Gregorio Hernández Peñalver
ETS Ingenieros Informáticos, UPM

MATEMÁTICA DISCRETA II (MI)
TRABAJOS EN GRUPO

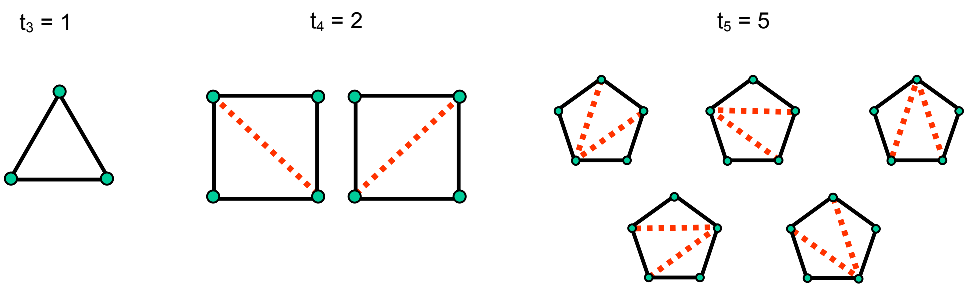
ÁRBOLES Y TRIANGULACIONES. NÚMEROS DE CATALAN

La sucesión de Catalan

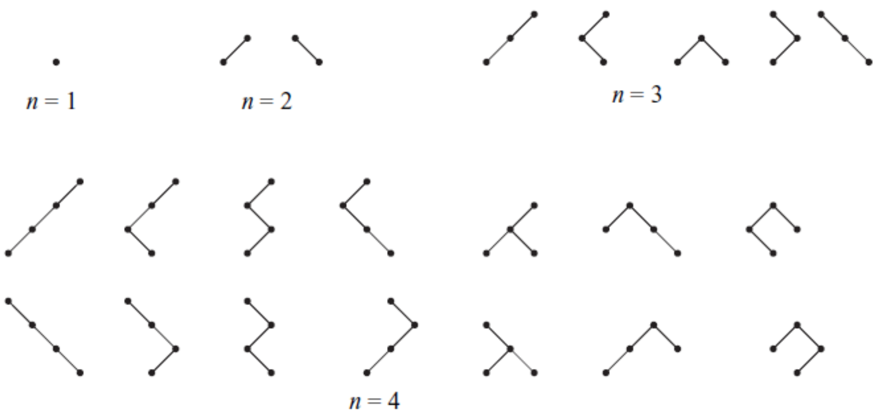
1, 2, 5, 14, 42, 139, 429, 1430, 4862, …

debe su nombre al matemático belga Eugene Catalan que en 1838 cuenta el número de formas de colocar paréntesis en el producto $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ de n números.
Así un par de paréntesis (para dos factores) se puede colocar de una forma (x_1x_2)
dos pares de paréntesis (para tres factores) se pueden colocar de dos formas $((x_1x_2)x_3)$, $(x_1(x_2x_3))$
tres pares de paréntesis (para 4 factores) se pueden colocar de 5 formas $(((x_1x_2)x_3)x_4)$, $((x_1(x_2x_3))x_4)$, $((x_1x_2)(x_3x_4))$, $(x_1((x_2x_3)x_4))$, $(x_1(x_2(x_3x_4)))$

Los términos de esta sucesión aparecieron por primera vez en un problema propuesto por Leonard Euler. *¿De cuántas formas diferentes puede triangularse un polígono regular de n lados?*



Esta sucesión aparece también cuando contamos árboles. Un árbol binario ordenado es un árbol con raíz en el que cada vértice tiene a lo más dos hijos y hay orden en los hijos.



En la figura aparecen todos los árboles binarios ordenados con 1, 2, 3 y vértices.

La sucesión de Catalan verifica la relación de recurrencia

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0 \qquad \text{(tomando } C_0=1\text{)}$$

La sucesión de Catalan aparece en numerosas estructuras combinatorias, por ejemplo:

- Triangulaciones de un polígono regular de n+2 vértices
- Formas de colocar paréntesis en un producto de n+1 factores
- Árboles binarios ordenados (se distingue el orden de los hijos) con n vértices
- Árboles binarios ordenados completos con n + 1 hojas (es decir, 2n+1 vértices)
- Árboles ordenados con n aristas

- Sucesiones de longitud 2n de 0's y 1's , tales que en todo segmento inicial el número de ceros no excede al de unos.
- Formas de emparejar 2n puntos de una circunferencia por medio de cuerdas que no se corten.
- ....   y así hasta más de 160 estructuras

El objetivo del trabajo es presentar y demostrar la equivalencia entre varias de las estructuras cuyo cardinal viene dado por la sucesión de Catalan, al menos las correspondientes a árboles, colocación de paréntesis y triangulaciones. Además se resolverá la relación de recurrencia que obtiene los números de Catalan por funciones generatrices.

Referencias
R. Grimaldi. "Matemática Discreta y Combinatoria". Addison-Wesley
T. Koshy. "Catalan Numbers with applications". Oxford Univ. Press, 2009

Páginas web
http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number
Math World. Catalan Number. http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html
Enumerative Combinatorics, Richard Stanley. http://math.mit.edu/~rstan/ec/