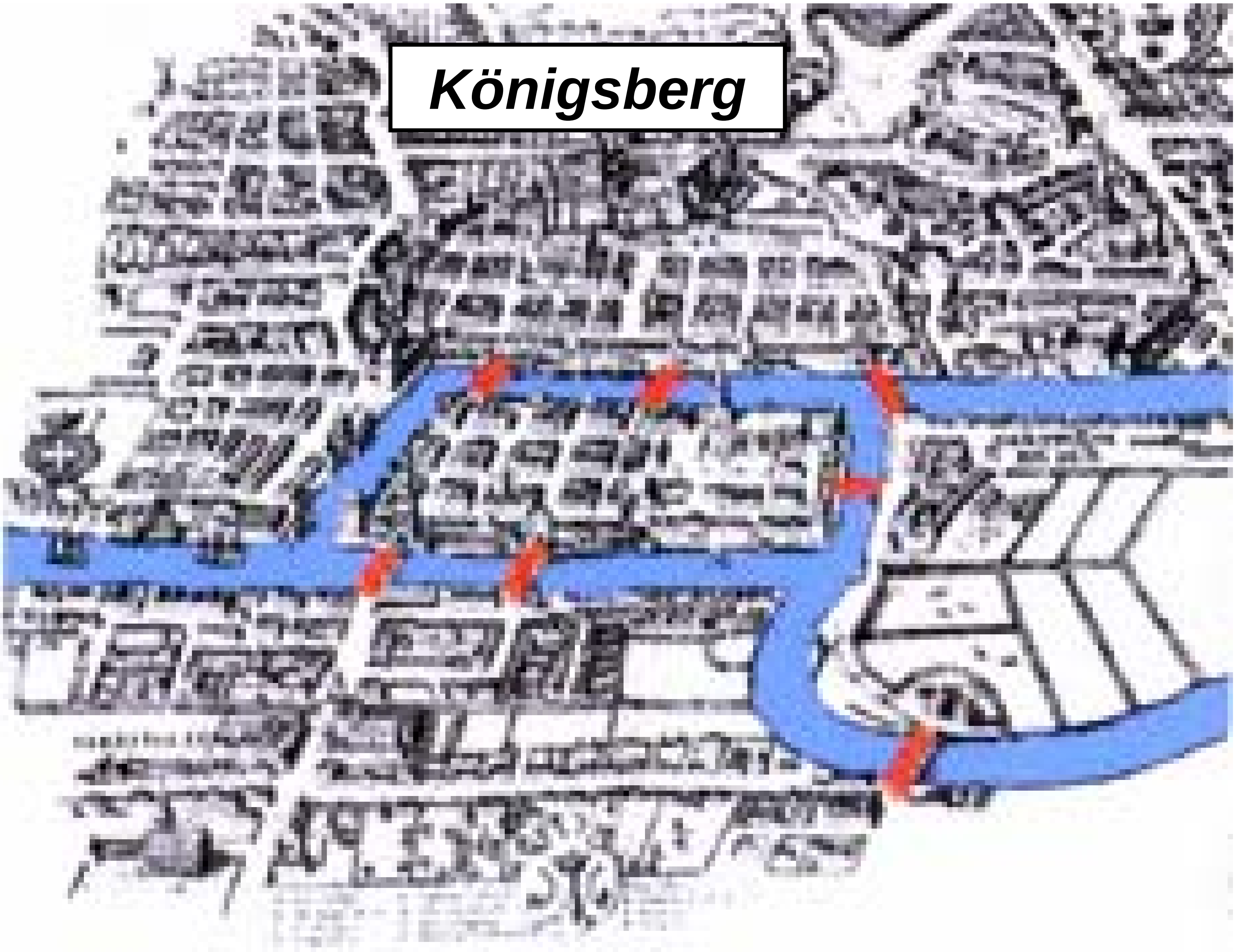
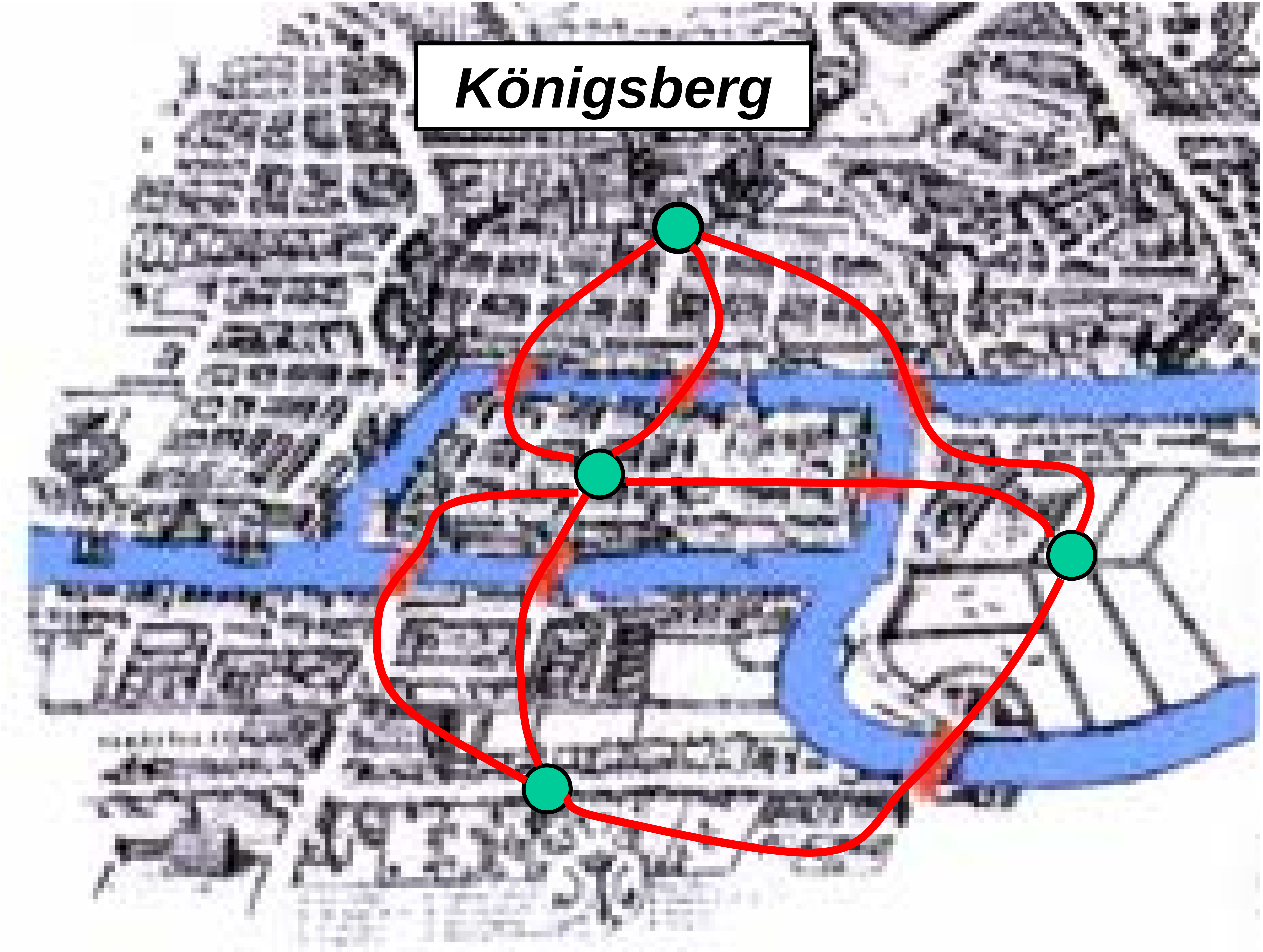
Grafos
(una pincelada)

Gregorio Hernández

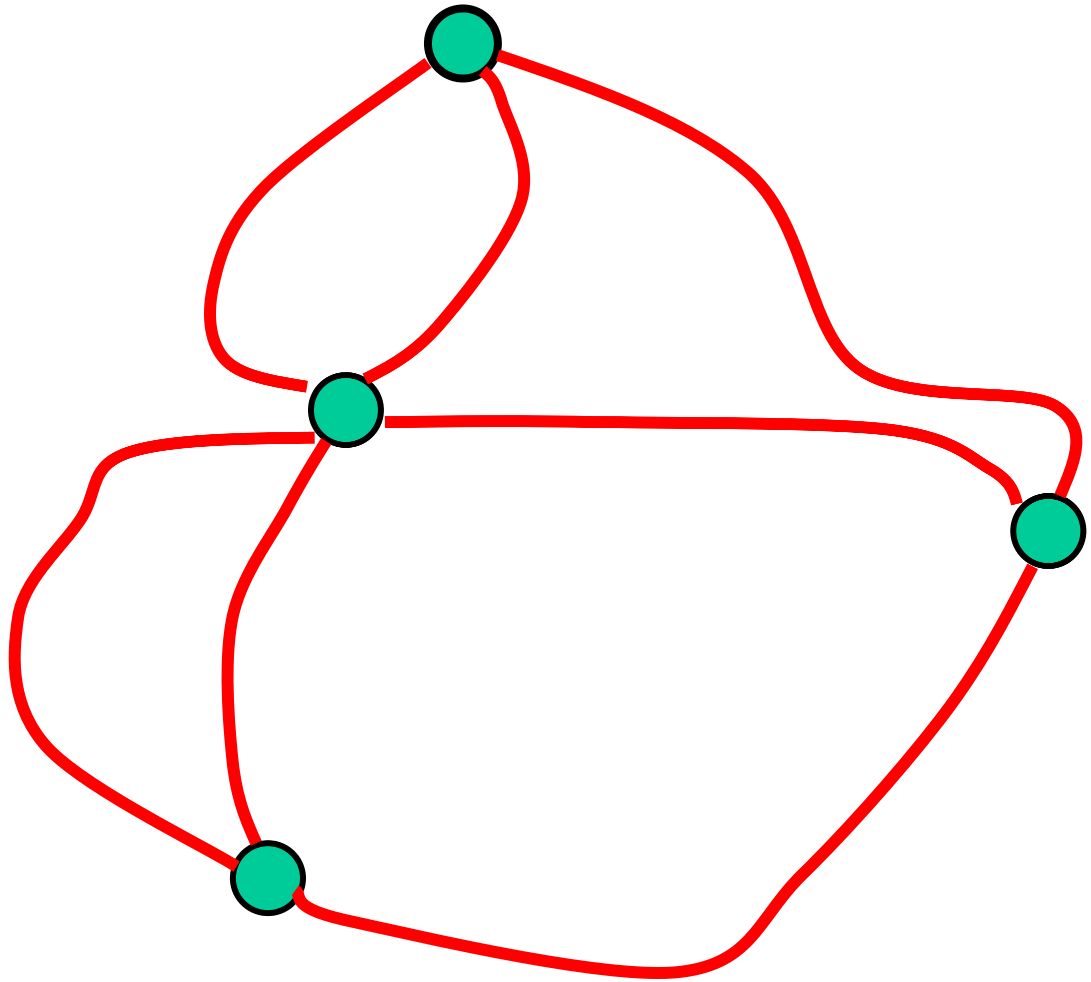
UPM

Matemática Discreta I

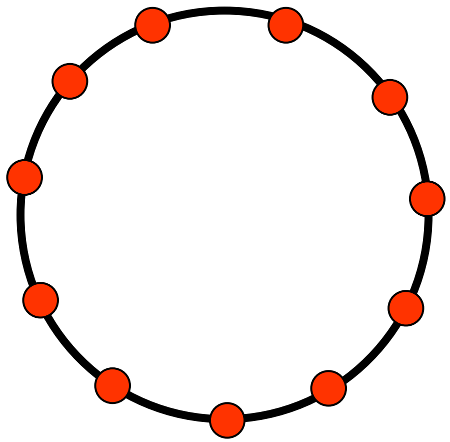

Königsberg

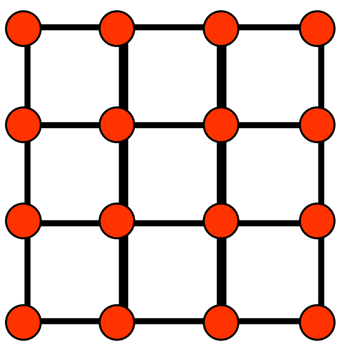

Königsberg

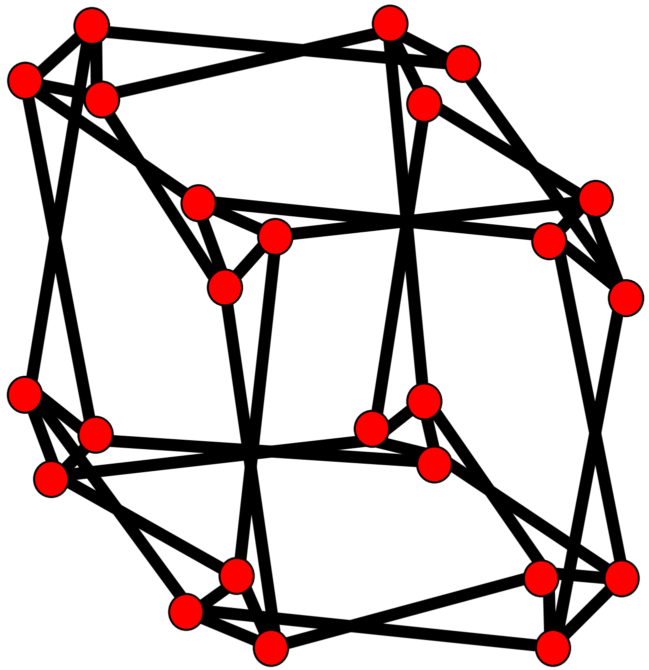
Euler 1736

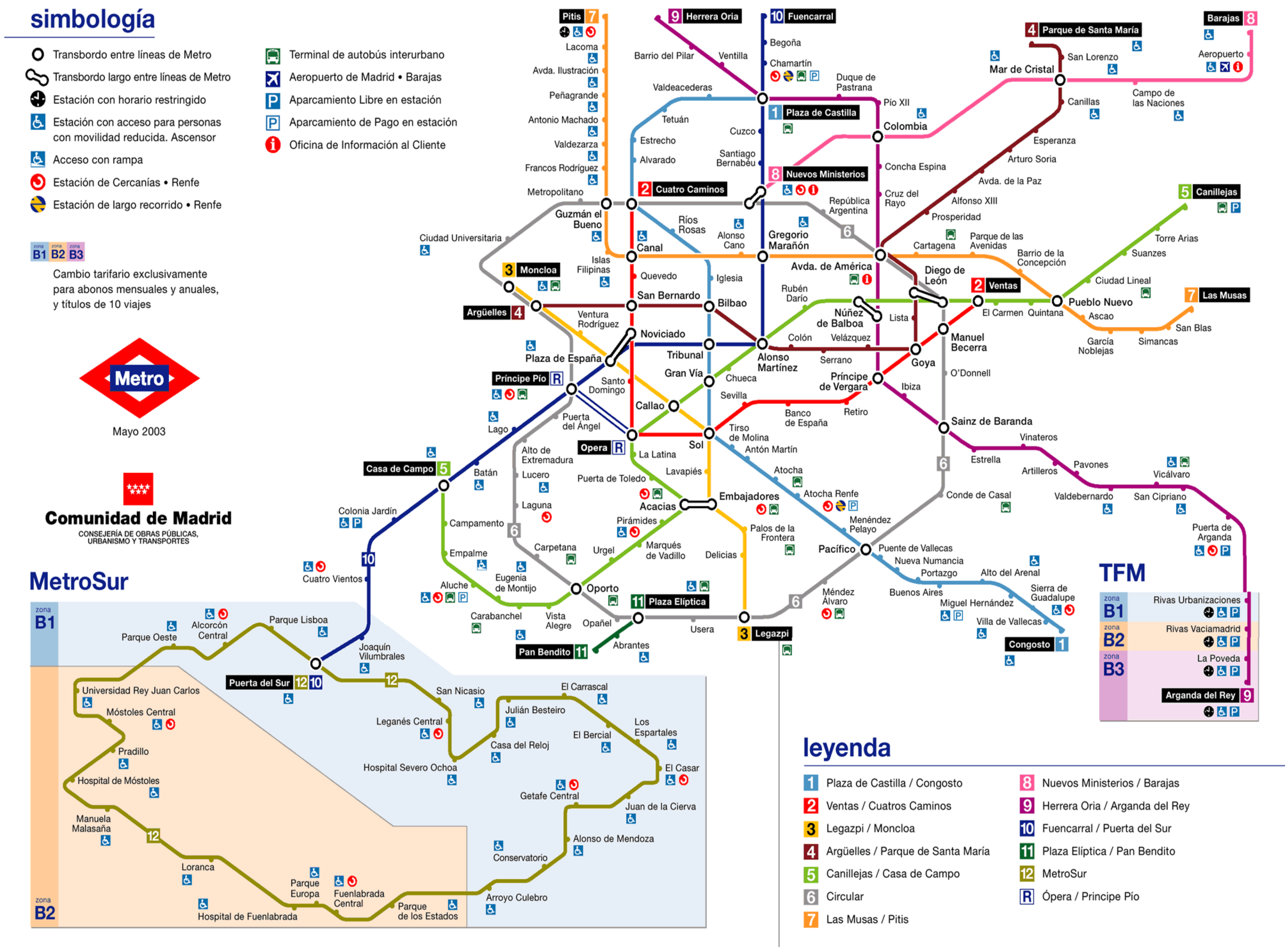


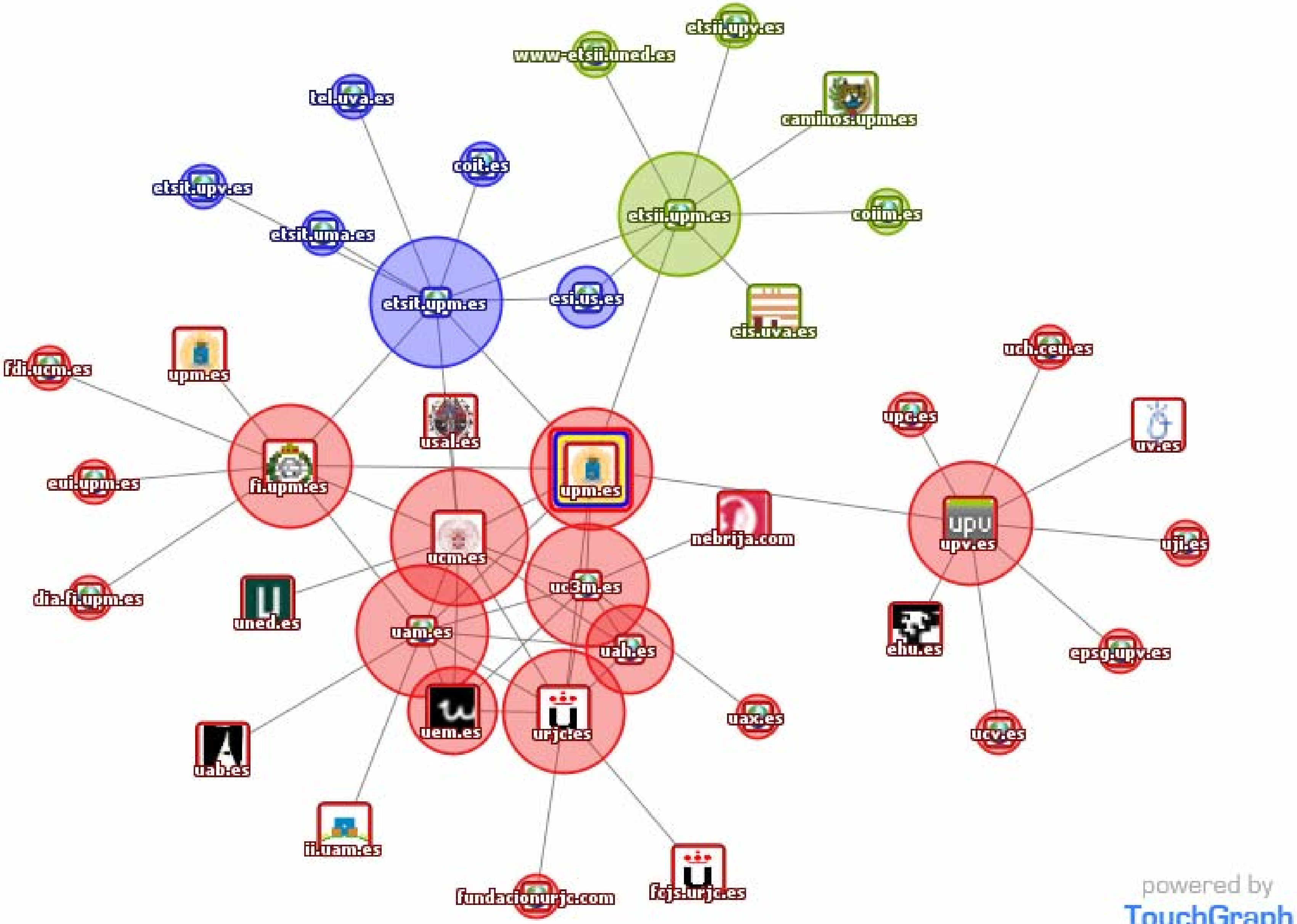
REDES DE ORDENADORES



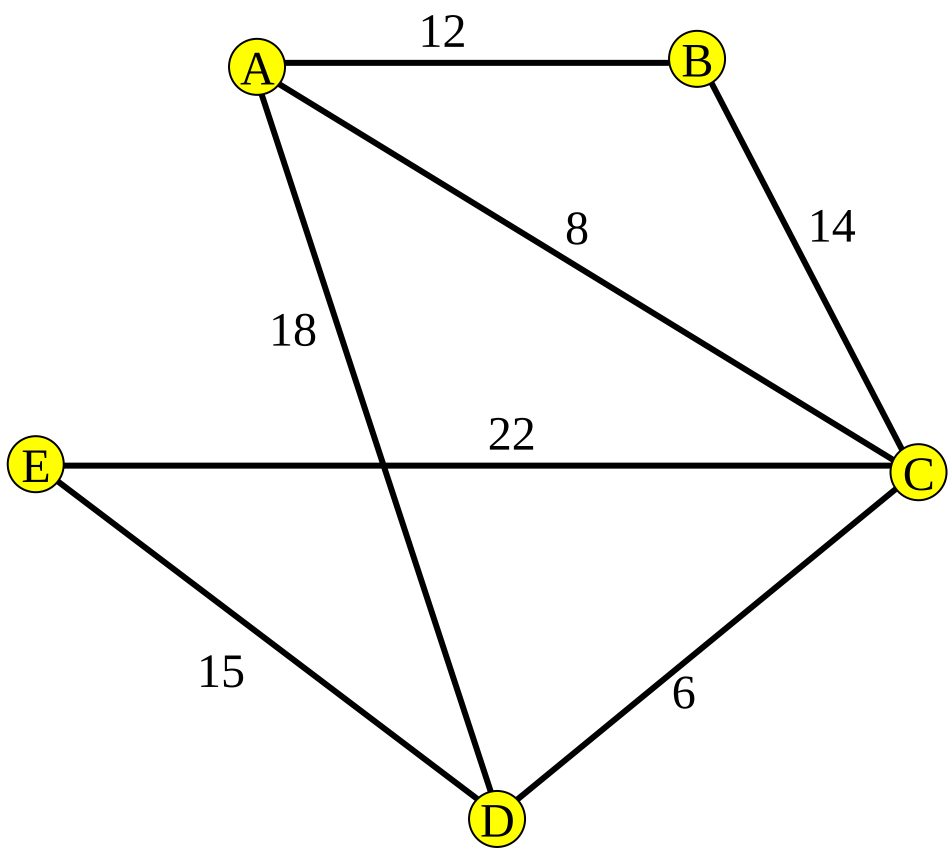





simbología
Transbordo entre líneas de Metro
Transbordo largo entre líneas de Metro
Estación con horario restringido
Estación con acceso para personas con movilidad reducida. Ascensor
Acceso con rampa
Estación de Cercanías • Renfe
Estación de largo recorrido • Renfe
Terminal de autobús interurbano
Aeropuerto de Madrid • Barajas
Aparcamiento Libre en estación
Aparcamiento de Pago en estación
Oficina de Información al Cliente
zona B1 zona B2 zona B3
Cambio tarifario exclusivamente para abonos mensuales y anuales, y títulos de 10 viajes
Metro
Mayo 2003
Comunidad de Madrid
CONSEJERÍA DE OBRAS PÚBLICAS, URBANISMO Y TRANSPORTES
MetroSur
zona B1
zona B2
Pitis 7
Lacoma
Avda. Ilustración
Peñagrande
Antonio Machado
Valdezarza
Francos Rodríguez
Metropolitano
Guzmán el Bueno
Ciudad Universitaria
Islas Filipinas
3 Moncloa
Argüelles 4
Ventura Rodríguez
Plaza de España
Príncipe Pío R
Lago
Casa de Campo 5
Batán
Colonia Jardín
Cuatro Vientos
Aluche
Campamento
Empalme
Eugenia de Montijo
Carabanchel
Vista Alegre
Oporto
Opañel
Abrantes
Pan Bendito 11
11 Plaza Elíptica
Usera
3 Legazpi
9 Herrera Oria
Barrio del Pilar
Ventilla
Valdeacederas
Tetuán
Estrecho
Alvarado
Cuzco
Santiago Bernabéu
10 Fuencarral
Begoña
Chamartín
Duque de Pastrana
Pío XII
1 Plaza de Castilla
Colombia
8 Nuevos Ministerios
2 Cuatro Caminos
Ríos Rosas
Canal
Alonso Cano
Gregorio Marañón
Iglesia
Quevedo
San Bernardo
Bilbao
Noviciado
Tribunal
Gran Vía
Santo Domingo
Callao
Sol
Opera R
Puerta del Ángel
Alto de Extremadura
Lucero
Laguna
Carpetana
Urgel
Marqués de Vadillo
Pirámides
Puerta de Toledo
La Latina
Lavapiés
Acacias
Embajadores
Palos de la Frontera
Delicias
Tirso de Molina
Antón Martín
Atocha
Atocha Renfe
Menéndez Pelayo
Pacífico
Puente de Vallecas
Nueva Numancia
Portazgo
Buenos Aires
Alto del Arenal
Miguel Hernández
Sierra de Guadalupe
Villa de Vallecas
Congosto 1
Méndez Álvaro
Sevilla
Chueca
Banco de España
Retiro
Príncipe de Vergara
Serrano
Velázquez
Colón
Alonso Martínez
Rubén Darío
Núñez de Balboa
Lista
Goya
Ibiza
Manuel Becerra
O'Donnell
Sainz de Baranda
Conde de Casal
Estrella
Vinateros
Artilleros
Pavones
Valdebernardo
Vicálvaro
San Cipriano
Puerta de Arganda
Avda. de América
Diego de León
República Argentina
Cartagena
Parque de las Avenidas
Barrio de la Concepción
2 Ventas
El Carmen
Quintana
Pueblo Nuevo
Ascao
García Noblejas
Simancas
San Blas
7 Las Musas
Ciudad Lineal
Suanzes
Torre Arias
5 Canillejas
Concha Espina
Cruz del Rayo
Prosperidad
Alfonso XIII
Avda. de la Paz
Arturo Soria
Esperanza
Canillas
Mar de Cristal
4 Parque de Santa María
San Lorenzo
Campo de las Naciones
Aeropuerto
Barajas 8
TFM
zona B1 Rivas Urbanizaciones
zona B2 Rivas Vaciamadrid
zona B3 La Poveda
Arganda del Rey 9
Parque Oeste
Alcorcón Central
Parque Lisboa
Joaquín Vilumbrales
Puerta del Sur 12 10
San Nicasio
Leganés Central
Hospital Severo Ochoa
Julián Besteiro
Casa del Reloj
El Carrascal
El Bercial
Los Espartales
El Casar
Getafe Central
Juan de la Cierva
Alonso de Mendoza
Conservatorio
Arroyo Culebro
Parque de los Estados
Fuenlabrada Central
Parque Europa
Hospital de Fuenlabrada
Loranca
Manuela Malasaña
Hospital de Móstoles
Pradillo
Móstoles Central
Universidad Rey Juan Carlos
leyenda
1 Plaza de Castilla / Congosto
2 Ventas / Cuatros Caminos
3 Legazpi / Moncloa
4 Argüelles / Parque de Santa María
5 Canillejas / Casa de Campo
6 Circular
7 Las Musas / Pitis
8 Nuevos Ministerios / Barajas
9 Herrera Oria / Arganda del Rey
10 Fuencarral / Puerta del Sur
11 Plaza Elíptica / Pan Bendito
12 MetroSur
R Ópera / Principe Pío


etsii.upv.es
www-etsii.uned.es
tel.uva.es
caminos.upm.es
coit.es
etsit.upv.es
etsii.upm.es
coiim.es
etsit.uma.es
etsit.upm.es
esi.us.es
eis.uva.es
uch.ceu.es
fdi.ucm.es
upm.es
upc.es
usal.es
uv.es
eui.upm.es
fi.upm.es
upm.es
nebrija.com
upv
upv.es
uji.es
ucm.es
dia.fi.upm.es
uned.es
uc3m.es
uam.es
ehu.es
uah.es
epsg.upv.es
uem.es
urjc.es
uax.es
ucv.es
uab.es
ii.uam.es
fundacionurjc.com
fcjs.urjc.es
powered by
TouchGraph

Organización de exámenes



¡Sólo DOS días!

vértices = asignaturas

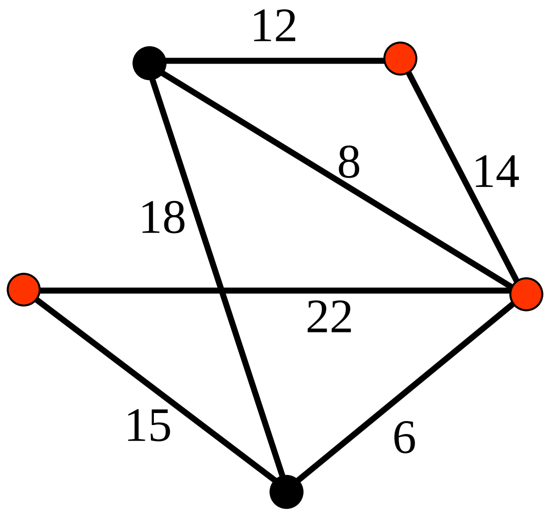
peso = alumnos comunes

Organización de exámenes

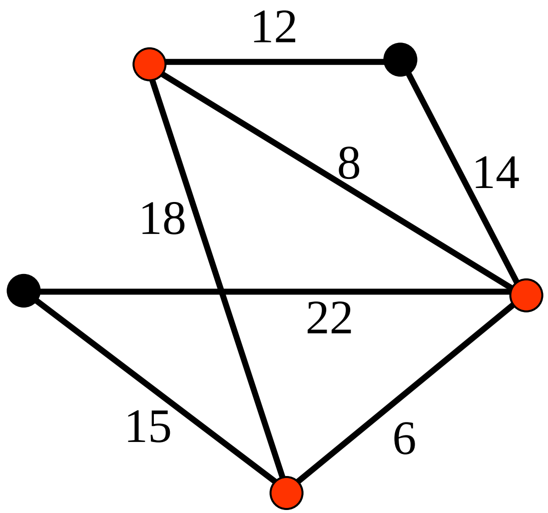
¡Sólo DOS días!

vértices = asignaturas

peso = alumnos comunes



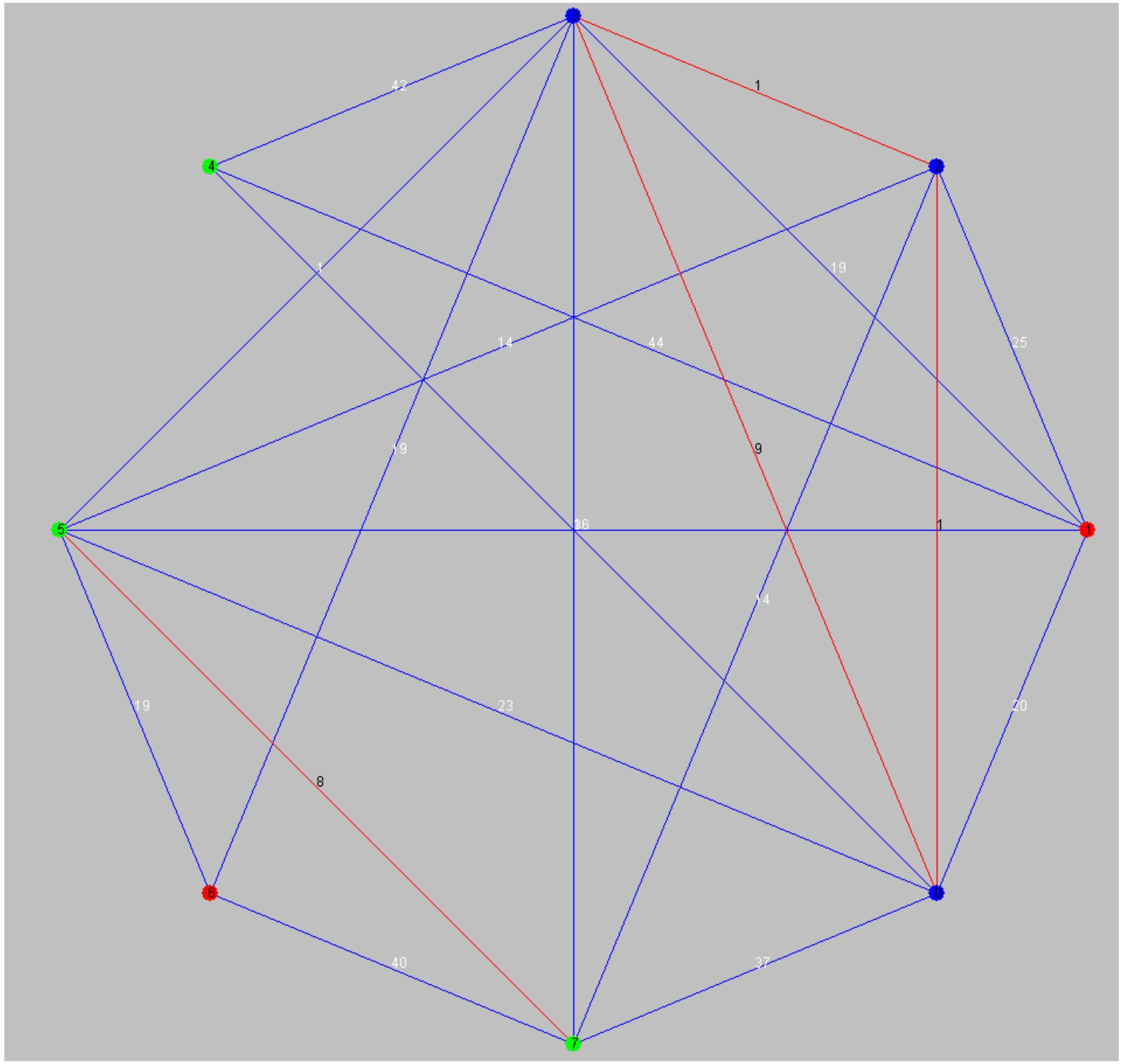
14 + 22 + 18 = 54

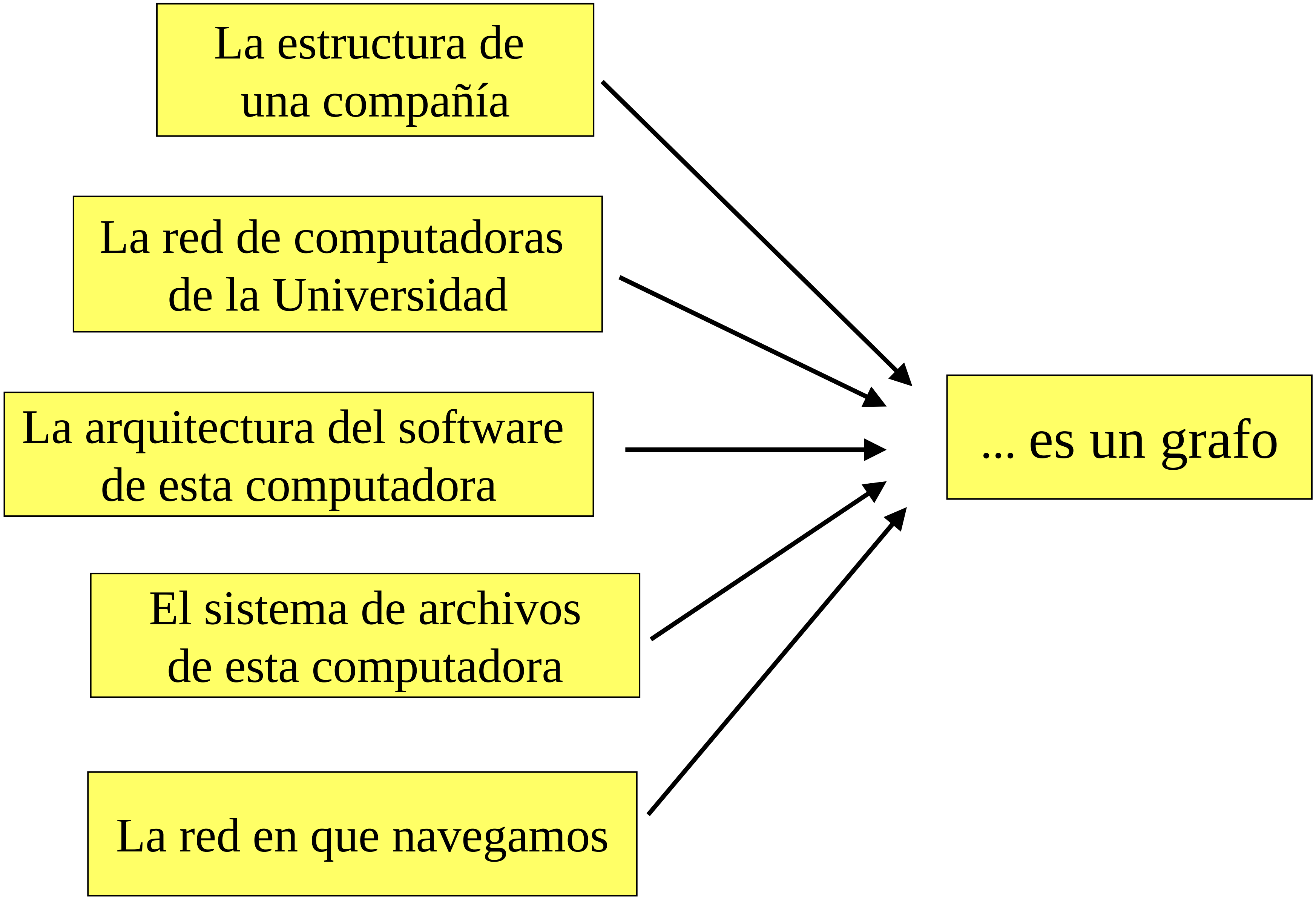


18 + 8 + 6 = 32

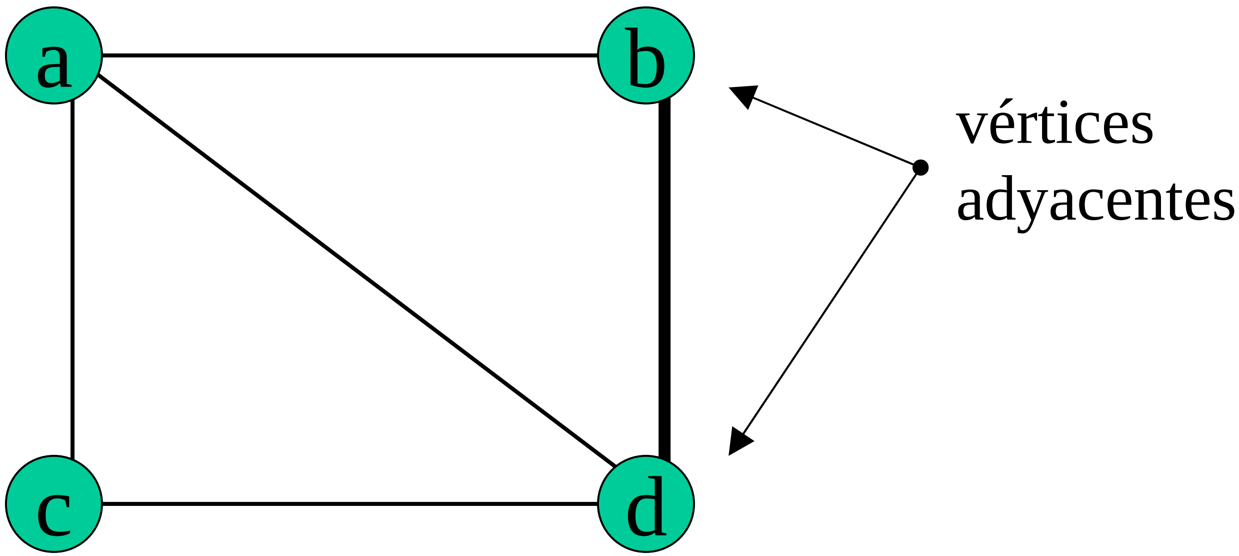
Organización de exámenes

http://www.dma.fi.upm.es/gregorio/grafos/ColorDefectiv/coloration08.jar




La estructura de una compañía
La red de computadoras de la Universidad
La arquitectura del software de esta computadora
El sistema de archivos de esta computadora
La red en que navegamos
... es un grafo

Grafo o grafo simple $G=(V,A)$

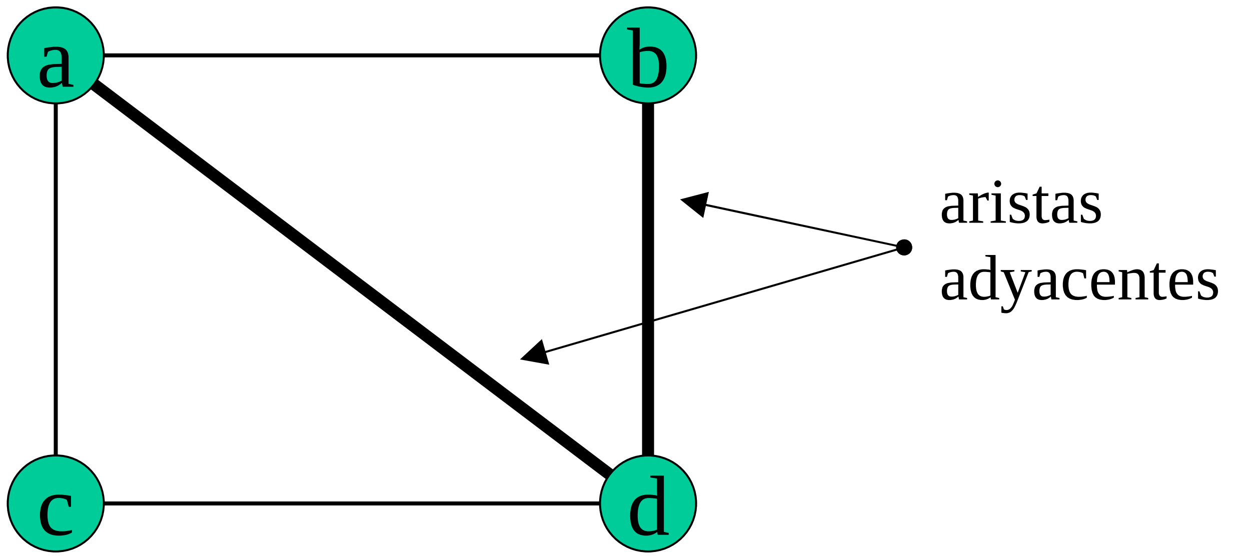


$A=\{ab, bd, cd, ac, ad\}$

$V=\{a,b,c,d\}$

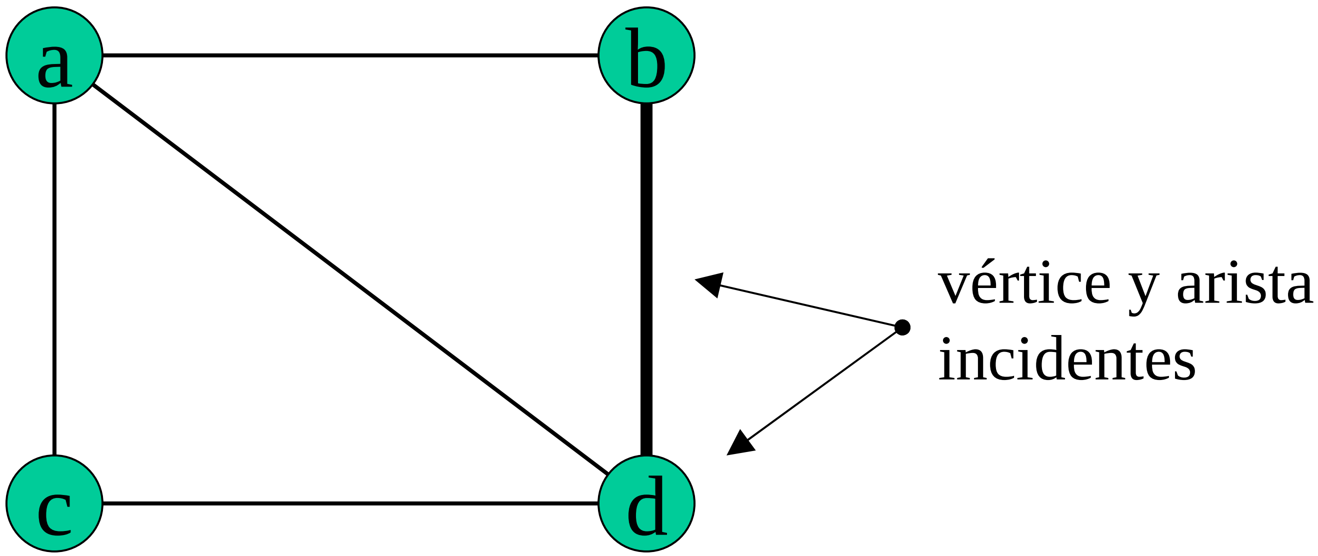
$A=\{\{a,b\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,c\},\{a,d\}\}$

Grafo o grafo simple G=(V,A)



V={a,b,c,d} A={ab, bd, cd, ac, ad}

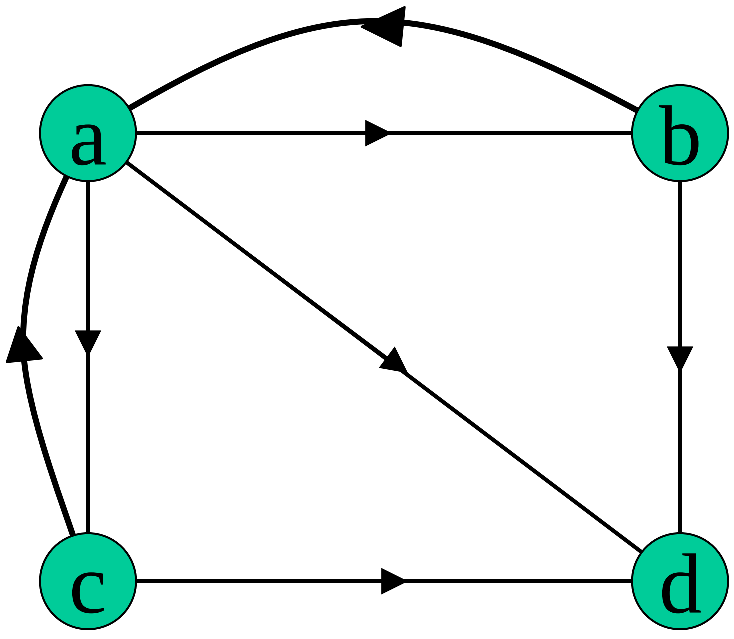
Grafo o grafo simple G=(V,A)



V={a,b,c,d}

A={ab, bd, cd, ac, ad}

- Grafo dirigido   DIGRAFO



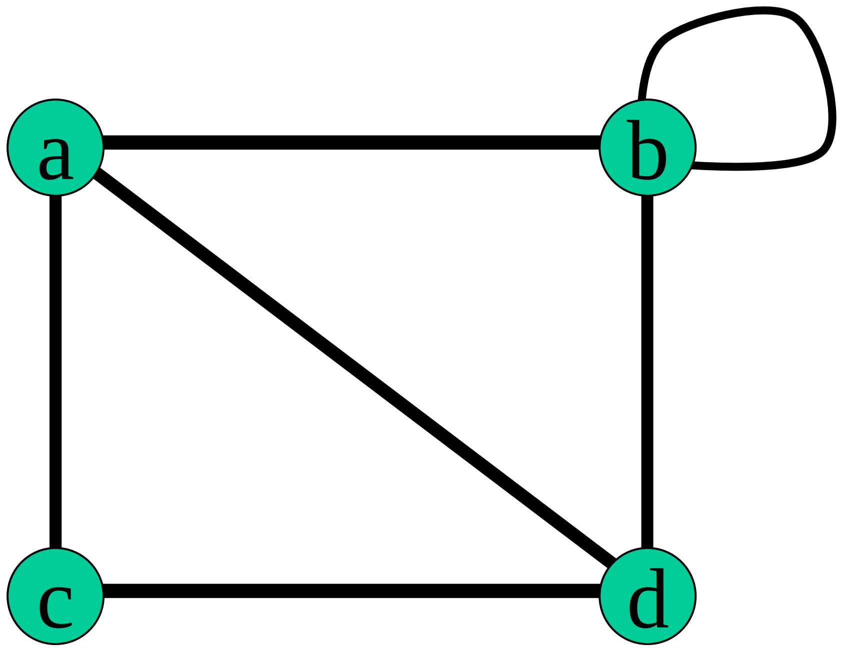
Grafo $G=(V,A)$

- Número de vértices $|V| = n$
- Número de aristas $|A| = q$
- Grado de un vértice v $d(v)$

Notación

$d(a)=3$

$d(b)=4$



$d(c)=2$

Teorema de Euler $\sum_{v \in V} d(v) = 2q$

Consecuencia

En un grafo, el nº de vértices de grado impar es siempre un nº par

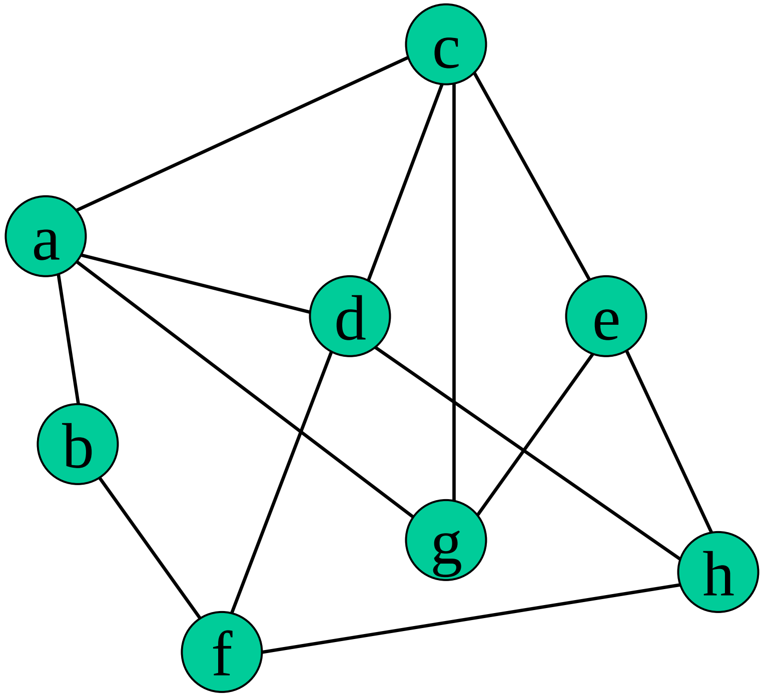
$$\sum_{v\in V} d(v) = \sum_{d(v)\ \text{impar}} d(v) + \sum_{d(v)\ \text{par}} d(v) = 2q$$

Luego el nº de sumandos impares es siempre par

Sucesión de grados

4, 2, 4, 4, 3, 3, 3, 3,

4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2

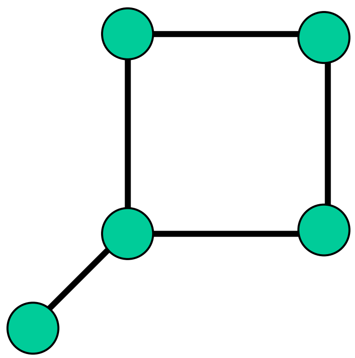


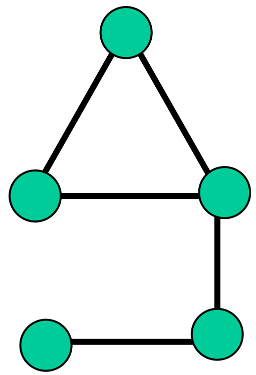
G = (V,A)

¿La sucesión determina el grafo?

3, 2, 2, 2, 1

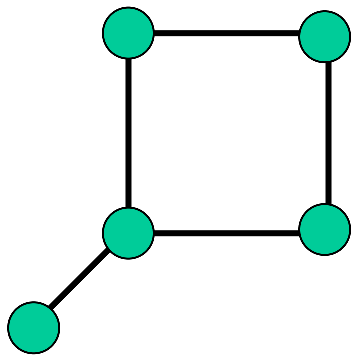
¡NO!



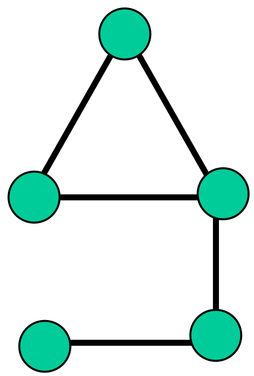


ISOMORFISMO DE GRAFOS

Si G $\approx$ G' entonces las sucesiones de grados de G y G' coinciden



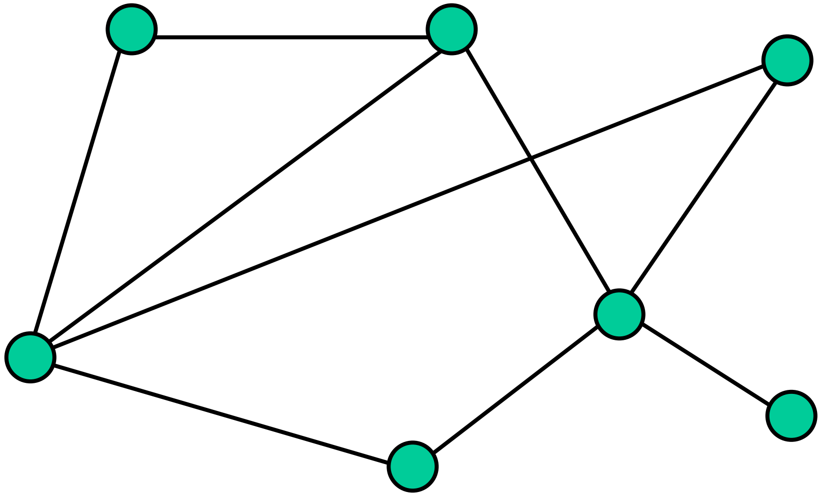
$\not\approx$



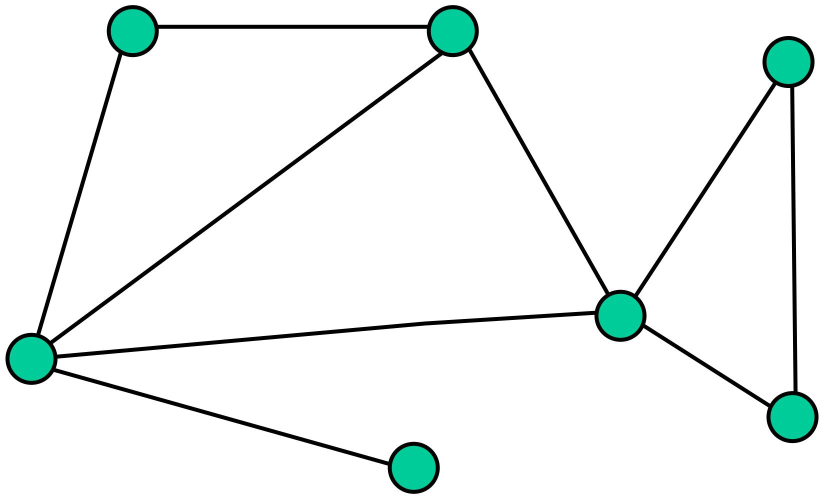
Vértice de grado 1 adyacente a vértice de grado 3

Vértice de grado 1 adyacente a vértice de grado 2

Sucesiones gráficas



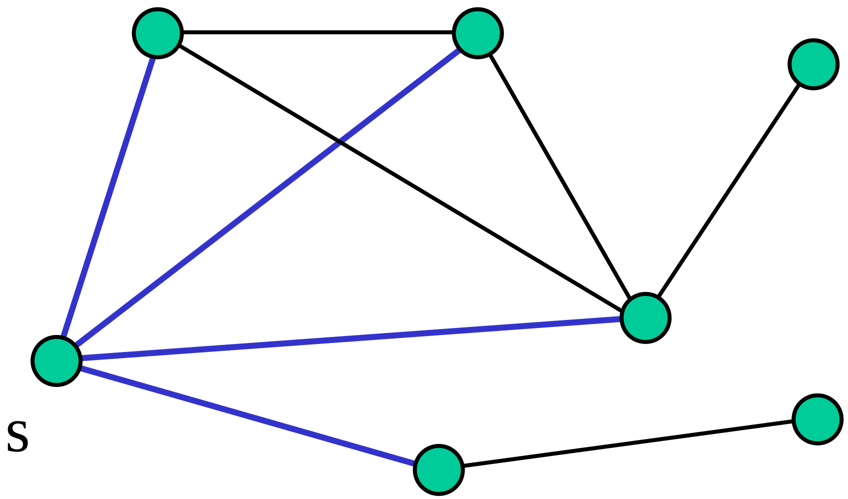
4, 4, 3, 2, 2, 2, 1



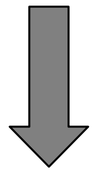
Hay grafos simples no isomorfos con la misma sucesión de grados

Condiciones para que una sucesión sea gráfica

- La suma debe ser par
- El valor máximo debe ser menor que la longitud   6, 4, 4, 2, 1, 1
- Si la sucesión $t_1 - 1, t_2 - 1, \ldots, t_s - 1, d_1, \ldots, d_k$ es gráfica, entonces también lo es la sucesión $s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, \ldots, d_k$



3, 2, 2, 1, 1, 1



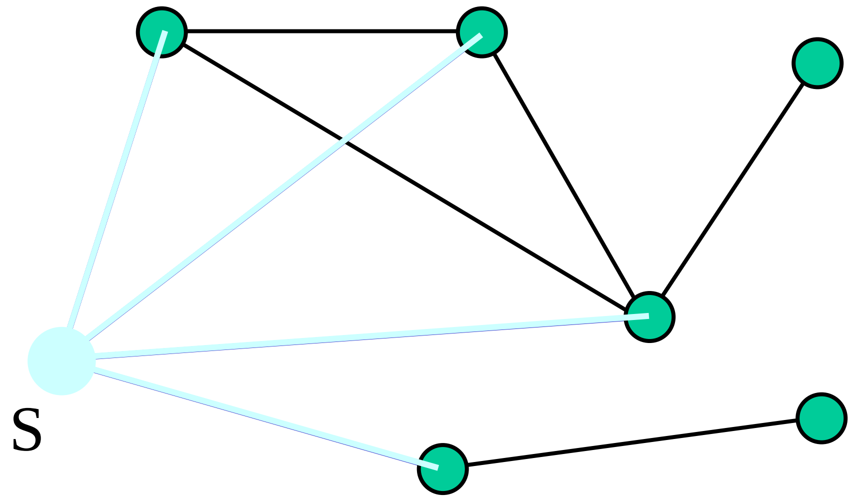
4, 4, 3, 3, 2, 1, 1

Caracterización de las sucesiones gráficas

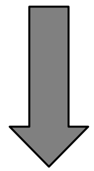
La sucesión s, t_1, t_2, … , t_s, d_1, … ,d_k es gráfica $\Leftrightarrow$
lo es la sucesión $t_1 - 1$, $t_2 - 1$, … , $t_s - 1$, d_1, … ,d_k

Dem. Sea G el grafo cuya sucesión es s, t_1, t_2, … , t_s, d_1, … ,d_k
y sean S, T_1, T_2, …T_s , D_1, … , D_k los vértices correspondientes

- Si S es adyacente a T_1, T_2, …T_s, borramos S y el grafo H=G – {S} es el grafo buscado

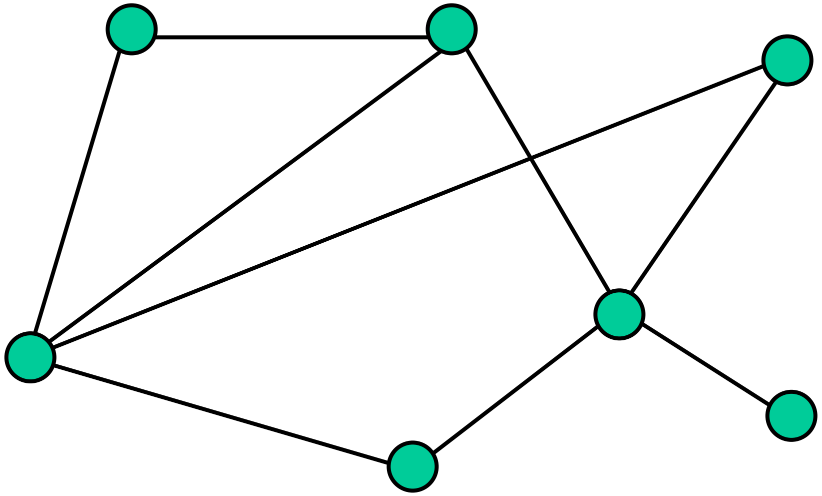


4, 4, 3, 3, 2, 1, 1



3, 2, 2, 1, 1, 1

- Si no es así, S no es adyacente a un T_i pero SÍ es adyacente a un vértice D_j con $t_i \geq d_j$



4, 4, 3, 2, 2, 2, 1

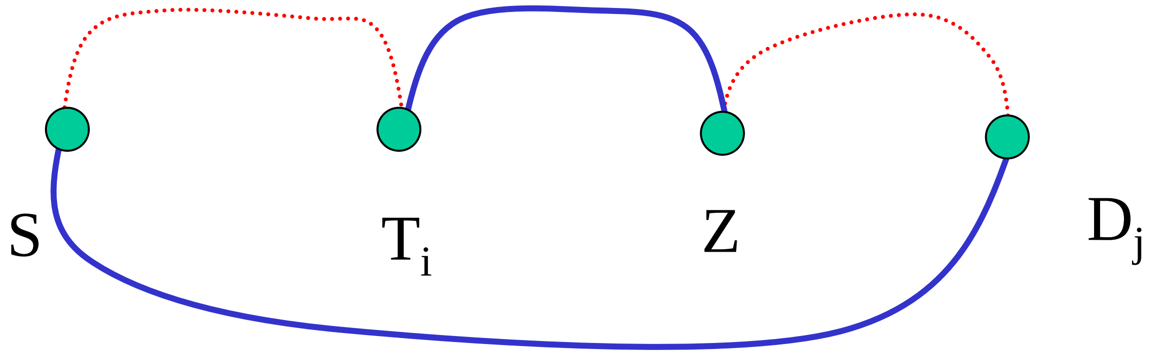
4, 4, 3, 2, 2, 2, 1

4, 2, 1, 1, 1, 1

¡pero queremos 3, 2, 1, 1, 1, 1 !

Si $t_i = d_j$, basta intercambiar los papeles de T_i y de D_j

Si $t_i > d_j$



T_i tiene más vecinos que D_j

Sea Z vecino de T_i pero no vecino de D_j

Cambiamos el carácter de las aristas rojas y azules.
Tenemos así un grafo G_1 con la misma sucesión en el que el vértice S tiene un vecino entre los T_i más que en el grafo G.

Si en G' ya es S adyacente a T_1, T_2, …T_s, se procede como antes.
Y si no lo es se repite el cambio rojo-azul. Como s es finito se alcanza en algún momento un grafo G_m cuya sucesión es la dada.

Algoritmo SUCESIÓN GRÁFICA

Dada una sucesión no creciente de enteros positivos o nulos decidir si es una sucesión gráfica o no

La idea es aplicar la caracterización anterior hasta que, o bien se obtiene un nº negativo (la sucesión NO es gráfica), o bien se alcanza una sucesión de 0’s (la sucesión SÍ es gráfica)

4	**4**	**3**	**2**	**2**	**2**	**1**
	3	**2**	**1**	**1**	**2**	**1**

reordenamos

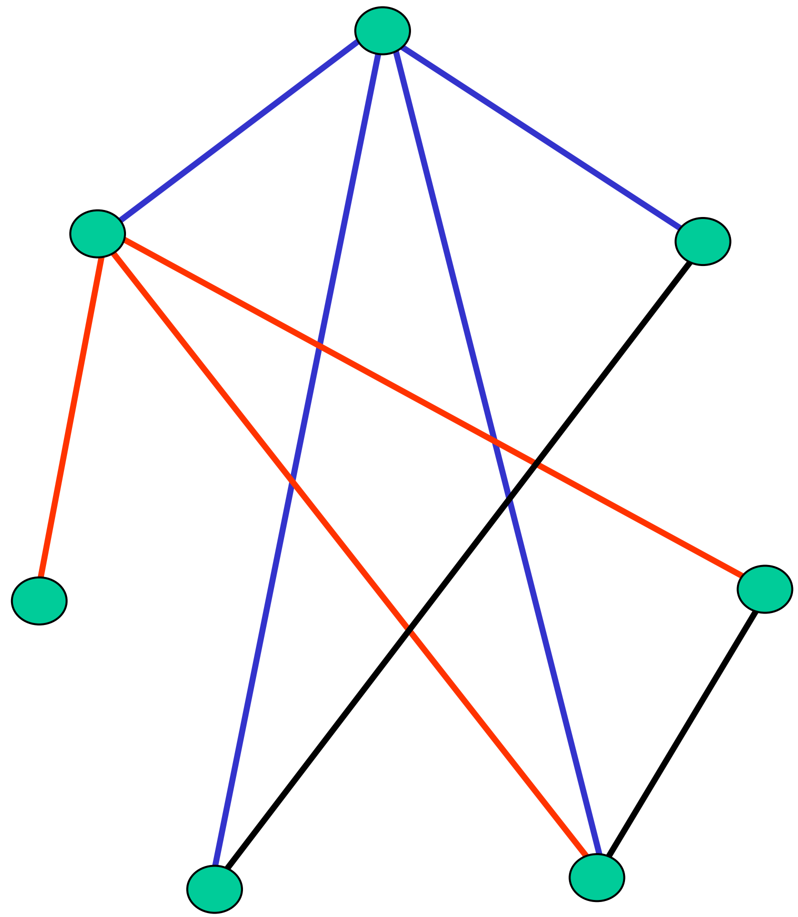
	3	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**
		1	**1**	**0**	**1**	**1**

reordenamos

		1	**1**	**1**	**1**	**0**
			0	**1**	**1**	**0**

reordenamos

			1	**1**	**0**	**0**
				0	**0**	**0**

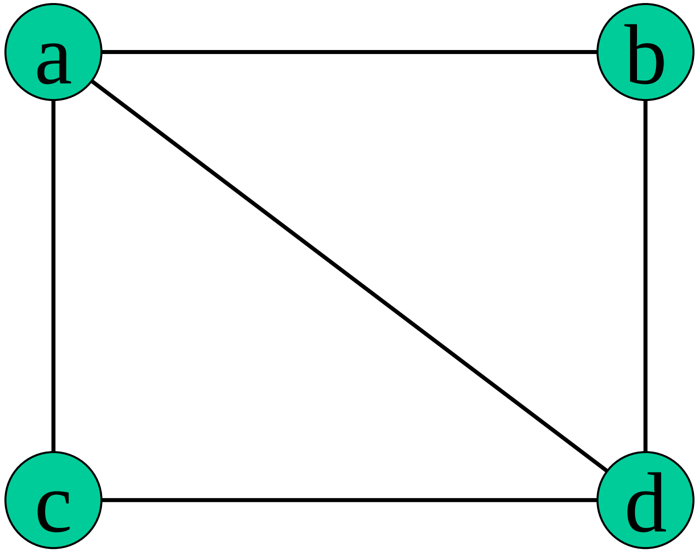


6	**6**	**6**	**4**	**3**	**3**	**2**
	5	**5**	**3**	**2**	**2**	**1**
		4	**2**	**1**	**1**	**0**
			1	**0**	**0**	**-1**

NO es sucesión gráfica

Para practicar con el algoritmo se puede utilizar la aplicación

http://www.dma.fi.upm.es/gregorio/grafos/SucGrafCertifArboles/index.htm



$G=(V,A)$

MATRIZ DE ADYACENCIA

Orden en V: a, b, c, d

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

LISTAS DE ADYACENCIA

Orden en V: a, b, c, d

Listas: [[c,d,b],[a,d],[d,a],[b,a,c]]