RELACIONES
CONJUNTOS

Gregorio Hernández

UPM

Matemática Discreta I

Producto cartesiano de conjuntos

A, B conjuntos
$A \times B = \{(a,b) \ / \ a \in A, \ b \in B\}$

$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^n$

RELACIONES

Una relación R de un conjunto A en otro B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.
Si B = A, decimos que R es una relación en A

$(a,b) \in R$
aRb

Ejemplos
Divisibilidad en **N**, $R = \{(x,y) \ / \ y = x^2\}$

Dominio de una relación
$Dom(R) = \{a \in A \ / \text{ existe } b \in B \text{ con } (a,b) \in R \}$

Imagen de una relación
$Im(R) = \{b \in B \ / \text{ existe } a \in A \text{ con } (a,b) \in R \}$

RELACIONES

Propiedades

Dada una relación R en A, se tiene que:

(1) R es reflexiva si para todo $a \in A$, aRa
(2) R es simétrica si $aRb \Rightarrow bRa$
(3) R es antisimétrica $aRb, bRa \Rightarrow a = b$
(4) R es transitiva si $aRb, bRc \Rightarrow aRc$

Matriz de una relación

Dados $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ conjuntos finitos no vacíos, y dada R relación de A en B, llamamos matriz de la relación R a la matriz $M_R \in \mathcal{M}_{m\times n}$ dada por

$$M_R = (m_{ij}) \text{ donde } m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (a_i, b_j) \in R \\ 0 \text{ si } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Ejemplo. La matriz de la relación de divisibilidad en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es

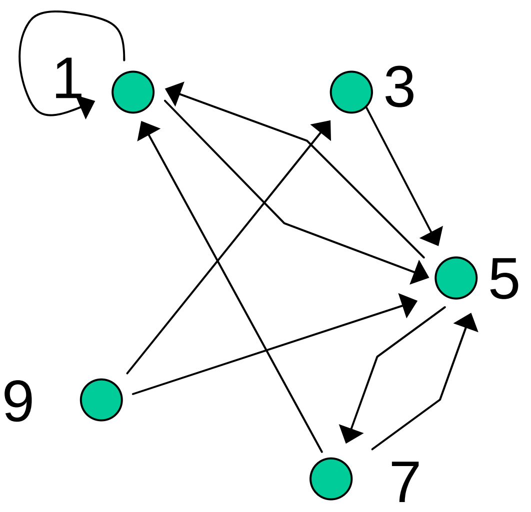
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

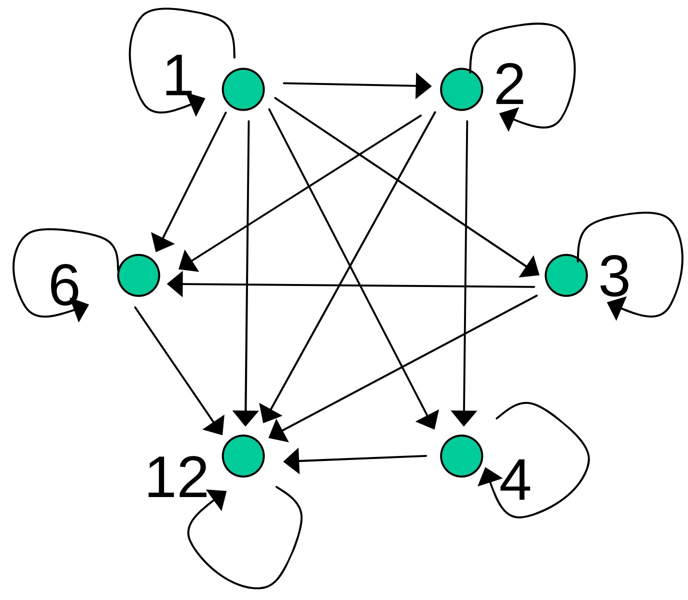
Se llama matriz booleana a toda matriz cuyos elementos son ceros o unos. Por tanto, la matriz de una relación es una matriz booleana.

Digrafo de una relación

A = {1,3,5,7,9}
R = {(1,1),(1,5),(3,5), (5,1), (5,7),(7,1),(7,5),(9,3),(9,5)}

D_{12} = {1,2,3,4,6,12},
R relación de divisibilidad en D_{12}
xRy   si x divide a y





Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R en un conjunto A es una relación de equivalencia si y solo si es reflexiva , simétrica y transitiva .
Dada R relación de equivalencia en A y dado $a \in A$ se llama clase de a al conjunto

$$[a] = \{b \in A \mid bRa\}.$$

Cualquier elemento de $[a]$ es un representante de la clase.
Se llama conjunto cociente de A respecto de R al conjunto formado por las clases de equivalencia, esto es,

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Ejemplos de relaciones de equivalencia

Ejemplos

i) Dado P conjunto de rectas del plano y $rRs \Leftrightarrow r \| s$, R es relación de equivalencia y para toda $r \in P$ se tiene que $[r] = \{s \in P \mid r \| s\}$.

ii) Dado P conjunto de rectas del plano y $rRs \Leftrightarrow r \perp s$, R no es relación de equivalencia pues no es reflexiva ni transitiva.

iii) Dado $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $aRb \Leftrightarrow a + \dfrac{1}{a} = b + \dfrac{1}{b}$, se tiene que

$$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \Leftrightarrow a - b = \frac{a-b}{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ ab = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Entonces R es relación de equivalencia y para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que $[a] = \left\{a, \dfrac{1}{a}\right\}$.

Propiedades de las relaciones de equivalencia

Propiedades

Dada $R \subset A \times A$ relación de equivalencia, se tiene que: (a) $[a] \neq \emptyset$, para todo $a \in A$, (b) $[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$, (c) $[a] \neq [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ (las clases son disjuntas).

Definición

Una partición en un conjunto no vacío A es una familia de subconjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos de A tales que su unión es A.

Teorema

Si $R \subset A \times A$ es una relación de equivalencia en A, entonces el conjunto cociente A/R es una partición de A.

Teorema

Si $P = \{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de A, entonces existe una relación de equivalencia R_P en A tal que el conjunto cociente $A/R_P = P$.

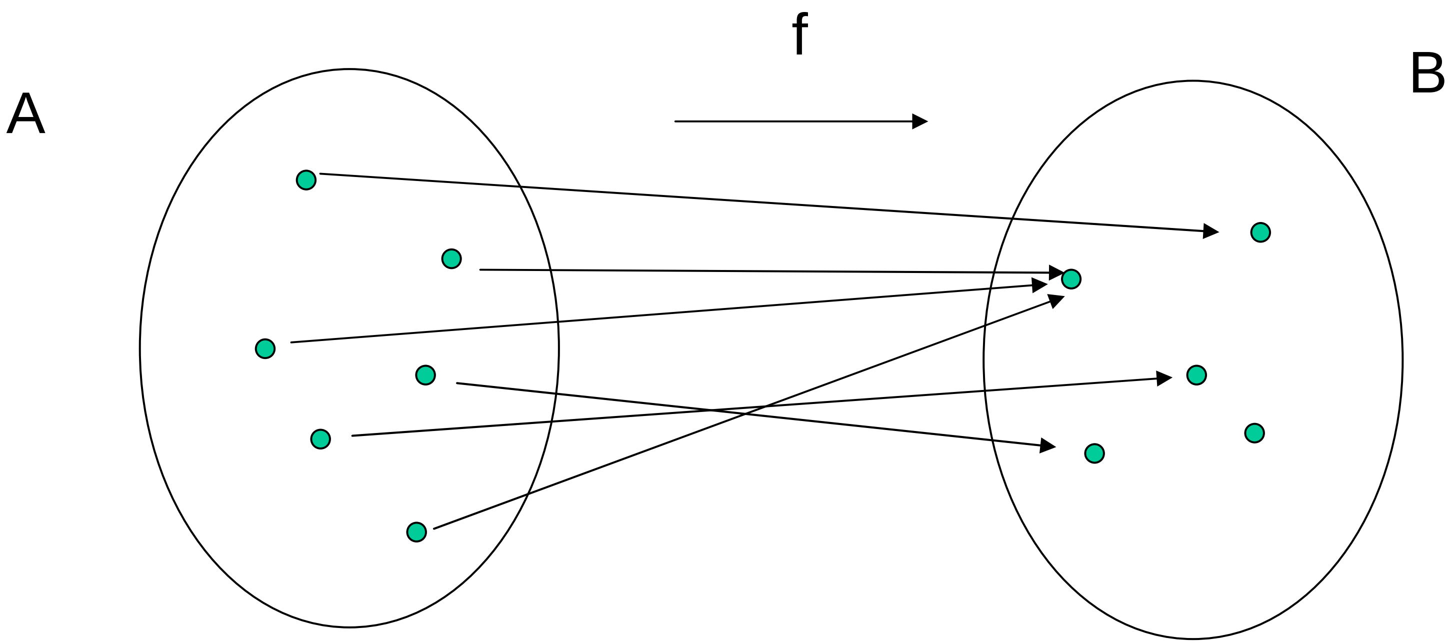
APLICACIONES

Una aplicación $f: A \rightarrow B$ es un subconjunto de $A \times B$ (una relación de A en B) tal que:

(1) Para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ con $(a,b) \in f$

(2) $Dom(f) = A$

$\boxed{f(a) = b}$



APLICACIONES

Una aplicación $f: A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$ (una relación de A en B) tal que:

(1) Para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ con $(a,b) \in f$

(2) $Dom(f) = A$

$\boxed{f(a) = b}$

Propiedades

Si $f: A \to B$ es una aplicación, X,Y son subconjuntos de A, entonces:

(1) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$

(2) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(3) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$

$\boxed{f(X) = \{b \in B / \text{existe } a \in X \text{ con } b = f(a)\}}$

Si M, N son subconjuntos de B

$\boxed{f^{-1}(M) = \{a \in A / f(a) \in M\}}$

(4) $M \subset N \Rightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$

(5) $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

(6) $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

Si $b \in f(X \cup Y)$ entonces existe $a \in X \cup Y$ tal que $f(a) = b$.

Como $a \in X$ ó $a \in Y$ resulta que $f(a) \in f(X)$ ó $f(a) \in f(Y)$.

En cualquier caso $b = f(a) \in f(X) \cup f(Y)$

Si $b \in f(X) \cup f(Y)$ entonces o bien $b \in f(X)$ o bien $b \in f(Y)$. En el primer caso existe $a \in X$ tal que $f(a) = b$.

En el segundo caso, existe $z \in Y$ tal que $f(z) = b$

En cualquiera de los dos casos, existe un elemento de $X \cup Y$ cuya imagen es b. Por tanto, $b \in f(X \cup Y)$

$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$

Si $b \in f(X \cap Y)$ entonces existe $a \in X \cap Y$ tal que $f(a) = b$
Como $a \in X$, $a \in Y$, resulta que $f(a) \in f(X)$ y $f(a) \in f(Y)$,
luego $b \in f(X) \cap f(Y)$

No se verifica, en general, la igualdad entre los conjuntos
$f(X \cap Y)$ y $f(X) \cap f(Y)$

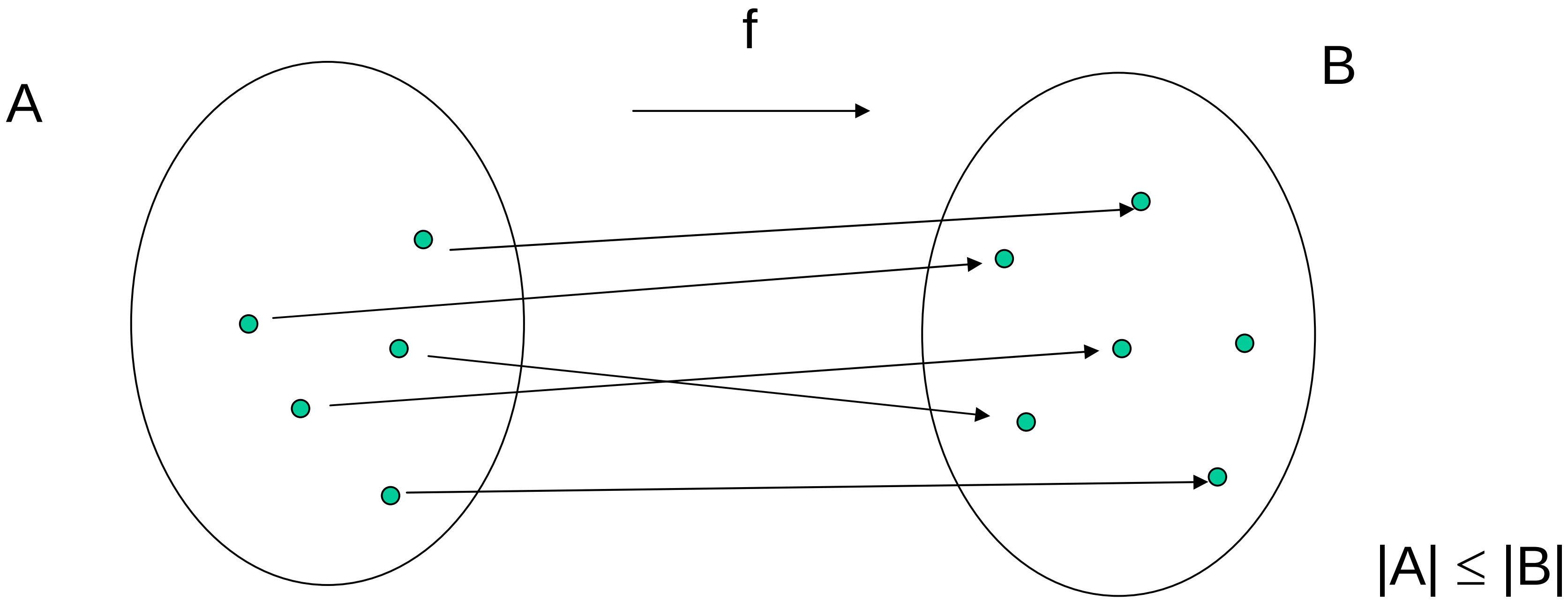
Ejemplo
$A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2\}$, $f: A \to B$ definida por $f(a) = f(b) = 1$, $f(c) = 2$.
Considerar $X=\{a,c\}$, $Y=\{b,c\}$

TIPOS DE APLICACIONES

Una aplicación f: $A \rightarrow B$ es

INYECTIVA

si elementos distintos de A tienen imágenes distintas, es decir, si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$

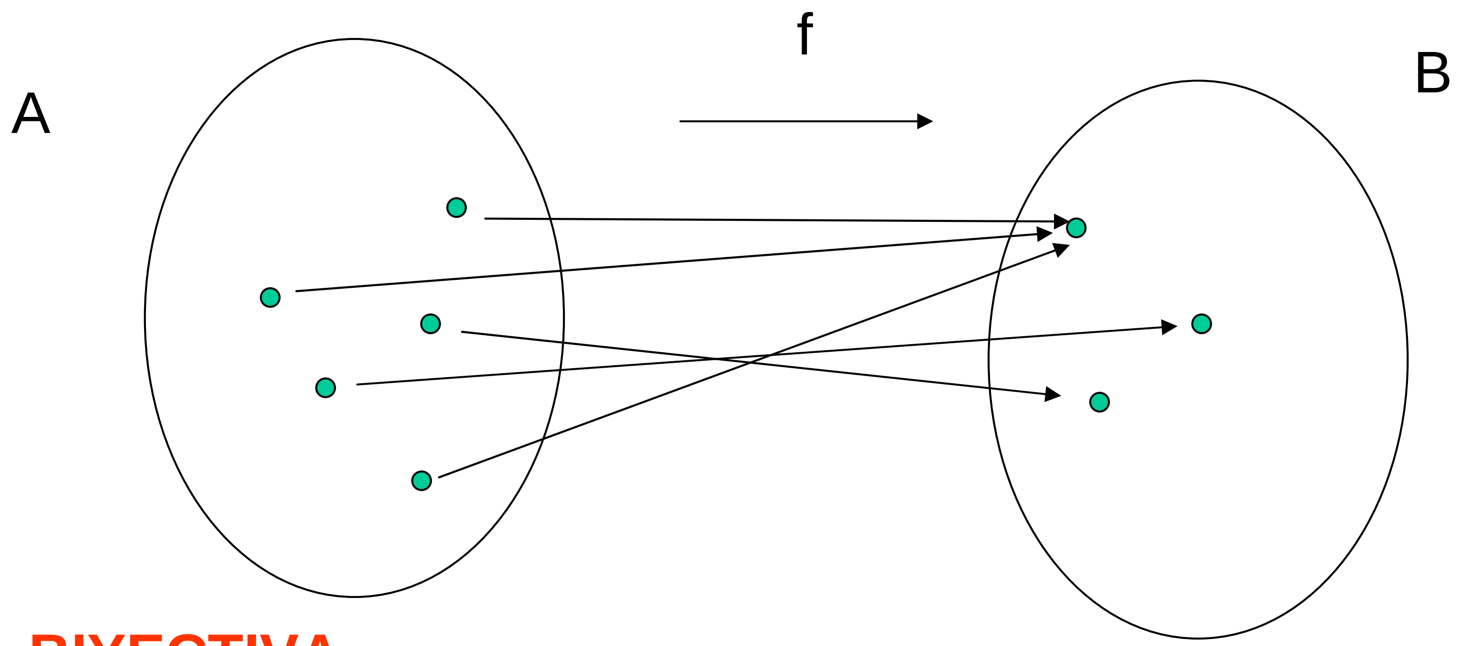


TIPOS DE APLICACIONES

Una aplicación $f: A \to B$ es

SUPRAYECTIVA

si $Im(f) = B$, es decir, si $\forall\, b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$



$|A| \geq |B|$

BIYECTIVA

si es inyectiva y suprayectiva

Proposición

Una aplicación $f: A \to B$ es biyectiva $\Leftrightarrow$ existe otra aplicación $g: B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$

Ejercicio

Si $f: A \to B$ es una aplicación entre conjuntos finitos del mismo cardinal, entonces

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es suprayectiva}$$

Dem.:

$\Rightarrow$) En una aplicación inyectiva $|Im(f)| = |Dom(f)| = |A|$
Como $|A|= |B|$, resulta $Im(f) = B$, luego f es suprayectiva

$\Leftarrow$) Por ser f suprayectiva, $Im(f) = B$, luego $|Im(f)| = |B| = |A|$
luego f es inyectiva