Gregorio Hernández Peñalver
Facultad de Informática, UPM

MATEMÁTICA DISCRETA II (MI)
TRABAJOS EN GRUPO

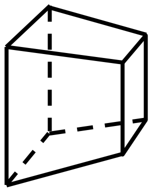
CAUCHY. Poliedros y rigidez

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) con sus nociones precisas y rigurosas de función, límite y continuidad es el responsable de la fundamentación del análisis en las primeras décadas del siglo XIX.

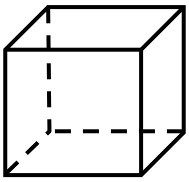
Los primeros trabajos de Cauchy versan sobre poliedros. En 1812 publica la primera demostración de la fórmula de Euler para poliedros, **V – A + C = 2,** utilizando herramientas combinatorias y no geométricas.

En otro artículo publicado en 1813, Cauchy inicia los estudios sobre rigidez de estructuras demostrando que los poliedros convexos son rígidos, aunque su demostración contiene un pequeño fallo que fue subsanado por Steinitz en 1930.

Teorema de rigidez
Si dos poliedros convexos P y P' son combinatoriamente equivalentes y las caras correspondientes son congruentes, entonces los ángulos entre pares correspondientes de caras adyacentes son iguales (es decir, P y P' son congruentes)



Estos poliedros son combinatoriamente equivalentes, pero no congruentes



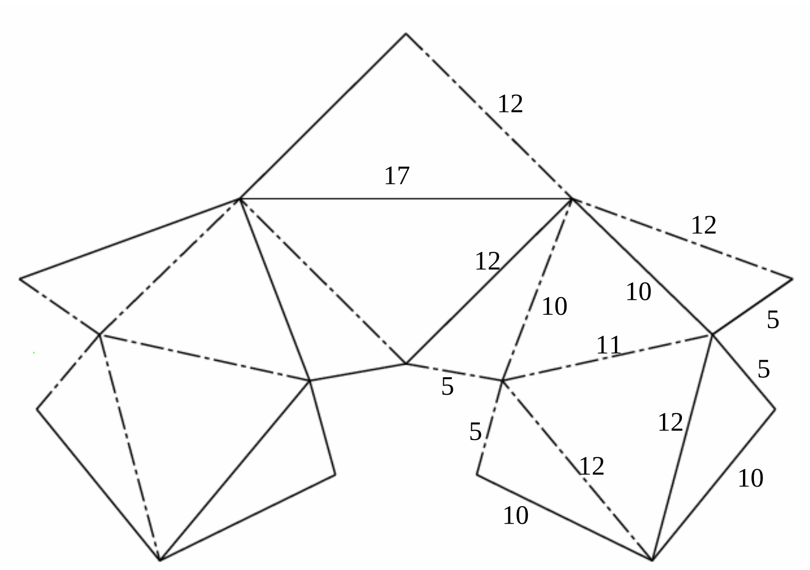
La convexidad es esencial en el teorema. Los dos poliedros de la siguiente figura son combinatoriamente equivalentes pero no congruentes.

Esencialmente el teorema dice que los poliedros convexos son rígidos. ¿Qué sucede con los no convexos?, ¿son todos rígidos o existen poliedros flexibles? O de otra forma, ¿puede existir, para algún poliedro no convexo, una deformación continua que mantenga las caras planas y congruentes?

Durante muchos años se pensó que la respuesta a esta última pregunta sería negativa y el teorema de Cauchy fue la primera evidencia matemática a favor de dicha conjetura. Pero en 1977 Connelly encontró un poliedro flexible formado por 18 caras triangulares refutando la conjetura. En la figura de la página siguiente aparece el desarrollo del ejemplo mínimo de poliedro flexible debido a Steffan.

El objetivo del trabajo es presentar todos los resultados descritos anteriormente.

Referencias
M. Aigner, G. Ziegler: "Proofs from THE BOOK", 4ª ed., Springer, 2010.
A. Cauchy, *Sur les polygones et les polyèdres*, J. École Polytechnique, XVI, IX, 87, (1813)
P. Cromwell: "Polyhedra", Cambridge Univ. Press, 1997
A. Durán: "Cauchy. Hijo rebelde de la revolución", Nivola, 2009



Las líneas discontinuas representan las aristas no convexas en este desarrollo del poliedro. Se deben doblar las líneas continuas como “montañas” y las discontinuas como “valles”