

## MATEMÁTICA DISCRETA II (MI) TRABAJOS EN GRUPO

### SUCESIONES GRÁFICAS Y DIGRÁFICAS

La sucesión de los grados de los vértices de un grafo  $G$  se denomina **sucesión de grados** de  $G$ . Una sucesión de enteros no negativos se dice sucesión **gráfica** si es la sucesión de grados de un grafo simple. Ya sabemos que la sucesión de grados no determina al grafo pues pueden existir varios grafos no isomorfos con la misma sucesión de grados.

Una caracterización de las sucesiones que son gráficas viene dada por el siguiente teorema.

**Teorema (Havel-Hakimi)**

La sucesión  $(s, t_1, \dots, t_s, d_1, \dots, d_r)$  de enteros no negativos, donde  $s \geq t_1 \geq \dots \geq d_r \geq 0$ , es una sucesión gráfica si y sólo si la sucesión  $(t_1 - 1, \dots, t_s - 1, d_1, \dots, d_r)$  es una sucesión gráfica.

Este teorema conduce a un algoritmo muy sencillo que detecta si una sucesión es o no es gráfica, pero existen otras caracterizaciones de las sucesiones gráficas.

**Teorema (Erdős-Gallai)**

La sucesión  $(d_1, \dots, d_n)$  es gráfica si y solo si la suma es par y para cada  $r \leq n - 1$  se cumple que

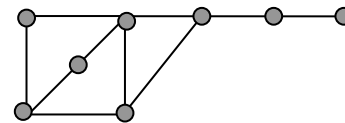
$$\sum_{i=1}^r d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^n \min(r, d_i)$$

*¿Qué condición debe cumplir una sucesión gráfica para corresponder a un grafo bipartido? ¿y a un árbol? ¿y a un grafo conexo?*

**Conjunto de grados**

El conjunto de los grados de un grafo (sin tener en cuenta la multiplicidad) se designa por  $D(G)$

En el grafo de la figura,  $D(G) = \{1, 2, 3, 4\}$



*¿Cuáles son los conjuntos que corresponden a conjuntos de grados de grafos simples? ¿Qué propiedades del grafo se pueden obtener a partir del conjunto de grados?*

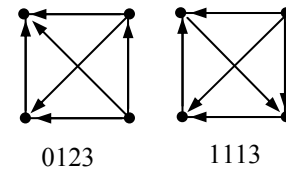
En el trabajo se demostrarán las caracterizaciones de las sucesiones gráficas y se responderá a las preguntas planteadas en cursiva.

Para digrafos también existen resultados caracterizando las sucesiones doble que corresponden a digrafos simples pero son complicados de manejar. En el trabajo se deben estudiar las sucesiones de grados en un tipo especial de digrafos: los campeonatos.

Un **campeonato** es una orientación de un grafo completo. En otras palabras, un campeonato es un grafo completo en el que cada arista ha sido transformada en un arco.

En un campeonato  $T$ , llamamos **puntuación** de un vértice  $v$  a su grado de salida  $d^+(v)$ . A la sucesión no decreciente formada por las puntuaciones de todos los vértices del campeonato  $T$  se le denomina **sucesión de puntuaciones de  $T$** .

En la figura hay dos campeonatos con su puntuación



*¿Cuáles son las sucesiones que corresponden a campeonatos?*

**Referencias**

G. Chartrand, L. Lesniak: “Graphs and Digraphs”. CRC Press, 2000.  
 G. Hernández: “Grafos: Teoría y Algoritmos”. Publicaciones Facultad de Informática. UPM, 2014