FUNCIONES GENERATRICES

Gregorio Hernández Peñalver
UPM

MATEMÁTICA DISCRETA II
(MI)

Contando por medio de productos formales

Ejemplo 1

En el frigorífico tenemos 3 helados de chocolote, 2 de vainilla, 1 de fresa y 4 de nata. Sacamos 4 helados. ¿De cuántas formas lo podemos hacer?

Podemos recorrer los términos del producto

$$(1 + c + c^2 + c^3)(1 + v + v^2)(1 + f)(1 + n + n^2 + n^3 + n^4)$$

El término cv^2f corresponde a …..

El término c^2vn corresponde a …..

El término $cvfn$ corresponde a …..

Y contar los términos de grado 4, es decir, los términos de la forma

$$c^i\, v^j\, f^k\, n^l \qquad \text{con } i+j+k+l=4$$

Contando por medio de productos formales

Ejemplo 1

En el frigorífico tenemos 3 helados de chocolote, 2 de vainilla, 1 de fresa y 4 de nata. Sacamos 4 helados. ¿De cuántas formas lo podemos hacer?

Podemos recorrer los términos del producto

$$(1 + c + c^2 + c^3)(1 + v + v^2)(1 + f)(1 + n + n^2 + n^3 + n^4)$$

Sustituimos c, v, f y n por x

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) =$$
$$= 1 + 4x + 9x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 22x^5 + 20x^6 + 15x^7 + 9x^8 + 4x^9 + x^{10}$$

El coeficiente de x^4 nos da la respuesta. Hay 20 formas diferentes

¿De cuántas formas se pueden sacar 2 helados? El coeficiente 9 de x^2 es la respuesta.

cc, cv, cf, cn, vv, vf, vn, fn, nn

¿De cuántas formas se pueden sacar 7 helados?

Series formales de potencias

Dada la sucesión $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ y x una variable formal se designa por serie formal de potencias de x con coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ a la expresión

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

La sucesión 1, 4, 9, 15, 20, 22, 20, 15, 9, 4, 1,0,0,0,… origina la serie formal

$$1 + 4x + 9x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 22x^5 + 20x^6 + 15x^7 + 9x^8 + 4x^9 + x^{10}$$

La sucesión 1, 3, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82,… origina la serie formal

$$1 + 3x + 5x^2 + 10x^3 + 17x^4 + 26x^5 + 37x^6 + 50x^7 + 65x^8 + 82x^9 + \ldots + ¿?x^n + \ldots$$

Series formales de potencias

Ejemplos ya conocidos:

Sucesión (1,1,1,1,……) $\Rightarrow$ $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Sucesión $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{k},\cdots,\binom{n}{n},0,0,\cdots$ $\Rightarrow$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$$

Sucesión (1,1,1/2!, 1/3!, ……) $\Rightarrow$ $$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Ejemplo 2

Un conjunto X de tamaño 7. El número de subconjuntos de 3 elementos es $\binom{7}{3}$

Con la sucesión $\binom{7}{0},\binom{7}{1},\binom{7}{2},\binom{7}{3},\binom{7}{4},\binom{7}{5},\binom{7}{6},\binom{7}{7},0,0,\cdots$

respondemos a la misma pregunta para cualquier número de elementos

Construimos la serie formal de la sucesión

$$A(x)=\binom{7}{0}+\binom{7}{1}x+\cdots+\binom{7}{k}x^k+\cdots+\binom{7}{7}x^7=(1+x)^7$$

y tendremos la información de la sucesión (y de la pregunta original) expresada de forma compacta

¿Cómo podemos llegar a la expresión $(1+x)^7$ sin conocer los coeficientes?

Ejemplo 2

Un conjunto X de tamaño 7. El número de subconjuntos de 3 elementos es $\binom{7}{3}$

Sea X={A,B,C,D,E,F,G}

El producto (1+A)(1+B)(1+C)(1+D)(1+E)(1+F)(1+G) codifica la información sobre los subconjuntos de X

El término ACDG corresponde al subconjunto ….

El término BDEFG corresponde al subconjunto ….

Los subconjuntos de tamaño 3 corresponden a …

Ahora sustituimos todos los símbolos por la variable x

$$(1+x)\ (1+x)\ (1+x)\ (1+x)\ (1+x)\ (1+x)\ (1+x) = (1 + x)^7$$

y en el desarrollo del binomio, el coeficiente de x^3 será el número de subconjuntos de X de tamaño 3.

Ejemplo 2

Un conjunto X de tamaño 7. El número de subconjuntos de 3 elementos es $\binom{7}{3}$

X={A,B,C,D,E,F,G}

$$(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x)\,(1+x) = (1+x)^7$$

La interpretación del producto anterior es la siguiente. La elección de un subconjunto consta de 7 pasos (uno por cada elemento de X)

Primer paso (para A): o bien NO se elige o bien SÍ se elige

se representa por $1x^0 + 1x^1 = 1 + x$
pues el número de respuestas en que se añade 0 unidades al tamaño de la solución es 1 y también es 1 el número de respuestas en que se añade 1 unidad al tamaño de la solución

Segundo paso (para B): o bien NO se elige, o bien SÍ se elige

se representa por $1x^0 + 1x^1 = 1 + x$

……………………………………….

Y así los siete pasos, uno por cada elemento del conjunto

Se llama **función generatriz** (*ordinaria*) de la sucesión A = (a_0, a_1, a_2, …, a_k, …) a la serie de potencias

$$A(x)= a_0 + a_1 x+ a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

Una función generatriz es una "cuerda de la ropa" en que tendemos una sucesión de números para exhibirla (H. Wilf, *Generatingfuntionology*)

La función generatriz para el problema de calcular cuántos subconjuntos (de diferentes tamaños) tiene el conjunto X de 7 elementos es

$$A(x) = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} x + \cdots + \binom{7}{k} x^k + \cdots + \binom{7}{7} x^7 = (1+x)^7$$

Un paso de un proceso de recuento se representa por la función generatriz

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

si, en ese paso, a_k es el número de respuestas que añaden k unidades al tamaño del objeto

Principio del producto

Un proceso secuencial de recuento de m pasos en el que $A_j(x)$ es la función generatriz que representa el paso j.

Si el orden de los pasos no es significativo, el número de respuestas de tamaño k es el coeficiente de x^k en el producto $A_1(x)A_2(x)\ldots A_m(x)$

Ejemplo 1.

En el frigorífico tenemos 3 helados de chocolote, 2 de vainilla, 1 de fresa y 4 de nata. Sacamos 4 helados. ¿De cuántas formas lo podemos hacer?

F. generatriz del paso 1 (elección de helados de chocolate) $A_1(x)=1+x+x^2+x^3$

F. generatriz del paso 2 (helados de vainilla) $A_2(x)=1+x+x^2$

F. generatriz del paso 3 (helados de fresa) $A_3(x)= 1+x$

F. generatriz del paso 4 (helados de nata) $A_4(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$

El coeficiente de x^4 en el producto $A_1A_2A_3A_4$ es la respuesta a la pregunta.

Ejemplo 3.
Se reparten canicas entre 5 niños, recibiendo cada uno al menos 3 canicas.
¿De cuántas formas se pueden repartir 25 canicas? ¿Y 35?

El orden de la distribución a los niños no es significativo.
Así tenemos 5 pasos, uno para cada niño:
   el paso i es la entrega de al menos 3 canicas al niño i.
La función generatriz del paso i es $x^3+x^4+\ldots+x^{25}+\ldots$
La función generatriz del problema es $(x^3+x^4+\ldots)^5$

El coeficiente de x^{25} responde a la primera pregunta.
El coeficiente de x^{35} responde a la segunda pregunta.

¿Cómo se calculan los coeficientes?

MANIPULACIÓN ALGEBRAICA DE SERIES

Ejemplo 4.

Calcular el número de formas de conseguir franqueo de n euros con sellos de 2, 3 y 5 euros

Llamemos a_n a dicho número de formas.

Primero se eligen los sellos de 2 euros, luego los de 3 euros y luego los de 5 euros.

Primer paso: Cada sello de 2 euros añade 2 al valor total,

La f. generatriz de la 1ª elección es $1+ x^2+ x^4+\ldots$

En el segundo paso elegimos los sellos de 3 euros, cada uno añade 3 luego la función generatriz es $1+ x^3+ x^6+\ldots$,

La f. generatriz del tercer paso (elección del nº de sellos de 5 euros) es

$$1+ x^5+ x^{10}+\ldots$$

La función generatriz de a_n es $(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)$

Número de formas de obtener 20 euros $\rightarrow$ coeficiente de x^{20} en ese producto.

¿Cómo se calculan los coeficientes?

MANIPULACIÓN ALGEBRAICA DE SERIES

Ejemplo 5.

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene $z_1+z_2+\ldots+z_n= k$?

Conocemos la respuesta $C^R_{n,k} = \binom{k+n-1}{k}$

Razonemos por funciones generatrices:

La variable z_i puede tomar los valores 0,1,2,…, k, luego la función generatriz para la variable z_i es $A_i(x) = 1+ x + x^2 + ... + x^k$

Por tanto, la función generatriz del problema es

$$A(x) = A_1(x)A_2(x)\ldots A_n(x) = (1+ x + x^2 + ... + x^k)^n$$

y el coeficiente de x^k en este producto es el número de soluciones no negativas.

Como este coeficiente es el mismo de $A^*(x) = (1+ x + x^2 + ... + x^k + ...)^n$ resulta que:

$$A^*(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)^n = 1+\binom{1+n-1}{1}x+\binom{2+n-1}{2}x^2+\cdots+\binom{k+n-1}{k}x^k+\cdots$$

MANIPULACIÓN DE FUNCIONES GENERATRICES

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots x^{n-1}$$

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots$$

$$\boxed{(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n} \qquad \boxed{(1+x^m)^n = 1+\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}+\cdots+\binom{n}{n}x^{nm}}$$

$$(1-x^m)^n = 1-\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)^n =$$

$$= 1+\binom{1+n-1}{1}x+\binom{2+n-1}{2}x^2+\cdots+\binom{k+n-1}{k}x^k+\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)^2 = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(k+1)x^k+\cdots$$

Ejemplo 6.

Hallar el número de elecciones posibles de 30 juguetes de 10 tipos distintos si:

(a) al menos deben elegirse dos de cada clase

(b) se eligen entre 2 y 5 de cada clase

(a) La f. generatriz para la elección de cada tipo es $x^2+x^3+x^4+\ldots$

f. generatriz del problema es $(x^2+x^3+x^4+\ldots)^{10}$

La respuesta es el coeficiente de x^{30}

$$[\text{Coef. de } x^{30} \text{ en } x^{20}(1+x+x^2+\ldots)^{10}]=[\text{Coef. de } x^{10} \text{ en } (1+x+x^2+\ldots)^{10}] = \binom{19}{10}$$

(b) La función generatriz es $A(x)= (x^2+x^3+x^4+x^5)^{10}= x^{20}(1+x+x^2+x^3)^{10} = x^{20}\dfrac{(1-x^4)^{10}}{(1-x)^{10}}$

$$A(x) = x^{20}(1+x+x^2+\ldots)^{10}(1-10x^4+\binom{10}{2}x^8+\cdots)$$

De nuevo buscamos el coeficiente de x^{30} Sea $w=(1+x+x^2+\ldots)^{10}$

(coef. de x^{30}) = (coef de x^{10} en w) – 10· (coef de x^6 en w) + 45 (coef. de x^2 en w) =

$$=\binom{19}{10}-10\binom{15}{6}+45\binom{11}{2}$$

Ejemplo 4

Franqueo de valor n con sellos de 2, 3 y 5 euros

La función generatriz de a_n es $(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)$

$$A(x)=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}$$

Número de formas de obtener 20 euros $\rightarrow$ coeficiente de x^{20} en ese producto.

$(1+x^2+x^4+\ldots+x^{20})(1+x^3+x^6+\ldots+x^{18})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})$

```
> A:=1/((1-x^2)*(1-x^3)*(1-x^5));
> series(A,x,40);
```

$$1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+2x^7+3x^8+3x^9+4x^{10}+4x^{11}+5x^{12}+5x^{13}+6x^{14}+7x^{15}+7x^{16}+8x^{17}+9x^{18}+9x^{19}+11x^{20}+O(x^{21})$$

11 formas diferentes de franqueo

Ejemplo 3.

Se reparten canicas entre 5 niños, recibiendo cada uno al menos 3 canicas.
¿De cuántas formas se pueden repartir 25 canicas? ¿Y 35?

El orden de la distribución a los niños no es significativo.
Así tenemos 5 pasos, uno para cada niño:

el paso i es la entrega de al menos 3 canicas al niño i.

La función generatriz del paso i es $x^3+x^4+\dots$

La función generatriz compuesta es $A(x) = (x^3+x^4+\dots+x^{25} + \dots)^5$
El coeficiente de x^{25} en este producto es la respuesta.

$$A(x) = (x^3+x^4+\dots+\dots)^5 = x^{15}(1+x+x^2 + \dots+\dots)^5 = \frac{x^{15}}{(1-x)^5}$$

$$A(x) = x^{15}(1 + x + x^2 + \cdots)^5$$

Buscamos el coeficiente de x^{25}
Sea $w = (1+x+x^2+\dots)^5$ (coef. de x^{25}) = (coef de x^{10} en w) $= \binom{10+5-1}{10} = \binom{14}{10}$

Ejemplo 3.

Se reparten canicas entre 5 niños, recibiendo cada uno al menos 3 canicas. ¿De cuántas formas se pueden repartir 25 canicas? ¿Y 35?

¿Y si queremos responder a la misma pregunta para 30, 35, 40, 50 ……canicas?

Todas las respuestas están en la función generatriz $$A(x) = \frac{x^{15}}{(1-x)^5}$$

```
> B:=x^15/(1-x)^5;
> series(B,x,70);
```

$$x^{15} + 5x^{16} + 15x^{17} + 35x^{18} + 70x^{19} + 126x^{20} + 210x^{21} + 330x^{22} + 495x^{23} + 715x^{24} + 1001x^{25} + 1365x^{26} + 1820x^{27} + 2380x^{28} + 3060x^{29} + 3876x^{30} + 4845x^{31} + 5985x^{32} + 7315x^{33} + 8855x^{34} + 10626x^{35} + 12650x^{36} + 14950x^{37} + 17550x^{38} + 20475x^{39} + 23751x^{40} + 27405x^{41} + 31465x^{42} + 35960x^{43} + 40920x^{44} + 46376x^{45} + 52360x^{46} + 58905x^{47} + 66045x^{48} + 73815x^{49} + 82251x^{50} + 91390x^{51} + 101270x^{52} + 111930x^{53} + 123410x^{54} + 135751x^{55} + 148995x^{56} + 163185x^{57} + 178365x^{58} + 194580x^{59} + 211876x^{60} + 230300x^{61} + 249900x^{62} + 270725x^{63} + 292825x^{64} + 316251x^{65} + 341055x^{66} + 367290x^{67} + 395010x^{68} + 424270x^{69} + O(x^{70})$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

$\boxed{1}$ Relación $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n\geq 2)$ con las condiciones iniciales $a_0=1$, $a_1=1$

Sea A(x) la función generatriz de la sucesión (a_n)

$$
\begin{aligned}
A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\
-\ xA(x) &= \quad - a_0 x - a_1 x^2 - \ldots - a_{n-1} x^n + \ldots \\
-\ 2x^2 A(x) &= \qquad\quad - 2a_0 x^2 - \ldots - 2a_{n-2} x^n + \ldots
\end{aligned}
$$

sumando resulta $(1 - x - 2x^2)\,A(x) = 1$ pues $a_n - a_{n-1} - 2\,a_{n-2} = 0$

En realidad, estamos multiplicando cada término de la relación por x^n y sumando para todos los valores válidos de n

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 1 + x + x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + 2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= 1 + x + x(A(x) - 1) + 2x^2 A(x)$$ luego $A(x) = 1 + xA(x) + 2x^2 A(x)$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

1 Relación $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ con las condiciones iniciales $a_0=1$, $a_1=1$

Sea A(x) la función generatriz de la sucesión (a_n)

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ -\ xA(x) &= \quad - a_0 x - a_1 x^2 - \dots - a_{n-1} x^n + \dots \\ -\ 2x^2 A(x) &= \quad\quad - 2a_0 x^2 - \dots - 2a_{n-2} x^n + \dots \end{aligned}$$

sumando resulta $(1 - x - 2x^2)\, A(x) = 1$ pues $a_n - a_{n-1} - 2\, a_{n-2} = 0$

Descomposición en fracciones simples

$$A(x) = \frac{1}{1-x-2x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{1/3}{1+x} + \frac{2/3}{1-2x} =$$

$$= \frac{1}{3}(1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots) + \frac{2}{3}(1 + 2x + \cdots + 2^n x^n + \cdots)$$

a_n es el coeficiente de x^n $$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

2 Resolver la relación de recurrencia $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$
con la condición inicial $a_0=1$

Sea A(x) la función generatriz de la sucesión (a_n)

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$
$$-2xA(x) = \quad -2a_0 x - 2a_1 x^2 - \dots - 2a_{n-1} x^n + \dots$$

sumando $(1-2x)A(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1)x^2 + \dots + (a_n - 2a_{n-1})x^n + \dots$
como $a_0=1$ y la sucesión (a_n) es solución de la recurrencia, $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$

$$(1-2x)A(x) = 1 + 2x + 2^2 x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots = \frac{1}{1-2x}$$

Es decir, $$A(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

a_n es el coeficiente de x^n $$a_n = \binom{n+2-1}{n} 2^n = (n+1)2^n$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

2 Resolver la relación de recurrencia $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$ $n \geq 1$
con la condición inicial $a_0 = 1$

Como en el ejemplo anterior, podemos interpretar las operaciones anteriores diciendo que multiplicamos la relación por x^n y sumamos para todos los valores válidos de n

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n =$$

$$= 1 + 2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n = 2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = 2xA(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

luego, $$(1-2x)A(x) = 1 + 2x + 2^2 x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots = \frac{1}{1-2x}$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

Método general

1. Sea A(x) la función generatriz de la sucesión (a_n), es decir, $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
2. Multiplicamos ambos miembros de la relación por x^n
3. Sumamos para todos los valores de n en que se cumpla la relación de recurrencia.
4. Expresamos la ecuación resultante en términos de A(x)
5. Resolvemos la ecuación anterior en A(x)
6. Si queremos una forma exacta para a_n expandimos A(x) en serie de potencias. El coeficiente de x^n es el valor buscado para a_n

Los pasos 2, 3 y 4 pueden interpretarse también, como en los ejemplos anteriores, diciendo que para la relación de recurrencia,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_m a_{n-m} + g(n)$$

A(x), función generatriz de (a_n), se obtiene desarrollando el producto

$$(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_m x^m)\, A(x)$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

Relación de recurrencia no lineal correspondiente a la sucesión de Catalan
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429,...

$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \ldots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0$ para n>0

con el convenio $C_0 = 1$

Si f(x) es la función generatriz, $f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

$$[f(x)]^2 = C_0C_0 + (C_1C_0 + C_0C_1)x + (C_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2)x^2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{k} C_{k-i}C_i\right)x^k + \ldots$$

$[f(x)]^2 = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots\ldots$ Comparando f(x) con $[f(x)]^2$, resulta

$$\boxed{f(x) = 1 + x[f(x)]^2}$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

Sucesión de Catalan

$$\boxed{f(x) = 1 + x\left[f(x)\right]^2}$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado en f(x) $\qquad f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$

como f(0)=C_0=1, la única solución válida es la del signo –

$$\boxed{f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$$

Función generatriz de la sucesión de Catalan

que ahora desarrollamos en serie de potencias para calcular sus coeficientes, que son los términos de la sucesión de Catalan

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 12x^4 + \ldots + ¿?\, x^n + \ldots$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

Sucesión de Catalan

$$\boxed{f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$$

Desarrollo en serie de $(1 - 4x)^{1/2}$

Recordemos la fórmula del binomio

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots$$

en la que todos los términos son 0 a partir del n+1

Pero si n NO es un entero, ¿cómo se definen los números combinatorios?

Por ejemplo si n=1/2,

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

Así el desarrollo en serie de $(1 - 4x)^{1/2}$ es

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

Sucesión de Catalan

$$\boxed{f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$$

Desarrollo en serie de $(1 – 4x)^{1/2}$

$$(1-4x)^{1/2}=1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}4x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 1}(4x)^2-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1}(4x)^3+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(4x)^4-\cdots$$

$$=1-\frac{1}{1!}2x-\frac{1}{2!}4x^2-\frac{3\cdot 1}{3!}8x^3-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}16x^4-\cdots$$

luego,

$$f(x)=(1-(1-4x)^{1/2})\frac{1}{2x}=1+\frac{1}{2!}2x+\frac{3\cdot 1}{3!}4x^2+\frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}8x^3+\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}16x^4\cdots$$

RELACIONES DE RECURRENCIA ---- FUNCIONES GENERATRICES

Sucesión de Catalan

$$\boxed{f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2!}2x + \frac{3\cdot 1}{3!}4x^2 + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}8x^3 + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}16x^4 + \cdots$$

El coeficiente de x^n es

$$2^n \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\cdot 3\cdot 1}{(n+1)!} = 2^n \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)!(2n)(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2} =$$

$$= 2^n \frac{(2n)!}{(n+1)!2^n n!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Por tanto, $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

$\boxed{\text{Sistema de relaciones de recurrencia}}$ **FUNCIONES GENERATRICES**

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{cases}$$

condiciones iniciales $a_0=0$, $b_0=0$

Sea A(x) la función generatriz de la sucesión (a_n)

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

y B(x) la función generatriz de la sucesión (b_n)

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ...$$

De la primera relación resulta:

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ -\ 2xA(x) &= \quad - 2a_0 x - 2a_1 x^2 - ... - 2a_{n-1} x^n + ... \\ -\ xB(x) &= \quad - b_0 x - b_1 x^2 - ... - b_{n-1} x^n + ... \end{aligned}$$

sumando resulta

$$(1 - 2x)A(x) - x\,B(x) = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = x(1 + x + \ldots + x^n + \ldots) = \frac{x}{1-x}$$

Sistema de relaciones de recurrencia

FUNCIONES GENERATRICES

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{cases}$$

condiciones iniciales $a_0=0$, $b_0=0$

De la segunda relación resulta:

$$\begin{aligned} B(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots \\ -\ xA(x) &= \quad - a_0 x - a_1 x^2 - \ldots - a_{n-1} x^n + \ldots \\ -\ 2xB(x) &= \quad - 2b_0 x - 2b_1 x^2 - \ldots - 2b_{n-1} x^n + \ldots \end{aligned}$$

sumando resulta

$$(1-2x)B(x) - x\,A(x) = x + 2x^2 + \ldots + 2^{n-1} x^n + \ldots = x(1 + 2x + \ldots + 2^n x^n + \ldots) =$$

$$= \frac{x}{1-2x}$$

Sistema de relaciones de recurrencia

FUNCIONES GENERATRICES

$$\begin{cases} (1-2x)A(x) - x\,B(x) = \dfrac{x}{1-x} \\ (1-2x)B(x) - x\,A(x) = \dfrac{x}{1-2x} \end{cases}$$

Operando en la primera expresión

$$A(x) = \frac{x}{1-2x}B(x) + \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Sustituimos en la segunda y operamos

$$(1-2x)B(x) - \frac{x^2}{1-2x}B(x) - \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} = \frac{x}{1-2x}$$

$$B(x)\frac{(1-2x)^2 - x^2}{1-2x} = \frac{x}{1-2x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)}$$

Descomposición en fracciones simples

$$B(x) = \frac{x}{(1-x)(1-4x+3x^2)} = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{3/4}{1-3x} + \frac{(-1/4)}{1-x} + \frac{(-1/2)}{(1-x)^2}$$

Sistema de relaciones de recurrencia

FUNCIONES GENERATRICES

$$B(x)=\frac{3/4}{1-3x}+\frac{(-1/4)}{1-x}+\frac{(-1/2)}{(1-x)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n$$

Luego el término general de la sucesión b_n es

$$\boxed{b_n=\frac{3}{4}3^n-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)}$$

Ahora sustituimos el valor de B(x) en la expresión de A(x)

$$A(x)=\frac{x}{1-2x}B(x)+\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{x^2}{(1-2x)(1-x)^2(1-3x)}+\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=$$

$$A(x)=\frac{x-3x^2+3x^3}{(1-2x)(1-x)^2(1-3x)}=\frac{3/4}{1-3x}-\frac{1}{1-2x}+\frac{1/2}{(1-x)^2}+\frac{(-1/4)}{1-x}$$

Descomposición en fracciones simples

Sistema de relaciones de recurrencia

FUNCIONES GENERATRICES

$$A(x) = \frac{3/4}{1-3x} - \frac{1}{1-2x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{(-1/4)}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Luego el término general de la sucesión a_{n} es

$$\boxed{a_n = \frac{3}{4}3^n - 2^n + \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(3^{n+1} - 2^{n+2} + 2n + 1)}$$

Descomposición de una función racional en fracciones simples

Toda función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en la que *P(x)* y *Q(x)* son polinomios se puede expresar como suma de fracciones simples, cuyos denominadores son de la forma $(ax+b)^n$

A cada factor irreducible de *Q(x)* le corresponde una o varias fracciones simples

Factores de *Q(x)*		Fracciones simples
$ax + b$	$\longrightarrow$	$\dfrac{L}{ax+b}$
$(ax + b)^2$	$\longrightarrow$	$\dfrac{L}{ax+b}+\dfrac{M}{(ax+b)^2}$
$(ax + b)^3$	$\longrightarrow$	$\dfrac{L}{ax+b}+\dfrac{M}{(ax+b)^2}+\dfrac{N}{(ax+b)^3}$

Descomposición de una función racional en fracciones simples

Ejemplo 1. $$f(x) = \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

La factorización del denominador es $x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Por tanto, $$x + 1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

igualando coeficientes en ambos miembros, resulta

$$\begin{cases} 0 = A + B + C \\ 1 = A + 3B - 2C \\ 1 = -6A \end{cases}$$

es decir, $A = -1/6$, $B = 3/10$, $C = -2/15$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{-1/6}{x} + \frac{3/10}{x-2} + \frac{-2/15}{x+3}$$

Descomposición de una función racional en fracciones simples

Ejemplo 2. $$f(x)=\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$$

La factorización del denominador es $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$

$$f(x)=\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

Por tanto, $$3x+1=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

igualando coeficientes en ambos miembros, resulta

$$\begin{cases} 0=A+B+C \\ 3=-2A+C \\ 5=A-B+C \end{cases}$$ es decir, A= 1/2, B= – 1/2, C=4

$$f(x)=\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1/2}{x+1}-\frac{1/2}{x-1}-\frac{2/15}{(x-1)^2}$$

$\boxed{\text{Derivada de una serie formal}}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

La derivada es la serie formal

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Por ejemplo,

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

corresponde a la sucesión 1, 1, 1, 1, …

Su derivada es

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

que corresponde a la sucesión 1, 2, 3, 4, …

Así la serie formal

$$xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

corresponde a la sucesión 0, 1, 2, 3, 4, …

Derivada de una serie formal

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Aplicando el mismo razonamiento, derivar y multiplicar por x,
tendremos la serie correspondiente a la sucesión de término general n^2, es decir,
0, 1, 4, 9, …

$$(xf'(x))'=1+4x+9x^2+16x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$x(xf'(x))'=x+4x^2+9x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Operaciones con funciones generatrices

Sean $A(x) = \Sigma a_n x^n$, $B(x) = \Sigma b_n x^n$ y $C(x) = \Sigma c_n x^n$

1. Si $c_n = a_n + b_n$ entonces $C(x) = A(x) + B(x)$
2. Si $c_n = ka_n$ entonces $C(x) = kA(x)$
3. Si $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ entonces $C(x) = A(x)B(x)$
4. Si $b_n = a_{n-i}$ para $i \geq k$ y $b_i = 0$ para $i<k$, entonces $B(x) = x^k A(x)$
5. $xA'(x)$ es la función generatriz de coeficiente na_n

   $x(xA'(x))'$ es la función generatriz de coeficiente $n^2 a_n$

Estas reglas permiten construir la función generatriz de una sucesión cuyo término general es de la forma p(n)

Por ejemplo, la función generatriz de la sucesión $h_n = 2n^2$ es $2x(xA'(x))'$ para $A(x) = 1/(1 - x)$

Operaciones con funciones generatrices

Teorema

Si A(x) es la función generatriz de la sucesión (a_n) entonces $\dfrac{A(x)}{1-x}$ es la función generatriz de la sucesión de sumas parciales $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$

Basta aplicar la regla 3 para $B(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Ejercicio

Calcular la suma $2\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + \ldots + 2\cdot n^2$

La función generatriz de la sucesión $(a_n) = (2n^2)$ es $A(x) = \dfrac{2x(1+x)}{(1-x)^3}$

Por tanto, la suma pedida es el coeficiente de x^n en $\dfrac{A(x)}{1-x} = \dfrac{2x+2x^2}{(1-x)^4}$

que es $$2\binom{(n-1)+4-1}{n-1} + 2\binom{(n-2)+4-1}{n-2} = 2\binom{n+2}{3} + 2\binom{n+1}{3}$$