PARTICIONES

Gregorio Hernández Peñalver
UPM

MATEMÁTICA DISCRETA II

SELECCIONES de k elementos elegidos en un conjunto de n elementos		**DISTRIBUCIONES** de k objetos en n cajas **distintas**
selecciones ordenadas sin repetición	$n(n-1)\,(n-2)\ldots.\,(n-k+1)$	k objetos distintos en cada caja no más de uno
selecciones no ordenadas sin repetición	$\binom{n}{k}$	k objetos idénticos en cada caja no más de uno
selecciones ordenadas con repetición	n^k	k objetos distintos (sin limitaciones)
selecciones no ordenadas con repetición	$\binom{n-1+k}{k}$	k objetos idénticos (sin limitaciones)
	$T(k,n)$	k objetos distintos cajas no vacías
	$\binom{k-1}{k-n}$	k objetos idénticos cajas no vacías

DISTRIBUCIONES DE OBJETOS EN CAJAS IGUALES

Si los objetos son distintos

Las distribuciones de **n** objetos distintos en **k** cajas idénticas, donde a cada caja se le asigna al menos un objeto, se corresponden con las **particiones** de un conjunto de **n** elementos en **k** subconjuntos no vacíos

PARTICIONES DE UN CONJUNTO

El número de formas de efectuar una partición de un conjunto de **n** elementos, en **k** subconjuntos no vacíos, se designa por **S(n,k)**, números de **Stirling** de segunda especie

$$S(n,1)=1, \qquad S(n,n)=1, \qquad S(n,k)= S(n-1, k-1) + k\, S(n-1,k)$$

Valores de S(n,k)

	k =	1	2	3	4	5	….
n = 1		1					
2		1	1				
3		1	3	1			
4		1	7	6	1		
5		1	15	25	10	1	
	………………………..						

DISTRIBUCIONES DE OBJETOS EN CAJAS IGUALES

Si los objetos son iguales
Existe una correspondencia biyectiva entre las distribuciones de **n** objetos iguales en **k** cajas idénticas, donde a cada caja se le asigna al menos un objeto, y las particiones del número natural **n** en un número de sumandos igual a **k**.

PARTICIONES DE UN ENTERO
¿De cuántas formas se puede escribir un entero positivo n como suma de enteros positivos, donde el orden de los sumandos es **irrelevante?**
Cada una de estas formas es una **partición** de n, y cada uno de los sumandos, una **parte.**

Las particiones de 4 son: 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1
o, abreviadamente $[4], [3,1], [2^2], [2,1^2], [1^4]$

Las particiones de 7 son: $[7], [6,1], [5,2], [4,3], [5,1^2], [4,2,1], [3,2^2], \ldots$

En tres sumandos son: $[5,1^2], [4,2,1], [3^2,1], [3,2^2]$

PARTICIONES DE UN ENTERO n

$p(n)$ número de particiones de n
$p_k(n)$ número de particiones con exactamente k partes

$p(4) = 5$, $p_2(4) = 2$
$p(7) =$?, $p_3(7) = 4$

$p(n \mid$ la partición cumple la propiedad $E)$ indica el número de particiones que cumplen la propiedad E

$p_k(n) = p(n \mid$ el número de partes es exactamente $k)$

DISTRIBUCIONES
(n objetos se distribuyen en k cajas)

	Distribución arbitraria	**Ninguna caja vacía**
n objetos diferentes k cajas diferentes	k^n	$S(n,k)\ k! = T(n,k)$
n objetos iguales k cajas diferentes	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k-1}$
n objetos diferentes k cajas iguales	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$	$S(n,k)$
n objetos iguales k cajas iguales	$\sum_{k=1}^{n} p_k(n)$	$p_k(n)$

PARTICIONES DE UN ENTERO n

1. p(n | su mayor sumando es k) = p(n | con k partes)
2. p(n | con no más de k partes) = p(n+k | con k partes)
3. $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$
4. p(n | partes impares) = p(n | partes distintas)

Los primeros valores para $p_k(n)$ vienen dados por la tabla

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7
n=1	1						
n=2	1	1					
n=3	1	1	1				
n=4	1	2	1	1			
n=5	1	2	2	1	1		
n=6	1	3	3	2	1	1	
n=7	1	3	4	3	2	1	1

Diagrama de Ferrers

$$9 = 5 + 3 + 1 \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times \\ \times \end{array}$$

$$9 = 3 + 3 + 1 + 1 + 1 \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array}$$

$$9 = 3 + 2 + 2 + 1 + 1 \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} \times\ \times\ \times \\ \times\ \times \\ \times\ \times \\ \times \\ \times \end{array}$$

Demostraciones utilizando los Diagramas de Ferrers

$p(n \mid \text{mayor sumando es } k) = p_k(n) = p(n \mid \text{con } k \text{ partes})$

Cada partición de n con mayor sumando k se transforma por **conjugación**, intercambiando filas y columnas, en una partición con k sumandos
La primera fila con k equis se convierte en la primera columna con k equis (y recíprocamente)

$9 = 5 + 3 + 1$

$\rightarrow$

× × × × ×
× × ×
×

$\longleftrightarrow$

$9 = 3 + 2 + 2 + 1 + 1$

$\rightarrow$

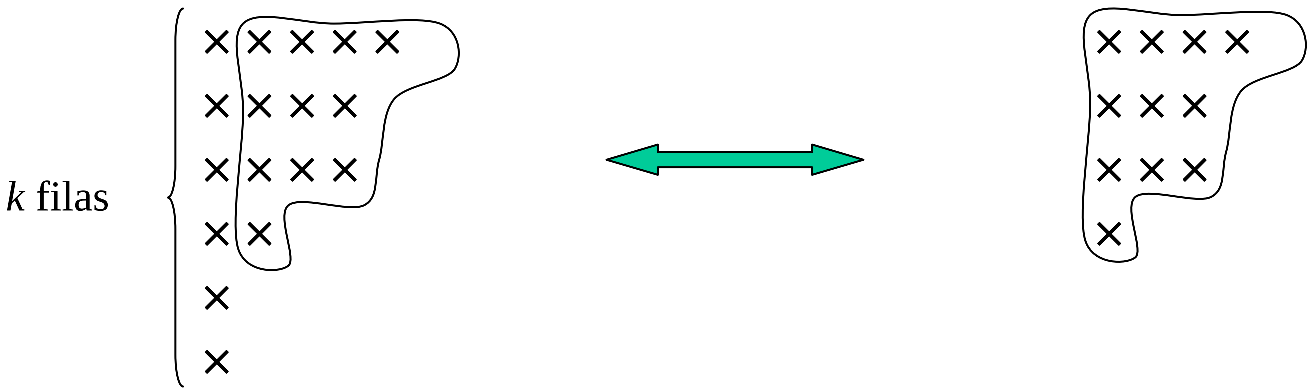
× × ×
× ×
× ×
×
×

Demostraciones utilizando los Diagramas de Ferrers

p(n+k | con k partes) = p(n | con no más de k partes)

Cada diagrama de n + k con k sumandos se transforma, por eliminación de la primera columna, en el diagrama de una partición de n con a lo sumo k sumandos Y recíprocamente añadiendo una primera columna con k equis.

n=11, k=6



p(17 | con 6 sumandos) = p(11 | con no más de 6 sumandos)

Demostraciones utilizando los Diagramas de Ferrers

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

Si en la partición hay al menos un “uno”

× × × × ×
× × × ×
× × × ×
×
×

→

× × × × ×
× × × ×
× × × ×
×

$p_{k-1}(n-1)$

Si en la partición no hay “unos”

× × × × ×
× × × ×
× × × ×
× ×

→

× × × ×
× × ×
× × ×
×

$p_k(n-k)$

Función generatriz de p(n)

p(n) es el número de soluciones no negativas de la ecuación

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + nx_n = n$$

p(n) es el coeficiente de x^n en

$$P(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)\ldots$$

$$\boxed{P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}}$$

p(n | partes impares) = p(n | partes distintas)

$$Odd(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \cdots$$

$$Dis(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$$

pero $1+z = (1-z^2)/(1-z)$

$$Dis(x) = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\cdots} = Odd(x)$$