RELACIONES DE ORDEN

Gregorio Hernández

UPM

Matemática Discreta I

RELACIONES DE ORDEN

Una relación R en un conjunto A es una **relación de ORDEN** si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Un conjunto ordenado es un par (A, R) donde R es un orden en A

(N, ≤), (N, |) | es la relación de divisibilidad

a, b son elementos **comparables** de (A,R) si aRb ó bRa

4 y 7 son comparables en (N, ≤) pero NO en (N, |)

Orden total

Un orden es total si dos elementos cualesquiera son comparables

(N, ≤) es un **conjunto totalmente ordenado**
La divisibilidad en N es un orden **parcial**

ORDEN Y PRODUCTO CARTESIANO

Si (A,R) y (B,S) son dos conjuntos ordenados, se definen en $A \times B$ dos relaciones de orden

Orden producto: R×S

(a,b) R×S (a',b') si aRa' y bSb'

Ejemplo: $(N, \leq) \times (N, \leq)$

(2,5) R×S (6,8) porque $2 \leq 6$ y $5 \leq 8$

Pero (2,5) y (7,3) **NO** son comparables

orden parcial

Orden lexicográfico: Lex(R,S)

(a,b) Lex (a',b') si aRa' o si a=a' y bSb'

Ejemplo: $(N, \leq)$ Lex $(N, \leq)$

(2,5) Lex (7,3) porque $2 \leq 7$

(2,5) Lex (2,7) porque 2=2 y $5 \leq 7$

orden total

ELEMENTOS DISTINGUIDOS

(A,R) es un conjunto ordenado, $S \subset A$

DENTRO DE S

Máximo

$a \in S$ es máximo en S si $x \leq a$ para todo $x \in S$

Mínimo

$m \in S$ es mínimo en S si $m \leq x$ para todo $x \in S$

Maximal

$a \in S$ es maximal en S si no existe z en S, $z \neq a$, tal que $a \leq z$

Minimal

$m \in S$ es minimal en S si no existe z en S, $z \neq a$, tal que $z \leq m$

ELEMENTOS DISTINGUIDOS

$(D_{36}, |)$ $S = \{2, 3, 12, 24\}$

24 es el máximo de S
2 y 3 son elementos minimales de S

$(D_{36}, \leq)$ $S = \{2, 3, 12, 24\}$

24 es el máximo de S
2 es el mínimo S

Si el orden es total, en S sólo puede haber un minimal que además será el mínimo.

ELEMENTOS DISTINGUIDOS

(A,R) es un conjunto ordenado, $S \subset A$

Cota superior

$c \in A$ es cota superior de S si $x \leq c$ para todo $x \in S$

Cota inferior

$b \in A$ es cota inferior de S si $b \leq x$ para todo $x \in S$

Supremo (Extremo superior)

$s \in A$ es el supremo de S si es cota superior de S y para toda cota superior c se cumple que $s \leq c$

Ínfimo (Extremo inferior)

$j \in A$ es el ínfimo de S si es cota inferior de S y para toda cota inferior b se cumple que $b \leq j$

ELEMENTOS DISTINGUIDOS

$(D_{60}, |)$ $S = \{6, 12, 15, 30\}$

Cotas inferiores de S, $\{1, 2, 3\}$
No existe inf(S)

Cotas superiores de S $\{60\}$
$\sup(S) = 60$

$(D_{48}, |)$ $S = \{6, 8, 12, 24\}$

Cotas inferiores de S, $\{1, 2\}$
$\inf(S) = 2$

Cotas superiores de S $\{24, 48\}$
$\sup(S) = 24 = \max(S)$

ELEMENTOS DISTINGUIDOS

Teorema

Todo conjunto ordenado finito posee al menos un elemento maximal y uno minimal

Dem:

Sea $(A,\leq)$ un conjunto ordenado. Sea a_1 un elemento de A
Si a_1 es maximal ya está. Si a_1 no es maximal, existe $a_2 \in A$ tal que $a_1 \leq a_2$. Si a_2 es maximal hemos terminado. En caso contrario, se repite el razonamiento y se obtiene una sucesión de elementos de A

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ \ldots$$

Como A es finito la sucesión necesariamente alcanza un elemento maximal

ELEMENTOS DISTINGUIDOS

Teorema

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado, $S \subset A$
Si existe el máximo (o mínimo) de S es único

Dem:
Si m, m' son máximos de S entonces $m \leq m'$ por ser m' máximo y $m' \leq m$ por ser m máximo. Por la propiedad antisimétrica $m = m'$

Teorema

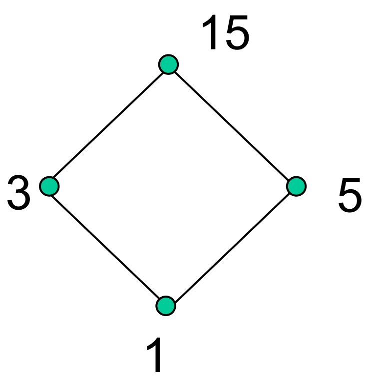
Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado, $S \subset A$
Si existe el supremo (o ínfimo) de S es único

DIAGRAMA DE HASSE

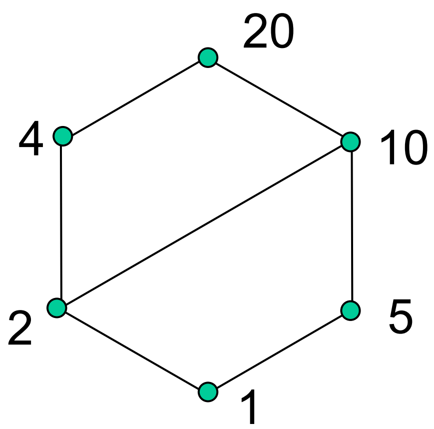
(A,R) conjunto ordenado finito.

Se representan los elementos por puntos. Si aRb, se representa a por debajo de b y se unen por un segmento. Se suprimen los segmentos que corresponden a la propiedad transitiva, es decir, si aRb y bRc se suprime el segmento correspondiente a aRc

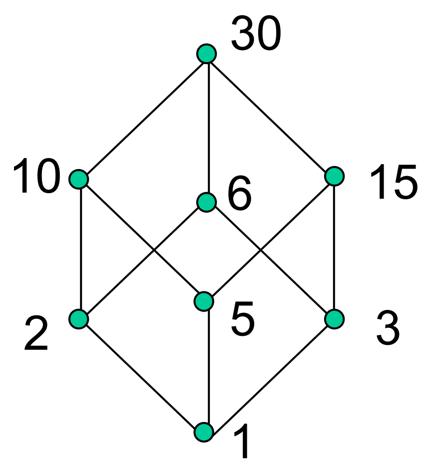
$D_{15}=\{1,3,5,15\}$ $D_{20}=\{1,2,4,5,10,20\}$ $D_{30}=\{1,2,3,5,6,10,15,20\}$



$(D_{15},|)$



$(D_{20},|)$



$(D_{30},|)$

ORDENACIÓN TOPOLÓGICA

Teorema

Si $(A, \leq)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado entonces existe un orden total $\leq'$ en A que contiene al orden parcial $\leq$

Dem:

Se elige un minimal a_1 en A. A continuación se elige un minimal a_2 en $A - \{a_1\}$. Después se elige un minimal a_3 en $A - \{a_1, a_2\}$

Repitiendo el proceso se obtiene en un número finito de pasos un orden $\leq'$ para los elementos de A

$$a_1 \leq' a_2 \leq' a_3 \leq' \ldots \leq' a_n \qquad n = \mathrm{card}(A)$$

Falta comprobar que el nuevo orden es total y contiene al dado

Si $a \leq b$, entonces a se elige antes que b en el proceso. Si no es así, al elegir b en el paso i, b es minimal en $A - \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} = A^*$ con $a \in A^*$

Luego por b minimal, sería $b \leq a$.

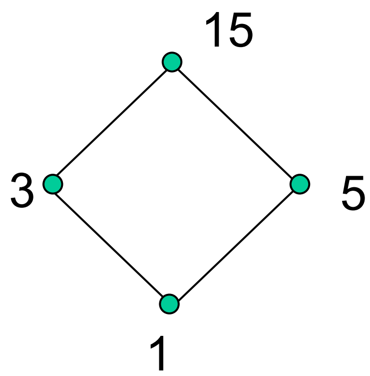
Por tanto, a se elige antes que b y $a \leq' b$

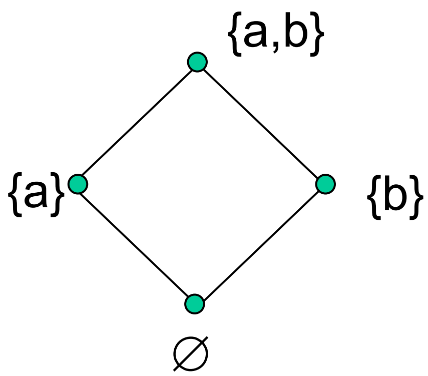
ISOMORFISMO DE CONJUNTOS ORDENADOS

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq')$ son conjuntos ordenados, se dice que $f: A\to B$ **conserva el orden** si $\forall a, b \in A$, $a \leq b$ implica que $f(a) \leq' f(b)$

$f: A\to B$ es **isomorfismo** de conjuntos ordenados si f es biyección y tanto f como f^{-1} conservan el orden.

$(D_{15}, |)$ $(P(\{a,b\}),\subset)$





$f: D_{15} \to P$

$1 \to \emptyset$

$3 \to \{a\}$

$5 \to \{b\}$

$15 \to \{a,b\}$