Gregorio Hernández Peñalver
ETS Ingenieros Informáticos, UPM

MATEMÁTICA DISCRETA II (MI)
TRABAJOS EN GRUPO

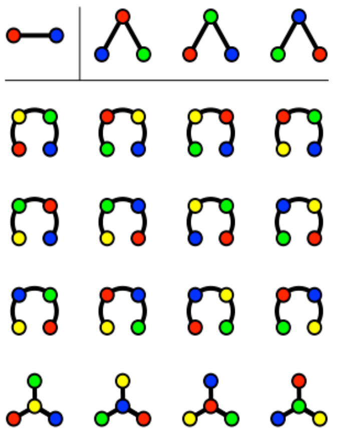
CONTANDO ÁRBOLES. TEOREMA DE CAYLEY

Los problemas de enumeración de grafos son, en general, difíciles de tratar. Tratan de encontrar la respuesta a preguntas del tipo: ¿cuántos grafos hay cumpliendo tal condición?
Si nos restringimos a grafos etiquetados, es decir, grafos tales que a cada uno de sus vértices se le asigna un entero positivo del conjunto $\{1,2,\dots, n\}$, algunos de estos problemas se simplifican.

Por ejemplo:

1) El número de grafos etiquetados de orden n es $2^{\binom{n}{2}}$
2) El número de grafos etiquetados con n vértices y q aristas es el número combinatorio C(C(n,2),q)

Los problemas de enumeración para árboles tienen respuesta en el siguiente teorema demostrado por Cayley en 1889.



Árboles etiquetados de 2, 3 y 4 vértices

Teorema
Hay n^{n-2} árboles etiquetados diferentes con n vértices.

De este teorema se conocen varias demostraciones que utilizan diferentes técnicas combinatorias y algebraicas. Algunas de ellas son:

Demostración de Prüfer. Se establece una biyección entre el conjunto de árboles etiquetados de orden n y el conjunto de listas ordenadas de longitud $n-2$ formadas con los símbolos $\{1,2,\dots, n\}$

Demostración de Joyal: Se establece una biyección entre el conjunto de árboles etiquetados de orden n y con dos vértices distinguidos, extremos izquierdo y derecho, y el conjunto de todas las aplicaciones de $\{1,2,\dots, n\}$ en $\{1,2,\dots, n\}$.

Demostración de Kirchhoff: Con técnicas de álgebra lineal. “Teorema matricial de los árboles”

Demostración de Riordan y Renyi: Utilizando una relación de recurrencia para calcular $T_{n,k}$, el número de bosques etiquetados con vértices $\{1,2, \dots , n\}$ que están formados por k árboles.

El objetivo del trabajo es presentar al menos tres demostraciones de la fórmula de Cayley y comprobar los resultados sobre enumeración de grafos puestos como ejemplo. Una de las demostraciones presentadas debe ser la matricial de Kirchhoff.

Referencias
J. Matousek, J. Nesetril: “Invitación a la Matemática Discreta”, Reverté, 2008
M. Aigner, G. Ziegler: “Proofs from THE BOOK”, 4ª ed., Springer, 2010.