FUNCIONES GENERATRICES EXPONENCIALES

Gregorio Hernández Peñalver
UPM

MATEMÁTICA DISCRETA II
(MI)

Las funciones generatrices “ordinarias” se aplican en problemas combinatorios donde el orden no es importante. Cuando sí lo es hay que considerar las funciones generatrices exponenciales.

Se llama **función generatriz** (*exponencial*) de la sucesión $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ a la serie de potencias

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Ejemplo 1

Un conjunto X ={A,B,C,D,E,F,G} de tamaño 7.
El número de listas de 3 elementos distintos es $7 \cdot 6 \cdot 5 = 3!\binom{7}{3}$

El producto (1+A)(1+B)(1+C)(1+D)(1+E)(1+F)(1+G) codifica la información sobre los subconjuntos de X

El término ACD corresponde al subconjunto {A,C,D} que corresponde a las listas ACD, ADC, CAD, CDA, DAC y DCA

Ahora sustituimos todos los símbolos por la variable x

$$(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x) = (1+x)^7$$

y en el desarrollo del binomio, el coeficiente de x^3 es el número de subconjuntos de X de tamaño 3.

Por tanto, el número de listas de tamaño 3 es el coeficiente de $\frac{x^3}{3!}$

Ejemplo 1

La función generatriz para el problema de las listas de elementos distintos es:

$$A(x) = (1+x)^7 = (1+\frac{x^1}{1!})(1+\frac{x^1}{1!})\cdots(1+\frac{x^1}{1!})$$

donde cada paréntesis corresponde a un elemento diferente del conjunto inicial

Primer paso (para A): o bien NO se elige o bien SÍ se elige

ahora se representa por $1x^0 + 1x^1/1!$
pues el número de respuestas en que se añade 0 unidades al tamaño de la solución es 1 y también es 1 el número de respuestas en que se añade 1 unidad al tamaño de la solución

Segundo paso (para B): o bien NO se elige, o bien SÍ se elige
se representa por $1x^0 + 1x^1/1!$
……………………………………….

Y así los siete pasos, uno por cada elemento del conjunto

La misma función generatriz A(x) = (1+x)^7 sirve para dos sucesiones:

(1)

$$A(x)=\binom{7}{0}+\binom{7}{1}x+\cdots+\binom{7}{k}x^k+\cdots+\binom{7}{7}x^7=(1+x)^7$$

Función generatriz ordinaria

La sucesión $(a_n) = \binom{7}{0},\binom{7}{1},\binom{7}{2},\cdots,\binom{7}{7}$ donde a_n es el número de subconjuntos de tamaño n del conjunto de 7 elementos

NO importa el orden

(2)

$$A(x)=(1+x)^7=1+7x+7\cdot 6\frac{x^2}{2!}+7\cdot 6\cdot 5\frac{x^3}{3!}+\cdots+7\cdot 6\cdot\ldots\cdot 1\frac{x^7}{7!}$$

Función generatriz exponencial

La sucesión $(b_n)=0!\binom{7}{0},1!\binom{7}{1},2!\binom{7}{2},3!\binom{7}{2},\cdots,7!\binom{7}{7}$

SÍ importa el orden

es decir, (b_n) = 1, 7, 7·6, 7·6·5, … , 7·6·5· …·1

donde b_n es el número de listas de tamaño n

Funciones generatrices exponenciales

Se considera un proceso secuencial de recuento con m pasos. Cada paso representa un tipo diferente de resultado y el **orden** de los resultados es significativo, así como el número de resultados de cada tipo.
El resultado de cada paso se representará por una función generatriz exponencial

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_k \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

si, en ese paso, a_k es el número de respuestas que añaden k unidades al tamaño del objeto

Funciones generatrices exponenciales

Sucesión (1,1,1,1, …) ⇒ $$A(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

de ahí el nombre de "exponencial"

Sucesión $(1, k, k^2, k^3, \ldots)$ ⇒ $$A(x) = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{(kx)^2}{2!} + \cdots + \frac{(kx)^n}{n!} + \cdots = e^{kx}$$

La función generatriz exponencial correspondiente al número a_k de k-listas de n objetos idénticos es

$$A(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

pues $a_k = 1$ para $k=1,2, \ldots, n$ y $a_k = 0$ para $k>n$

Funciones generatrices exponenciales

Ejemplo 2

¿Cuántas palabras de longitud k se pueden formar con 5 A's y 7 B's ?

La función generatriz para la elección de las A's es

$$A(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^5}{5!}$$

La función generatriz para la elección de las B's es

$$B(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^7}{7!}$$

La respuesta es el coeficiente de $x^k / k!$ en A(x)B(x)

Por ejemplo, para k = 12, el coeficiente de $x^{12}/ 12!$ es $\frac{12!}{5!7!}$
que es el número de palabras de longitud 12
que se pueden formar con 5 A's y 7 B's (como ya sabemos)

Ejemplo 3

¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras de la palabra PAPAYA?

Sea a_k el número de k-listas con las letras del multiconjunto {A,A,A,P,P,Y}

La función generatriz exponencial para esta sucesión es:

$$A(x) = \underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)}_{\text{Letra A}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)}_{\text{Letra P}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}\right)}_{\text{Letra Y}}$$

La respuesta es el coeficiente de $x^4/4!$ de este producto

Los términos con x^4 son

$$\underbrace{x\cdot\frac{x^2}{2!}\cdot x}_{\{A,2P,Y\}} + \underbrace{\frac{x^2}{2!}\cdot x\cdot x}_{\{2A,P,Y\}} + \underbrace{\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{x^2}{2!}\cdot 1}_{\{2A,2P\}} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}\cdot x\cdot 1}_{\{3A,P\}} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}\cdot 1\cdot x}_{\{3A,Y\}} = a_4\frac{x^4}{4!}$$

luego

$$a_4 = \frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!} = 38$$

Ejemplo 4

Hallar el número de listas de longitud 8 que se pueden formar con 1, 2 ó 3 A's, 2,3 ó 4 B's y 0, 2 ó 4 C's

La función generatriz exponencial para la elección de las A's es

$$A(x) = x/1! + x^2/2! + x^3/3!$$

La función generatriz exponencial para la elección de las B's es

$$B(x) = x^2/2! + x^3/3! + x^4/4!$$

La función generatriz exponencial para la elección de las C's es

$$C(x) = 1 + x^2/2! + x^4/4!$$

El nº de listas es el coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ en A(x)B(x)C(x)

Ejemplo 5

¿Cuántas listas de tamaño k se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2 y 3?

Sea a_k el número de k-listas

La función generatriz exponencial para la selección de las 0’s es

$$A_0(x) = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \ldots = e^x$$

Y lo mismo para la selección del resto de dígitos, por tanto la función generatriz de la sucesión a_k es:

$$A(x) = (e^x)^4 = e^{4x}$$

El coeficiente de $x^k/k!$ es 4^k

que es el número de listas de tamaño k con los símbolos 0,1,2 y 3
(como ya sabíamos)

Ejemplo 6

¿Cuántas listas de tamaño k se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2 y 3, si en cada lista debe aparecer cada dígito al menos una vez?

Sea b_k el número de esas k-listas

La función generatriz exponencial para la selección de cada uno de los dígitos es

$$A_0(x) = x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots = e^x - 1$$

La función generatriz de la sucesión b_k es:

$$B(x) = (e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

El coeficiente de $x^k/k!$ es $\boxed{4^k - 4\cdot 3^k + 6\cdot 2^k - 4}$

que es el número de listas de tamaño k con los símbolos 0,1,2 y 3 (con al menos un símbolo de cada tipo)

Este resultado es el que ya conocíamos por el Principio de inclusión-exclusión.

Ejemplo 7

¿Cuántas listas de tamaño k se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2 y 3 de forma que el 2 y el 3 aparezcan al menos una vez?

Sea a_k el número de k-listas

La función generatriz exponencial para esta sucesión es:

$$A(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 \left(x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 = (e^x)^2 (e^x - 1)^2 = e^{2x}(e^{2x} - 2e^x + 1) =$$

$$= e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} (4^k - 2 \cdot 3^k + 2^k) \frac{x^k}{k!}$$

Luego $$a_k = 4^k - 2 \cdot 3^k + 2^k$$

Ejemplo 8

¿Cuántas listas de tamaño k se pueden formar con los dígitos 0, 1 y 2 conteniendo un número impar de 0´s y un número par de 1’s?

Sea a_k el número de k-listas con esas condiciones

La función generatriz exponencial para esta sucesión es:

$$A(x) = \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)}_{\text{los 0´s}}\underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\cdots\right)}_{\text{los 1´s}}\underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)}_{\text{los 2´s}}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\cdots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Ejemplo 8

¿Cuántas listas de tamaño k se pueden formar con los dígitos 0, 1 y 2 conteniendo un número impar de 0´s y un número par de 1's?

Sea a_k el número de k-listas con esas condiciones

La función generatriz exponencial para esta sucesión es:

$$A(x) = (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots)(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots)(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots) =$$

$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)e^x = \frac{1}{4}e^x(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{3x} - e^{-x}) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(3^k - (-1)^k)\frac{x^k}{k!}$$

Luego $$a_k = \frac{1}{4}(3^k - (-1)^k)$$

$\boxed{\text{Desbarajustes}}$

Permutaciones en las que ningún elemento está en su propio lugar

236514 361542 214365

¿Cuántos hay? D_n el número de desbarajustes de n elementos

$$D_n = (n-1)\, D_{n-1} + (n-1)\, D_{n-2}$$

Y operando, $D_n = n\, D_{n-1} + (-1)^n$ para $n>0$, $D_0=1$

Si intentamos resolver la recurrencia por funciones generatrices ordinarias

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n \quad \text{resulta} \quad \frac{1}{x}(D(x)-1) = xD'(x) + D(x) - \frac{1}{1+x}$$

¡una ecuación diferencial!

Desbarajustes

$$\cancel{D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n}$$

$D_n = n\, D_{n-1} + (-1)^n$ para $n>0$, $D_0=1$

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}$$

Multiplicamos por $x^n/n!$ y sumamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$H(x) - 1 = x\sum_{n=1}^{\infty} D_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left(-\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = xH(x) + e^{-x} - 1$$

Luego $\boxed{H(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}}$

$$H(x) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)$$

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$\boxed{D_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n!}}$$