Nombre y Apellidos:

Grado:

Turno (mañana/tarde):

MOMENTOS DE INERCIA. TEOREMA DE STEINER

Objetivos:

La presente práctica se divide en tres apartados encaminados a conseguir los siguientes objetivos:

a) Determinación de los momentos de inercia de diferentes cuerpos a partir de sus periodos de oscilación. Compararlos con los momentos de inercia teóricos y calcular el error cometido.
b) Determinación del momento de inercia de un cuerpo formado por una varilla y dos masas iguales y equidistantes a partir de sus periodos de oscilación. Comparar los resultados con los momentos de inercia teóricos y calcular el error cometido. Representación gráfica y ajuste lineal.
c) Comprobación de la 2º Ley de Steiner. Calcular el momento de inercia de un sólido con respecto a un eje cualquiera paralelo a otro que pase por su centro de gravedad.

Material:

- Aparato de oscilaciones por torsión.
- Varilla con hendiduras y dos masas desplazables.
- Eje de torsión.
- Disco circular metálico con varios orificios
- Un disco.
- Una esfera
- Un cilindro hueco.
- Un cilindro macizo.
- Cronómetro o Barrera fotoeléctrica con contador.

Fundamento Teórico:

Cálculo del Momento de Inercia a partir de su periodo de oscilación:

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un cuerpo a verificar cambios en su movimiento de rotación. Depende de la distribución de masa del objeto y de su distancia al eje de rotación.

En la dinámica de rotación, el momento de inercia de un cuerpo respecto al eje de rotación, juega el mismo papel que la masa del cuerpo en la dinámica de traslación o masa inercial.

El movimiento de traslación está provocado por una fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, cumpliéndose:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \text{ (segunda ley de Newton)}$$

Donde m es la masa del cuerpo y $\vec{a}$ es la aceleración del movimiento de traslación.

En el movimiento de rotación alrededor de un eje, el movimiento está provocado por el momento respecto al eje de rotación de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. El momento respecto al eje de rotación de la fuerza o fuerzas que actúan sobre el sólido se denomina momento o torque (τ). Cumpliéndose:

$$I\alpha = \sum \tau \text{ (segunda ley de Newton para la dinámica de rotación)}$$

Donde I es el momento de inercia del sólido respecto al eje de rotación y α la aceleración angular del movimiento de rotación.

Cuando se retuerce un muelle helicoidal o espiral, un cierto ángulo Ø, aparece un momento o par restaurador o torque que es proporcional al ángulo Ø y tiende a devolver al muelle a su posición inicial (signo negativo de la siguiente expresión):

$$\tau = -k\phi$$

Donde k , es la constante de proporcionalidad que se denomina constante de torsión, o constante de restauración angular del muelle. Si lo soltamos (si no se supera el límite elástico del resorte) comienza a realizar pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio, realizando un movimiento armónica simple angular.

Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación:

$$I\alpha = -k\phi$$

En forma de ecuación diferencial:

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -K\phi \rightarrow I\phi'' + K\phi = 0 \rightarrow \phi'' + \frac{K}{I}\phi = 0 \rightarrow \phi'' + \omega^2\phi = 0$$

Que es la ecuación diferencial de un movimiento armónica simple angulas de frecuencia angular o pulsación:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

El periodo de las oscilaciones (tiempo que tarde en realizar una oscilación completa) es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Conociendo los valores de K (que depende del muelle) y del periodos (que mediremos en el laboratorio) podremos calcular el momento de inercia despejando de la ecuación anterior.

$$\boldsymbol{I = \frac{K}{4\pi^2}T^2}$$

Cálculo del Momento de Inercia teórico de distintos cuerpos:

A continuación se dan los m.d.i. de los diversos cuerpos que se van a utilizar en la práctica.

Disco:

El momento de inercia de un disco en función de su masa y su radio con respecto a un eje perpendicular al disco que pasa por su centro es:

$$I_{disco} = \frac{1}{2}\, m\, r^2$$

Cilindro sólido (macizo):

El momento de inercia de un cilindro macizo uniforme de masa m y radio r con respecto a un eje que pase por el centro de la base y sea perpendicular a ella:

$$I_{cil.sólido} = \frac{1}{2}\, m\, r^2$$

Cilindro hueco:

Para un cilindro hueco de masa m, radio exterior r_e y radio interior r_i, el momento de inercia es:

$$I_{cil.hueco} = \frac{1}{2}\, m\, (r_e^2 + r_i^2)$$

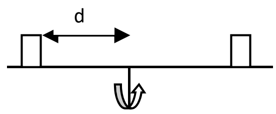
Esfera:

El momento de inercia de una esfera maciza uniforme con respecto a su diámetro es:

$$I_{esfera} = \frac{2}{5}\, m\, r^2$$

Como consecuencia, el momento de inercia de un cuerpo cilíndrico con el mismo radio r y la misma masa m es mayor que la de una esfera.

Cálculo del Momento de Inercia de una Varilla con dos masas móviles iguales y equidistantes al centro de la varilla:



El momento de inercia de una varilla de masa M y longitud L con respecto a un eje perpendicular y que pase por su centro es:

$$I_0 = \frac{1}{12} M L^2$$

El momento de inercia de cada una de las masas m es:

$$I = m d^2$$

siendo *d* la distancia de la masa al eje de rotación.

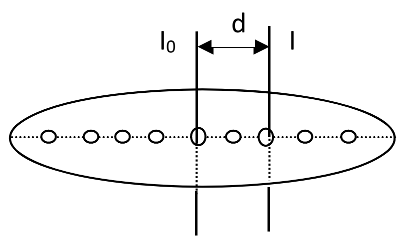
Por tanto, el momento de inercia total de la varilla con las dos masas vendrá dado por la suma de los momentos de inercia individuales:

$$I_t = \frac{1}{12} M L^2 + 2 (m d^2)$$

2º Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos:

De acuerdo con el teorema de los ejes paralelos o 2º teorema de Steiner, el momento de inercia de un sólido con respecto a un eje cualquiera paralelo a otro que pase por su centro de gravedad viene dado por:

$I = I_0 + m d^2$



Dónde:

I_0 es el m.d.i. del sólido con respecto a un eje que pase por su c.d.g.
m la masa total del sólido
d la distancia entre los dos ejes paralelos.

Por lo tanto, consiste en dos partes, una I_0 que es el m.d.i. con respecto a un eje paralelo al eje de rotación y que pase por su c.d.g y una 2º expresión md^2 que representa el m.d.i. del sólido concentrada toda su masa en su c.d.g. con respecto al eje de rotación.

Montaje y realización de la práctica:

Parte 1: Cálculo del Momento de Inercia de distintos cuerpos.




El montaje se realiza según las fotografías adjuntas. Para medir los m.d.i. de los diversos cuerpos, se fija el cuerpo a medir por su centro de gravedad al eje de rotación.

Se montarán los diferentes cuerpos en el eje de rotación: el disco de madera, el cilindro hueco, el cilindro macizo y la esfera.

Para medir los periodos de oscilación de los diferentes cuerpos se utiliza una barrera fotoeléctrica con contador o en su defecto un cronómetro. En el caso de utilizar cronómetro, para una medida más exacta se tomarán los tiempos transcurrido después de realizar 10 oscilaciones completas, es decir, ida y vuelta y al tiempo total se dividirá entre el número de oscilaciones tomadas, en nuestro caso 10.

Una vez medido el periodo de oscilación T, se calcula el momento de inercia de cada uno de los cuerpos de forma experimental: para ello sustituiremos los periodos de oscilación obtenidos en la ecuación:

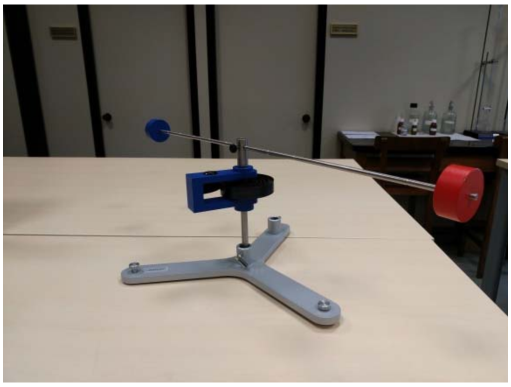
$$\boldsymbol{I = \frac{T^2}{4\pi^2}\,K}$$

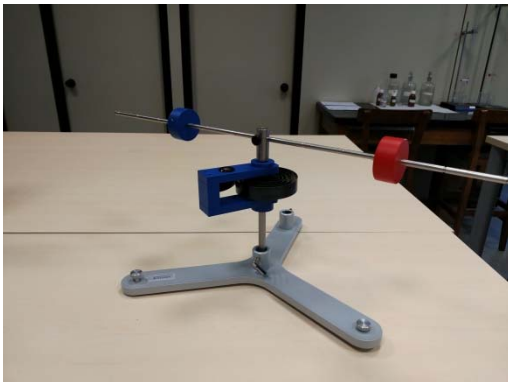
Siendo:
I es el momento de inercia
T el periodo de oscilación
K es la constante de restauración del muelle

Con los periodos medidos y los datos que se indican a continuación completar la Tabla I

Datos:
Constante de restauración angular del muelle: K = 0,027 Nm/rad.
Disco: Masa=0,250 kg, diámetro=0,215m.
Cilindro macizo: Masa=0,350 kg, diámetro=0,100 m.
Cilindro Hueco: Masa=0,350 kg, diámetro exterior=0,100m, diámetro interior=0,092 m.
Esfera: Masa=0,850 kg, diámetro=0,140 m.

Parte 2: Cálculo del Momento de Inercia de una Varilla con dos masas móviles iguales y equidistantes.





Tal y como se observa en la imagen, se monta en el eje de giro la varilla con las dos masas móviles fijándolas simétricamente.

Inicialmente se colocan las masas lo más separadas posible, se anota la distancia que hay desde el centro de gravedad de la masa colocada al eje de giro y se medirá el periodo de oscilación (en este caso con 5 oscilaciones bastará, por lo tanto en este caso al tiempo total se dividirá entre 5).

Se repetirá este proceso hasta tener un total de 6 mediciones, acercando cada vez un poco las masas.

Estos resultados se **colocarán en la tabla II.**

Datos:
Masa de la varilla M=0,177 Kg;
Masa de cada masa móvil es m=0,209 Kg
Longitud total de la varilla es: L=0,600 m.

A continuación se realizara **la Representación Gráfica** de los resultados obtenidos y se realizará el **ajuste de la función**.

$I_t = \frac{1}{12}\, M\, L^2 + 2\,(m\, d^2)$ $\longrightarrow$ $y = b + a\, x$

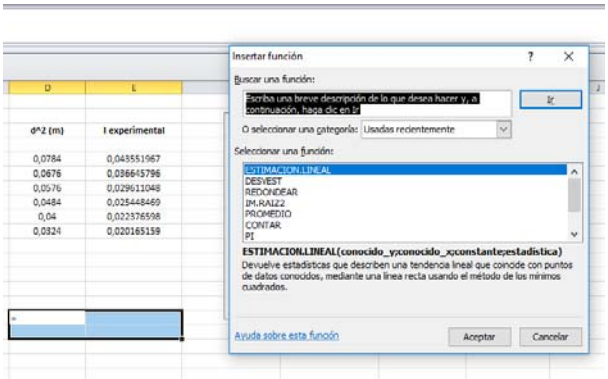
Completa:

y= I_t
b=
a=
x= d^2

Representación gráfica: se representará los diferentes momentos de inercia (los experimentales) de la varilla con las dos masas (ordenadas, eje y) en función de la posición de estas al cuadrado con respecto al eje de rotación (abscisas, eje x). La representación se podrá realizar en papel milimetrado o en hoja de Excel (siempre indicando nombre de los ejes, título del gráfico, unidades, escalas, etc.)

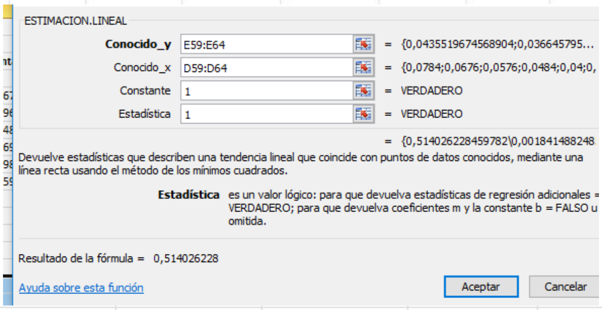
Ajuste lineal: Para la realización del ajuste se va a utilizar el programa Excel. Para ello se deberán copiar las columnas x = d^2 e y= I_t (es importante el orden). A continuación selecciona los datos, insertar→ gráfico→ dispersión→ dispersión solo con marcadores→ intro→ pinchar sobre uno de los puntos→ botón derecho→ agregar línea de tendencia→ marcar: lineal/mostrar ecuación /mostrar R^2

NOTA: *Es importante la presentación del gráfico junto con la tabla de datos representados. El grafico debe presentar título, escala y nombre de los ejes.*



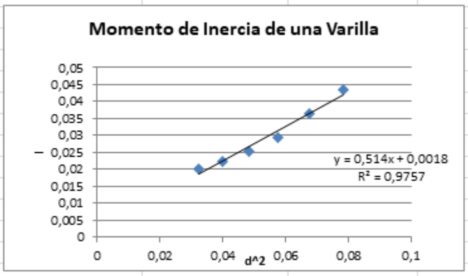
Para que Excel nos dé el error de los parámetros ajustados debemos utilizar la función “ESTIMACIÓN.LINEAL”. Esta función es matricial, por lo que antes de escribir la función debemos seleccionar 4 celdas, para que nos escriba en ella los 4 resultados: pendiente, error de la pendiente, término independiente y su error.

Seleccionamos 4 celdas (o 6) → damos a F(x) y seleccionamos “ESTIMACION LINEAL”→marcar la “y” , marcas la “x”, asignas “verdadero” a los otros dos parámetros →apretar simultáneamente : CONTROL+MAYUSCULAS+INTRO



A partir de la pendiente de la recta de regresión determinamos el valor de la masa móvil (despejando de la pendiente) y el m.d.i de la varilla (despejando de la ordenada en el origen), con los valores obtenidos del ajuste de la recta compararemos los resultados con los valores teóricos.

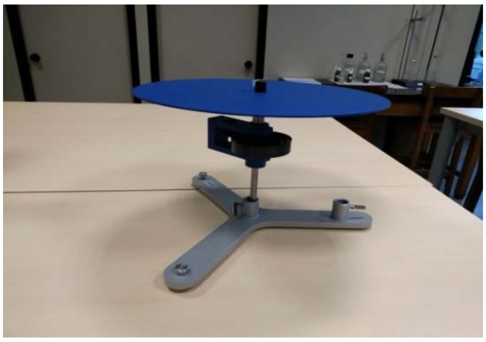
d^2 (m)	I experimental
0,0784	0,043551967
0,0676	0,036645796
0,0576	0,029611048
0,0484	0,025448469
0,04	0,022376598
0,0324	0,020165159



a=	0,514026228	0,001841488	= b
error de a=	0,040542384	0,002283032	= error de b

Parte 3: Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos.

Por último, se comprobará el teorema de los ejes paralelos o 2º teorema de Steiner.




Para ello montaremos la práctica como se indica en las fotografías adjuntas.

La primera medida se realizará ajustando el disco al eje de rotación por su orificio central, obteniendo así el Momento de Inercia respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad, I_0. Como en los casos anteriores mediremos su periodo de oscilación y anotaremos el resultado obtenido, con este periodo calcularemos el Momento de inercia y lo compararemos con el momento de inercia teórico.

A continuación iremos cambiado el eje de rotación desplazándolo respecto al centro de gravedad una distancia d. Para ello iremos colocando el disco metálico fijándolo en los distintos orificios y realizaremos los mismos cálculos que anteriormente.

Los datos y resultados obtenidos los anotaremos en la Tabla III.

Datos: *Masa del disco blanco=0,440 kg;*
Diámetro=0,300m

OJO *"d" representa DISTANCIAS entre ejes no diámetro.*

A continuación se realizara **la Representación Gráfica** de los resultados obtenidos y se realizará el **ajuste de la función.**

$$I = I_0 + md^2 \longrightarrow y = b + a\,x$$

Completa:

y= I
a=
b=
x= d^2

Representación gráfica: se representará el momento de inercia del disco en función de la distancia de su eje de rotación al centro de gravedad. Se representará el momento de inercia experimental obtenido en el eje de ordenadas y el cuadrado de la distancia entre el eje de rotación y otro eje paralelo que pase por su centro de gravedad en el eje de abscisas

Ajuste lineal: Para la realización del ajuste se va a utilizar el programa Excel. Para ello se deberán copiar las columnas $x = d^2$ e $y= I_t$ (es importante el orden). A continuación se seleccionan los datos, insertar→ gráfico→ dispersión→ dispersión solo con marcadores→ intro→ pinchar sobre uno de los puntos→ botón derecho→ agregar línea de tendencia→ marcar: lineal/mostrar ecuación /mostrar R^2

NOTA: *Es importante la presentación del grafico junto con la tabla de datos representados. El grafico debe presentar título, escala y nombre de los ejes.*

Para el cálculo del error de los parámetros ajustados se debe utilizar la función "ESTIMACIÓN.LINEAL". Esta función es matricial, por lo que antes de escribir la función se debe seleccionar 4 celdas, para obtener los 4 resultados: pendiente, error de la pendiente, término independiente y su error.
Seleccionar 4 celdas → dar a F(x) y seleccionar "ESTIMACION LINEAL"→ marcas la "y" , marcar la "x", asignar "verdadero" a los otros dos parámetros →apretar simultáneamente : CONTROL+MAYUSCULAS+INTRO

A partir de la pendiente de la recta de regresión determinamos el valor de la masa del disco y de la ordenada en el origen el m.d.i del disco respecto un eje que pase por su centro de gravedad, compararemos los resultados con los valores teóricos.

Nombre y Apellidos:

Grado:

Turno (mañana/tarde):

MOMENTOS DE INERCIA. TEOREMA DE STEINER

Tabla I

Disco									
I teórico	**MASA (kg)**	**R (metros)**	**I teorico (kgm2)**	**I experimental**	**K**	**Periodo (s)**	**I experimental (kgm2)**	**e absoluto**	**e relativo**
$I_z = \frac{1}{2} MR^2$				$I = \frac{T^2}{4\pi^2} K$					
Cilindro macizo:									
I teórico	**MASA (kg)**	**R (metros)**	**I teorico (kgm2)**	**I experimental**	**K**	**Periodo (s)**	**I experimental (kgm2)**	**e absoluto**	**e relativo**
$I_z = \frac{1}{2} MR^2$				$I = \frac{T^2}{4\pi^2} K$					
Cilindro hueco:									
I teórico	**MASA (kg)**	**Ra (m) / Ri (m)**	**I teorico (kgm2)**	**I experimental**	**K**	**Periodo (s)**	**I experimental (kgm2)**	**e absoluto**	**e relativo**
$I_h = \frac{1}{2} m_h \left(r^2_a + r_i^2\right)$				$I = \frac{T^2}{4\pi^2} K$					
Esfera:									
I teórico	**MASA (kg)**	**R (metros)**	**I teorico (kgm2)**	**I experimental**	**K**	**Periodo (s)**	**I experimental (kgm2)**	**e absoluto**	**e relativo**
$I_z = \frac{2}{5} MR^2$				$I = \frac{T^2}{4\pi^2} K$					

Nombre y Apellidos:

Grado:

Turno (mañana/tarde):

MOMENTOS DE INERCIA. TEOREMA DE STEINER

Tabla II:

Momento de inercia de la varilla (poner formula y datos) =

d(m)	M (kg) (varilla)	m (kg) (cuerpo)	L (m)	I teorico			K	Periodo (T)	I experimental	Error absoluto	Error relativo
	Dato	Dato	Dato	M.I de la varilla $\frac{1}{12}ML^2$	M.I de las masas $2md^2$	M.I TOTAL $I_t = \frac{1}{12}ML^2 + 2md^2$	Dato	Medido en el experimento	$I = \frac{T^2}{4\pi^2}K$		%

Nombre y Apellidos:

Grado:

Turno (mañana/tarde):

MOMENTOS DE INERCIA. TEOREMA DE STEINER

Tabla III:

M.d.I del disco (I_0) (poner formula y datos):

d (metros)	m (kg)	I_0 teórico (disco)	md^2	I (teorema de Steiner)	Cte. de restauracion del Muelle (K)	Periodo (T)	I experimental	Error absoluto	Error relativo
Variando en el experimento	Masa del disco			$I = I_0 + md^2$	K		$I = \frac{T^2}{4\pi^2} K$		El error absoluto en %