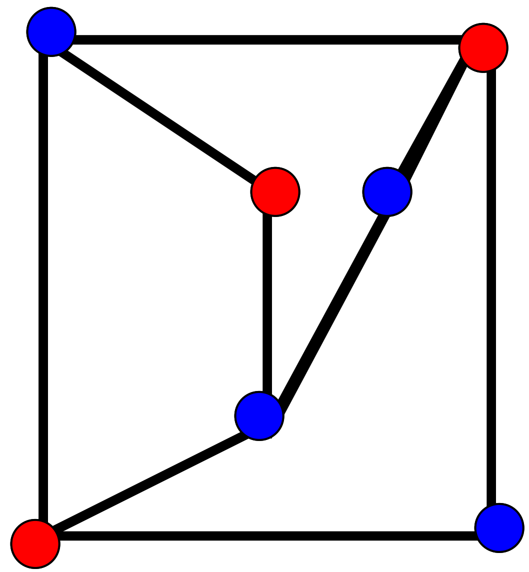
Para practicar con el algoritmo se puede utilizar la aplicación

http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/web/sucgraf_certifarboles/

Grafos bipartidos

G=(V,A) es bipartido si existe una partición $V=V_1 \cup V_2$, tal que toda arista $uv \in A$ une vértices de distinta parte





No bipartido

Algoritmo para detectar si un grafo es bipartido

Estrategia. Clasificar los vértices de G en dos partes (que etiquetamos con 1 y 2) comprobando si hay arista entre vértices con la misma etiqueta.

Paso 1. Se elige un vértice v y se etiqueta con 1. Hacemos S={v}

Paso 2. Sea T el conjunto de vértices aún no etiquetados que son adyacentes a un vértice de S

Si dos vértices de T son adyacentes, FIN, G no es bipartido.

En caso contrario etiquetar cada vértice de T con la etiqueta contraria a su vecino en S.

Paso 3. Si todos los vértices están etiquetados, entonces el grafo es bipartido. En caso contrario hacemos S=T y volvemos al paso 2.

Operaciones en grafos

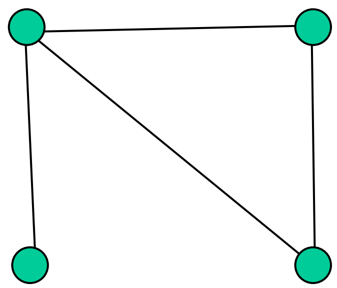
- *Complementario*
- *Eliminar vértices*
- *Eliminar aristas*
- *Contracción*

Operaciones con grafos

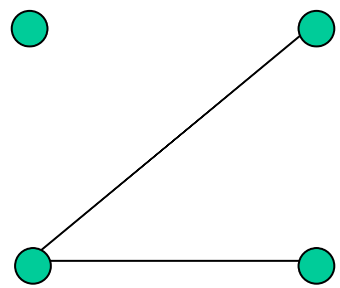
- *Unión*
- *Suma (join)*
- *Producto cartesiano*
- *Corona*
- *Grafo de aristas*

COMPLEMENTARIO

Dado G = (V,A) el complementario de G, designado por $\overline{G}$, es el grafo (V',A') donde V=V' y $e \in A' \Leftrightarrow e \notin A$



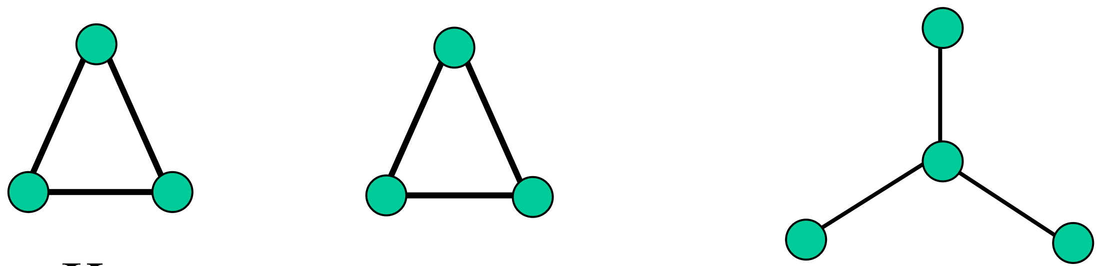
G



$\overline{G}$

UNIÓN

Si G=(V,A) y H=(V',A') son dos grafos sin vértices comunes se llama grafo unión de G y H al grafo $G \cup H = (V \cup V', A \cup A')$

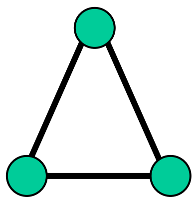


K_3 K_3 $K_{1,3}$

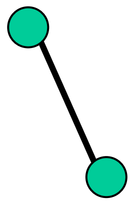
$K_3 \cup K_3 \cup K_{1,3}$

SUMA (JOIN)

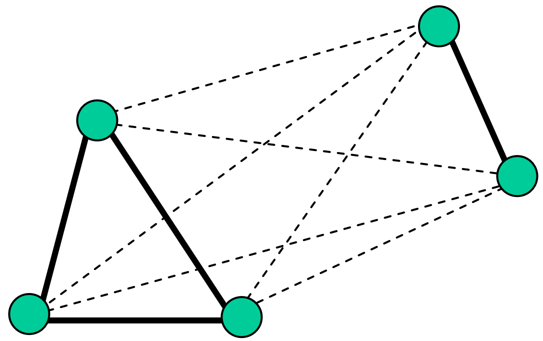
Si G=(V,A) y H=(V',A') son dos grafos sin vértices comunes se llama grafo suma de G y H al grafo G+H que consta de los vértices y aristas de G∪H y de todas las aristas que unen un vértice de G con otro de H



K_3



K_2



$K_3 + K_2$

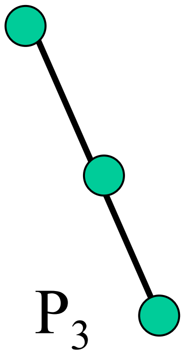
PRODUCTO CARTESIANO

Los vértices del producto $G\times H$ son los elementos de $V\times V'$.

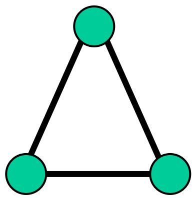
La adyacencia se define así:

(u,v) es adyacente a (u',v') si, o bien u=u' y vv' es arista en H,

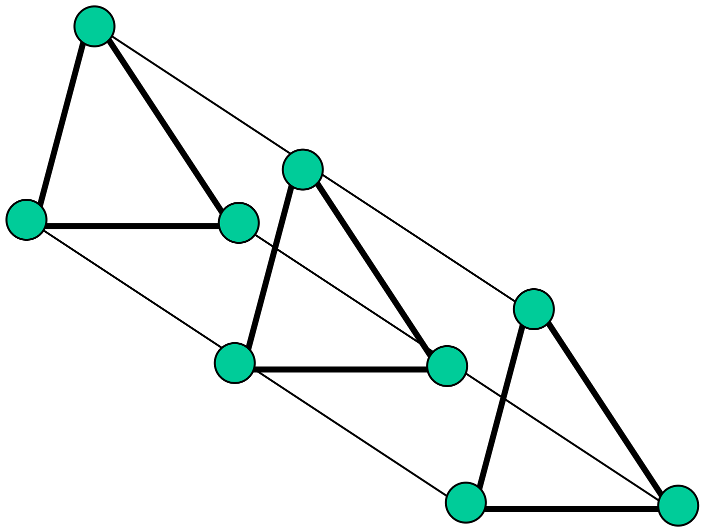
o bien v=v' y uu' es arista en G



P_3



K_3



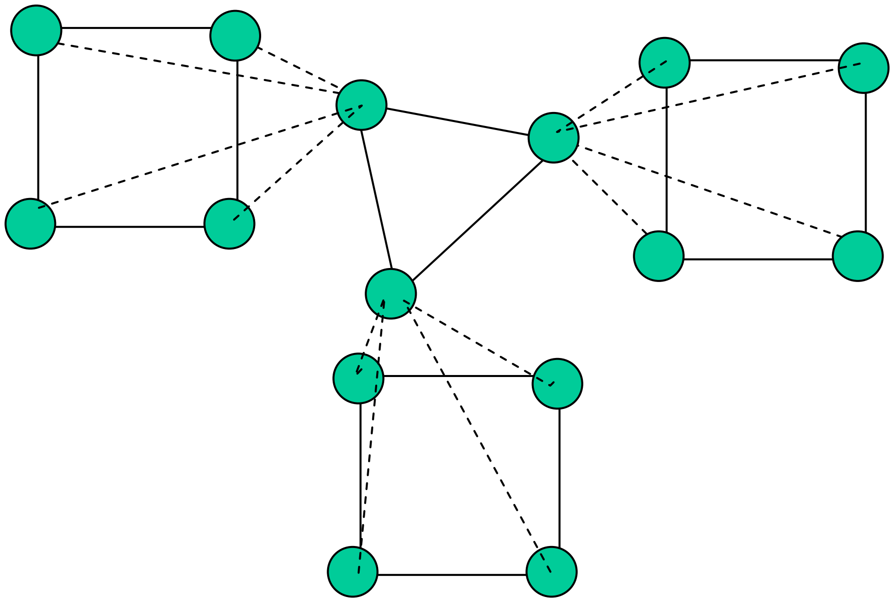
$P_3 \times K_3$

CORONA

La corona de dos grafos G y H, $G \circ H$, es el grafo que se obtiene tomando una copia de G y |V (G)| copias de H, y uniendo el i-ésimo vértice de G con todos los vértices de la copia i-ésima de H.

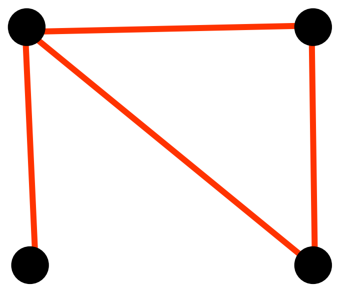
Cada vértice de G se une a todos los vértices de una copia de H

$G = C_3$
$H = C_4$

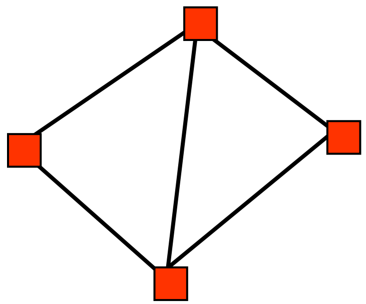


GRAFO DE ARISTAS (LINE GRAPH)

Dado G = (V,A) el grafo de aristas de G, designado por L(G), es el grafo cuyos vértices son las aristas de G. La adyacencia en L(G) se define por la adyacencia en G



G



L(G)