

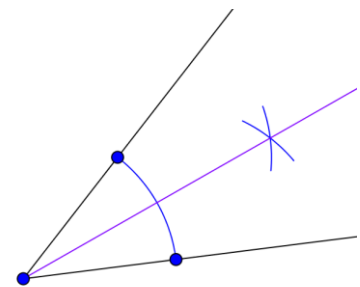
Geometría Proyectiva

Fernando Meseguer Garrido

El presente documento es una recopilación de los apuntes que utilizo para explicar el *Tema 1: Fundamentos Proyectivos* de la asignatura de Expresión Gráfica de la ETSIAE. Es un trabajo incompleto, y por lo tanto susceptible de mejora, no pretende sustituir a los apuntes tomados en clase, sino complementarlos. Este material está basado en el trabajo conjunto de todos [los profesores de la cátedra de Expresión Gráfica](#), así como diversa [bibliografía](#), y está sujeto a una licencia **CC-BY-NC-SA** (se puede distribuir este trabajo siempre que no sea con fines comerciales, se cite su fuente original, y no se cambie el tipo de licencia utilizada). En el documento se hace referencia al [cuadernillo de problemas de geometría proyectiva](#), y en ocasiones hay enlaces a mi canal de [GeoGebra](#). Las explicaciones relativas a este documento pueden verse en esta lista de reproducción en [YouTube](#). Un agregado de recursos y soluciones online puede verse [aquí](#). La herramienta GeoGebra se ha usado para la generación de las figuras y recursos interactivos de este documento, y puede servir al usuario para estudiar o resolver ejercicios. Una guía rápida sobre cómo manejar la herramienta puede encontrarse [aquí](#).

Introducción a la Geometría Projectiva [\(en YouTube\)](#)

- Nomenclatura:
- Espacios geométricos - dimensión
- Elementos geométricos
- Formas geométricas – Categoría
- Transformación proyectiva:
 - Postulados:
 - Unicidad
 - Pertenencia
 - Orden
 - Operaciones:
 - Proyección
 - Sección
 - Ley de dualidad
- Ternas (razón simple)
- Cuaternas (razón doble)

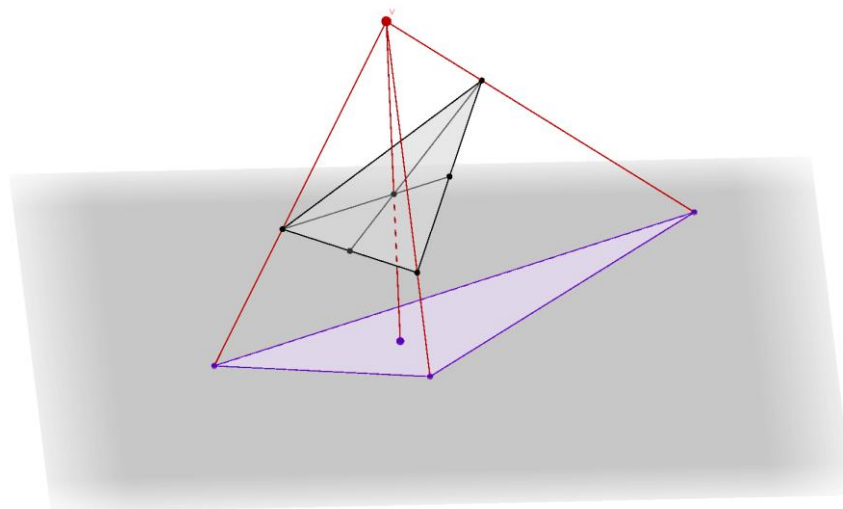


Geometría métrica → medida

Bisectriz, Mediatriz, Radio

Geometría proyectiva → posición, pertenencia

Posición relativa, independiente de la medida

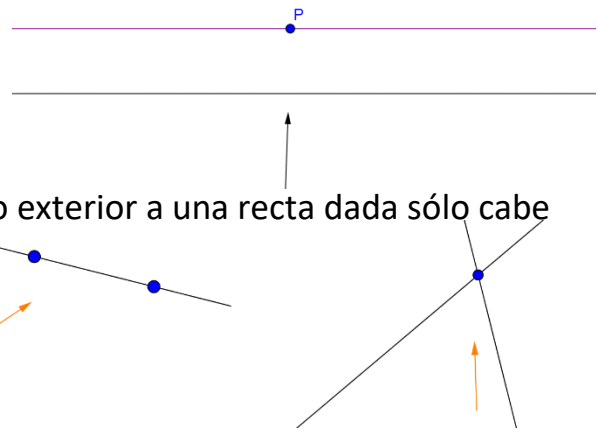


Geometría Clásica o Euclídea:

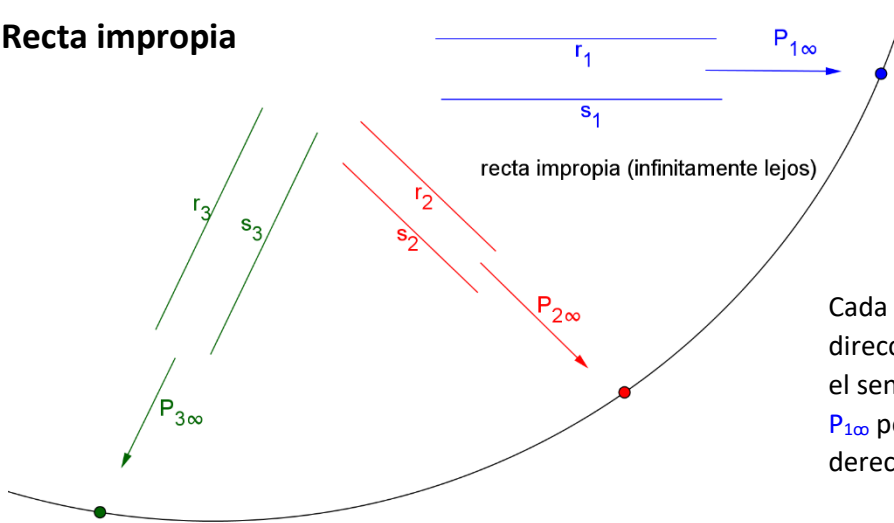
Quinto postulado- Por un punto exterior a una recta dada sólo cabe trazar una paralela.

Se sustituye por, en el plano:

- Dos puntos definen una recta.
- Todo par de rectas se cortan en un punto (cuando dos rectas son paralelas decimos que se cortan en un punto del infinito conocido como punto impropio).



Recta impropia



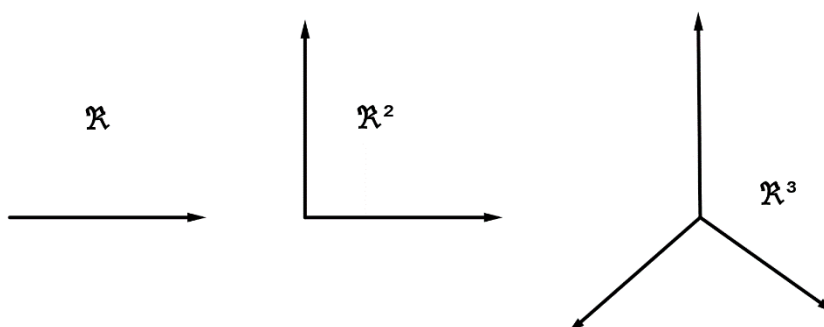
Cada punto impropio define una dirección en el plano, sin importar el sentido. Se llega igualmente a $P_{1\infty}$ por la izquierda o por la derecha.

Estamos hablando de “en el plano, puntos, rectas”, ¿qué quiere decir todo esto? Para ello se procede a establecer unas definiciones formales. Si ya las conoce, pase a la [transformación proyectiva](#).

Espacios Geométricos

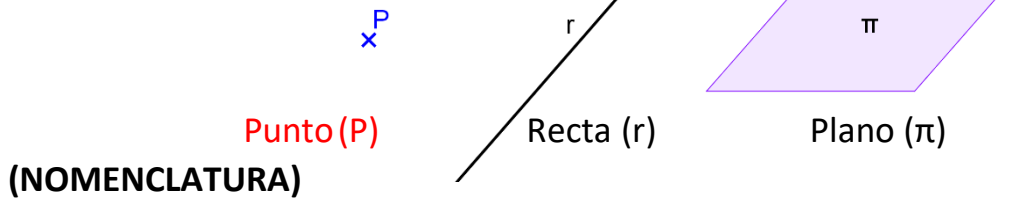
1. Espacio unidimensional
2. Espacio bidimensional
3. Espacio tridimensional
4. ...

Dimensión: nº de datos necesarios para definir un individuo $\infty^1, \infty^2, \infty^3$.



Elementos Geométricos

No tienen ni magnitud, ni tamaño, ni forma:

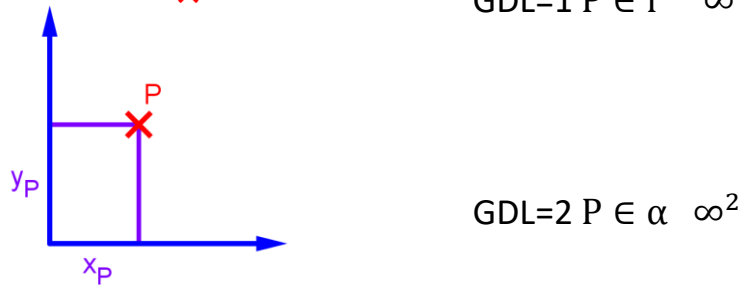


Puntos: GDL (Grados de libertad)

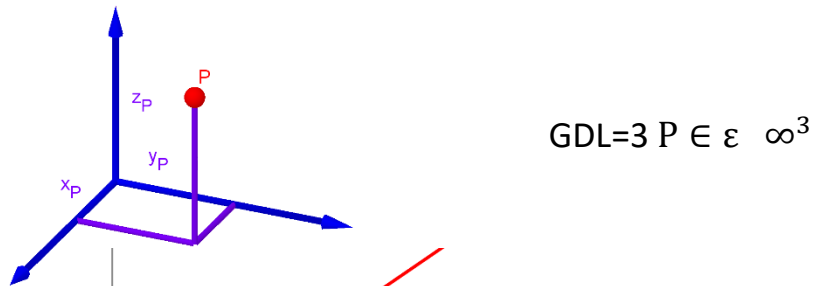
Espacio 1d



Espacio 2d

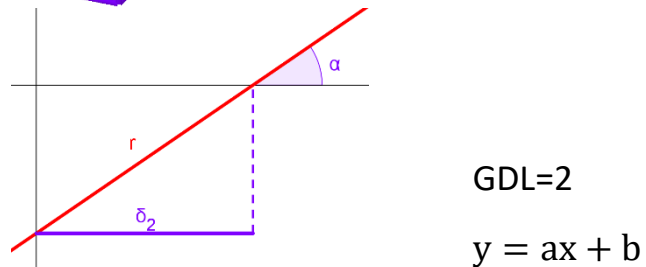


Espacio 3d

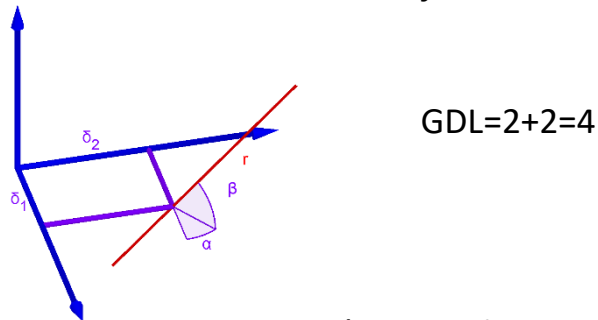


Rectas:

En el plano



En el espacio



Planos:

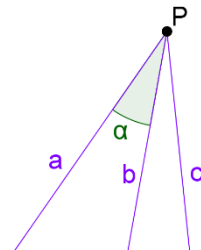
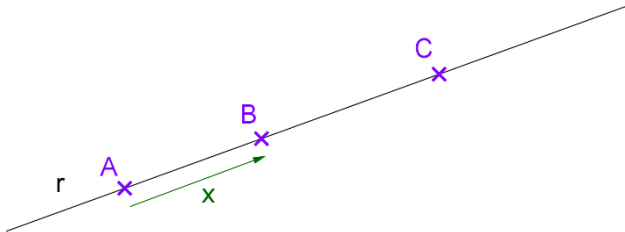
En el espacio

Dirección normal 2
+distancia al origen 1=
GDL=3

Formas geométricas

Categoría = $N = N^{\circ}$ de parámetros necesarios para definir un elemento dentro de la forma

- Formas de 1ª categoría ($N=1$)



Serie rectilínea

Haz de rectas

Conjunto de: puntos (A, B, C, ...)

rectas (a, b, c, ...)

Base: recta (r)

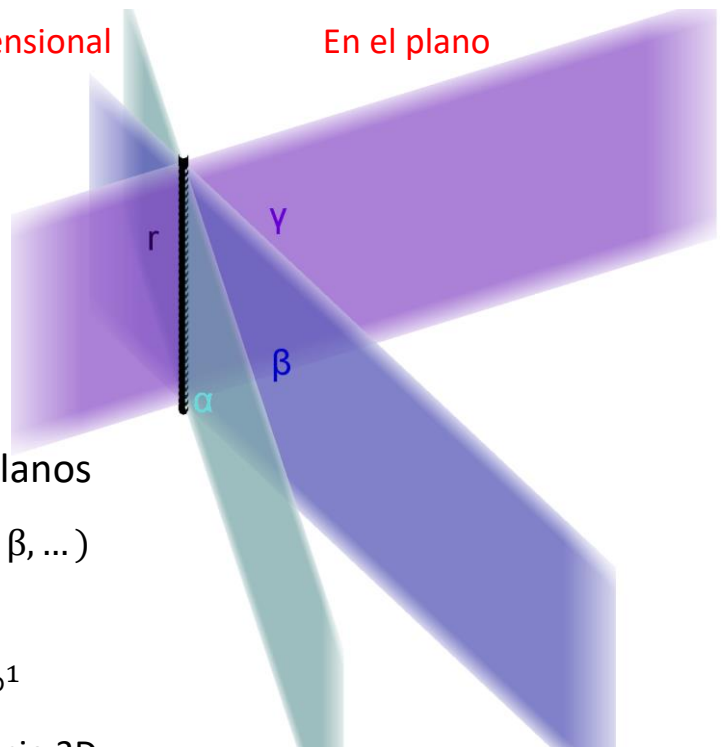
punto (P)

$$P \in r \quad \infty^1$$

$$r \in P \quad \infty^1$$

Espacio unidimensional

En el plano



Haz de planos

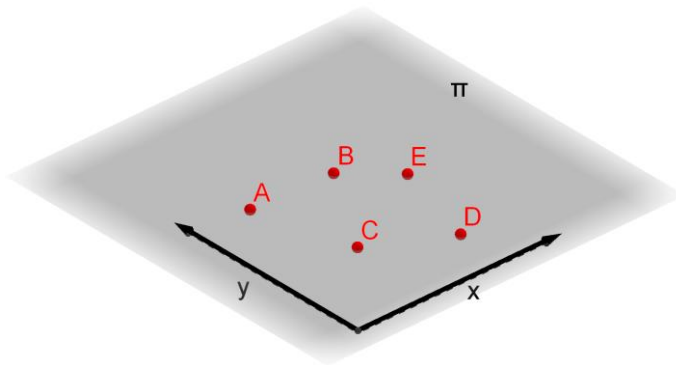
Conjunto de: planos (α, β, \dots)

Base: recta (r)

$$\pi \in r \quad \infty^1$$

En el espacio 3D

- Formas de 2ª categoría (N=2)

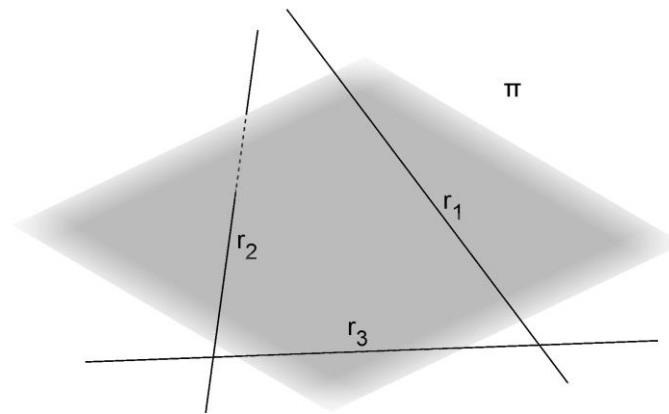


Plano punteado

Conjunto de: puntos (A, B, ...)

Base: plano π

$$P \in \pi \quad \infty^2$$



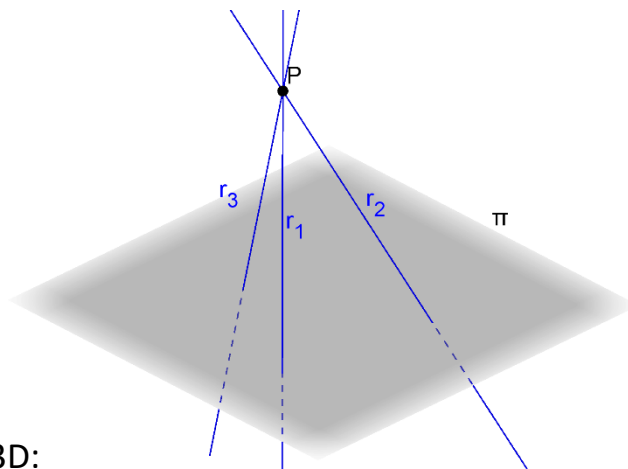
Plano reglado

rectas (r_1, r_2, \dots)

plano π

$$r \in \pi \quad \infty^2$$

Espacio bidimensional



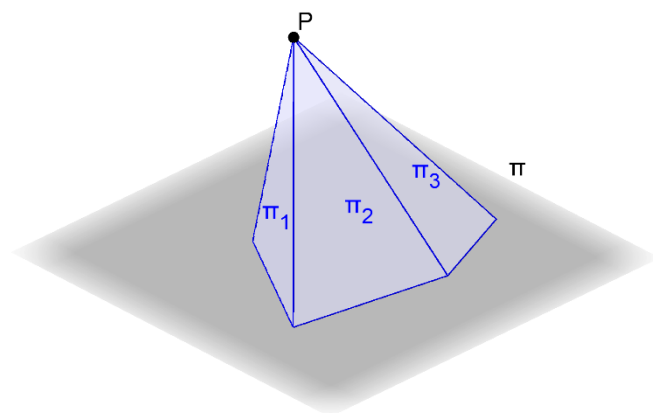
En 3D:

Radiación de rectas

Conjunto de: rectas (r_1, r_2, \dots)

Base: punto (P)

$$r \in P \quad \infty^2$$



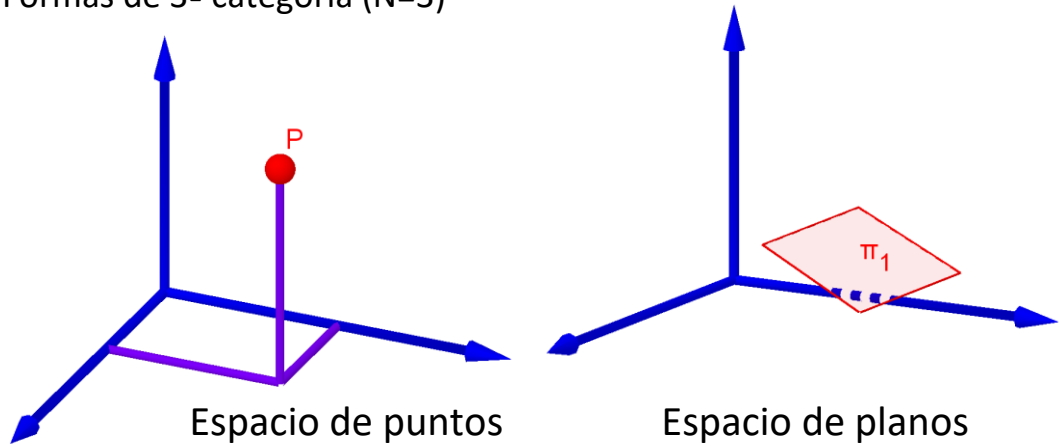
Radiación de planos

planos (π_1, π_2, \dots)

punto (P)

$$\pi \in P \quad \infty^2$$

- Formas de 3ª categoría (N=3)



Conjunto de:	puntos (A, B, ...)	Planos (π_1, π_2, \dots)
Base:	espacio 3D	espacio 3D
	$P \in \mathbb{R}^3 \quad \infty^3$	$\pi \in \mathbb{R}^3 \quad \infty^3$

Espacio tridimensional

¿Por qué no rectas? Nº grados de libertad en el espacio (4)

Postulados iniciales: (no contar-> formalización en el espacio)

-2 elementos no coincidentes en el espacio (forma 3ª categoría) definen una forma de 1ª categoría

-3 elementos no coincidentes forman una forma de 2ª categoría

-1 elemento y una forma de primera categoría no pertenecientes definen una forma de 2ª categoría

punto + recta => plano

plano + recta => punto

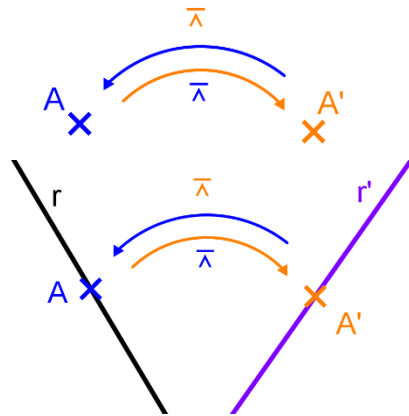
En el plano, puntos y rectas son elementos, y bases de formas de primera categoría.

Transformación proyectiva $\bar{\Lambda}$ (en YouTube)

Postulados de la transformación proyectiva:

-Unicidad

La transformación proyectiva es **biunívoca** (ejemplo que no cumple, la inversión, donde el centro es homólogo de todos los puntos impropios)

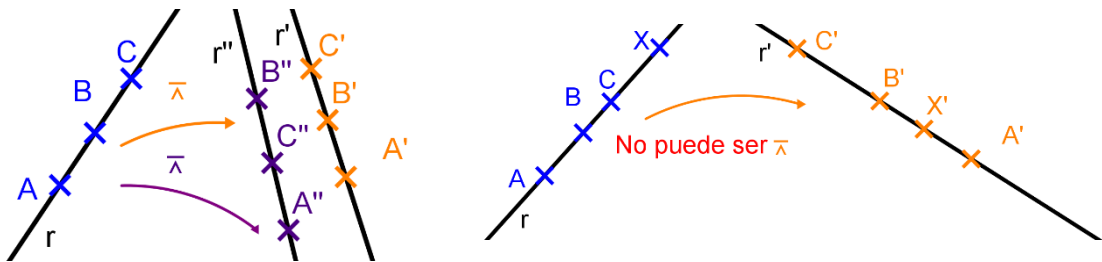


-Pertenenencia

Si $r \bar{\Lambda} r'$ y $A \in r \xrightarrow{\text{entonces}} A' \in r'$

-Orden

La transformada de una serie rectilínea cerrada por el infinito mantiene el orden (piensa en la recta como una circunferencia de radio infinito).

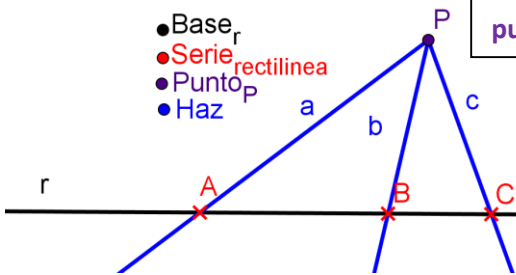


Operaciones proyectivas

Proyección

Proyectando la **serie rectilínea** de **base r** desde el **punto P** -> **Haz**

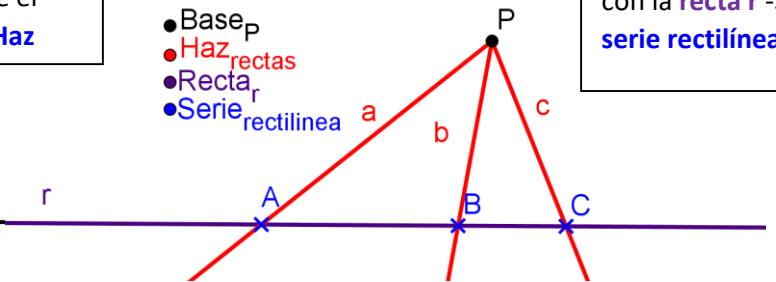
- Base_r
- Serie_{rectilínea}
- Punto_P
- Haz



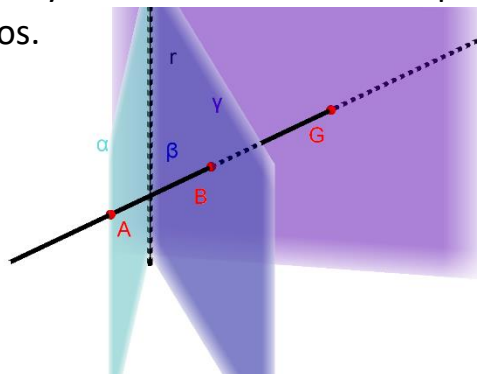
Sección

Seccionando el **haz** de **base P** con la **recta r** -> **serie rectilínea**

- Base_P
- Haz_{rectas}
- Recta_r
- Serie_{rectilínea}



En el plano, series rectilíneas y haces de rectas. En el espacio series rectilíneas y haces de planos.



Ley de Dualidad

-En el plano

Toda proposición de la geometría proyectiva en el plano sigue siendo cierta si se sustituye

Recta -> Punto

Punto-> Recta

Proyección-> Sección

Sección->Proyección

Y viceversa

Lo único que requiere es tener cuidado con el lenguaje

Dos rectas que se cortan en un punto <-> Dos puntos que definen una recta

O emplear dos rectas pertenecen a un punto <-> dos puntos pertenecen a una recta.

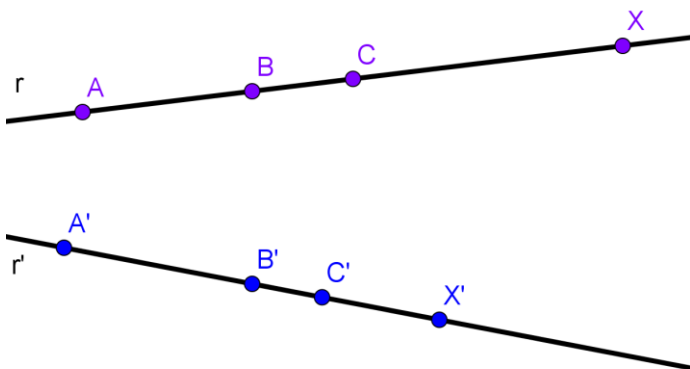
==Dos elementos definen una forma de primera categoría

Un punto "pertenece" a dos rectas <-> una recta "pertenece" a dos puntos

-En el espacio

Lo mismo, pero con planos y puntos

Ternas y cuaternas



si $r(ABCX) \bar{\wedge} r'(A'B'C'X')$

entonces $(ABCX) = (A'B'C'X')$

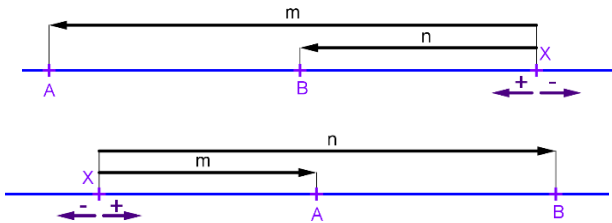
es decir $\frac{(ACX)}{(BCX)} = \frac{(A'C'X')}{(B'C'X')}$

es decir $\frac{\overline{AC}/\overline{AX}}{\overline{BC}/\overline{BX}} = \frac{\overline{A'C'}/\overline{A'X'}}{\overline{B'C'}/\overline{B'X'}}$

A continuación definiremos ambos conceptos.

Razón simple (Teorema de Tales) [\(en YouTube\)](#)

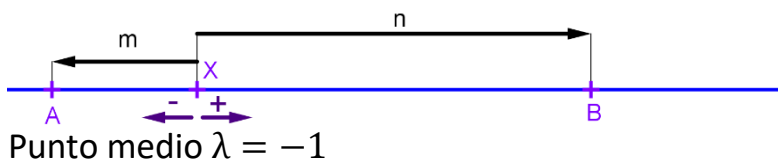
Se define la terna de puntos (XAB) como:



$$(XAB) = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{m}{n} = \lambda$$

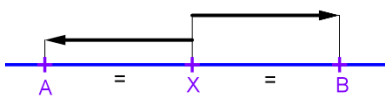
λ se denomina la razón simple entre los tres puntos.

\overline{XA} es una medida, con sentido, medidas con sentidos distintos tienen signo opuesto

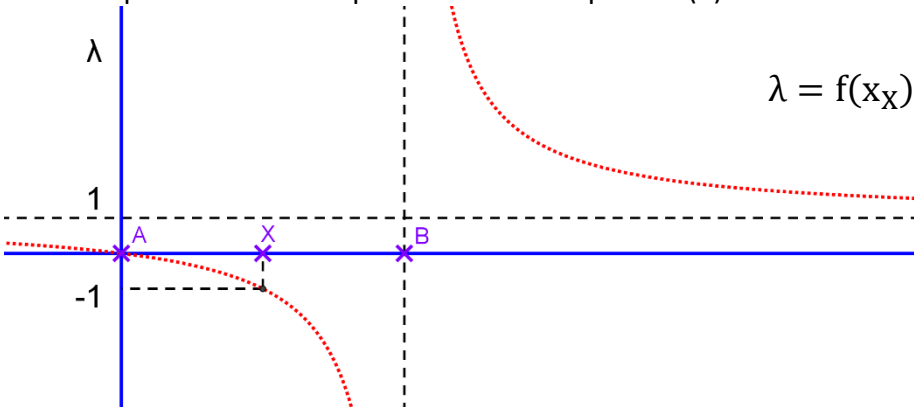


$\overline{XA} \rightarrow$ Negativo

$\overline{XB} \rightarrow$ Positivo

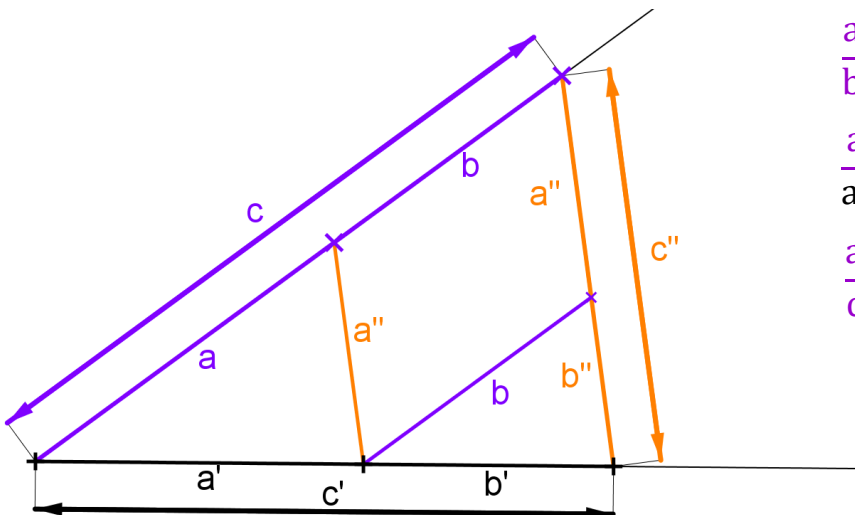


Comparaciones en el que elemento comparado (X) es móvil.



$$\lambda = f(x_X) = (XAB) = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}$$

Teorema de Tales para cálculo gráfico de ternas



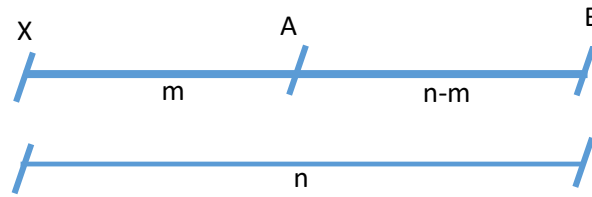
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''}$$

$$\frac{c''}{c} = \frac{a''}{a}$$

Manipulación ternas:



$$(XAB) = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{m}{n} = \lambda$$

$$(XBA) = \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} = \frac{n}{m} = \frac{1}{\lambda}$$

$$(BAX) = \frac{\overline{BA}}{\overline{BX}} = \frac{-(n-m)}{-n} = 1 - \lambda$$

$$(BXA) = \frac{\overline{BX}}{\overline{BA}} = \frac{-n}{-(n-m)} = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$(AXB) = \frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \frac{-m}{n-m} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

$$(ABX) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{n-m}{-m} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$(XAB) (XBA) = 1$$

$$(XAB) + (BAX) = 1$$

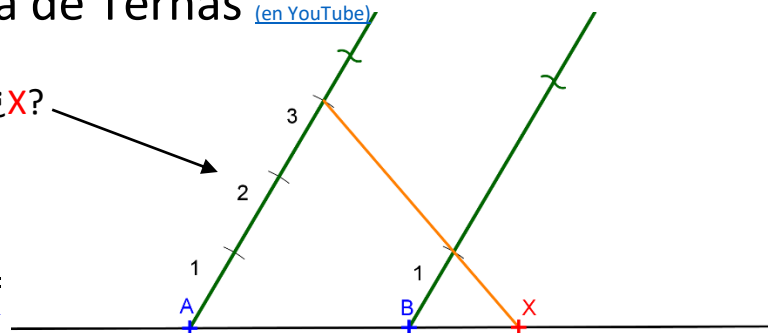
Determinación Gráfica de Ternas (en YouTube)

$$(XAB) = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = 3$$

¿B?

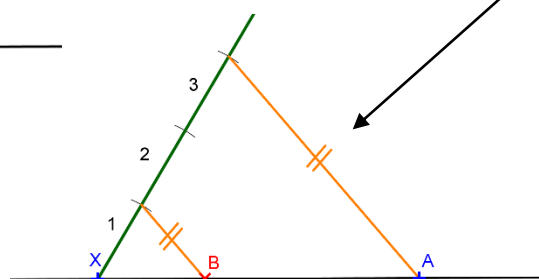
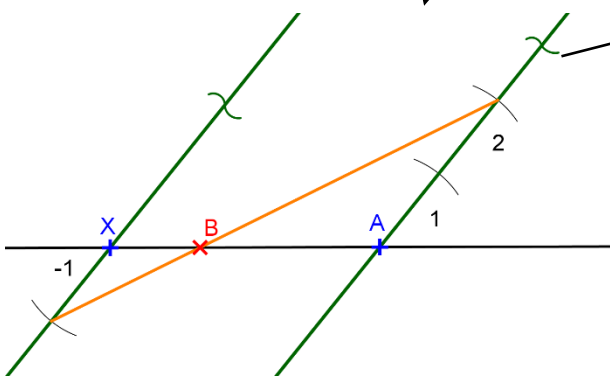
$$(BXA) = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BA}}$$

¿X?

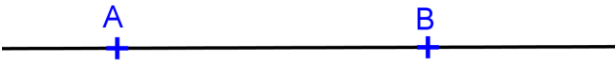


o, más sencillo:

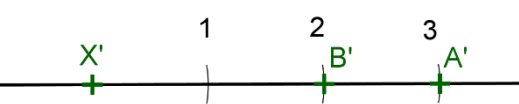
$$(XAB) = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = 3 \rightarrow \overline{XB} = \frac{\overline{XA}}{3}$$



Otra manera de pensar en la resolución de estos problemas es pensar en que construir una terna dada siempre es trivial si los tres puntos se pueden situar libremente. Por ejemplo, tómesese el ejercicio:

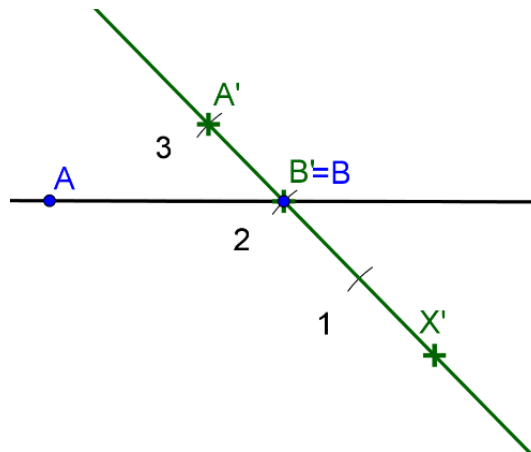
$$(XAB) = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{3}{2}$$


La dificultad está en que **A** y **B** son conocidos. Es trivial, sin embargo, construir

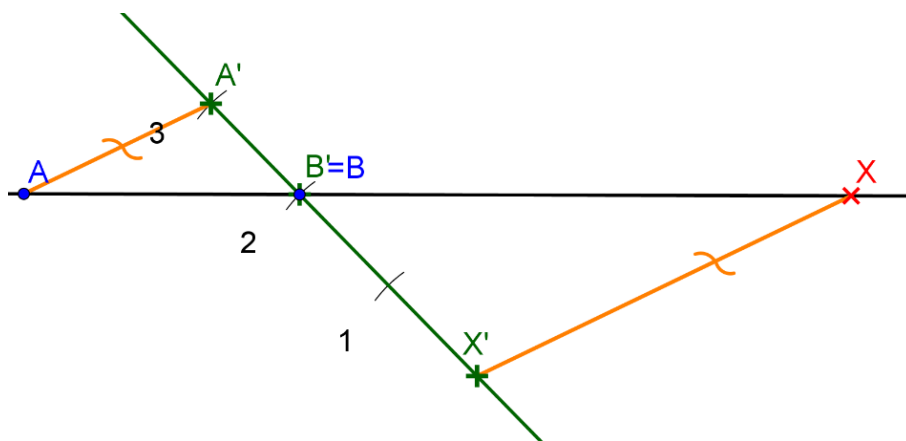
$$(X'A'B') = \frac{\overline{X'A'}}{\overline{X'B'}} = \frac{3}{2}$$


si podemos colocar primero **X'**.

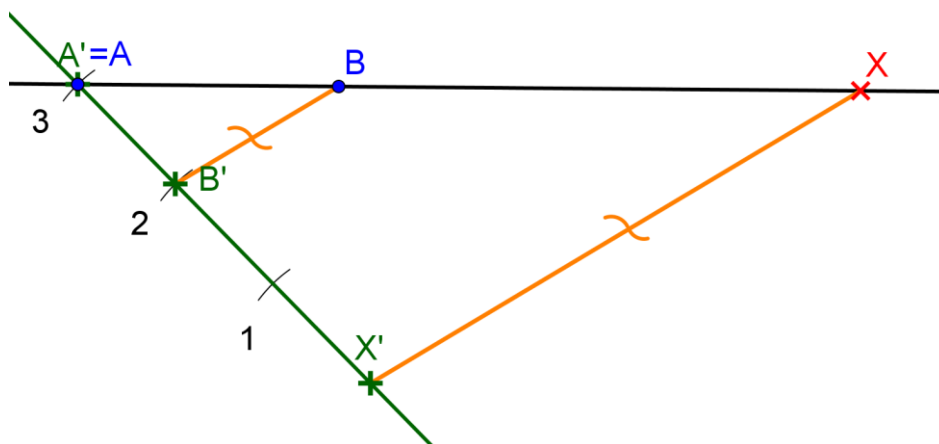
Para poder hacer Tales, ahora sólo es necesario colocar la nueva terna prima de forma que una de las letras conocidas coincida, o bien **A=A'** o bien **B=B'**. Por ejemplo:



Y trazando la **recta** entre **A** y **A'**, y una **paralela** por **X'** se puede determinar el punto **X**.

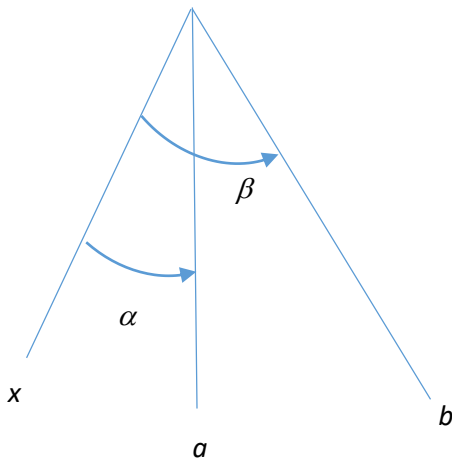


Y, como puede verse, da lo mismo resolver con **A=A'** y la **recta** entre **B** y **B'** paralela a la recta entre **X** y **X'**.

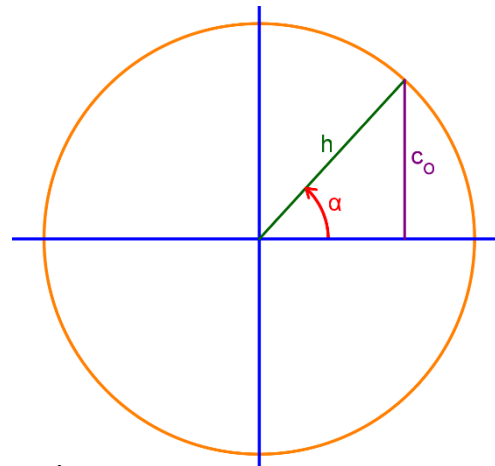


Terna de rectas

Se define la razón simple como el cociente entre los senos de los ángulos:



$$(xab) = \frac{\sin(\widehat{xa})}{\sin(\widehat{xb})} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \lambda$$

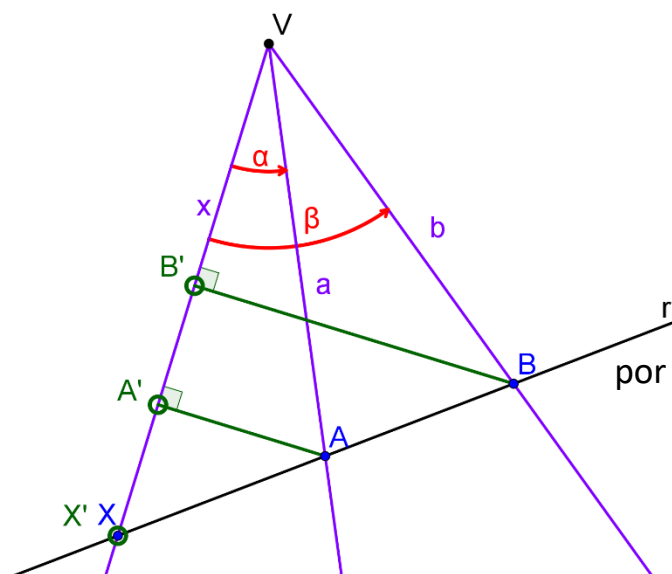


Repaso de la función seno:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c_o}{h}$$

$\sin 0 = 0$, función impar

Pregunta, ¿es $(XAB) = (xab)$ cuando $r(XAB) \bar{\wedge} V(xab)$?



$$\sin \alpha = \frac{\overline{AA'}}{\overline{VA}}; \sin \beta = \frac{\overline{BB'}}{\overline{VB}}$$

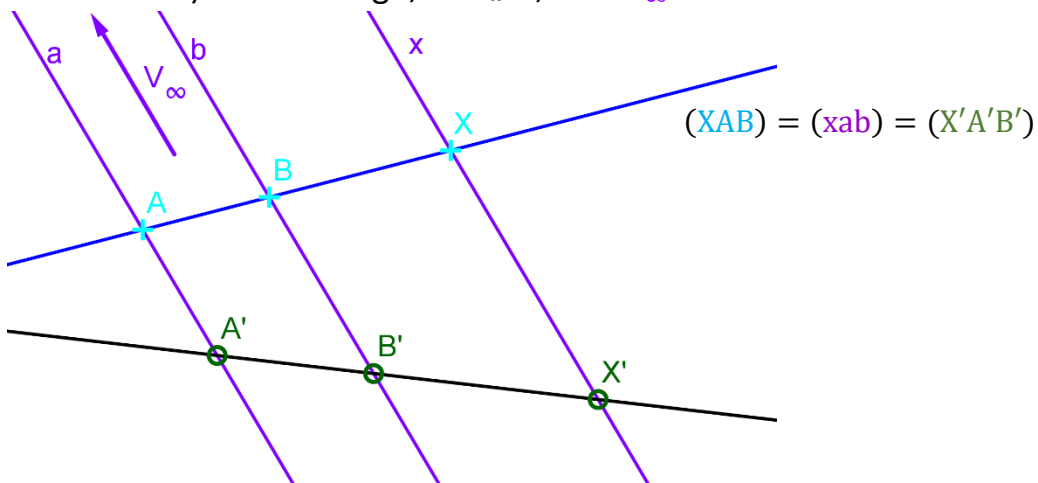
$$(xab) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\overline{AA'} \overline{VB}}{\overline{VA} \overline{BB'}} = \frac{\overline{AA'} \overline{VB}}{\overline{BB'} \overline{VA}}$$

por Tales, $\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}$ y $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = (XAB)$, con lo que:

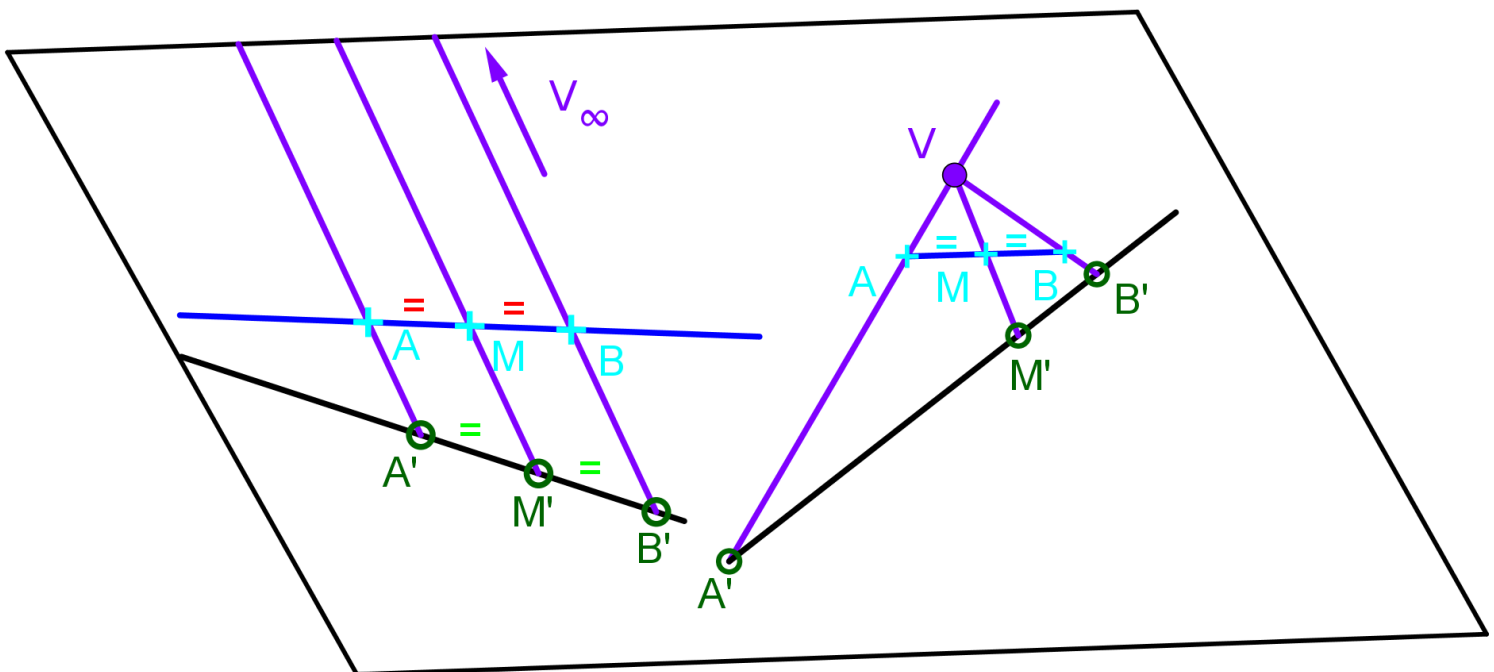
$$(xab) = (XAB) \frac{\overline{VB}}{\overline{VA}} \rightarrow (XAB) = (xab) \frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$$

En general proyectividad no implica conservación de la razón simple. ¿Cuándo sí sucede? Cuando $\overline{VA} = \overline{VB}$

Decir que el triángulo es isósceles no aporta nada (sólo valdría para rayos en concreto). Sin embargo, si $a \parallel b$, $V = V_\infty$:



Es decir, cuando se proyecta desde un vértice impropio, o se secciona un haz de vértice impropio, la proyectividad resultante conserva la razón simple: hemos redescubierto el Teorema de Tales.



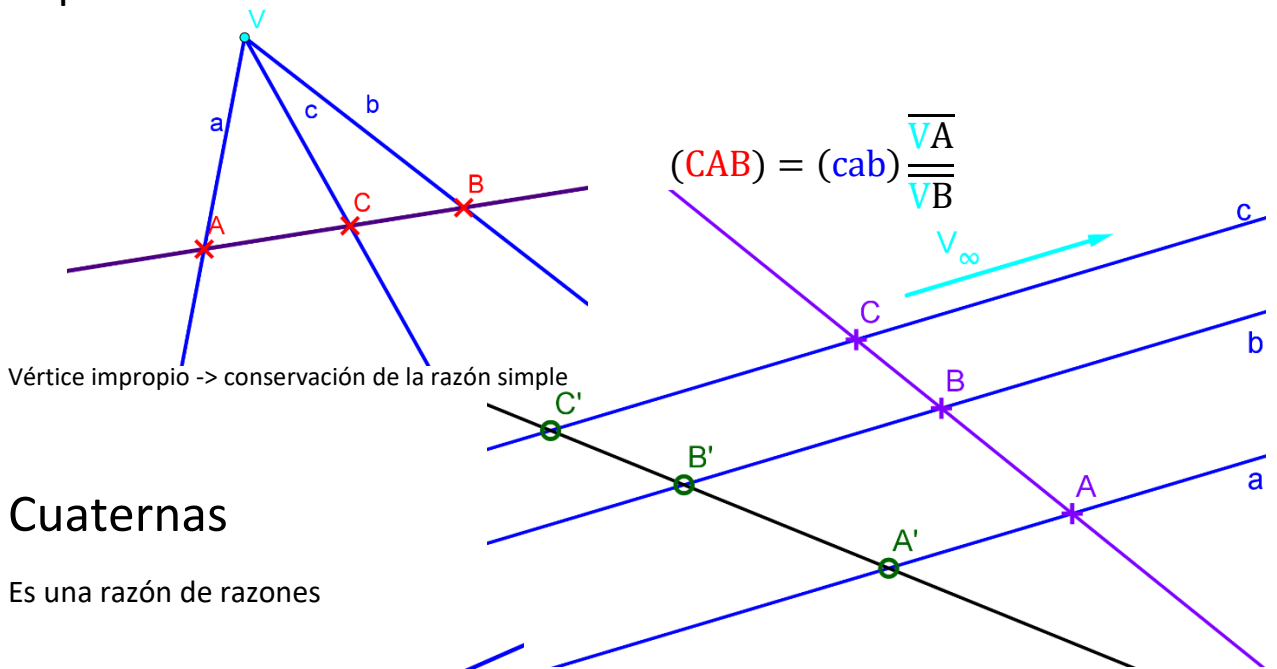
Y también porqué el punto medio de un segmento, proyectado desde un vértice no impropio, no queda en el punto medio del segmento proyectado.

Por eso era necesario hacer coincidir una pareja de puntos al [determinar las ternas](#), si no es imposible asegurar que los rayos sean paralelos, el vértice impropio, y se conserve la razón simple.

RAZÓN DOBLE (en YouTube)

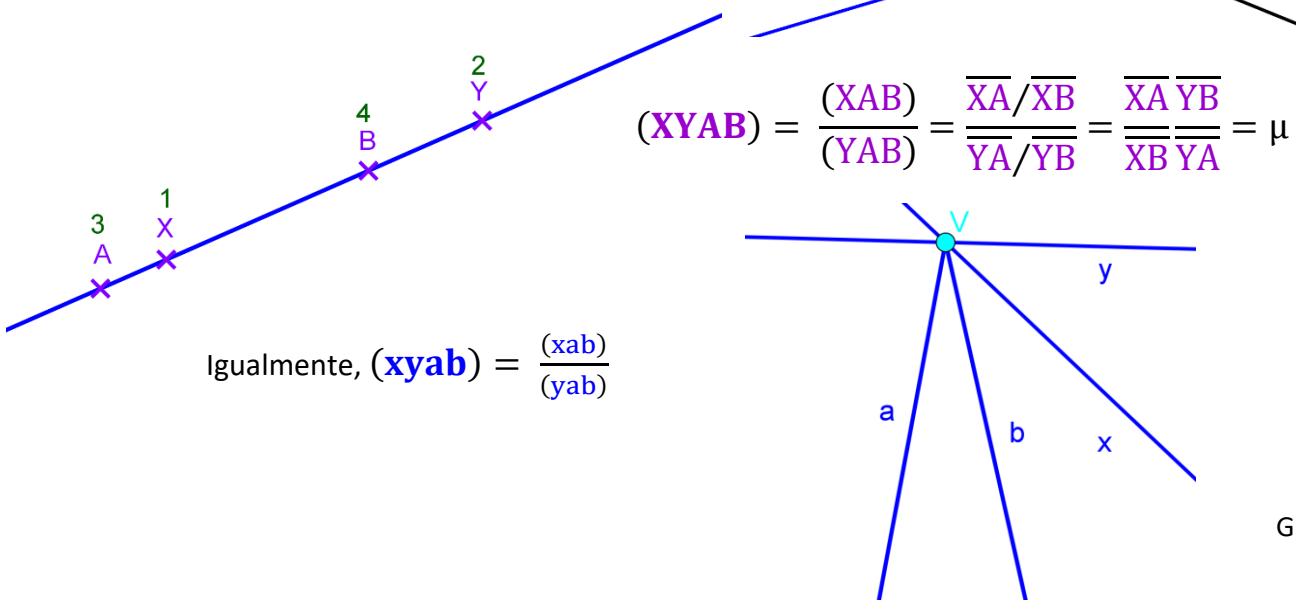
- Cuaternas
- Invariante Proyectivo
- Determinación gráfica de cuaternas
- Cuaterna Armónica
- Cuadrilátero y Cuadrivértice completos
- Polar de un punto respecto a dos rectas
- Formas proyectivas de primera categoría
 - Perspectividad $\overline{\lambda}$
 - Series perspectivas
 - Centro perspectivo
 - Dual: haces perspectivos
 - Eje perspectivo

Repaso de ternas



Cuaternas

Es una razón de razones



$$\begin{aligned}
 (\mathbf{XYAB}) = \mu &\longrightarrow (\mathbf{XYBA}) = \frac{1}{\mu} \\
 &\longrightarrow (\mathbf{YXAB}) = \frac{1}{\mu}
 \end{aligned}$$

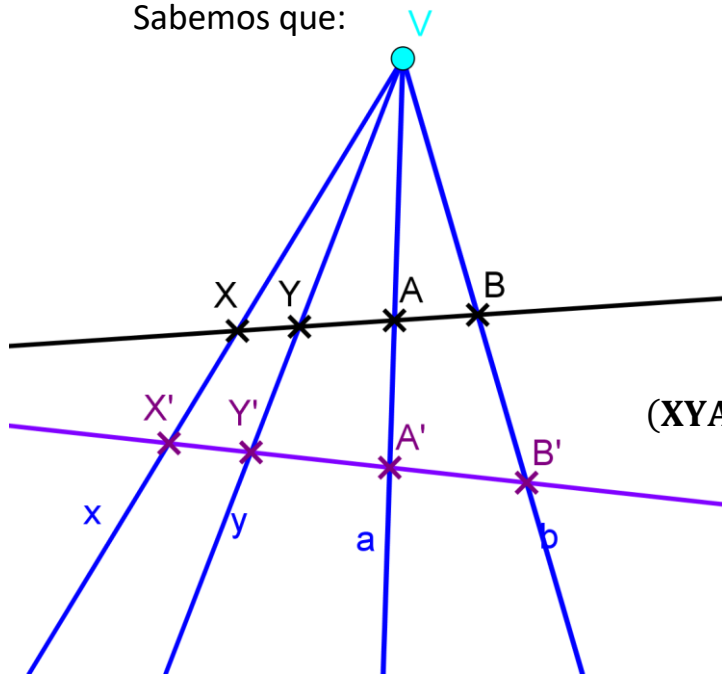
Es decir:

$$(\mathbf{XYAB}) = (\mathbf{ABXY}) = (\mathbf{BAYX}) = (\mathbf{YXBA})$$

Además: $(\mathbf{XYAB}) + (\mathbf{XABY}) = 1$

Invariante proyectivo

Sabemos que:



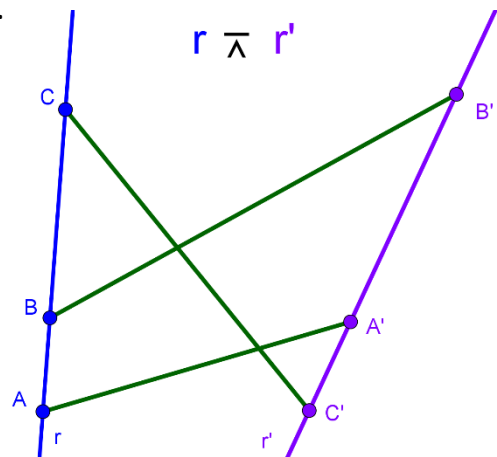
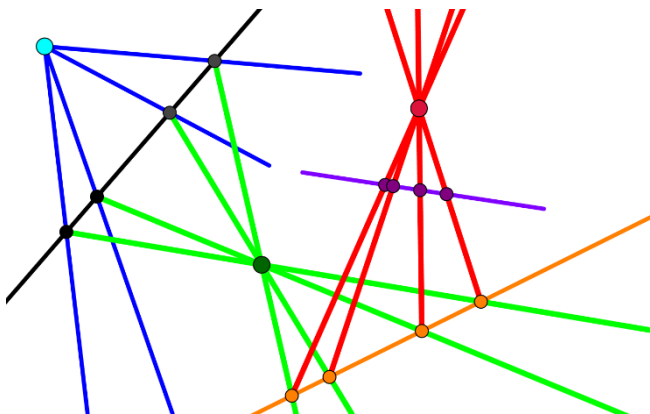
$$(\mathbf{XAB}) = (\mathbf{xab}) \frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$$

$$(\mathbf{YAB}) = (\mathbf{yab}) \frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$$

$$(\mathbf{XYAB}) = \frac{(\mathbf{xab}) \frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}}{(\mathbf{yab}) \frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}} = \frac{(\mathbf{xab})}{(\mathbf{yab})} = (\mathbf{xyab})$$

$$(\mathbf{XYAB}) = (\mathbf{xyab}) = (\mathbf{X'Y'A'B'})$$

La razón doble es un invariante proyectivo, se puede seccionar y proyectar cualquier número de veces y se conserva.



Sólo hay relación directa (perspectiva $\overline{\lambda}$) si existe elemento doble (el elemento común a ambas bases es homólogo de sí mismo).

Determinación Gráfica de Cuaternas [\(en YouTube\)](#)

Si se hace una proyección auxiliar en la que el segundo elemento esté en el infinito, los tres puntos restantes tienen una razón simple igual a la doble, dado que $(Y_{\infty}AB) = 1$. Además, si se coloca un elemento doble, tenemos una relación perspectiva $(\bar{\lambda})$, y tenemos un vértice que relaciona ambas series.

$$(\mathbf{XY}_{\infty}\mathbf{AB}) = \frac{(\mathbf{XAB})}{(\mathbf{Y}_{\infty}\mathbf{AB})} = (\mathbf{XAB})$$

$$(\mathbf{XYAB}) = 3/2 \text{ ¿X? } \mathbf{Y}'_{\infty} \longrightarrow (\mathbf{X}'\mathbf{A}'\mathbf{B}') = \frac{3}{2} = \frac{\overline{\mathbf{X}'\mathbf{A}'}}{\overline{\mathbf{X}'\mathbf{B}'}}$$

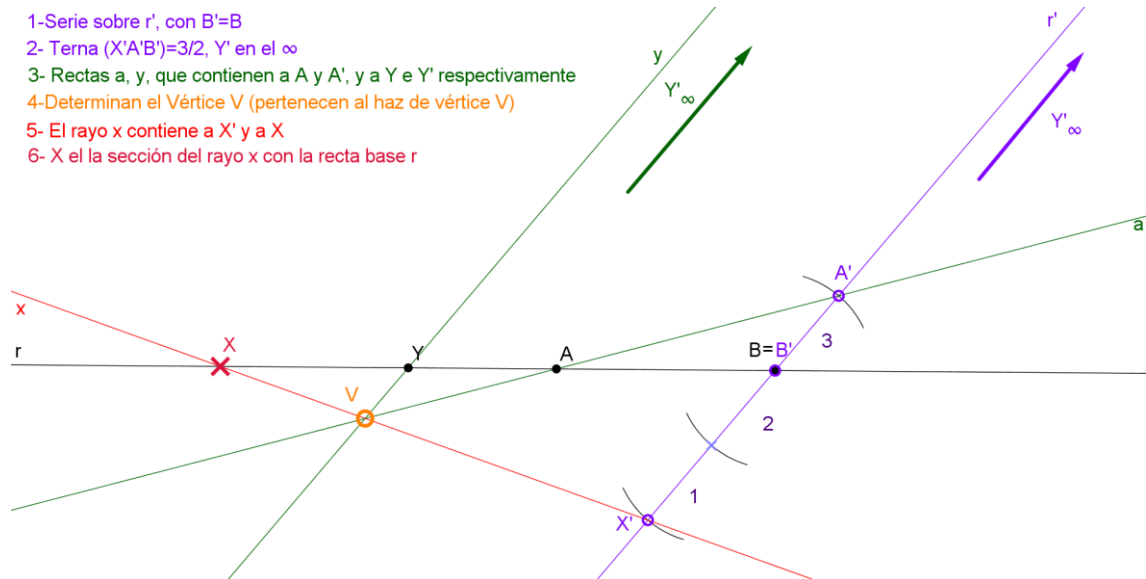
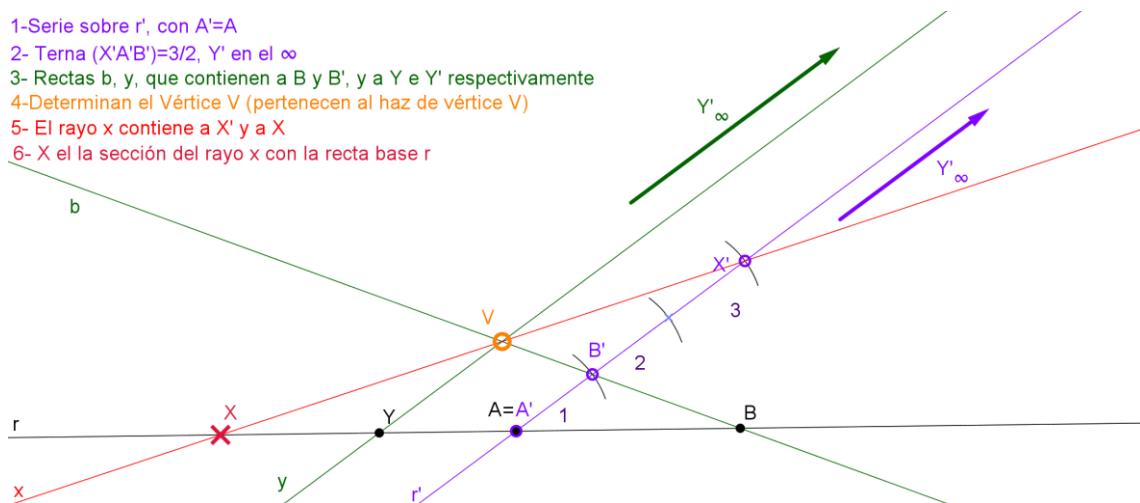


Figura con enlace a GeoGebra



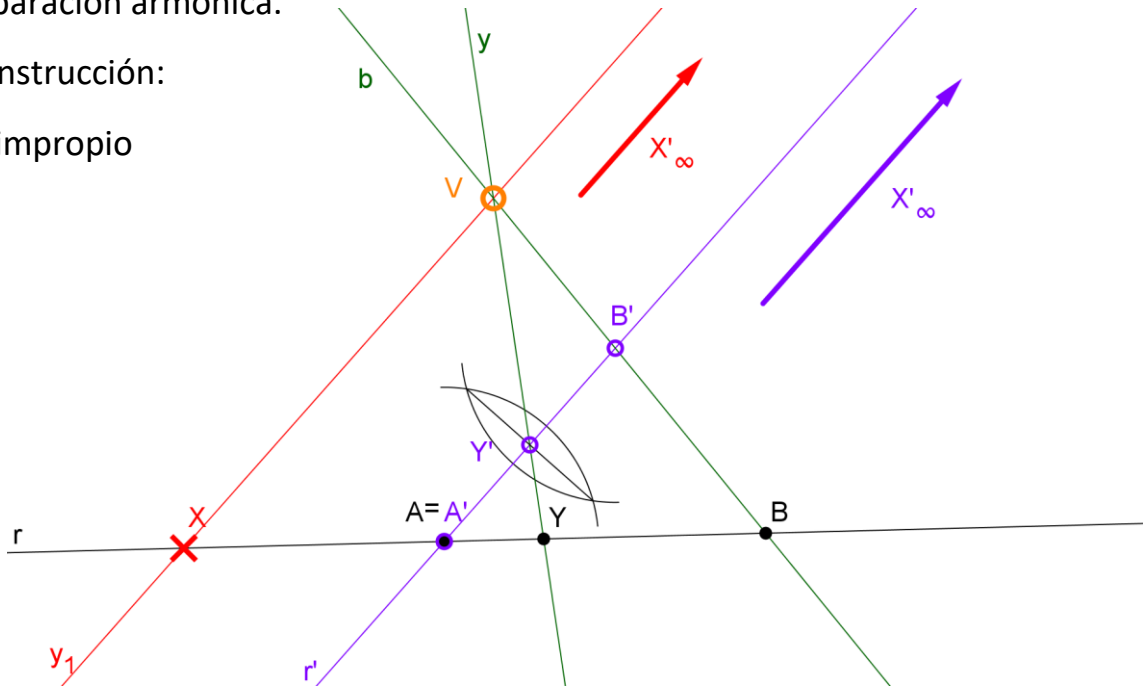
Cuaterna Armónica

$(XYAB) = -1$ Las dos razones son iguales, pero una de ellas es negativa.

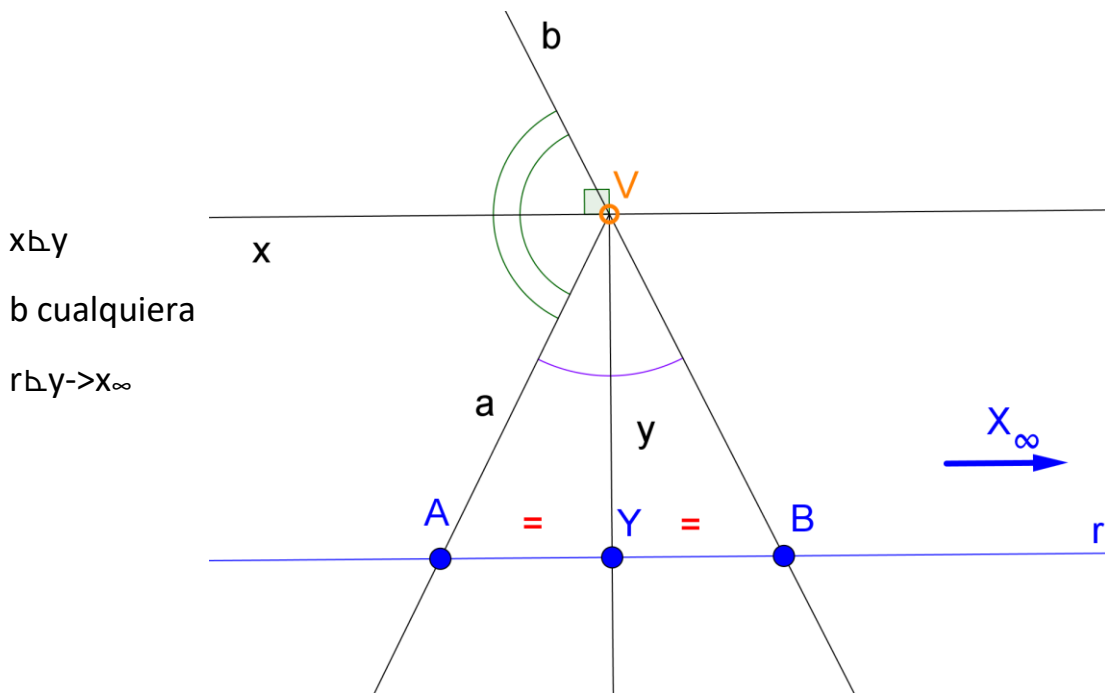
También se denominan pares separados armónicamente, o puntos en separación armónica.

Construcción:

X' impropio



¿Qué pasa si los rayos x e y son perpendiculares? Que son bisectriz de los rayos a y b .



Cuadrilátero y Cuadrivértice completo

4 vértices (A, B, C, D)

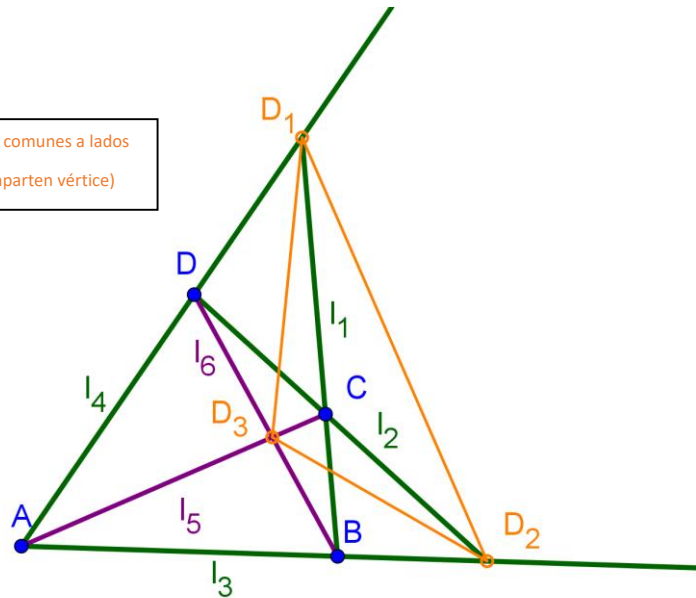
$4+2=6$ lados ($l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$)

3 puntos Diagonales

(D_1, D_2, D_3)

3 Diagonales

(elementos comunes a lados que no comparten vértice)

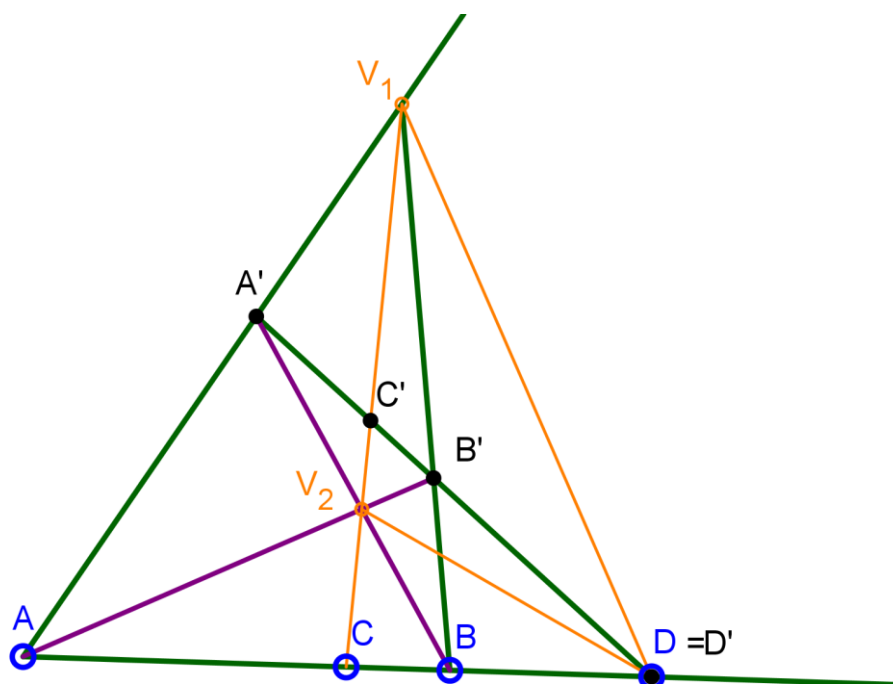


Propiedades armónicas

(ABCD) = ($A'B'C'D'$) pr. desde V_1

$$(ABCD) = (BACD) = \frac{1}{(ABCD)} = -1$$

(BACD) = ($A'B'C'D'$) pr. desde V_2



Dos lados de un cuadrivértice separan armónicamente a las diagonales que concurren en el punto diagonal que determinan.

El dual es el cuadrilátero completo.

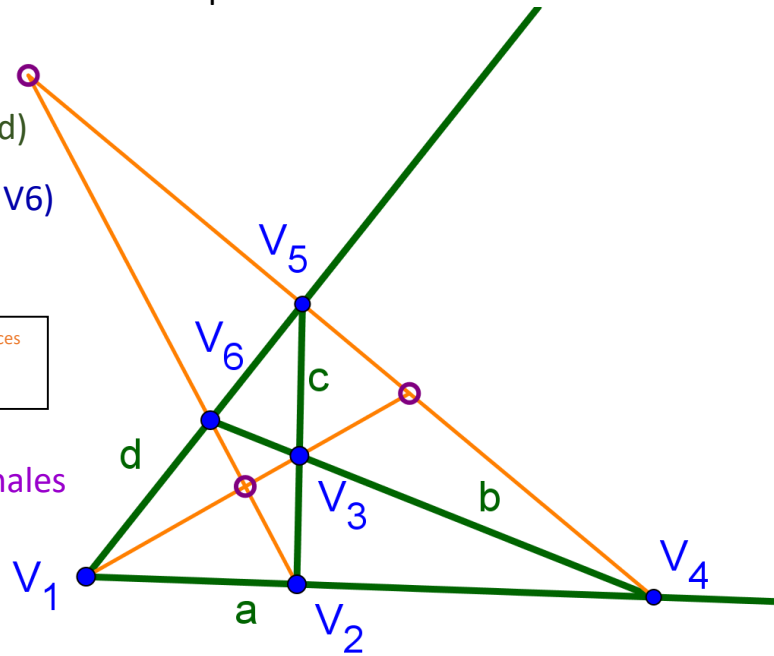
4 lados (a, b, c, d)

6 vértices (V1 a V6)

3 diagonales

(elementos comunes a vértices que no comparten lado)

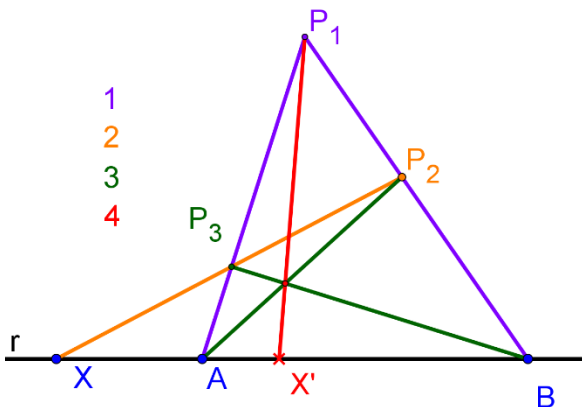
3 Puntos diagonales



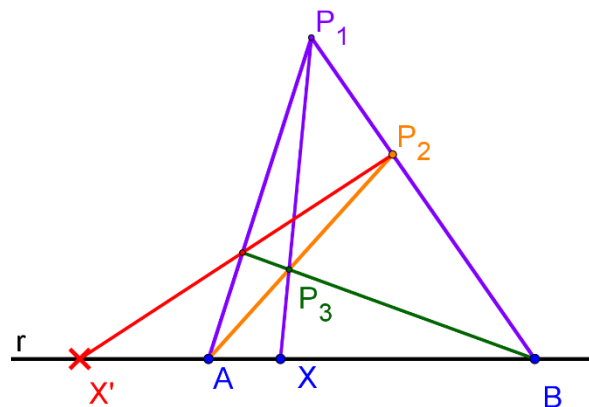
Para construir una cuaterna armónica construyo un cuadrivértice/ cuadrilátero Completo. [\(en YouTube\)](#)

$$(XX'AB) = -1 \quad \text{¿X'?$$

Figura con enlace a GeoGebra

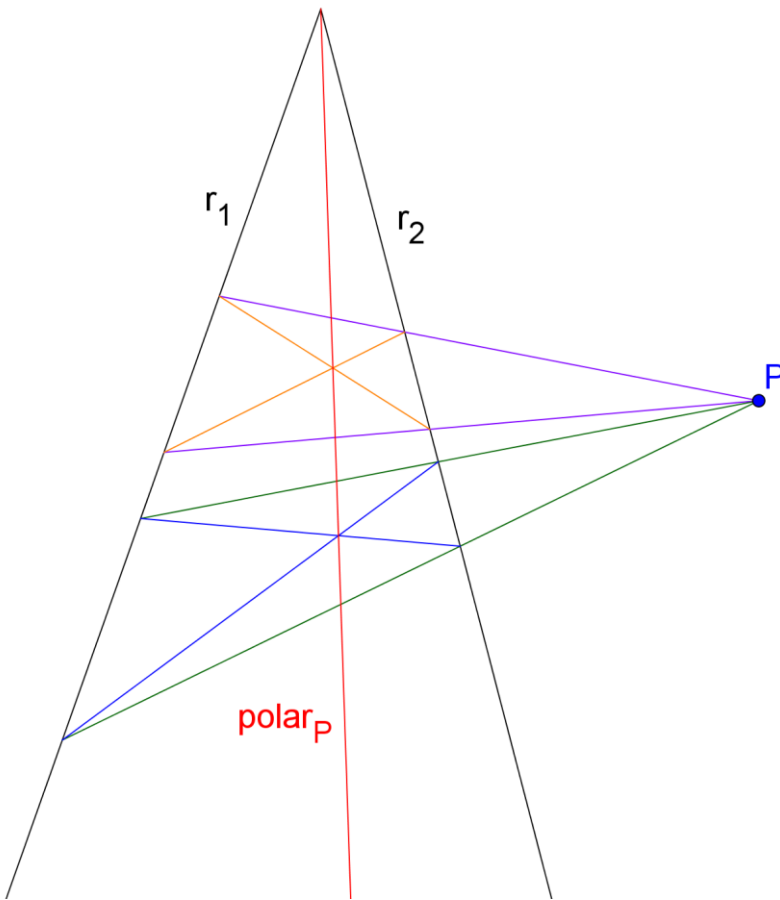


Falta punto interior



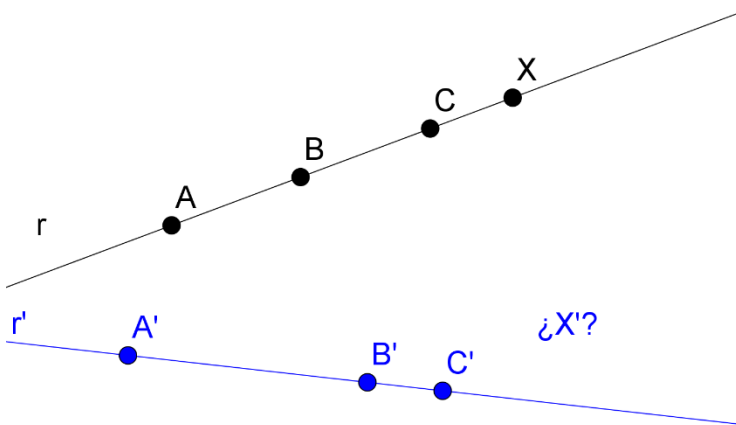
Falta punto exterior

Polar de un punto con respecto a dos rectas

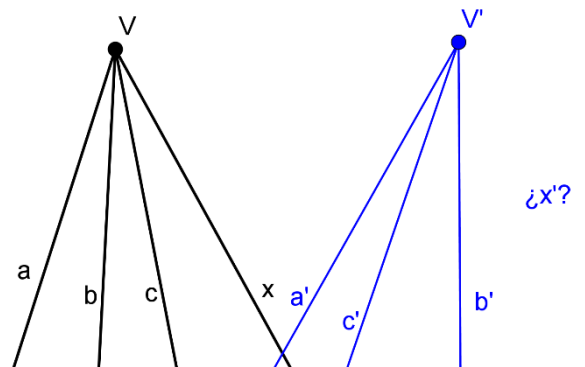


En un cuadrivértice completo, cualquier recta trazada desde un punto diagonal, secciona a los otros dos lados y a la diagonal opuesta en puntos separados armónicamente con dicho punto diagonal. Por ello se denomina a la diagonal opuesta a un punto diagonal la **polar** de ese punto respecto a las dos rectas.

Formas Proyectivas de primera categoría



Transformación
 $r(ABCX) \bar{\Lambda} r'(A'B'C'X')$



Se puede sacar con valores numéricos de cuaternas, muy poco efectivo.

Perspectividad [\(en YouTube\)](#)

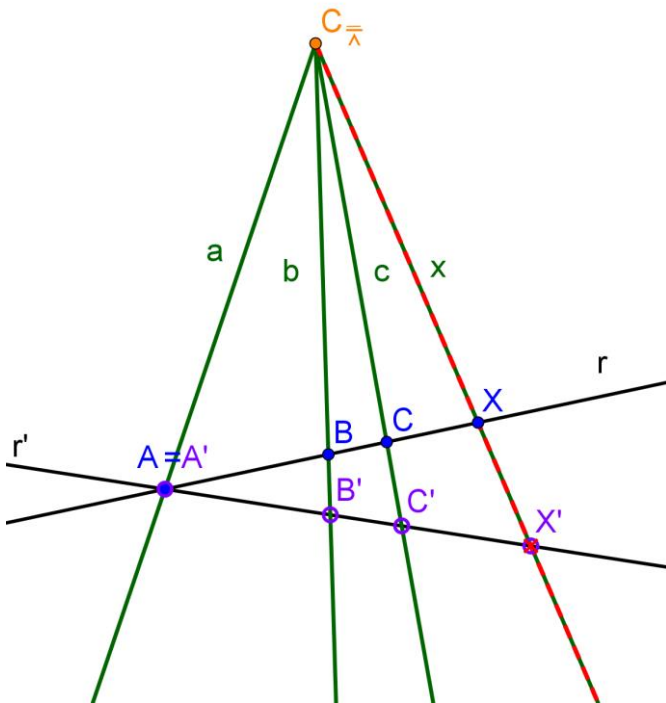
Series perspectivas

Dos series no superpuestas son perspectivas cuando hay una relación proyectiva entre ambas, y además hay un elemento que coincide con su homólogo ($A=A'$).

(el elemento común es homólogo de sí mismo)

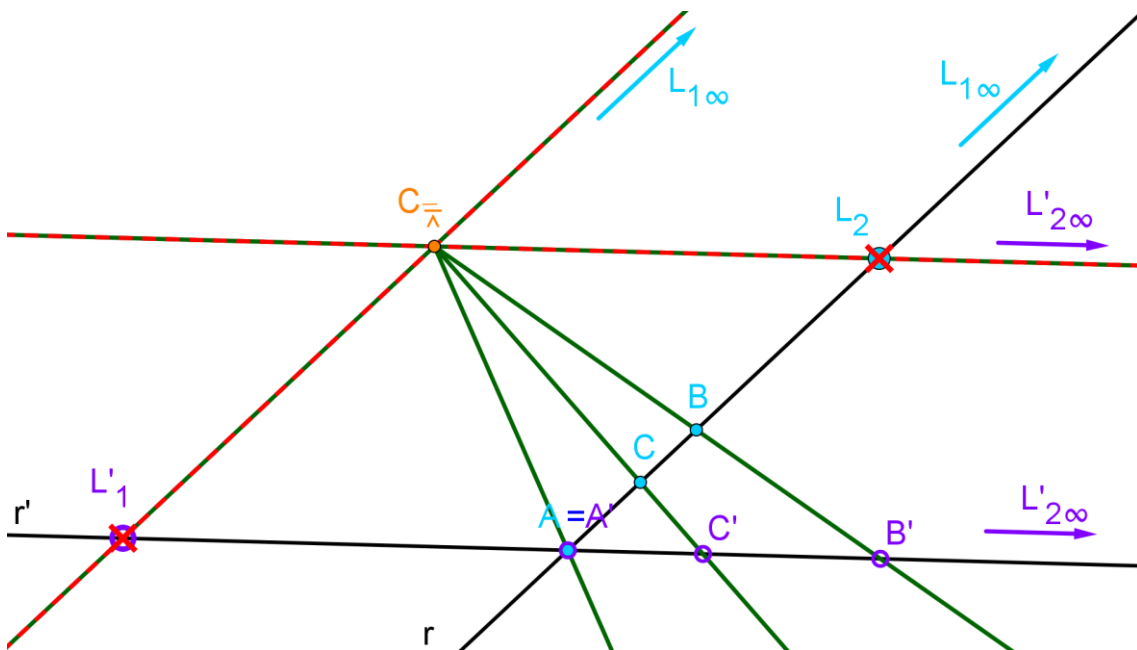
Esto es equivalente a que las dos series sean secciones del mismo haz.

El vértice de dicho haz se denomina **centro perspectivo $C_{\bar{\lambda}}$**



Esto permite utilizar ese haz para determinar elementos homólogos.

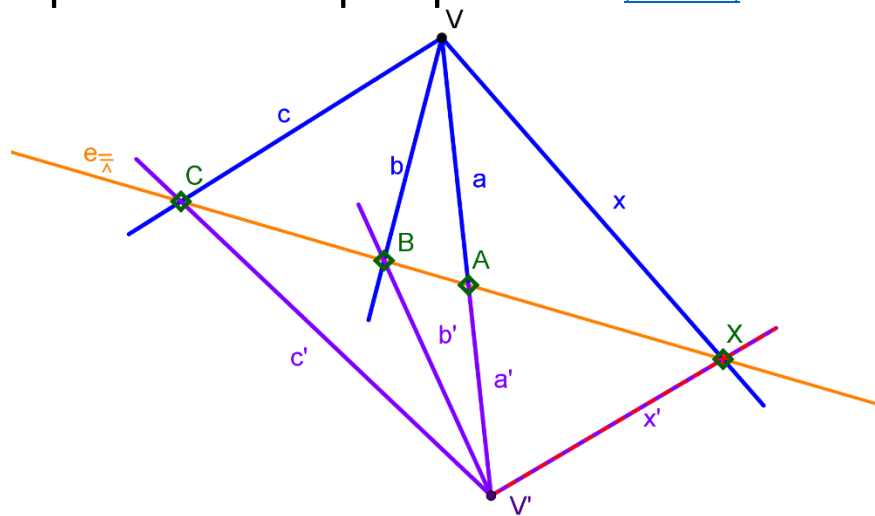
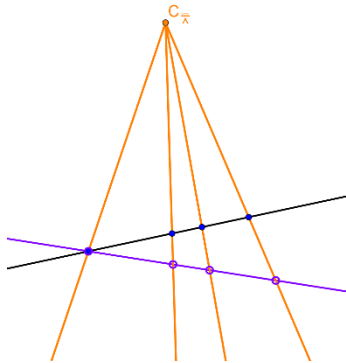
Los homólogos de los puntos impropios ($L_{1\infty}$ y $L'_{2\infty}$) se denominan **puntos límites (L'_1 y L_2)**



Dualidad en el plano: Haces perspectivos [\(en YouTube\)](#)

Punto->recta

Recta->punto



Dos haces son perspectivos cuando hay una relación proyectiva entre ambas, y una recta que coincide con su homóloga ($a=a'$).

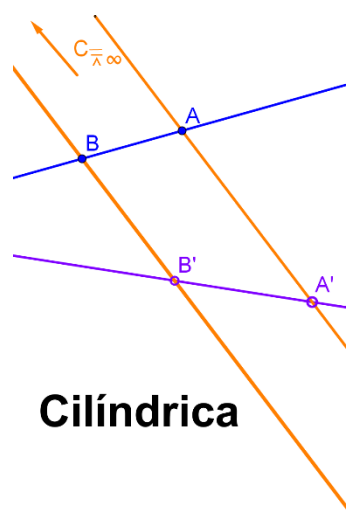
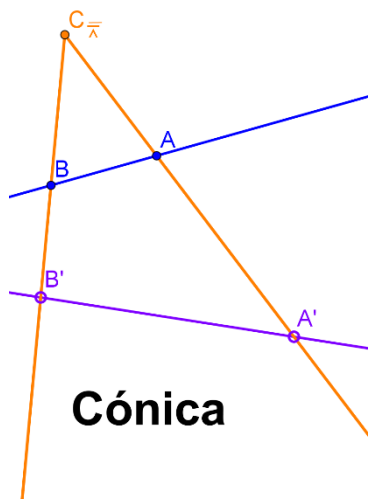
Es equivalente a decir que ambos haces son proyección de una misma serie rectilínea.

Esa serie es el eje perspectivo e .

El concepto de elemento límite no tiene sentido (dado que no hay recta impropia que pase por un punto propio).

Notas finales:

- La perspectividad es una proyectividad con una condición adicional, es más restrictivo. Es importante familiarizarse con la nomenclatura.
- Los sistemas de proyección cónica se basan en relaciones perspectivas.
- Si en el caso de dos series perspectivas el centro perspectivo es impropio, se recupera una proyección cilíndrica, se conserva la razón simple-> Tales.



Formas Proyectivas de primera categoría [\(en YouTube\)](#)

- Repaso determinación de cuaternas
 - Cuaternas en haces
- Perspectividad $\bar{\lambda}$
 - Determinación de rayos \perp
- Proyectividad $\bar{\lambda}$
 - Series Proyectivas
 - Eje proyectivo
 - Homólogos del punto de corte
 - Puntos límites
 - Dual: haces proyectivos
 - Centro proyectivo
 - Homólogos del rayo común
- Series semejantes
- Haces congruentes
- Formas superpuestas
 - Elementos dobles
- Formas en involución

Repaso determinación de cuaternas

GP4, GP6, GP7, GP13

Ejemplo de cuaterna en haces:

$$(abcd) = -\frac{3}{5} \quad \text{¿d?} \rightarrow (abcd) = \frac{(acd)}{(bcd)} = \frac{(ACD)}{(B_{\infty}CD)} = \frac{AC}{AD} = -\frac{3}{5}$$

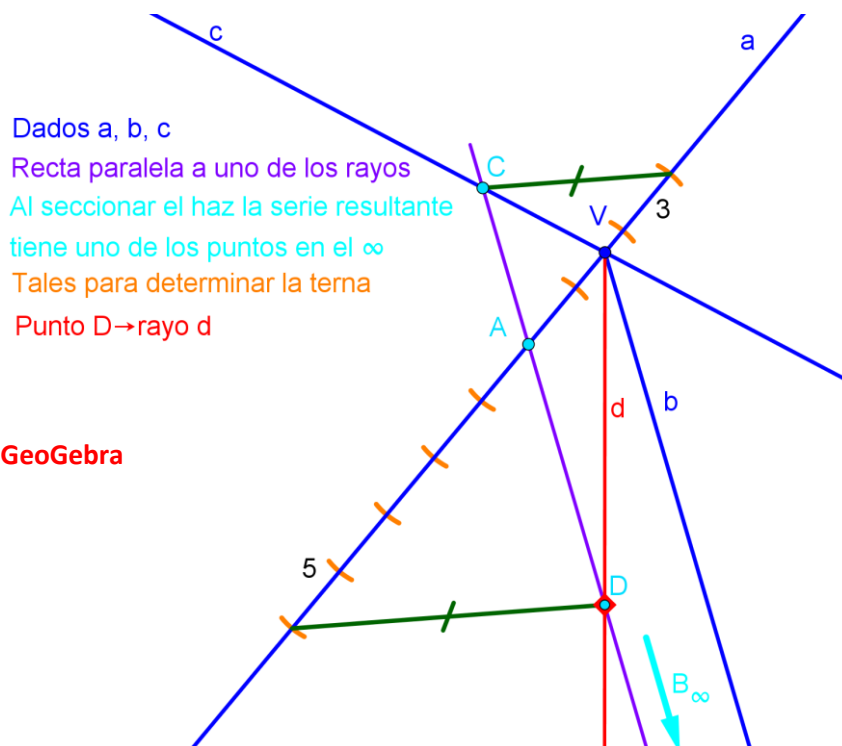
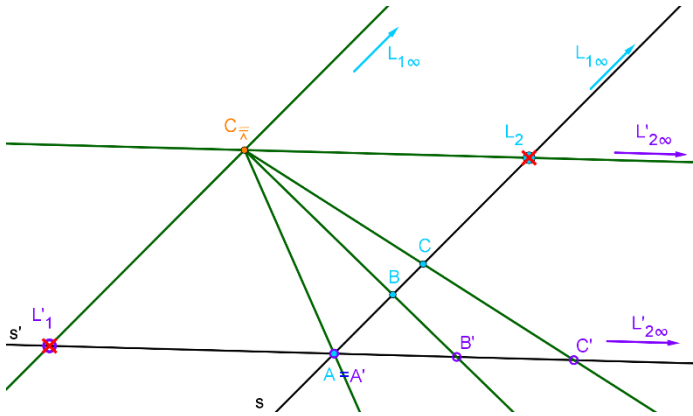


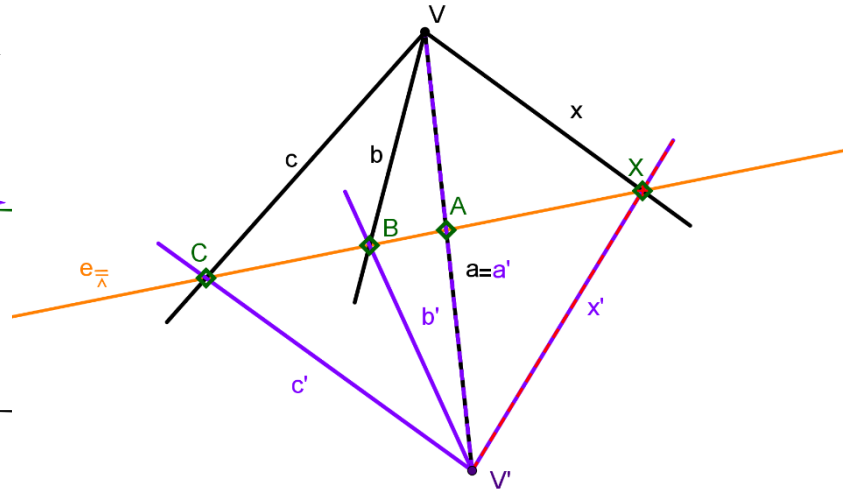
Figura con enlace a GeoGebra

$\overline{\Lambda}$

Series y haces, centro y eje perspectivo, puntos límite.



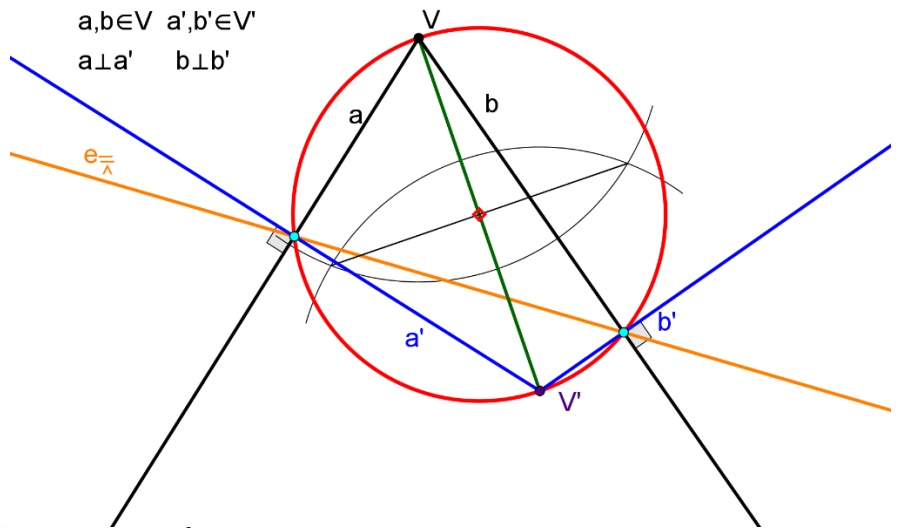
$s \overline{\Lambda} s'$



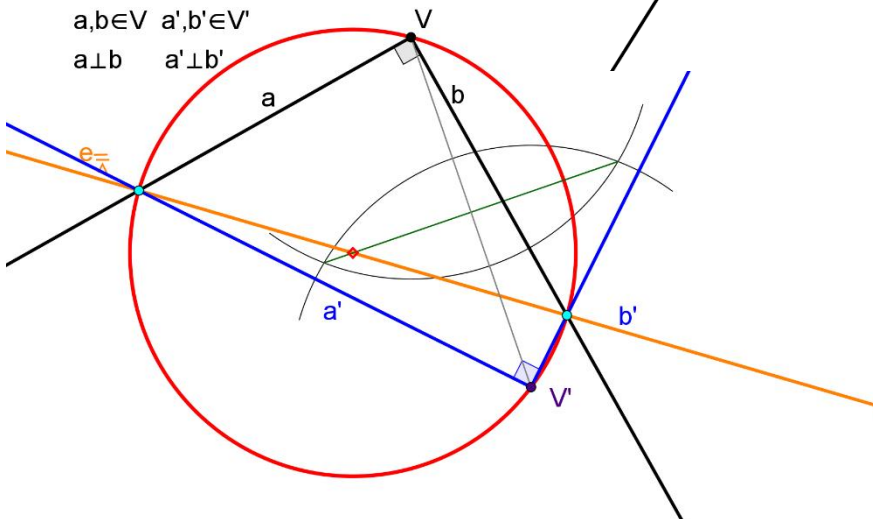
$V \overline{\Lambda} V'$

GP14- Haces perspectivos: rayos ortogonales a sus homólogos, rayos ortogonales con homólogos ortogonales.

$a, b \in V \quad a', b' \in V'$
 $a \perp a' \quad b \perp b'$



$a, b \in V \quad a', b' \in V'$
 $a \perp b \quad a' \perp b'$

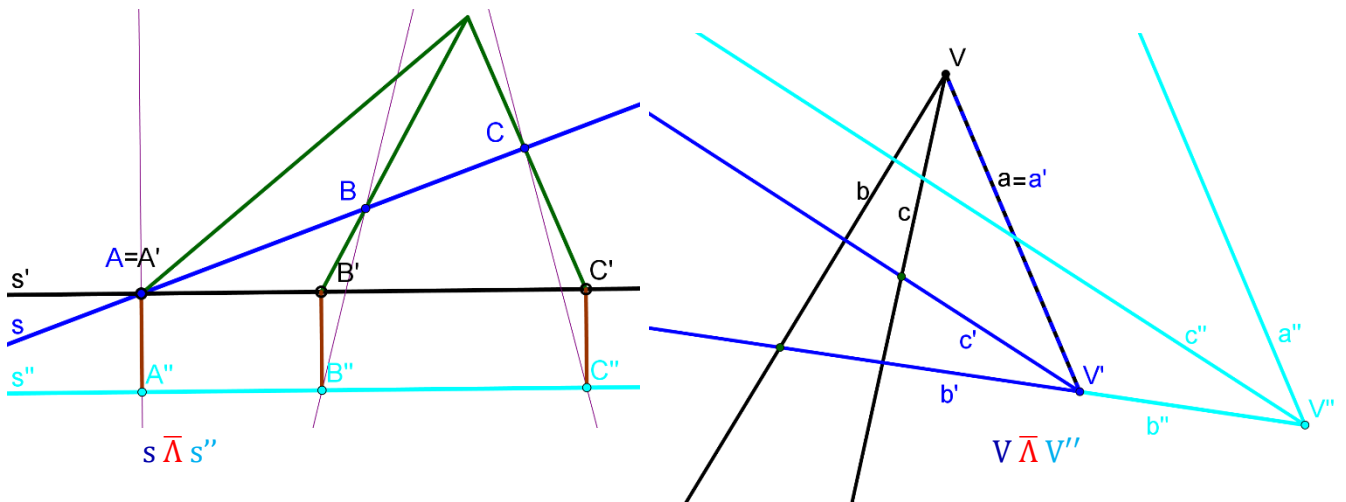


Proyectividad $\bar{\Lambda}$ (en YouTube)

Perspectividad desplazada, el elemento común no es homólogo de sí mismo:

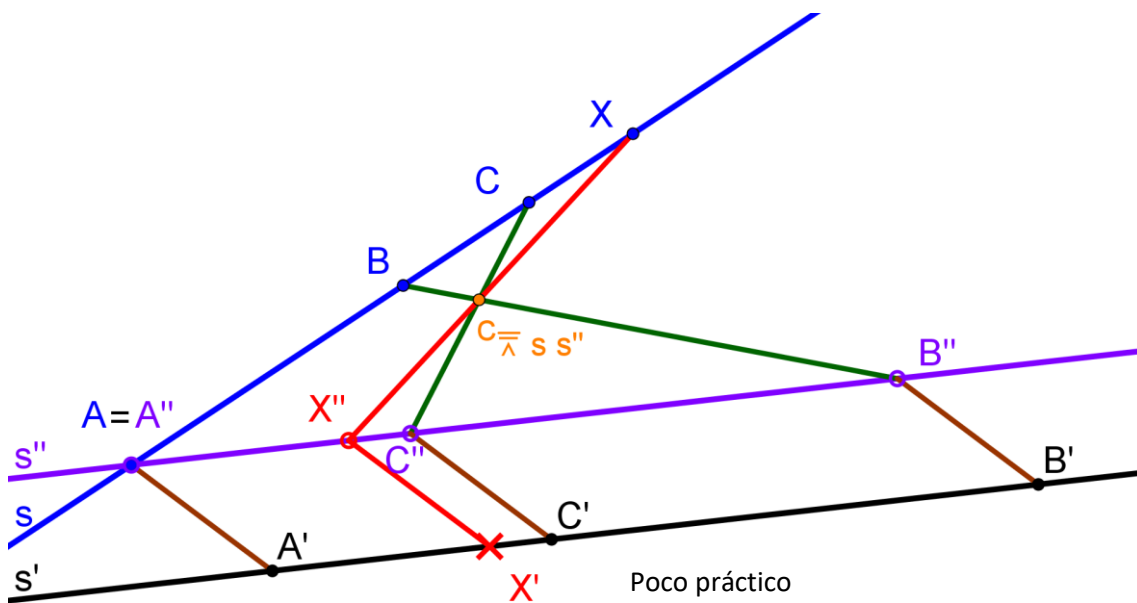
$$s \bar{\Lambda} s' \quad s' \bar{\Lambda} s'' \quad s \bar{\Lambda} s''$$

$$V \bar{\Lambda} V' \quad V' \bar{\Lambda} V'' \quad V \bar{\Lambda} V''$$

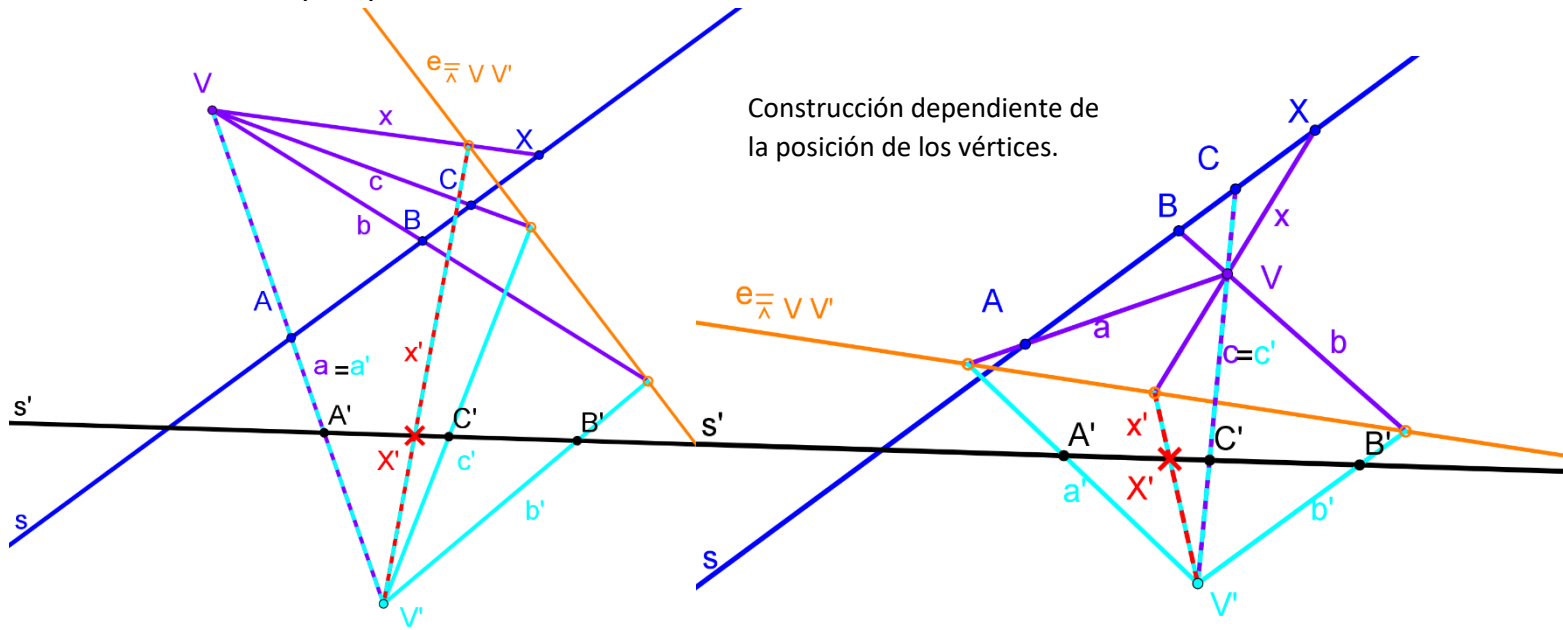


Soluciones:

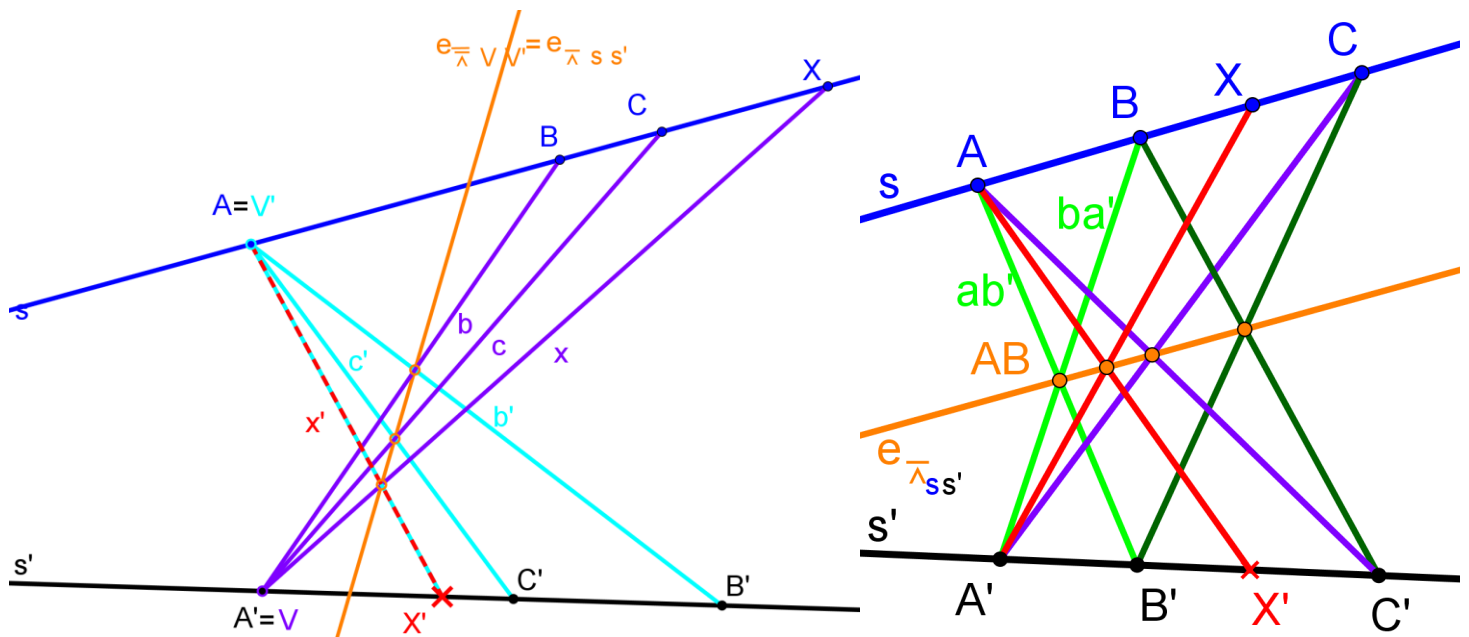
- 1- Traslación para hacerla perspectiva (la traslación es una proyección de vértice impropio y sección con recta paralela)



2- Proyectar las series desde dos vértices de forma que sean haces perspectivos



3- Lo mismo, usando un punto de la serie y su homólogo como vértice:
Eje proyectivo $e_{\bar{\lambda}}$ -> independiente del punto elegido



Eje proyectivo $e_{\bar{\lambda}}$ de una proyectividad entre dos series: lugar geométrico de los puntos donde se cortan los rayos cruzados (ab' y ba') entre cualquier pareja de pares homólogos ($A-A'$ y $B-B'$).

$$\forall A, B \quad ab' = A \cap B'; \quad ba' = B \cap A'; \quad AB = ab' \cap ba' \rightarrow AB \in e_{\bar{\lambda}}$$

Las series perspectivas están relacionadas por un centro perspectivo, las series proyectivas por un eje proyectivo.

Los Homólogos del punto de corte ($N=M'$) de las series son los puntos de corte del eje proyectivo con las series ($N' = e_{\bar{\lambda}} \cap s'$ y $M = e_{\bar{\lambda}} \cap s$).

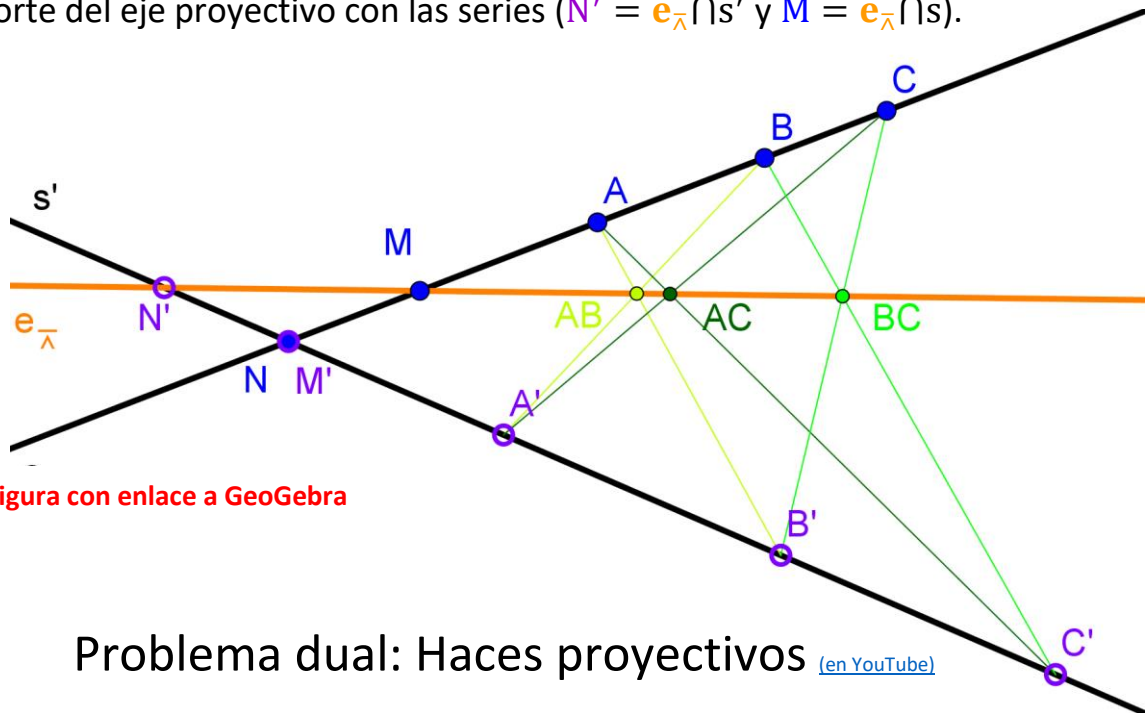


Figura con enlace a GeoGebra

Problema dual: Haces proyectivos [\(en YouTube\)](#)

Series en rayos homólogos -> Centro proyectivo $C_{\bar{\lambda}}$

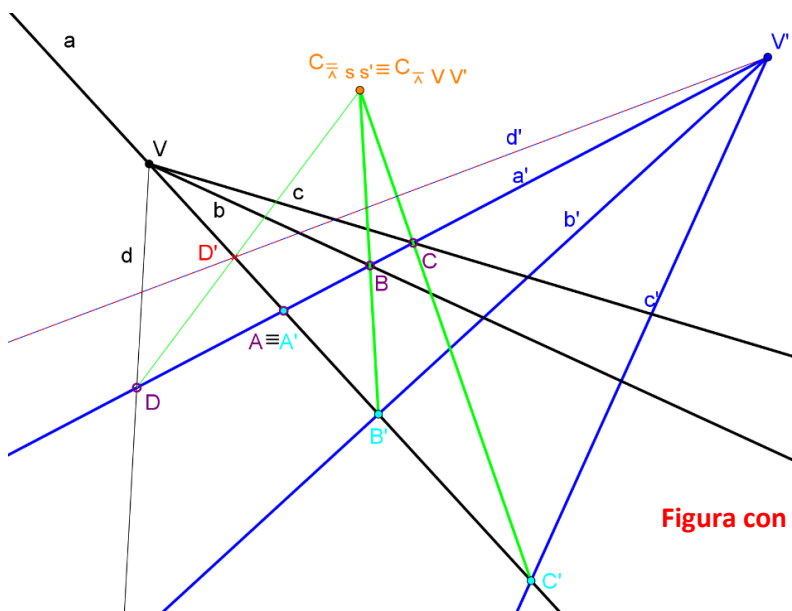
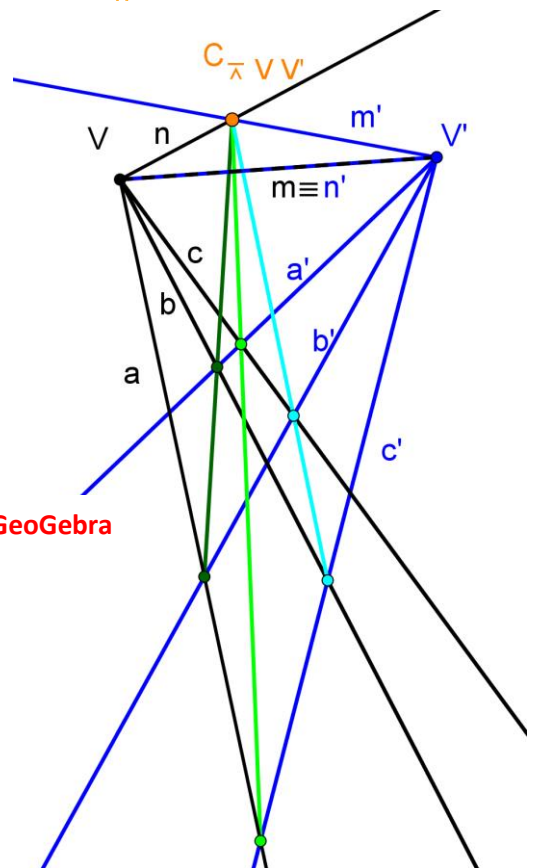
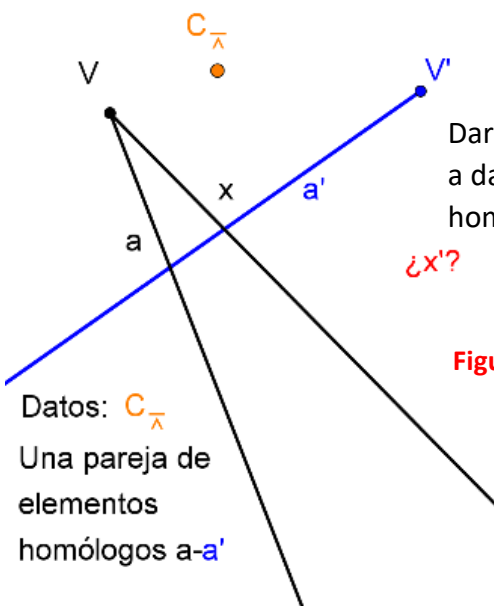


Figura con enlace a GeoGebra

Centro proyectivo $C_{\bar{\lambda}}$ de una proyectividad entre dos haces: intersección de las rectas (ab) que unen puntos donde se cortan los rayos cruzados ($AB' = a \cap b'$ y $BA' = b \cap a'$) entre cualquier pareja de pares homólogos ($a-a'$ y $b-b'$).



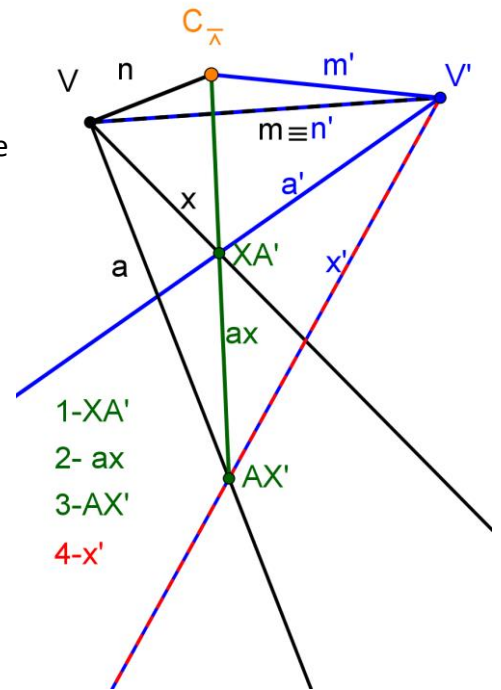
Homólogos de la recta común (tangentes de la cónica proyectiva)



Dar el centro proyectivo equivale a dar las parejas de rayos homólogos $m-m'$ y $n-n'$.

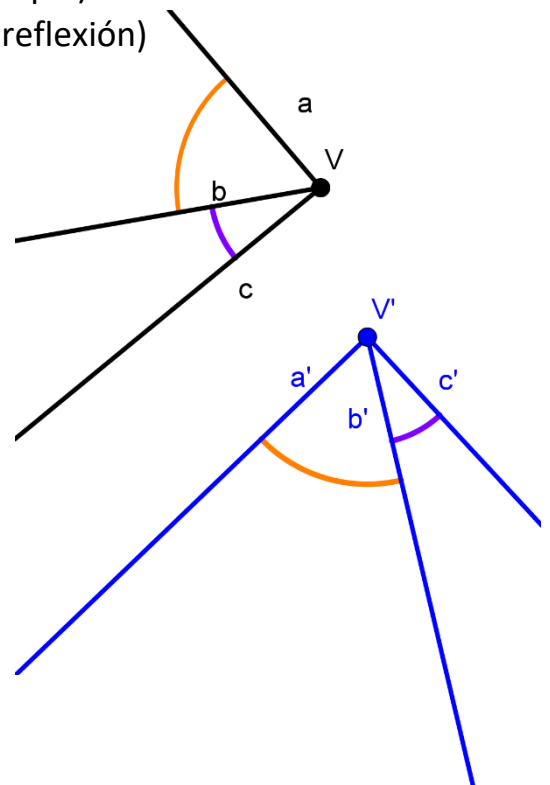
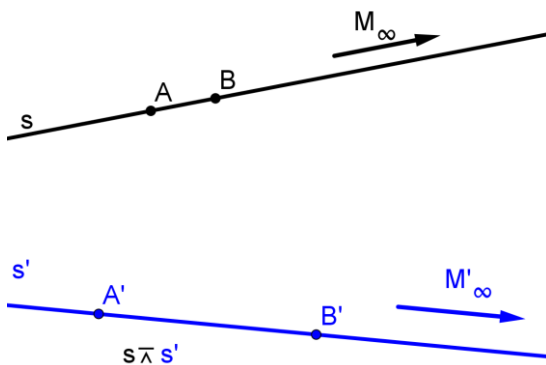
¿X'?

Figuras con enlace a GeoGebra



Definiciones:

- Series semejantes (conservación razón simple)
- Haces congruentes (traslación, rotación, reflexión)



Recordatorio:

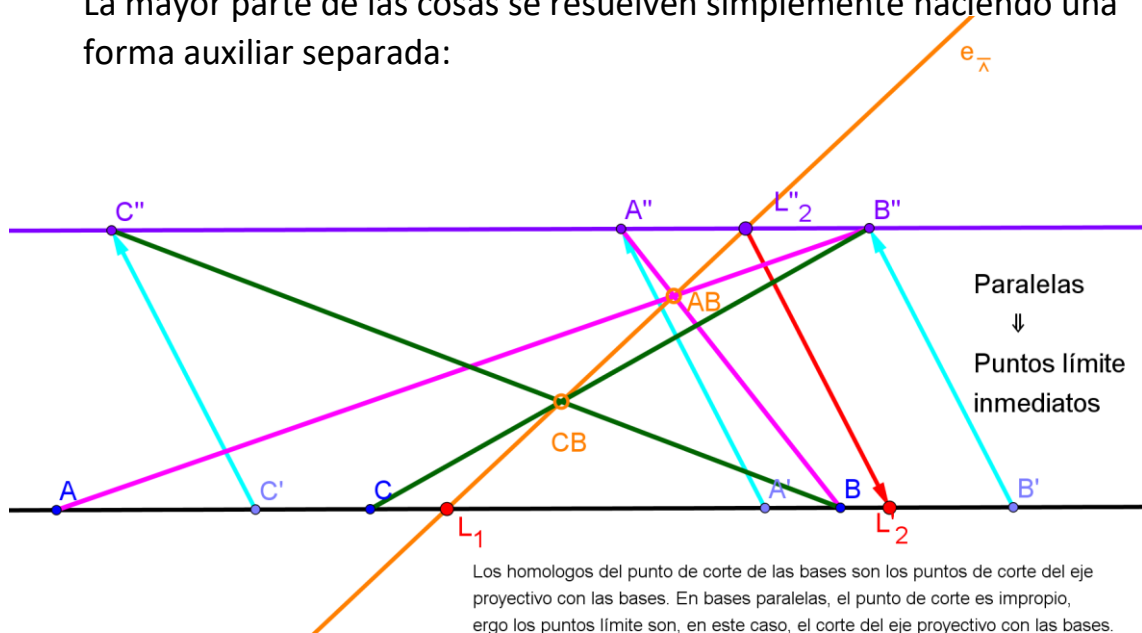
	$\bar{\lambda}$	$\bar{\lambda}$	
	Perspectividad	Proyectividad	
<p>Series</p>	 $C_{\bar{\lambda}}$ Centro Perspectivo $e_{\bar{\lambda}}$ eje proyectivo	 $C_{\bar{\lambda}}$ Centro Projectivo $e_{\bar{\lambda}}$ eje perspectivo	Bases Elementos rectas Puntos
<p>Haces</p>	 $e_{\bar{\lambda}}$ eje perspectivo $C_{\bar{\lambda}}$ Centro Projectivo	 $C_{\bar{\lambda}}$ Centro Projectivo $e_{\bar{\lambda}}$ eje perspectivo	Bases Elementos Puntos rectas

Formas Superpuestas [\(en YouTube\)](#)

- Cálculo de homólogos
- Tipo
 - Proyectividad elíptica
 - Proyectividad parabólica
 - Proyectividad hiperbólica
- Orden
 - Series Acordes y Discordes
- Cálculo de un punto doble dado el otro
- Potencia de una proyectividad
- Invariante absoluto de la proyectividad hiperbólica
- Isotomía de puntos dobles y límites
- Involución
- Formas proyectivas de 2º orden
 - Uso para el cálculo de puntos dobles

Formas superpuestas

La mayor parte de las cosas se resuelven simplemente haciendo una forma auxiliar separada:



No obstante, hay una característica propia de las formas superpuestas: los puntos dobles. ¿Cuántos existen?

Tipo de proyectividad en series superpuestas

$$(ABXY) = (A'B'X'Y')$$

3 puntos dobles:

$$\begin{aligned} (D_1 D_2 D_3 Y) &= (D_1 D_2 D_3 Y') \\ \frac{(D_1 D_3 Y)}{(D_2 D_3 Y)} &= \frac{(D_1 D_3 Y')}{(D_2 D_3 Y')} \\ \frac{\overline{D_1 D_3 / D_1 Y}}{\overline{D_2 D_3 / D_2 Y}} &= \frac{\overline{D_1 D_3 / D_1 Y'}}{\overline{D_2 D_3 / D_2 Y'}} \\ \frac{\overline{D_1 Y}}{\overline{D_2 Y}} &= \frac{\overline{D_1 Y'}}{\overline{D_2 Y'}} \longrightarrow Y = Y' \end{aligned}$$

Si hay más de 2, la proyectividad es una Identidad

2 puntos dobles:

- Proyectividad **hiperbólica**

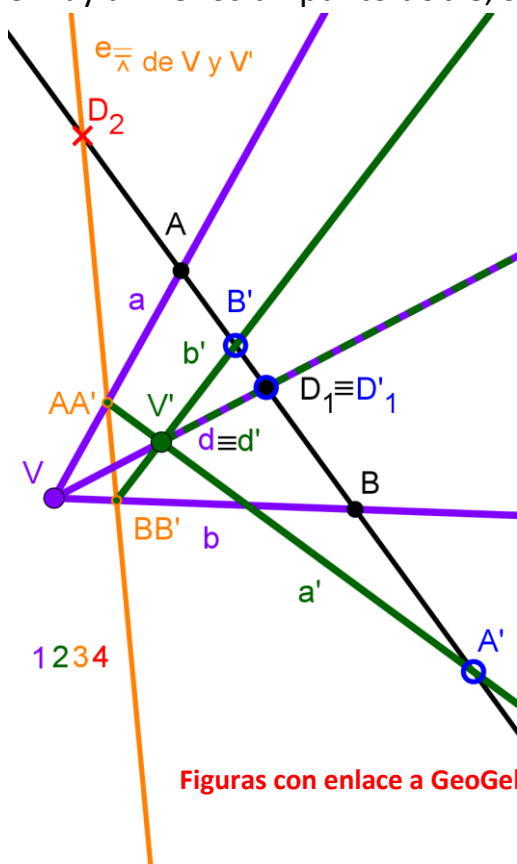
1 punto doble:

- Proyectividad **parabólica**

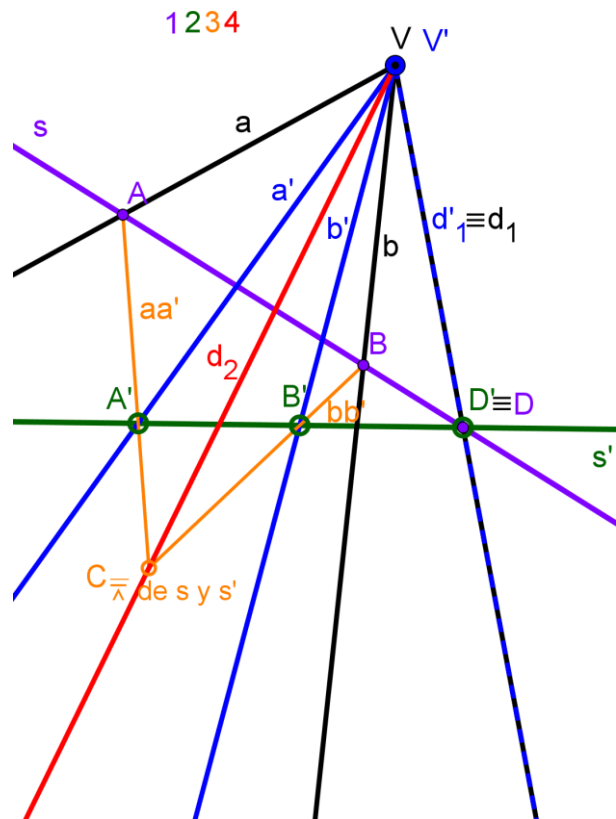
0 puntos dobles:

- Proyectividad **elíptica**

Si hay al menos un punto doble, se pueden tratar como perspectivas:

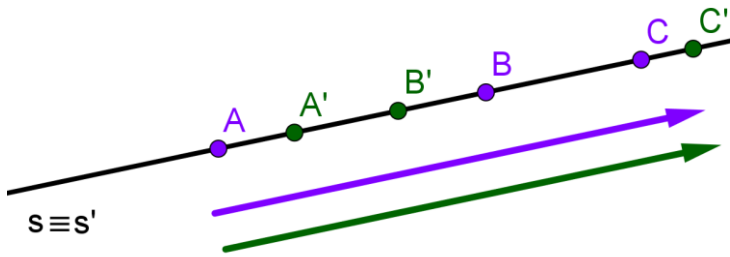


Figuras con enlace a GeoGebra

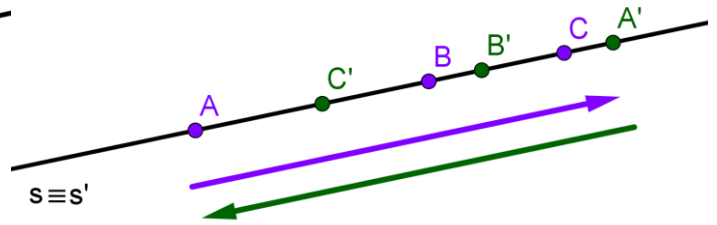


Series acordes y discordes

Acorde



Discorde

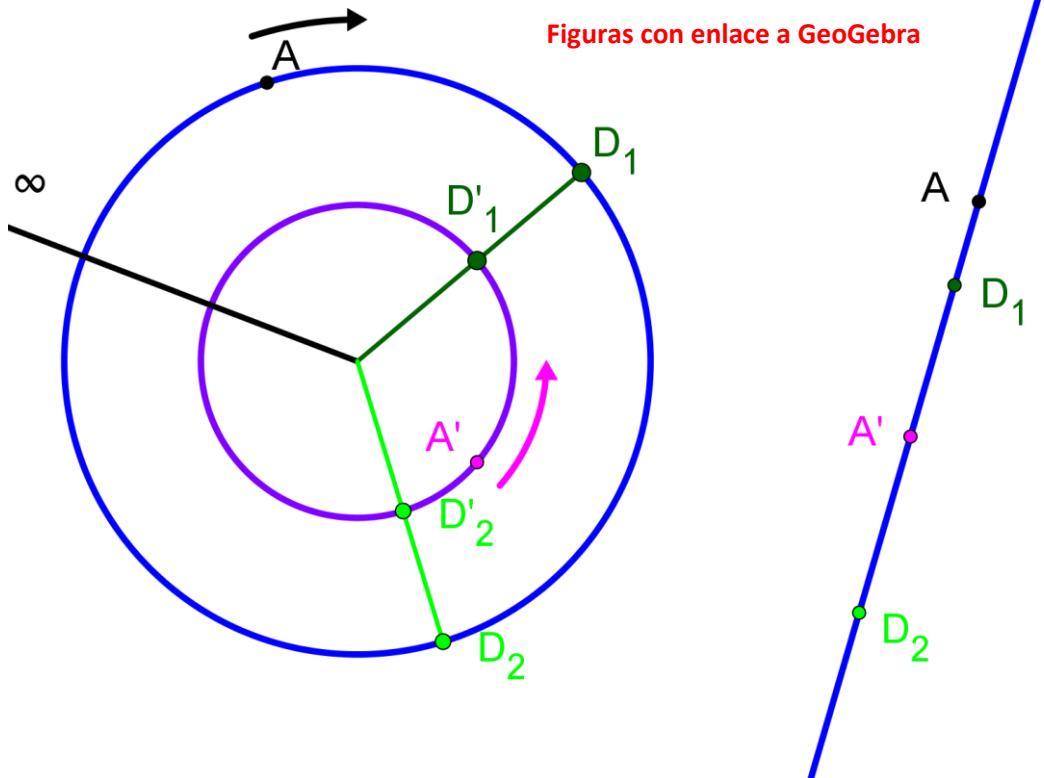


Intuitivamente, hace referencia a si ambas series tienen el mismo sentido, o el opuesto.

Las discordes son necesariamente **hiperbólicas**

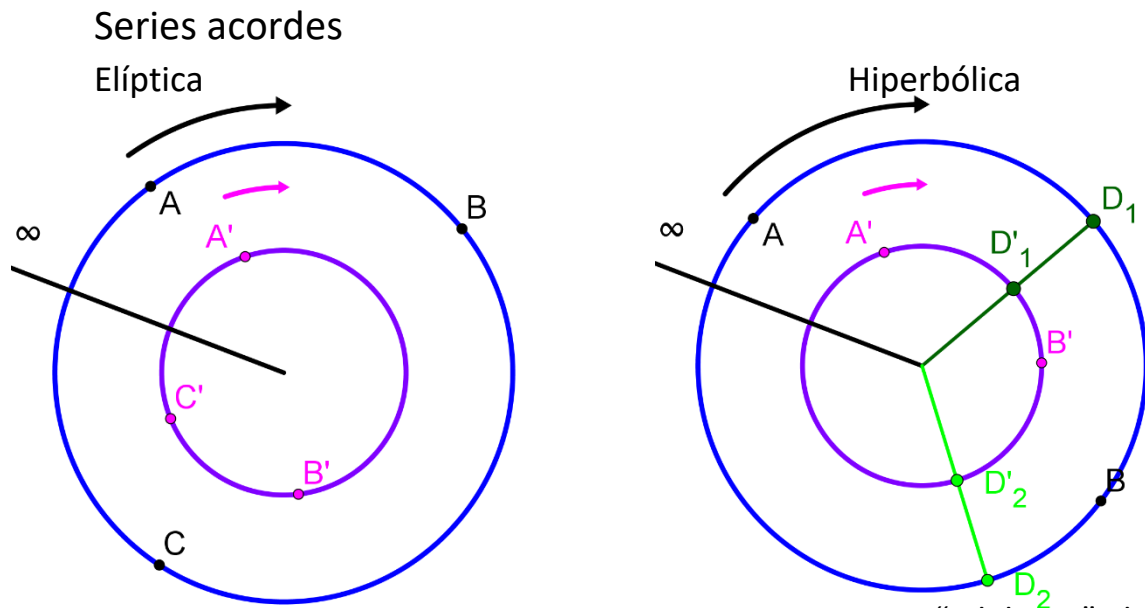
Las series **acordes** pueden ser de cualquier tipo.

Series discordes:



Figuras con enlace a GeoGebra

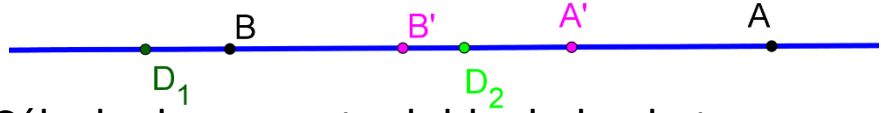
Los puntos dobles separan (no armónicamente) puntos homólogos.



Figuras con enlace a GeoGebra

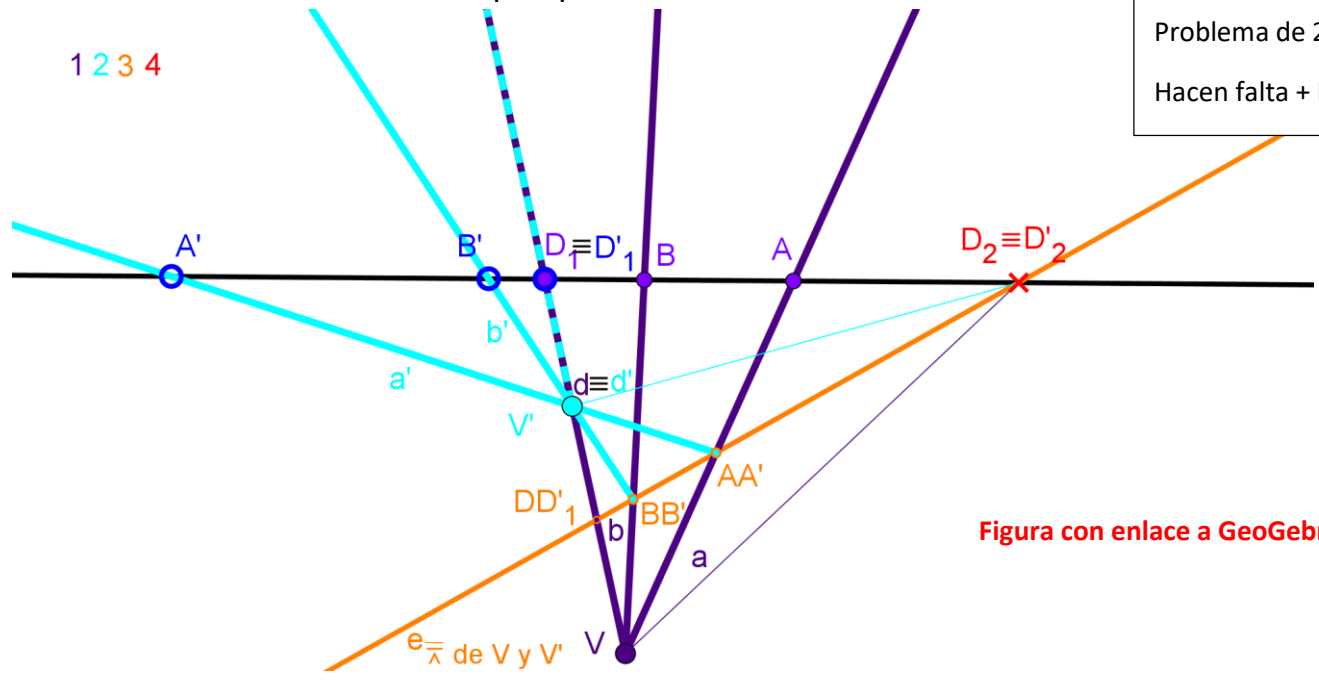
Un punto "adelanta" al otro, le tiene que volver a adelantar.

Si existen puntos dobles, no separan puntos homólogos.



Cálculo de un punto doble dado el otro [\(en YouTube\)](#)

Se trata con una perspectiva intermedia GP27



2 puntos dobles
 Problema de 2º orden
 Hacén falta + herramientas

Figura con enlace a GeoGebra

O bien se proyecta desde dos vértices (V y V') que estén alineados con el punto doble, y se calcula el eje perspectivo (arriba).

O bien se hace pasar un **eje perspectivo** ($e_{\bar{\lambda}}$) por el punto doble, se proyecta una serie desde un **vértice cualquiera** (V), y se calcula el otro **vértice** (V') para que sea perspectivo con el anterior, dando el rayo doble el otro punto doble.

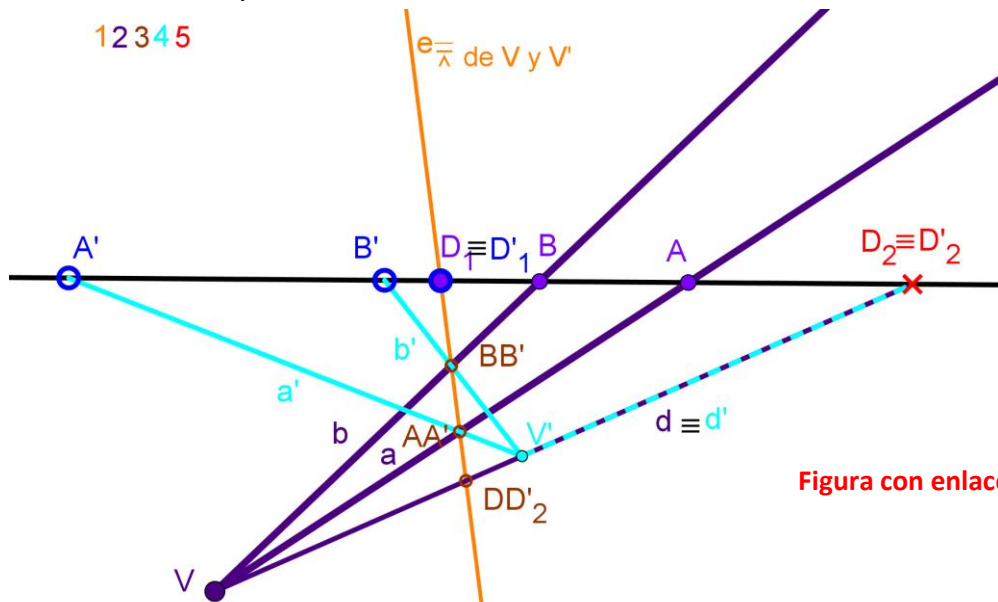


Figura con enlace a GeoGebra

El problema dual, calcular el otro rayo doble cuando se conoce uno, también se puede solucionar de dos formas: [\(en YouTube\)](#)

Seccionar ambos haces por dos rectas base (s y s') que se cortan en $d_1-d'_1$, con lo que el otro rayo doble pasa por el **centro perspectivo** ($C_{\bar{\lambda}}$).

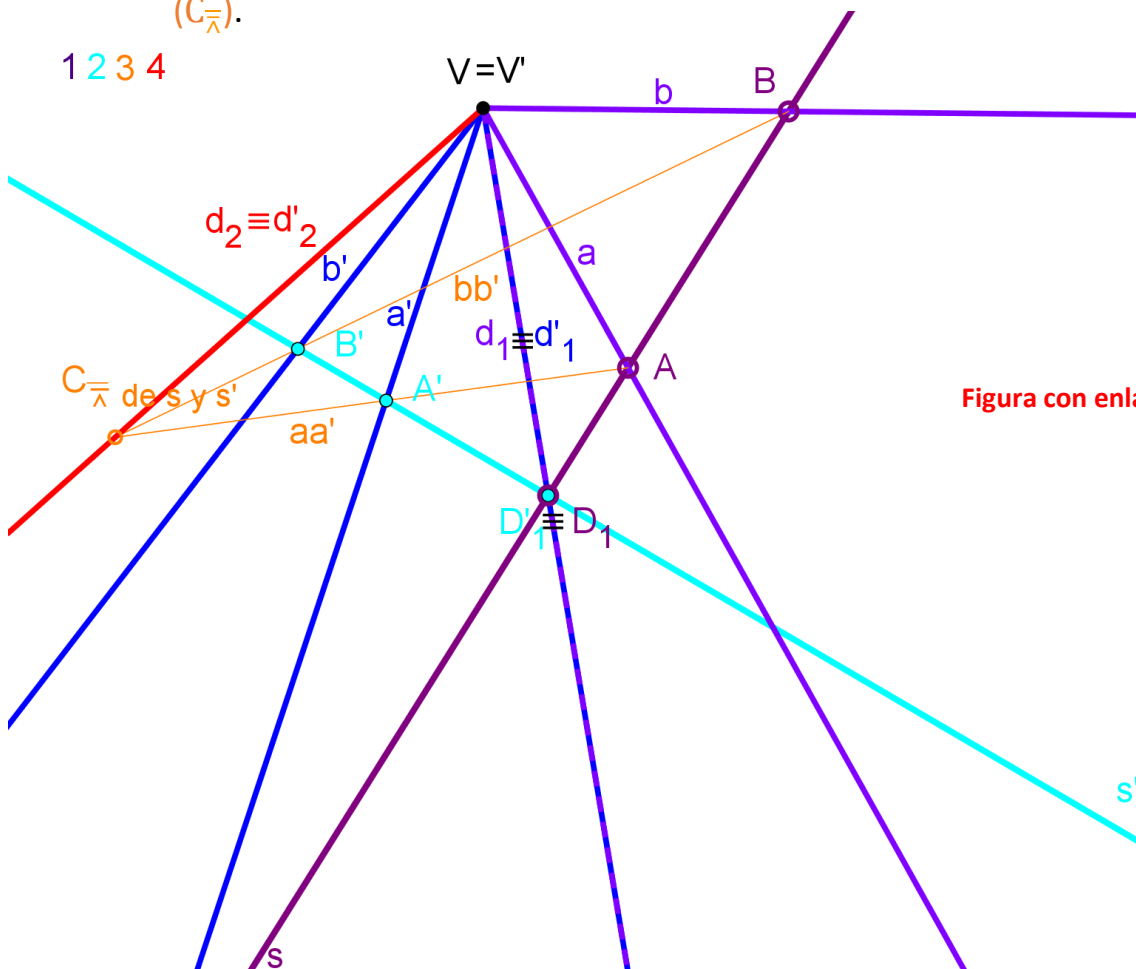
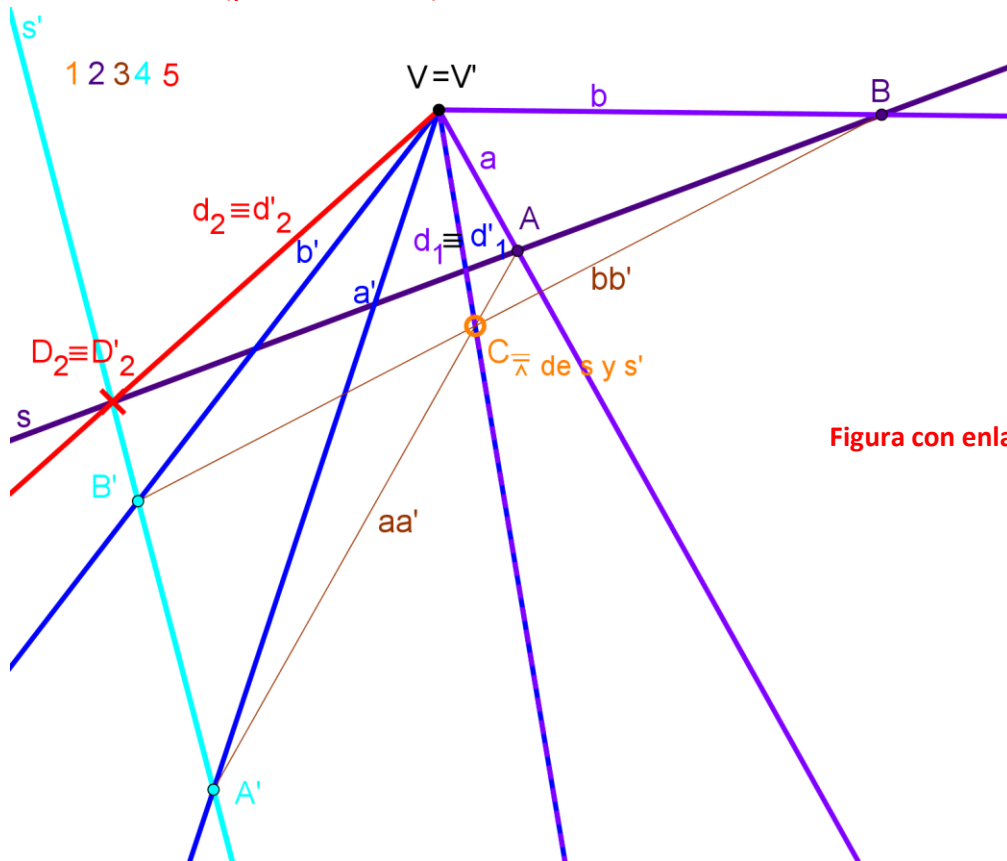
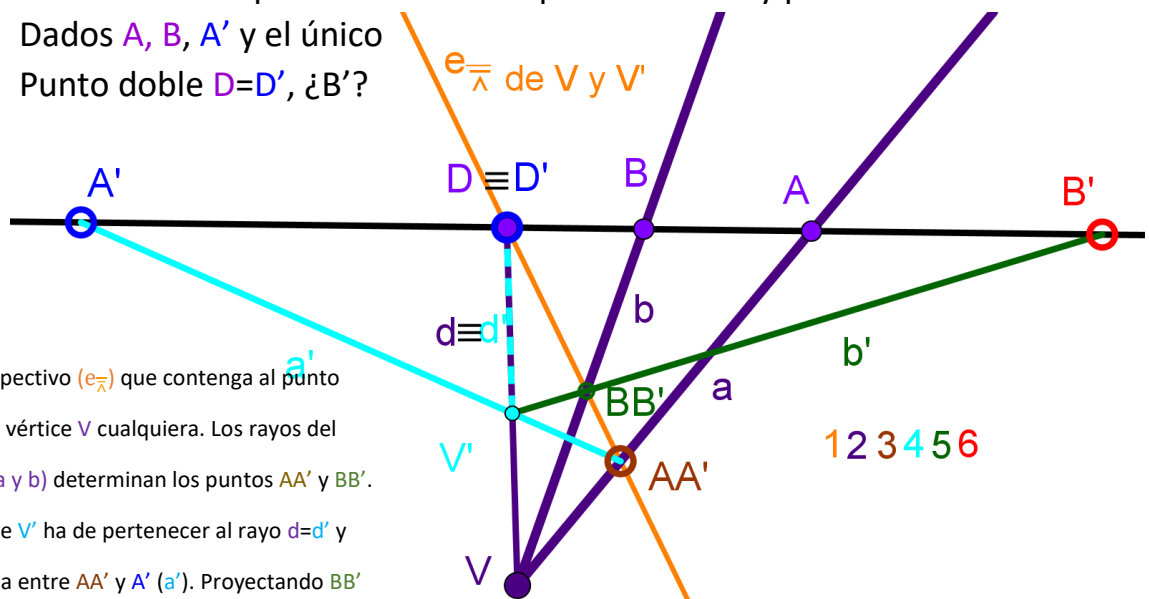


Figura con enlace a GeoGebra

O hacer situar un **centro perspectivo** ($C_{\bar{\lambda}}$) en el rayo doble, seccionar un haz por cualquier **recta base** (s), calcular la otra **recta** (s') que secciona al otro haz y es perspectiva con la otra serie con el centro perspectivo usado, y la otra **recta doble** es la intersección de las rectas base (**punto $D_2=D_2'$**).



¿Cómo se puede tener una proyectividad parabólica? [\(en YouTube\)](#)
 Cuando ambos puntos dobles colapsan. Caso muy particular:
 Dados A, B, A' y el único Punto doble $D=D'$, ¿ B' ?



Eje perspectivo ($e_{\bar{\lambda}}$) que contenga al punto doble, y vértice V cualquiera. Los rayos del haz V , (a y b) determinan los puntos AA' y BB' . El vértice V' ha de pertenecer al rayo $d=d'$ y a la recta entre AA' y A' (a'). Proyectando BB' desde V' (rayo b') y seccionando la recta base se obtiene B .

Potencia de una proyectividad

Si se considera una proyectividad de series superpuestas (o no), tomando la cuaterna que relaciona el punto impropio, el punto límite, y dos puntos cualesquiera, y sus homólogos:

$$\begin{aligned} (L_{1\infty}L_2AB) &= (L'_1L'_{2\infty}A'B') \\ \frac{(L_{1\infty}AB)}{(L_2AB)} &= \frac{(L'_1A'B')}{(L'_{2\infty}A'B')} \\ \frac{1}{(L_2AB)} &= (L'_1A'B') \\ \frac{\overline{L_2B}}{\overline{L_2A}} = \frac{\overline{L'_1A'}}{\overline{L'_1B'}} &\longrightarrow \overline{L_2BL'_1B'} = \overline{L_2AL'_1A'} = \text{cte} \end{aligned}$$

Dado que esta expresión ha de ser válida para cualquier punto A y cualquier punto B, la magnitud $\overline{L_2BL'_1B'}$ ha de ser necesariamente constante.

Esa constante se denomina potencia de la serie.

Invariante absoluto de una proyectividad hiperbólica

Si se considera una proyectividad hiperbólica, es decir, con dos puntos dobles, tomando la cuaterna que relaciona dos puntos cualesquiera, A y B, y los puntos dobles $D_1=D'_1$ y $D_2=D'_2$,

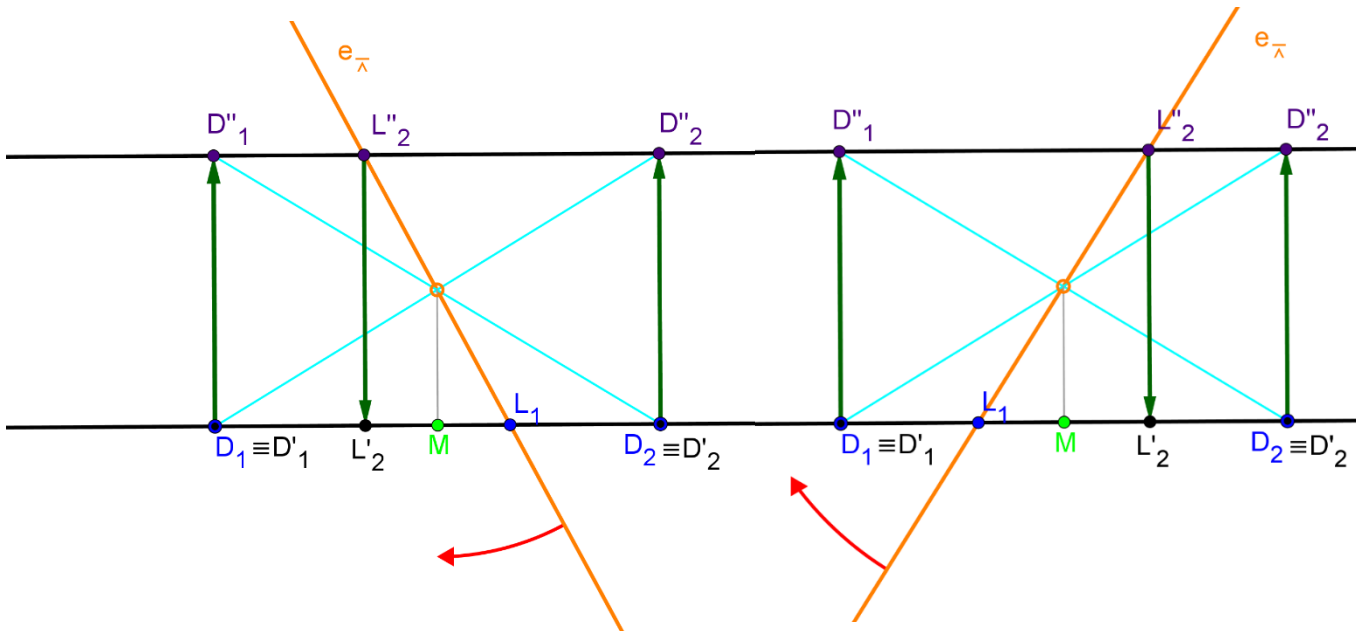
$$\begin{aligned} (ABD_1D_2) &= (A'B'D_1D_2) \\ \frac{(AD_1D_2)}{(BD_1D_2)} &= \frac{(A'D_1D_2)}{(B'D_1D_2)} \\ \frac{(AD_1D_2)}{(A'D_1D_2)} &= \frac{(BD_1D_2)}{(B'D_1D_2)} \\ (AA'D_1D_2) &= (BB'D_1D_2) = K \end{aligned}$$

Una vez más, al ser esta expresión verdadera para cualquier punto A y B, $(AA'D_1D_2)$ ha de ser constante para cualquier punto A. Esta constante K es el **invariante absoluto de la proyectividad**.

El caso particular $K = -1$ se denomina **INVOLUCIÓN**.

Isotomía de los puntos dobles y límites

Si se considera la posición de los puntos límites y los dobles en una proyectividad hiperbólica cualquiera (dada por los puntos dobles y uno de los puntos límites L_1).

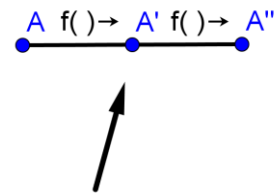


Separando las series y determinando el otro punto límite (L'_2) se puede ver que los puntos límite y los puntos dobles forman pares de puntos **isotómicos**, es decir, que ambas parejas tienen el mismo punto medio (**M**).

INVOLUCIÓN

Una involución es una transformación tal que:

$$f(x) = x'; f(x') = x;$$



Es decir:

$$f(f(x)) = x;$$

Ejemplo: simetría. La traslación claramente no es involutiva

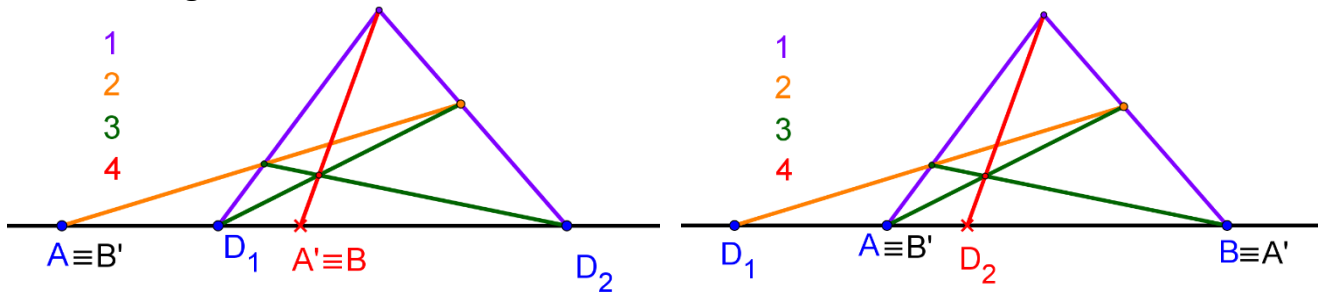
Existe por lo tanto un solo punto límite, punto medio de los dobles, y hay **propiedades métricas** que facilitan el cálculo de los mismos, empleando el hecho de que el invariante absoluto es -1.



Los puntos dobles separan armónicamente a cualquier pareja de homólogos:

$$(ABD_1D_2) = (AA'D_1D_2) = (A'AD_1D_2) = \frac{1}{(AA'D_1D_2)} = -1$$

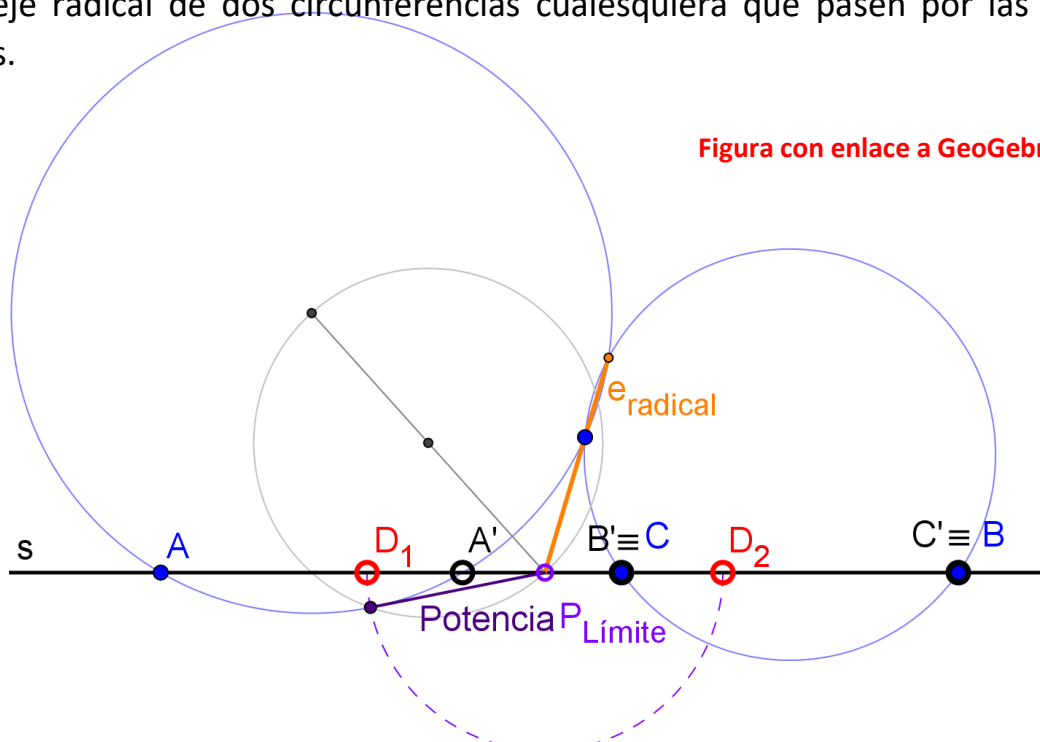
Cuaterna armónica para el cálculo de armónicos, dados los puntos dobles, y lo mismo para el cálculo de un punto doble dado el otro, un punto y su homólogo:



Necesariamente existe un solo punto límite, denominado centro de la involución I, y es el punto medio de los dobles (debido a la isotomía). Por lo tanto:

$$\overline{IBIB'} = \overline{ID_1}^2 = \overline{ID_2}^2 = \text{potencia}$$

Es decir, I tiene la misma potencia con respecto a cualquier circunferencia que pase por dos puntos homólogos. Dados dos pares de homólogos, I está en el eje radical de dos circunferencias cualesquiera que pasen por las parejas.

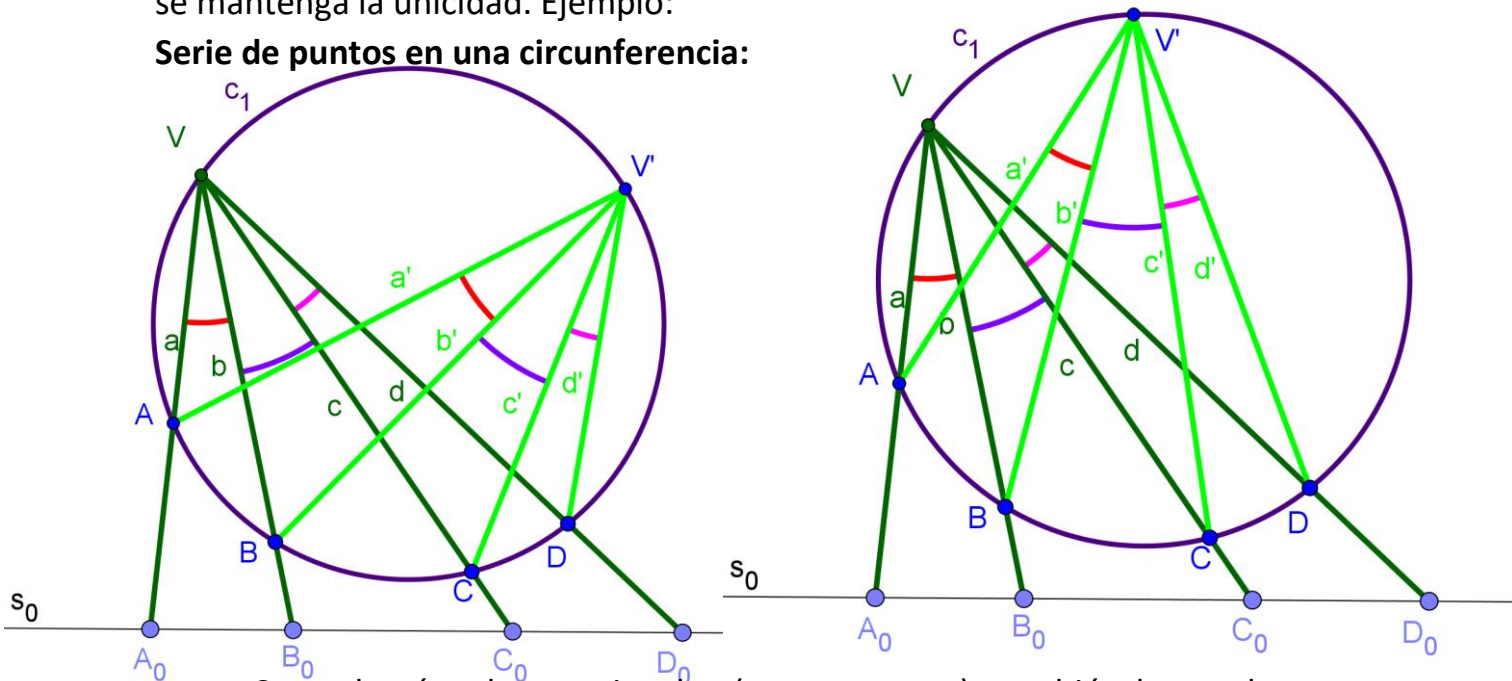


Y con ello se pueden calcular los puntos dobles-> GP29 [\(en YouTube\)](#)

Formas proyectivas de 2º Orden [\(en YouTube\)](#)

Hasta ahora hemos considerado formas proyectivas entre elementos de primer orden. No obstante, según los postulados que hemos visto se puede establecer una relación proyectiva sobre cualquier serie, mientras se mantenga la unicidad. Ejemplo:

Serie de puntos en una circunferencia:



Como los ángulos son iguales (arcos capaces), también lo son las cuaternas.

$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

Es necesario proyectar desde un **vértice que pertenezca a la circunferencia.**

Series superpuestas de 2º orden

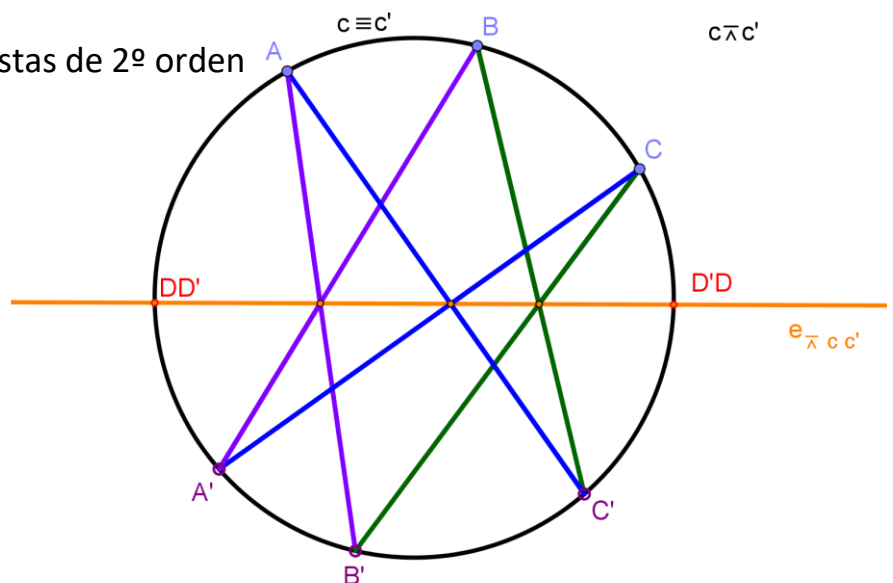


Figura con enlace a GeoGebra

Cálculo análogo del eje proyectivo (GP30). [\(en YouTube\)](#)

Los puntos dobles en series superpuestas en una forma de 2º orden son inmediatos, se puede aplicar para calcular los puntos dobles en series superpuestas en rectas. GP25 [\(en YouTube\)](#)

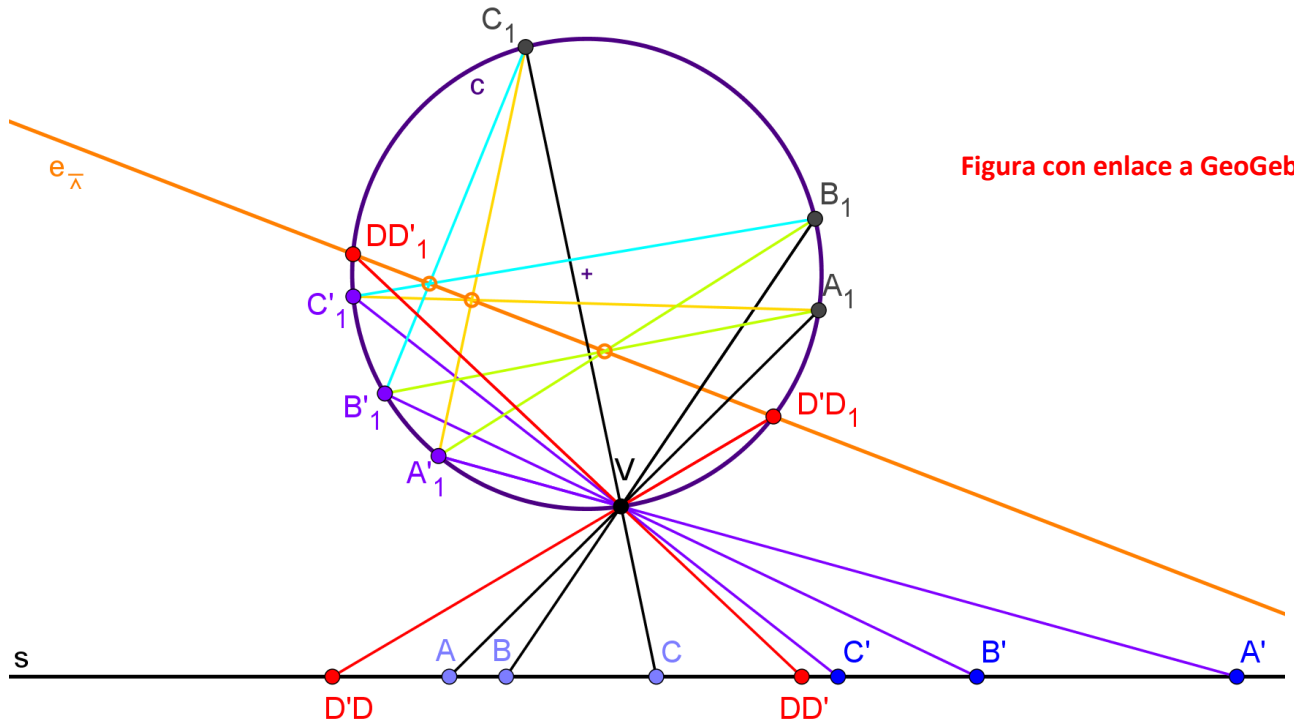


Figura con enlace a GeoGebra

Y de manera más sencilla en haces [\(en YouTube\)](#)

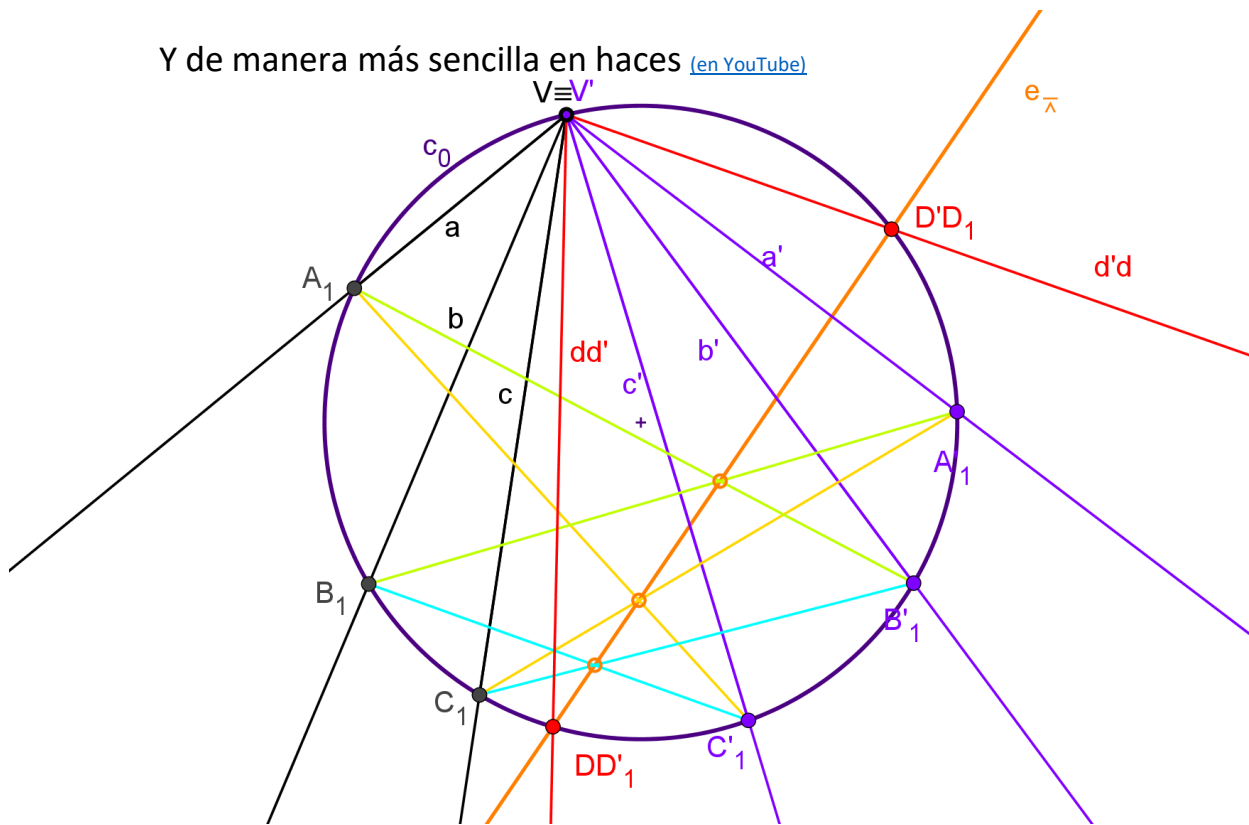


Figura con enlace a GeoGebra

Tratamiento proyectivo de las cónicas [\(en YouTube\)](#)

- Datos simples:
 - Puntos de paso
 - Tangentes
- Definición puntual de la cónica
- Definición tangencial de la cónica (dualidad)
- Datos híbridos (elementos dobles)
- Resolución de problemas de:
 - Tangentes en puntos
 - Puntos de tangencia
 - Intersecciones
 - Tangentes exteriores
- Cónicas como series superpuestas

Datos simples

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = 0 \rightarrow 5 \text{ parámetros}$$

5 puntos o 5 tangentes

¿Existe una relación proyectiva entre los puntos de una cónica?

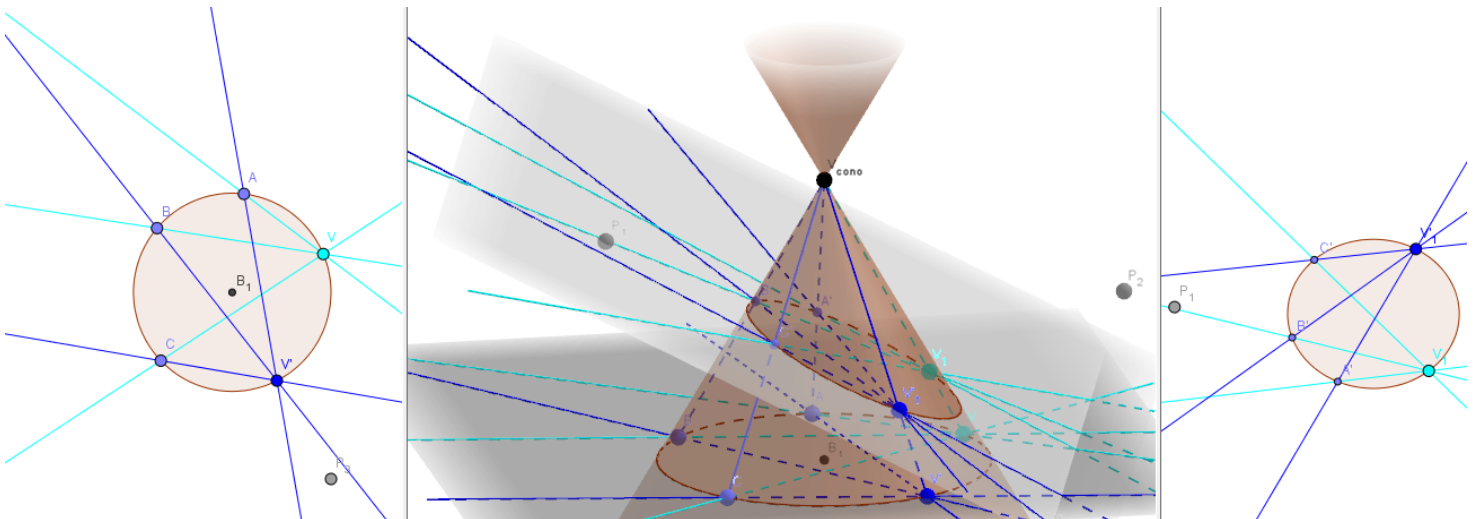


Figura con enlace a GeoGebra

Definición puntual de la cónica [\(en YouTube\)](#)

Se puede definir una cónica como el lugar geométrico de los puntos donde se cortan rayos homólogos de dos haces proyectivos

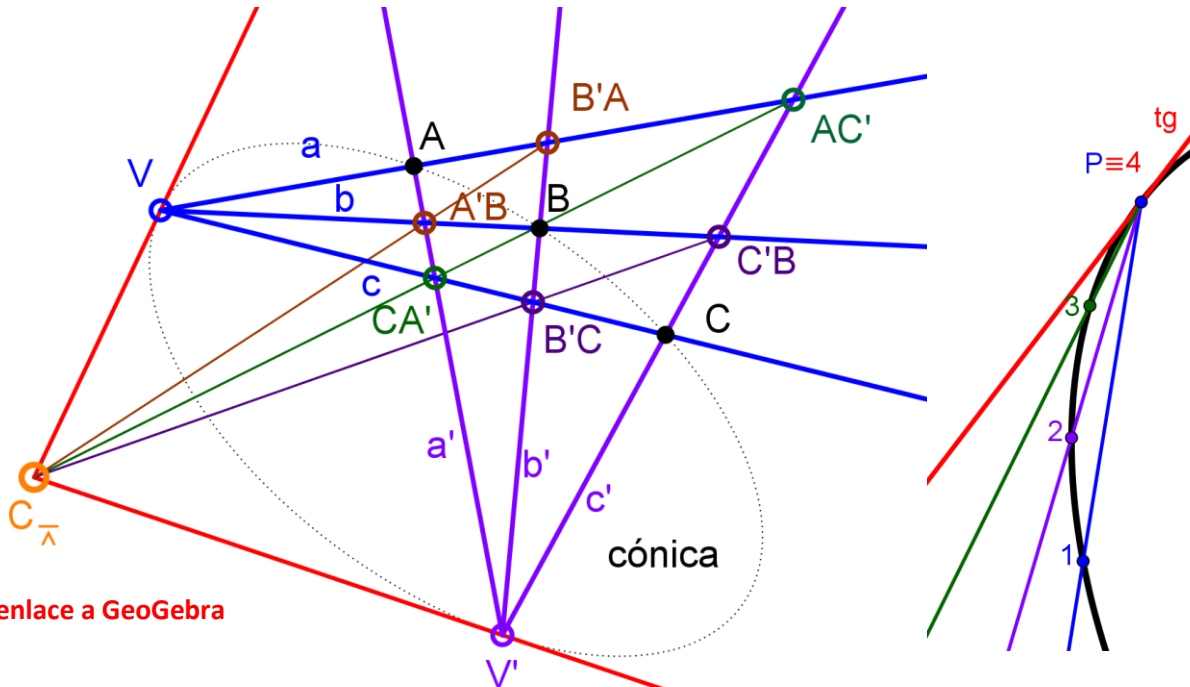


Figura con enlace a GeoGebra

Punto que se acerca a uno de los vértices \rightarrow tangente por el vértice
 Las tangentes a la cónica por los vértices pasan por el centro proyectivo de los haces (GP 31)

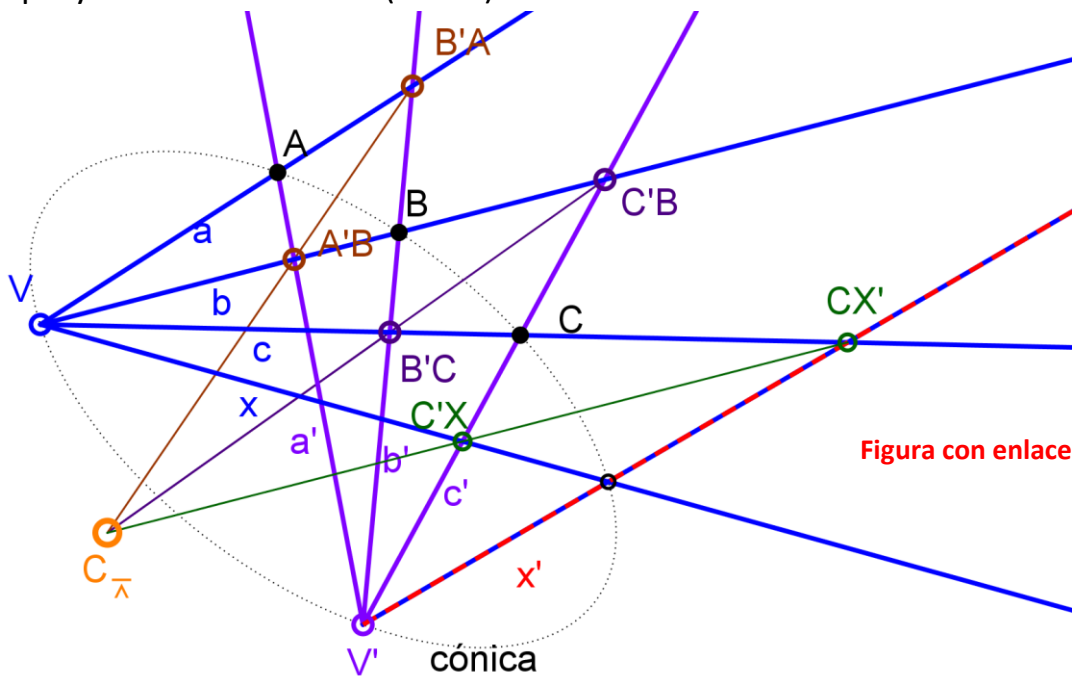


Figura con enlace a GeoGebra

Calcular un rayo homólogo x == determinar el punto de corte del rayo x con la cónica

Definición tangencial de la cónica [\(en YouTube\)](#)

Se puede definir una cónica como la envolvente de las rectas que unen elementos homólogos en dos series rectilíneas en proyectividad.

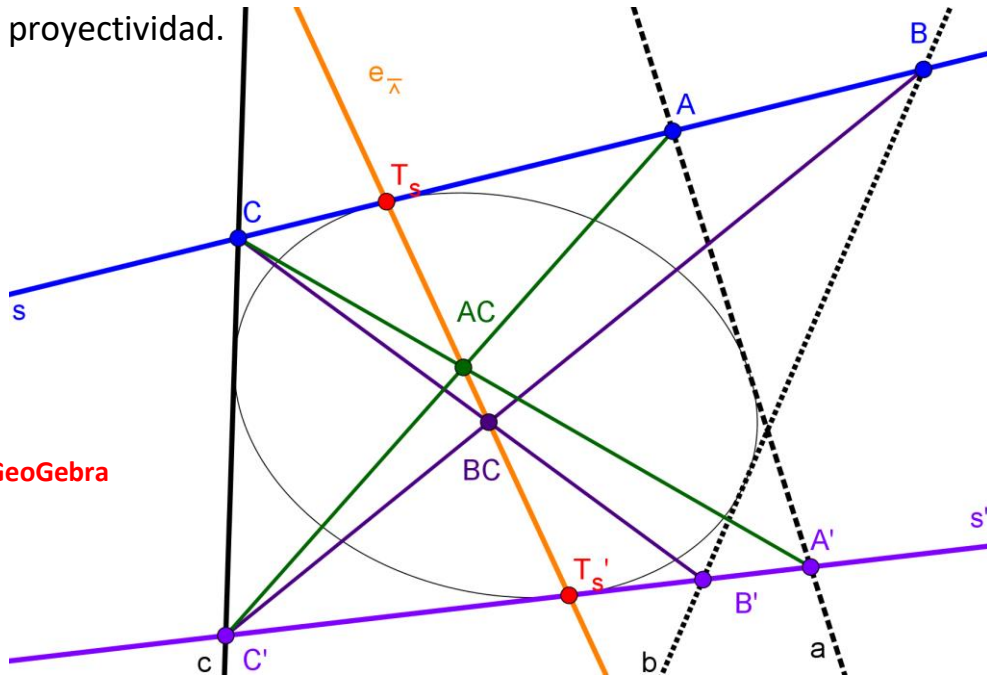


Figura con enlace a GeoGebra

Tangente que se aproxima a una de las rectas base \rightarrow punto de tangencia en la recta base

Los puntos de tangencia de la cónica en las bases son los puntos de corte del eje proyectivo con las mismas. (GP 32.1)

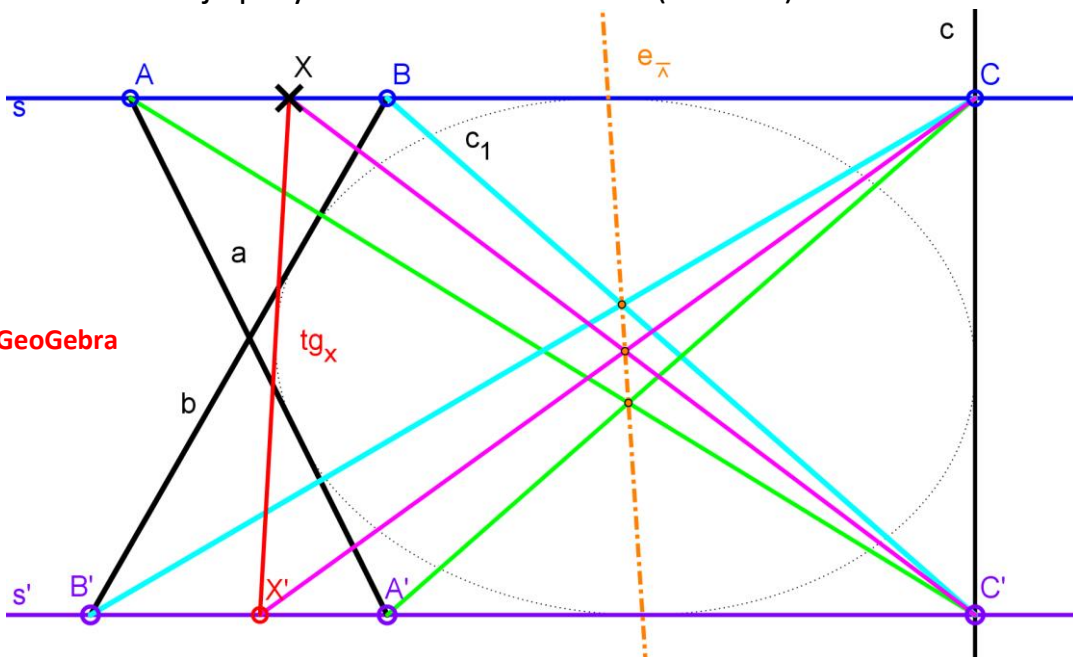


Figura con enlace a GeoGebra

Calcular un punto homólogo a X \Rightarrow determinar la tangente a la cónica desde el punto X

Datos híbridos (elementos dobles) [\(en YouTube\)](#)

Necesitamos que los datos **se pertenezcan**

4 puntos una tangente

GP 33.2

dual

4 tangentes y un punto

GP 32.2

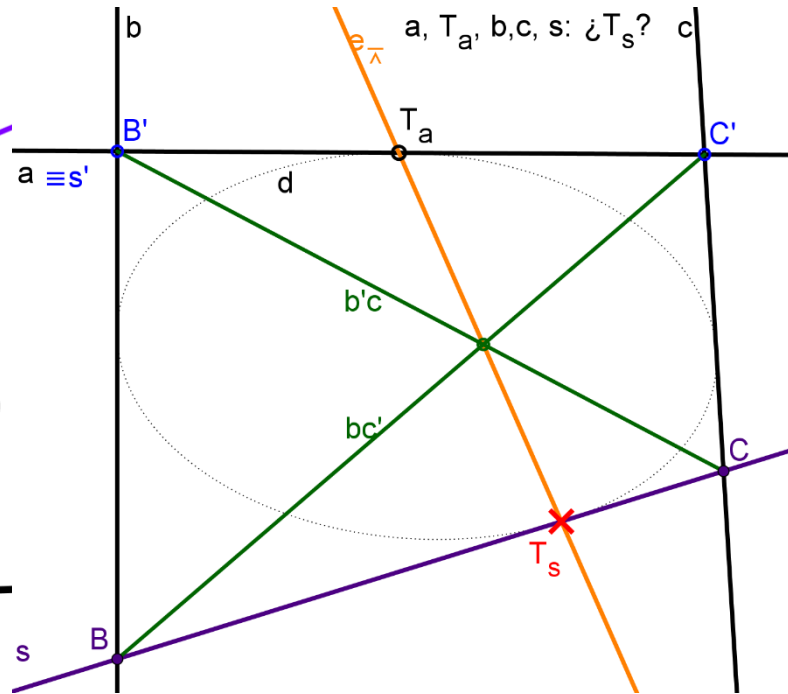
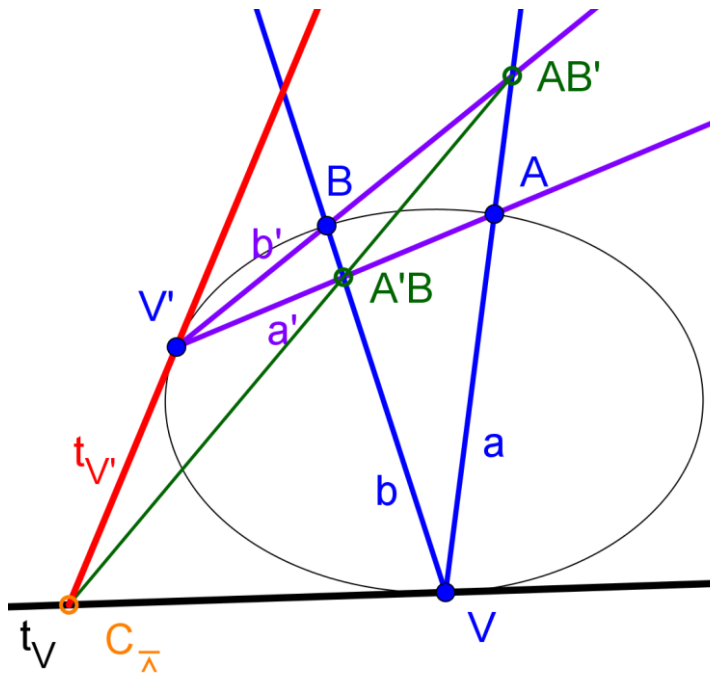
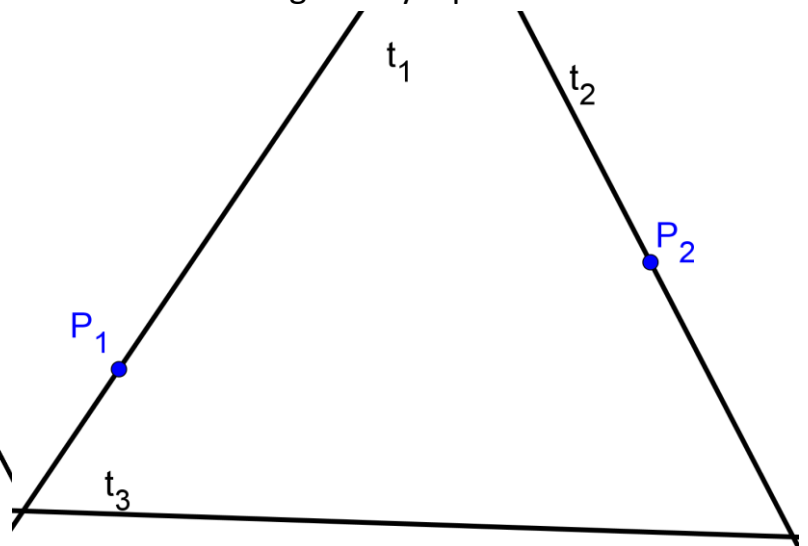
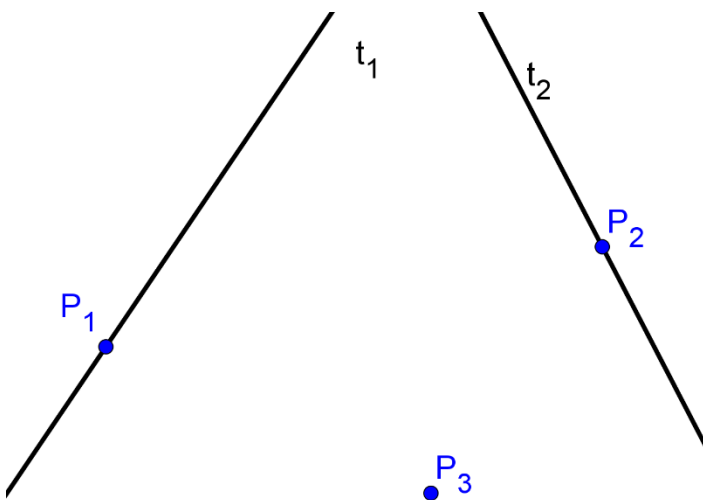


Figura con enlace a GeoGebra

3 puntos 2 tangentes

dual

3 tangentes y 2 puntos



Requiere calcular un dato extra y resolver como el anterior:
Lo resolveremos más eficientemente después

Intersección de la cónica con una recta (si no pasa por un dato)

Cónica por 5 puntos (A, B, C, V, V') -> 2 haces (a, b, c y a', b', c') -> seccionamos con la recta para obtener series superpuestas (A₁, B₁, C₁ y A'₁, B'₁, C'₁) -> calculamos los puntos dobles de las series superpuestas (problema de 2º orden, [circunferencia auxiliar C_a](#))

GP 34

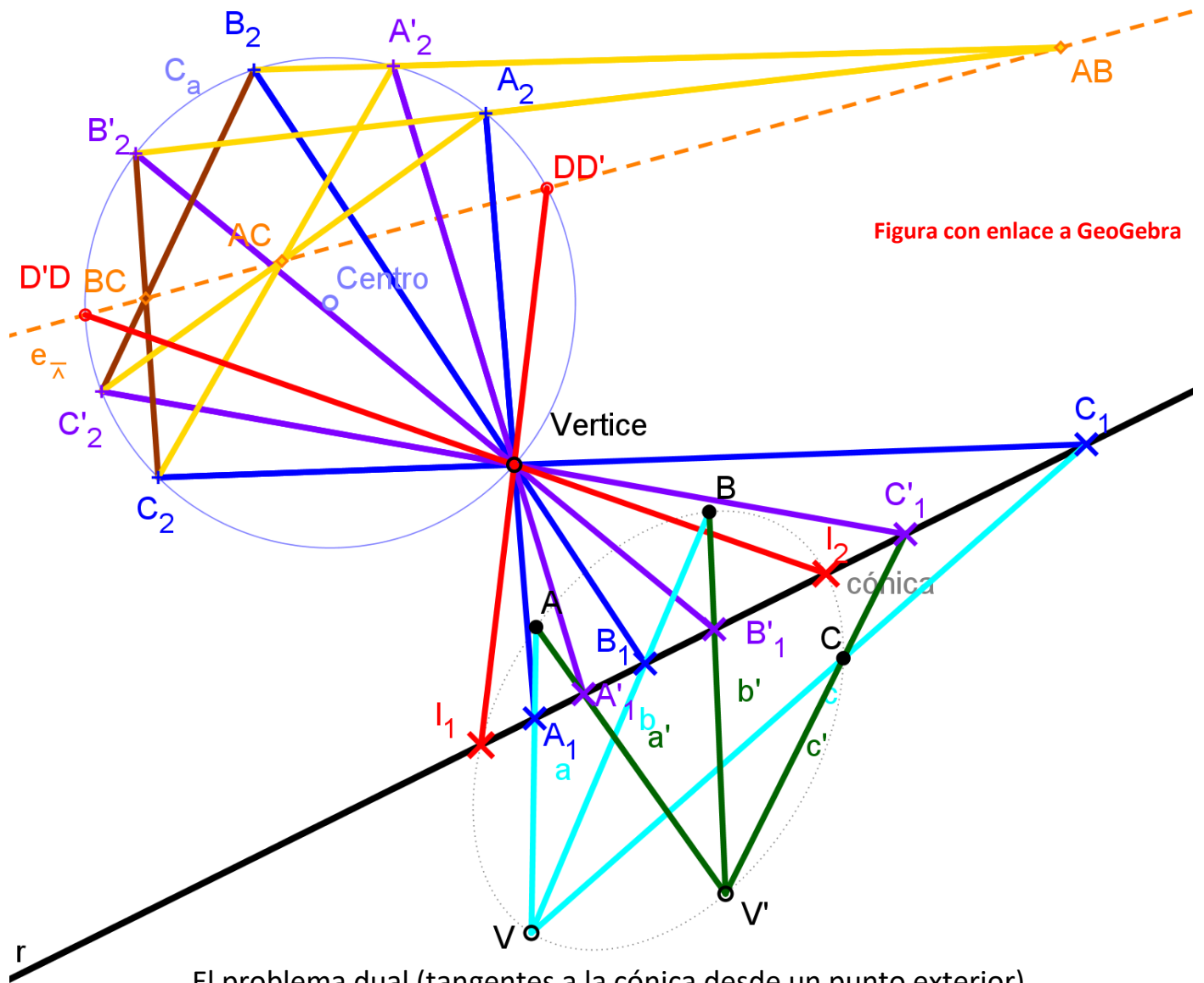
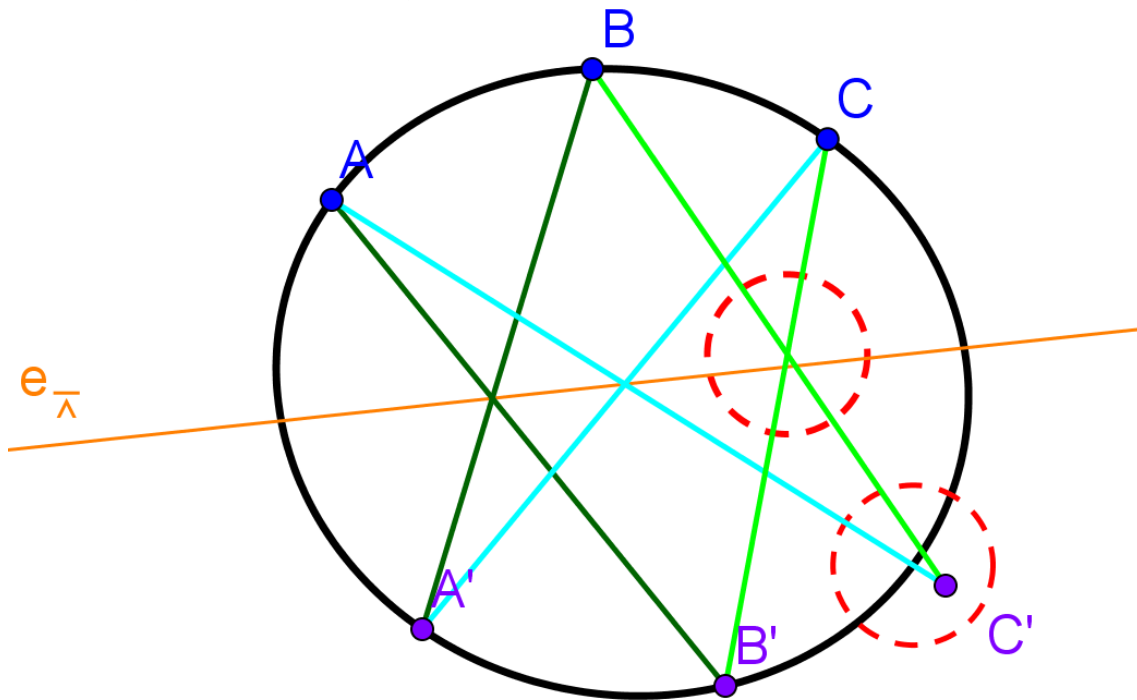


Figura con enlace a GeoGebra

El problema dual (tangentes a la cónica desde un punto exterior) está resuelto en GeoGebra

Cónicas como series superpuestas [\(en YouTube\)](#)

3 puntos, 3 homólogos ¿6 datos?



Estamos sobredimensionando la cónica. Lo más probable es que no acertemos a colocar el sexto punto en su sitio.

Si coincide un punto con el homólogo de otro: cálculo de tangencias por ese punto (GP 38.2) [\(en YouTube\)](#)

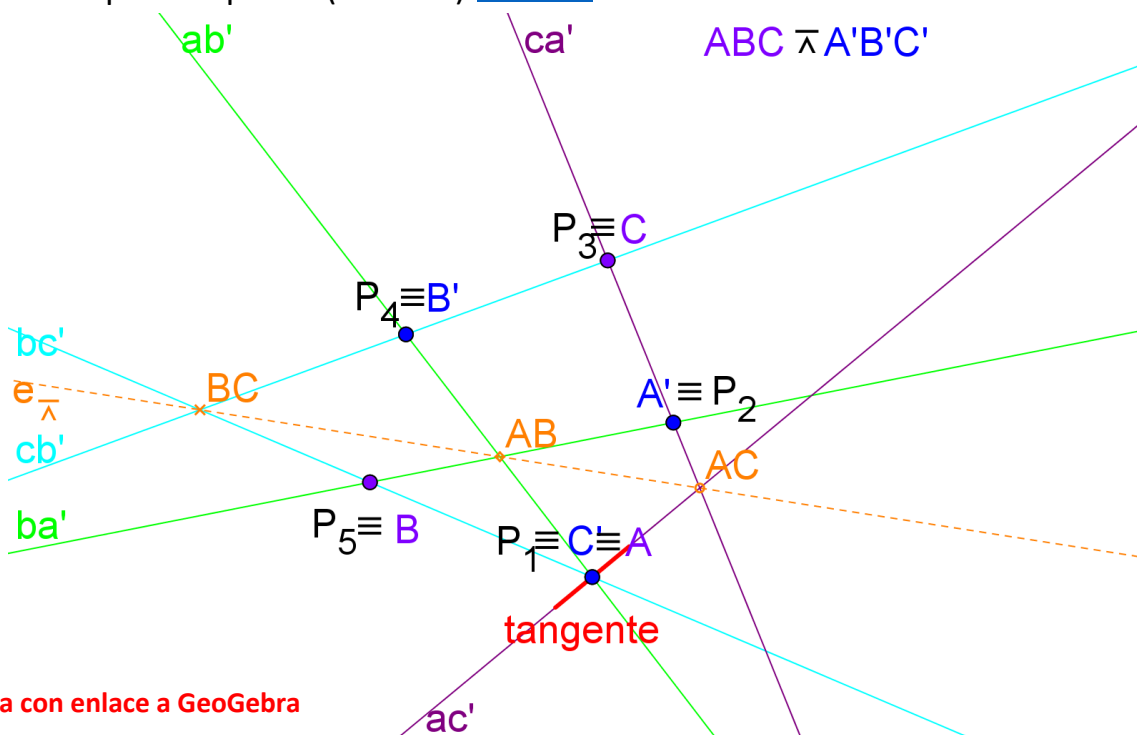
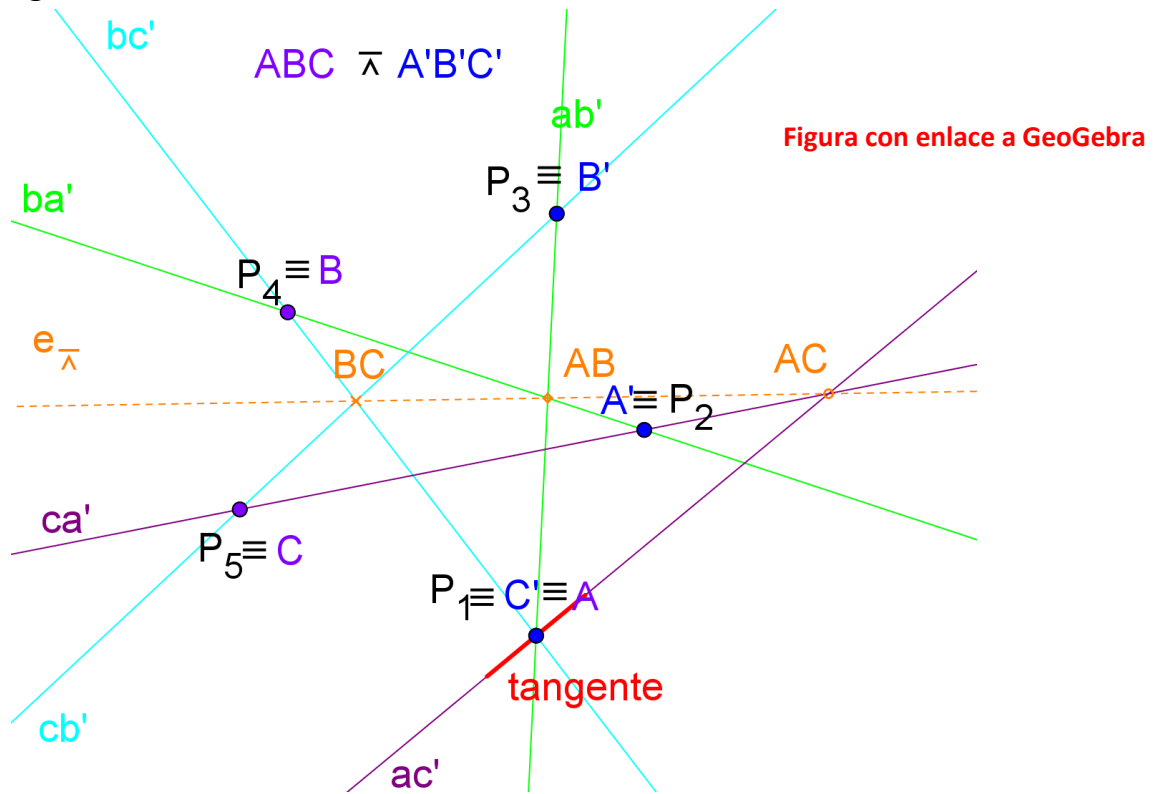


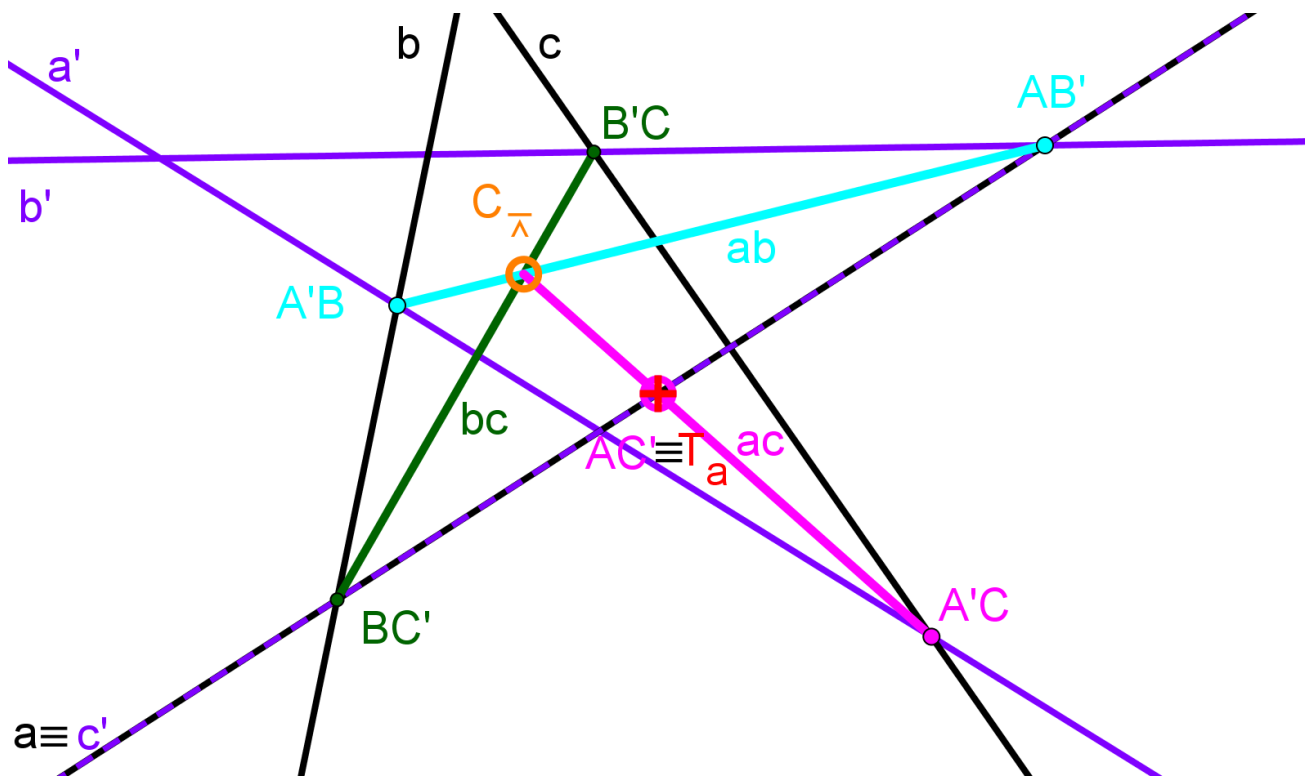
Figura con enlace a GeoGebra

Eligiendo otra combinación:



Hay 12 combinaciones con soluciones gráficas distintas. El trazado puede ser más o menos fácil dependiendo de la combinación elegida.

Problema dual: GP 39 [\(en YouTube\)](#)



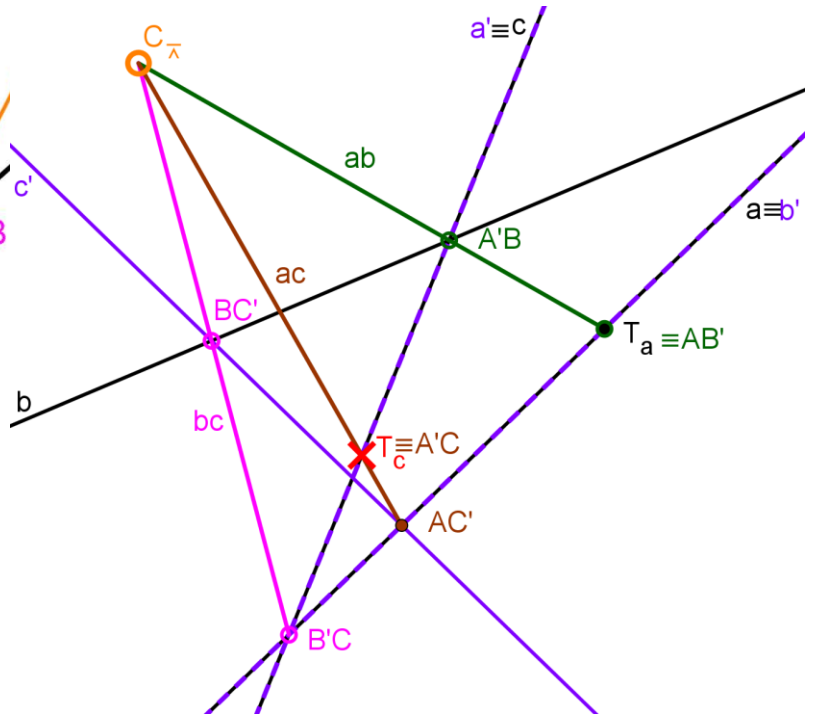
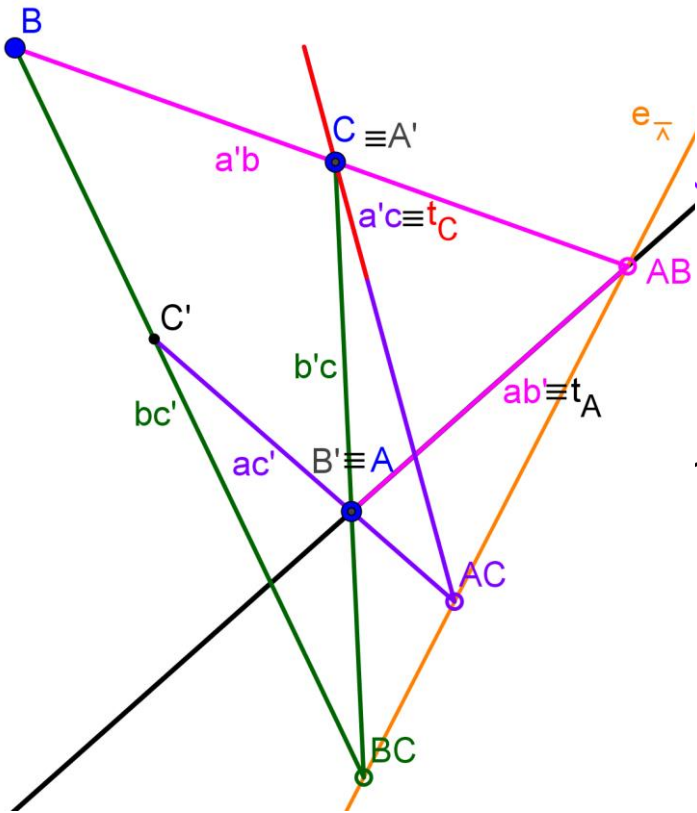
4 puntos una tangente

dual

4 tangentes y un punto

GP 33.2 [\(en YouTube\)](#)

GP 32.2 [\(en YouTube\)](#)



3 puntos 2 tangentes

dual

3 tangentes y 2 puntos

GP 43.1 [\(en YouTube\)](#)

GP 43.2 [\(en YouTube\)](#)

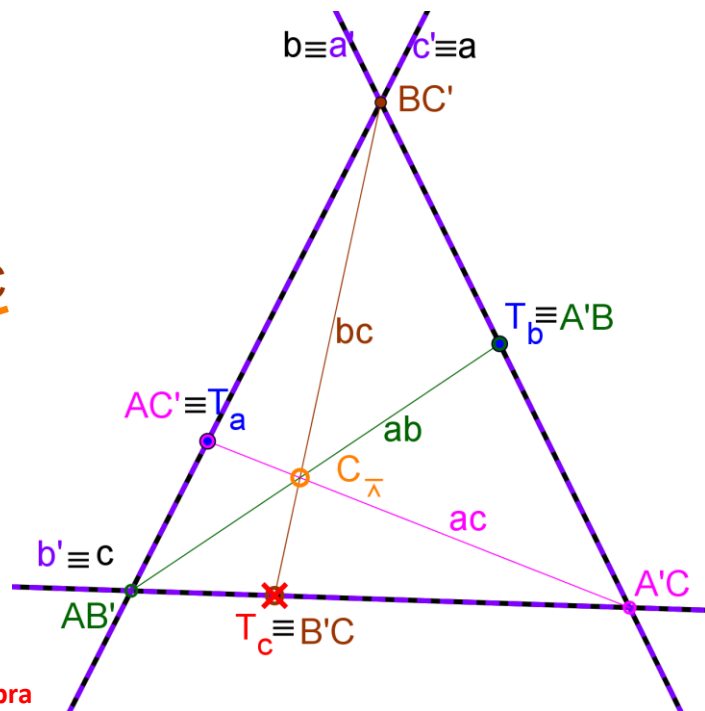
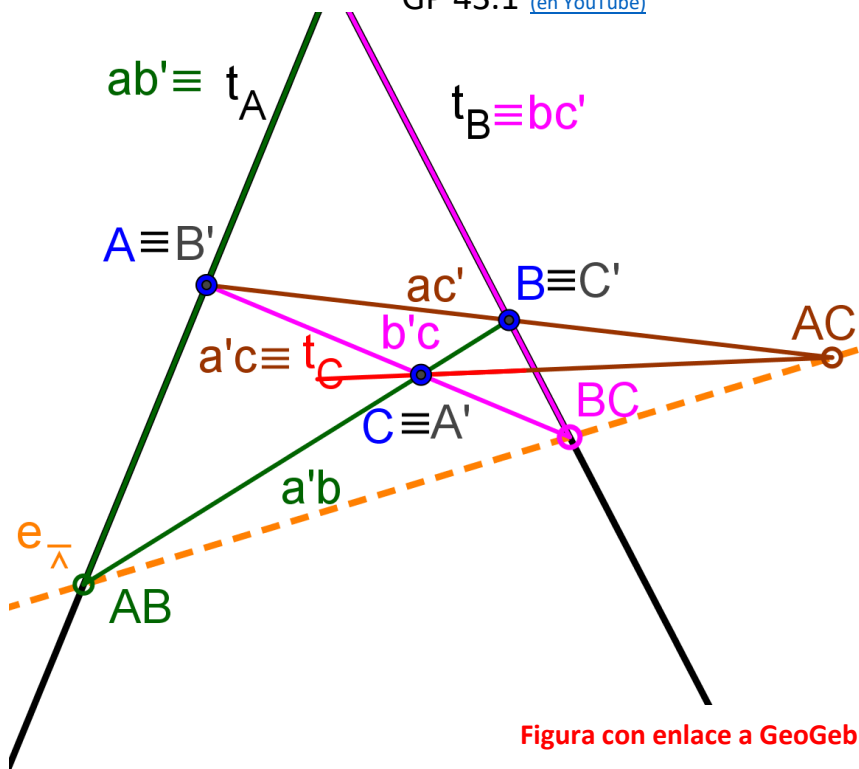
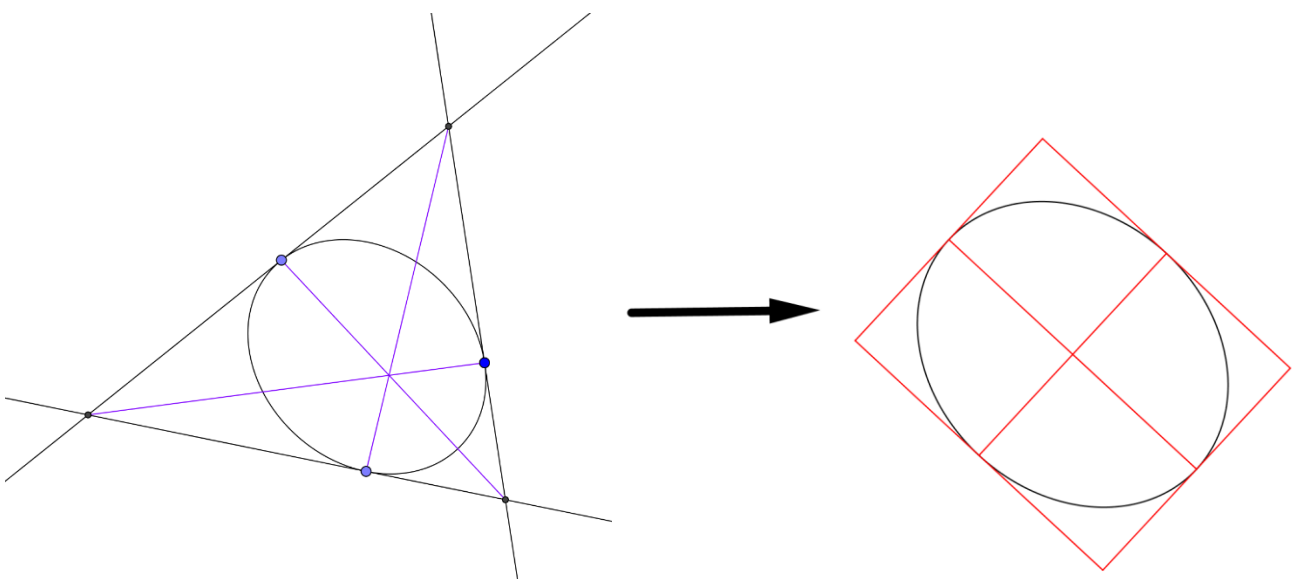


Figura con enlace a GeoGebra

Polaridad [\(en YouTube\)](#)

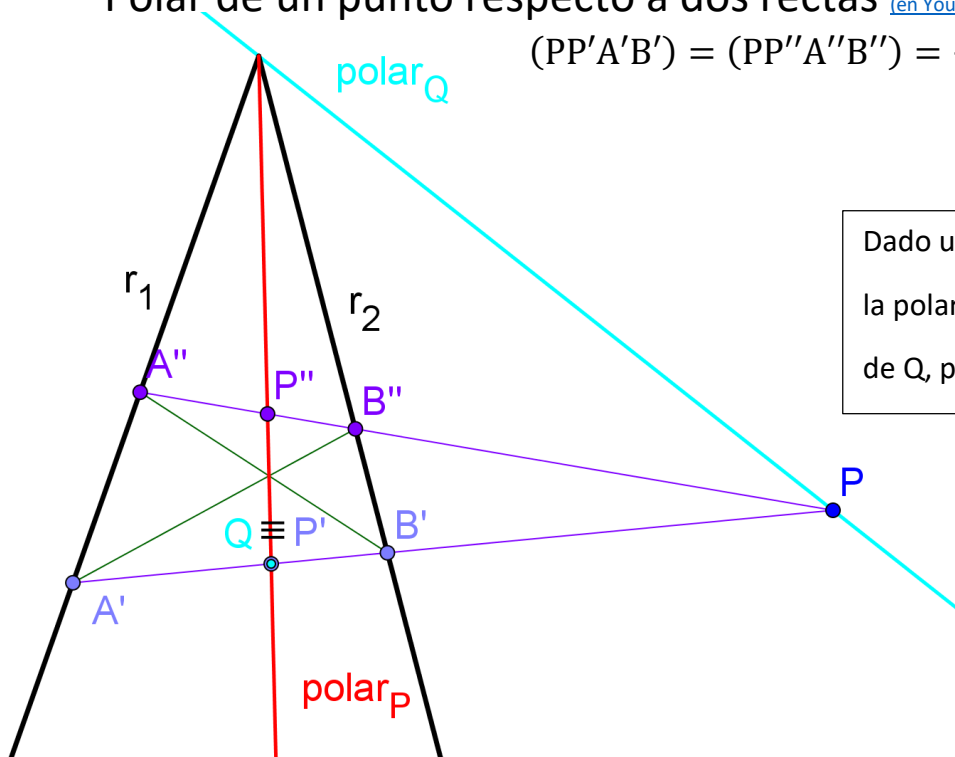
- Repaso:
 - Cónica como Lugar Geométrico de elementos homólogos
 - Cónica como elementos del plano con relaciones proyectivas
- Polo-Polar: separación armónica
 - 2 rectas
 - Circunferencia
 - Cónica
- Involución en la cónica
 - Triángulo autopolar
- Relación de tangencia, polo, polar, polares conjugadas
 - Diámetro
 - Diámetro conjugado
 - Centro
 - Ejes
 - Magnitud

Partiendo de una cónica definida por datos simples se pretende llegar a tener la cónica definida por sus ejes, en posición y magnitud.



Polar de un punto respecto a dos rectas [\(en YouTube\)](#)

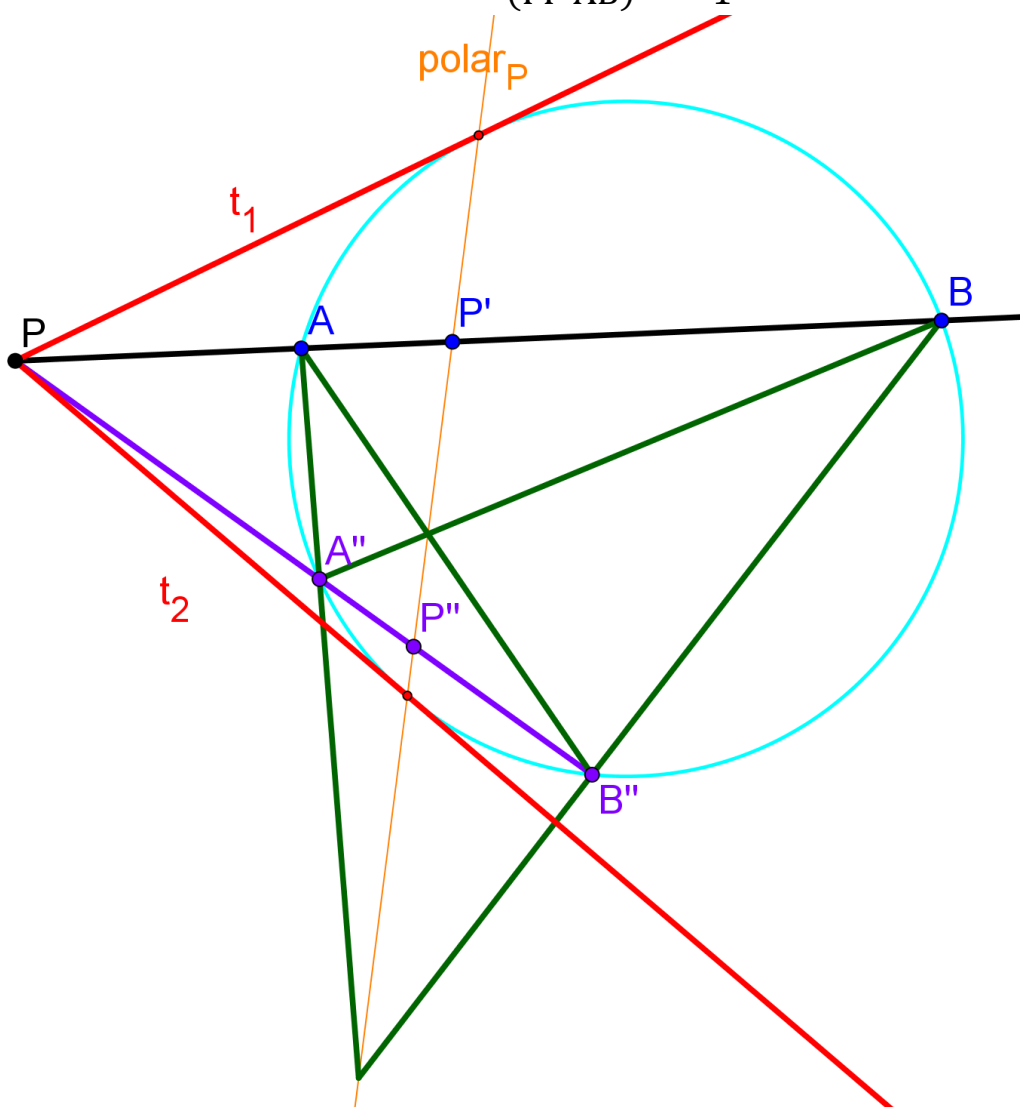
$$(PP'A'B') = (PP''A''B'') = -1$$



Dado un punto Q en p,
la polar de P, q, la polar
de Q, pasa por P

Polar de un punto respecto a una circunferencia [\(en YouTube\)](#)

$$(PP'AB) = -1$$



En la figura anterior cada recta que corte la circunferencia tiene subordinada una involución, de puntos con relación polo polar. Los **puntos dobles de la involución son los puntos de corte con la circunferencia.**

[\(en YouTube\)](#)

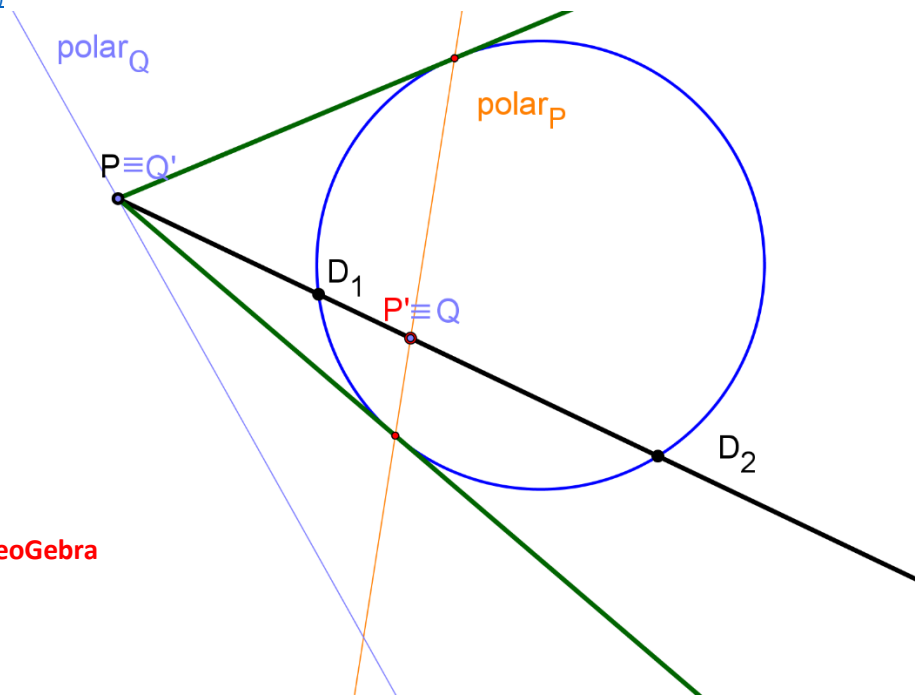
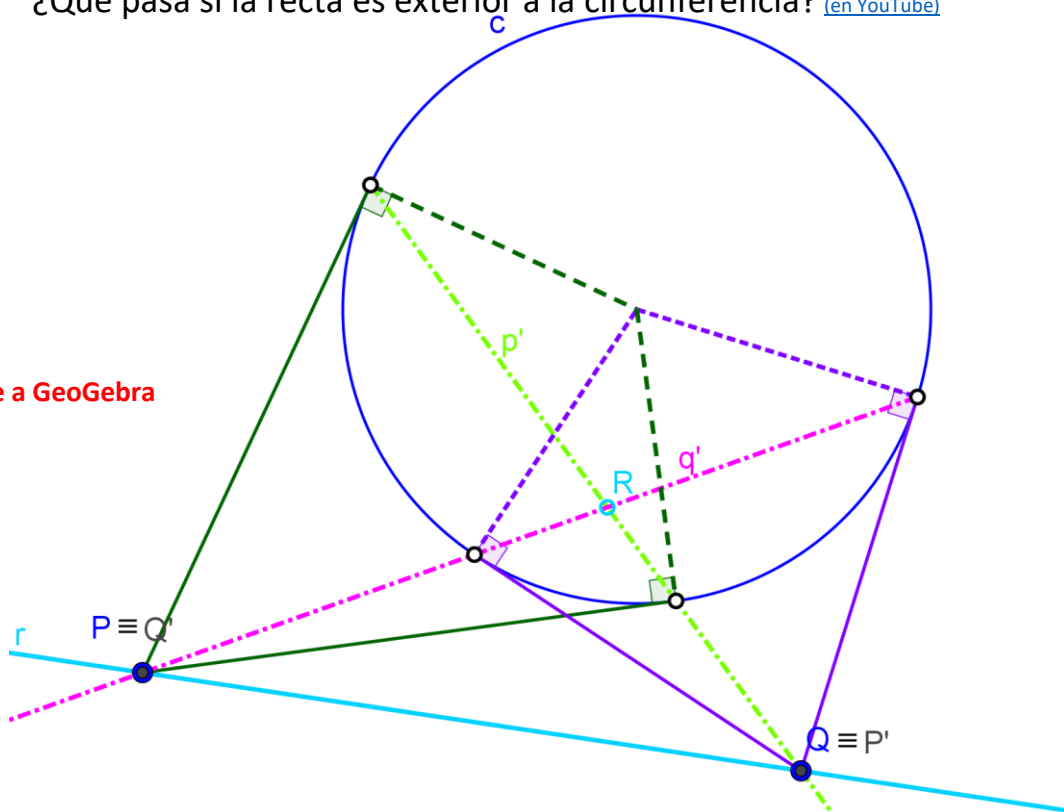


Figura con enlace a GeoGebra

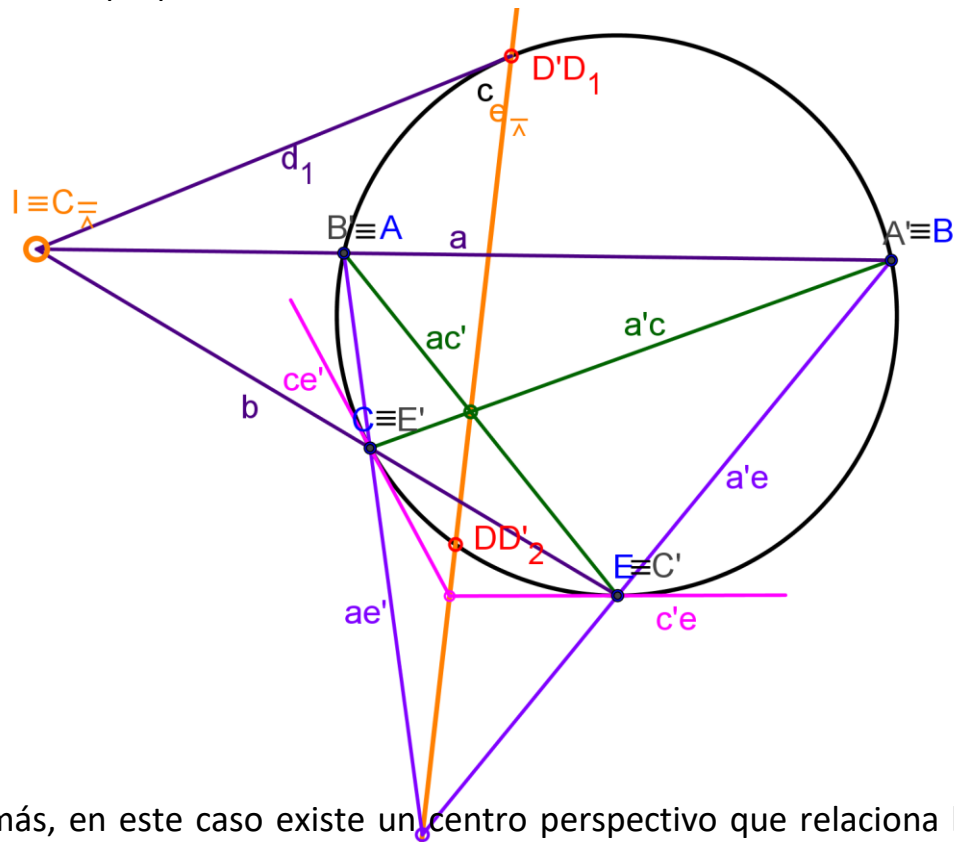
¿Qué pasa si la recta es exterior a la circunferencia? [\(en YouTube\)](#)

Figura con enlace a GeoGebra

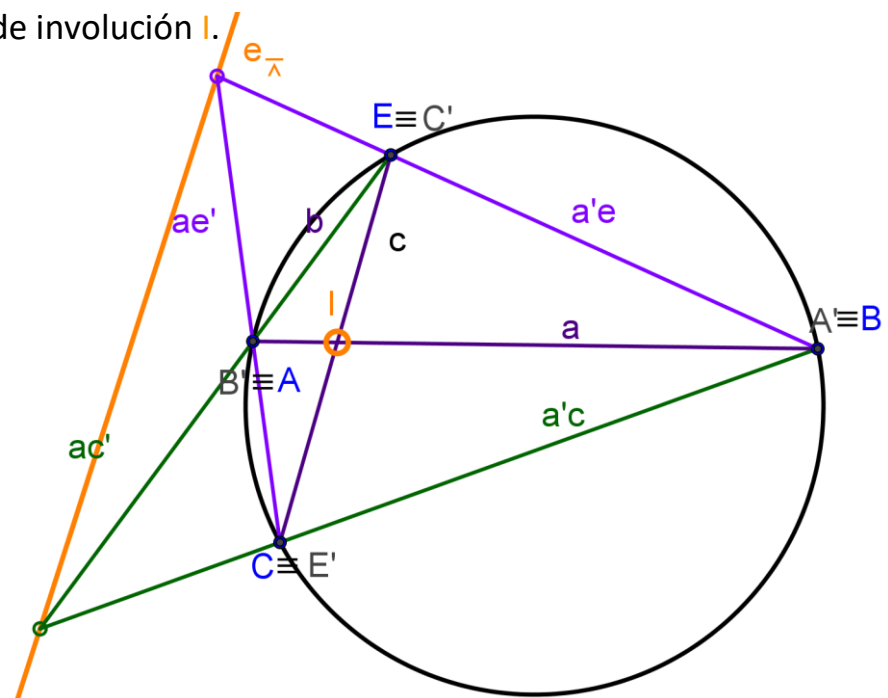


En la involución que la **circunferencia c** subordina sobre la **recta r**, si a cada punto se le hace corresponder el corte de su polar con la recta, tenemos una involución elíptica (sin puntos dobles).

Igualmente, si nos fijamos en los puntos de la circunferencia, podemos considerar que están en involución, podemos calcular el eje proyectivo de las series superpuestas: [\(en YouTube\)](#)



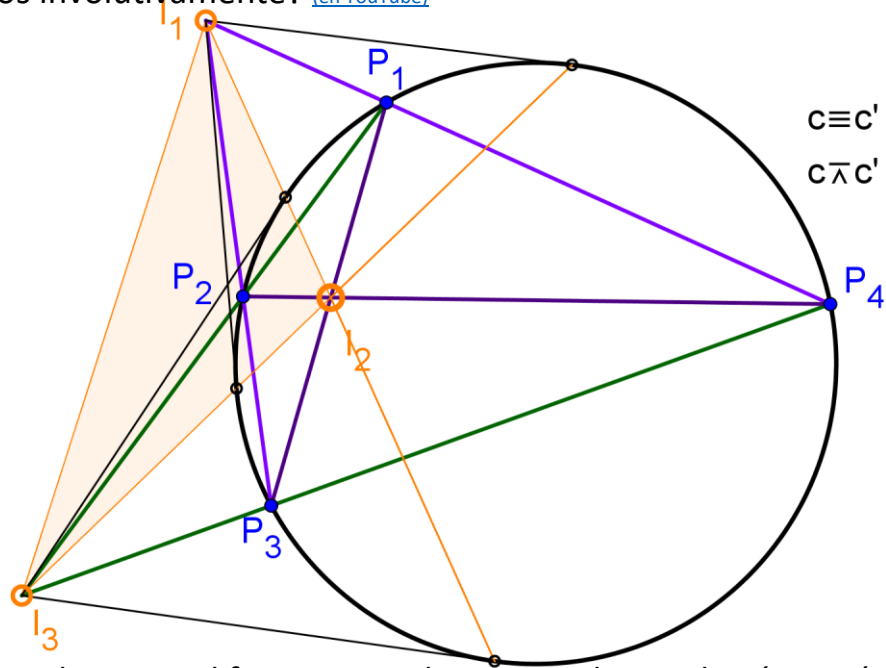
Además, en este caso existe un centro perspectivo que relaciona las dos series. (dos series superpuestas con al menos un punto doble son perspectivas, lo que pasa es que en una recta está en la propia recta). Se denomina centro de involución I .



Pero aún más, podemos tener una involución elíptica, cuando I es interior (no hay tangentes, no hay puntos dobles).

Si el centro de involución es impropio, el eje proyectivo (su polar), es un diámetro.

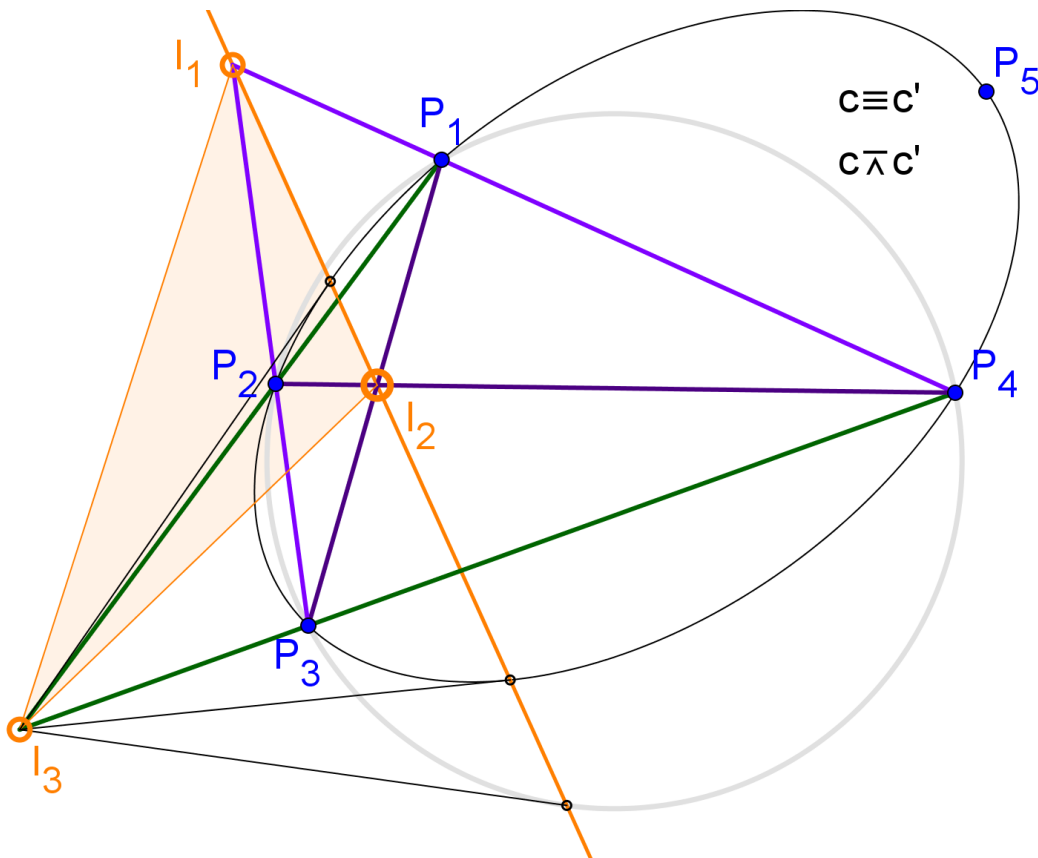
Si hay cuatro puntos en una circunferencia, ¿Cuántas maneras hay de relacionarlos involutivamente? [\(en YouTube\)](#)



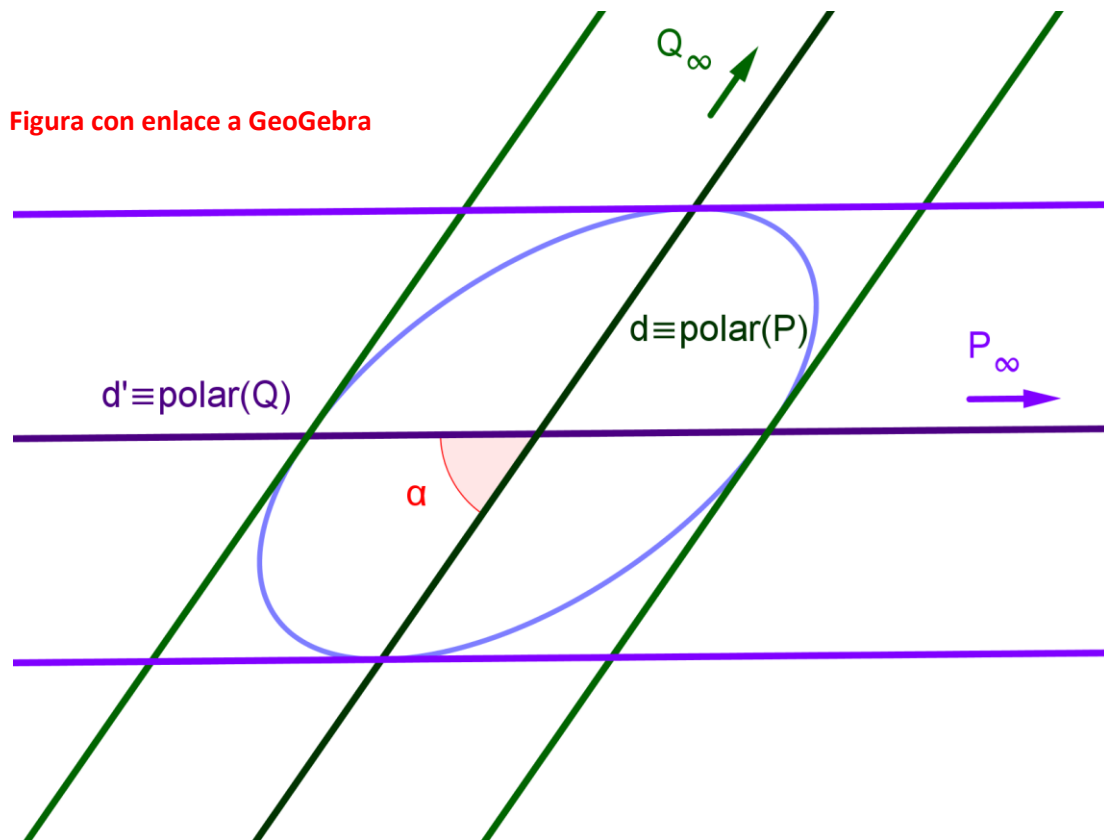
Existen 3 involuciones diferentes, cada centro de involución está en la intersección de las polares de los otros dos. Eso se denomina el triángulo autopolar.

En realidad, esos cuatro puntos definen un haz de cónicas, y el triángulo autopolar es el mismo para todas ellas. Por cada punto del plano, el haz define una cónica, y se mantienen todas las propiedades que hemos visto.

[\(en YouTube\)](#)



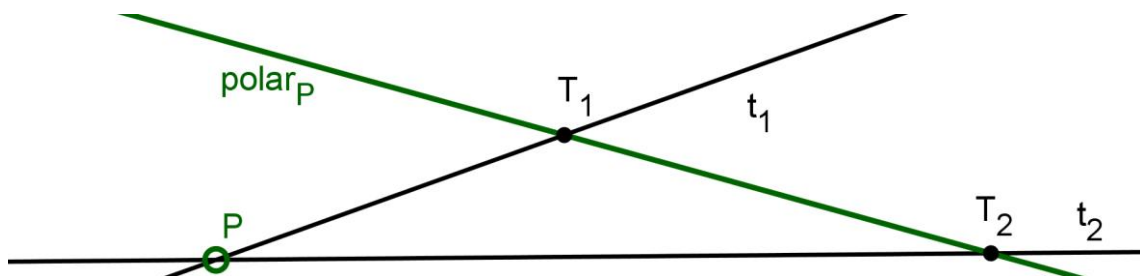
Polar de un punto impropio



Pasa por el centro de la cónica, es un **diámetro** de la cónica. Si se determina la polar del punto impropio del diámetro, se obtiene el **diámetro conjugado**. [\(en YouTube\)](#)

Se define el **centro** de la cónica como el **Polo de la recta impropia**. Por él pasan todos los diámetros.

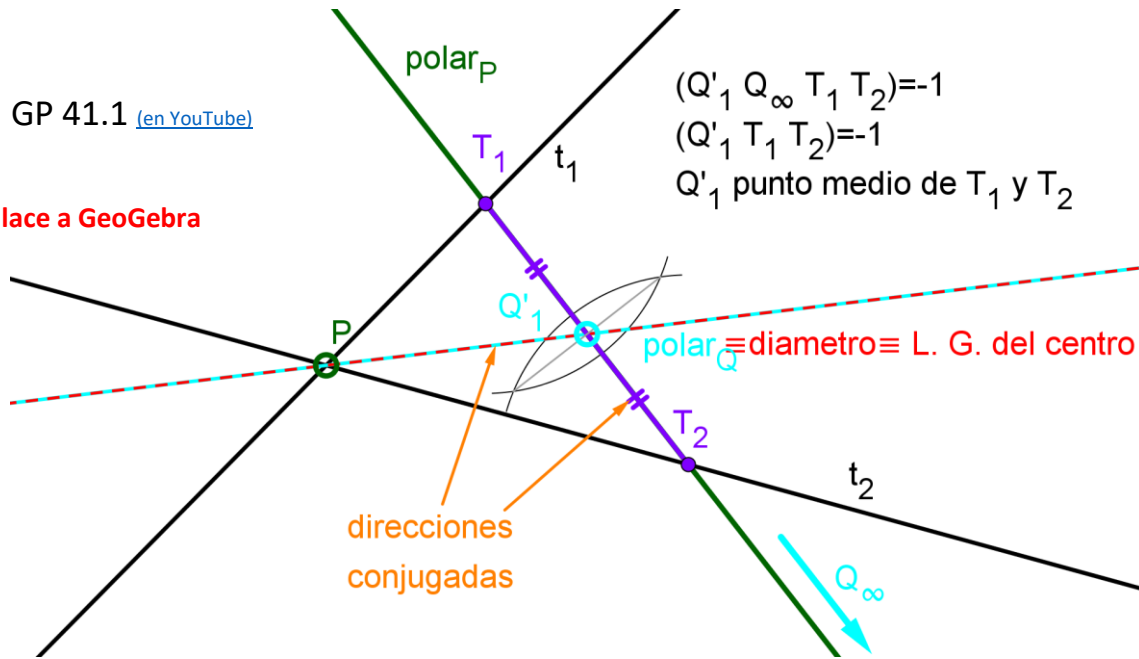
Los **ejes** de la cónica son la pareja de diámetros conjugados que son **ortogonales**.



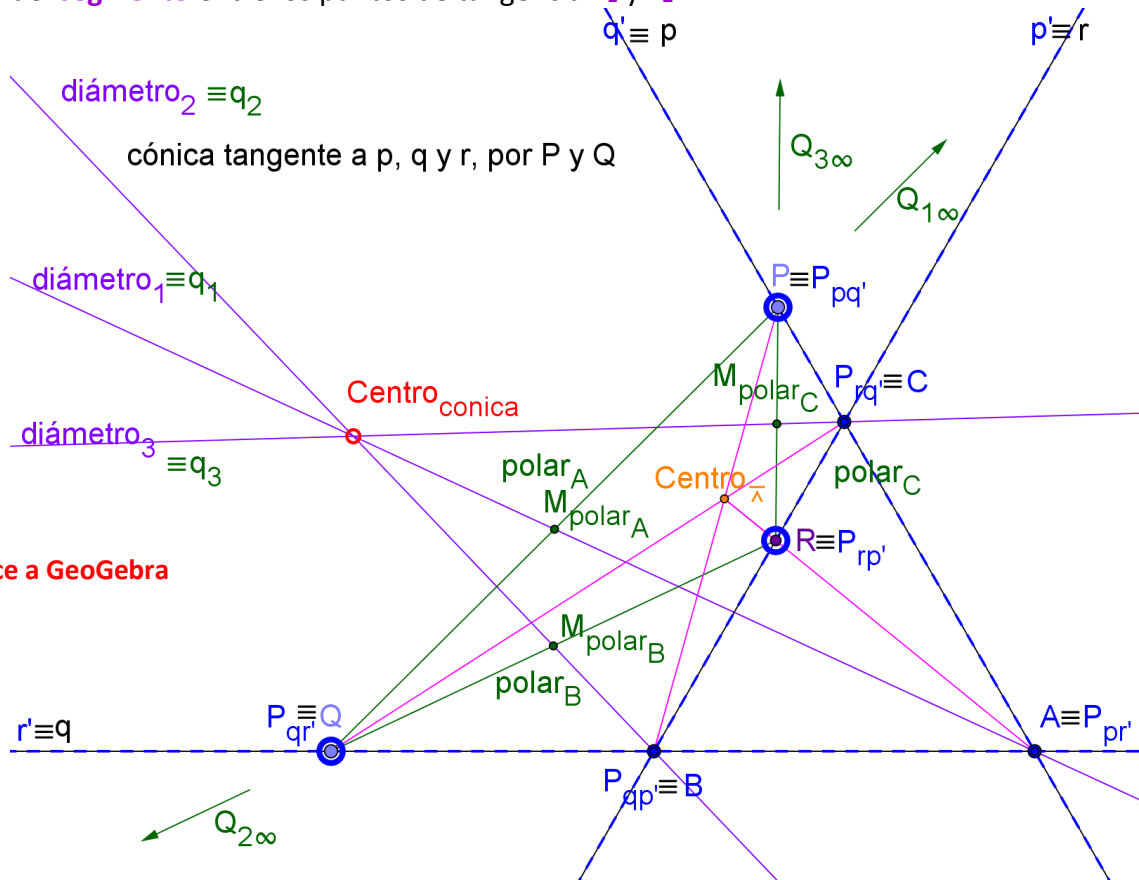
Si en una cónica se tienen dos tangentes (t_1 y t_2) con sus respectivos puntos de tangencia (T_1 y T_2), la **polar del punto P** (punto de corte de las tangencias) pasa por los dos puntos de tangencia. [\(en YouTube\)](#)

GP 41.1 [\(en YouTube\)](#)

Figura con enlace a GeoGebra



Si el punto Q es el punto impropio de esa polar p , entonces q , polar del polo Q_∞ es un diámetro. De q se sabe que pasa por P (puntos de una polar tienen su polar por el polo), y dado que en una cuaterna armónica cuando uno de los puntos de una pareja es impropio (Q_∞) el otro (Q') es punto medio de la otra pareja, q pasa por el punto medio del segmento entre los puntos de tangencia T_1 y T_2 .



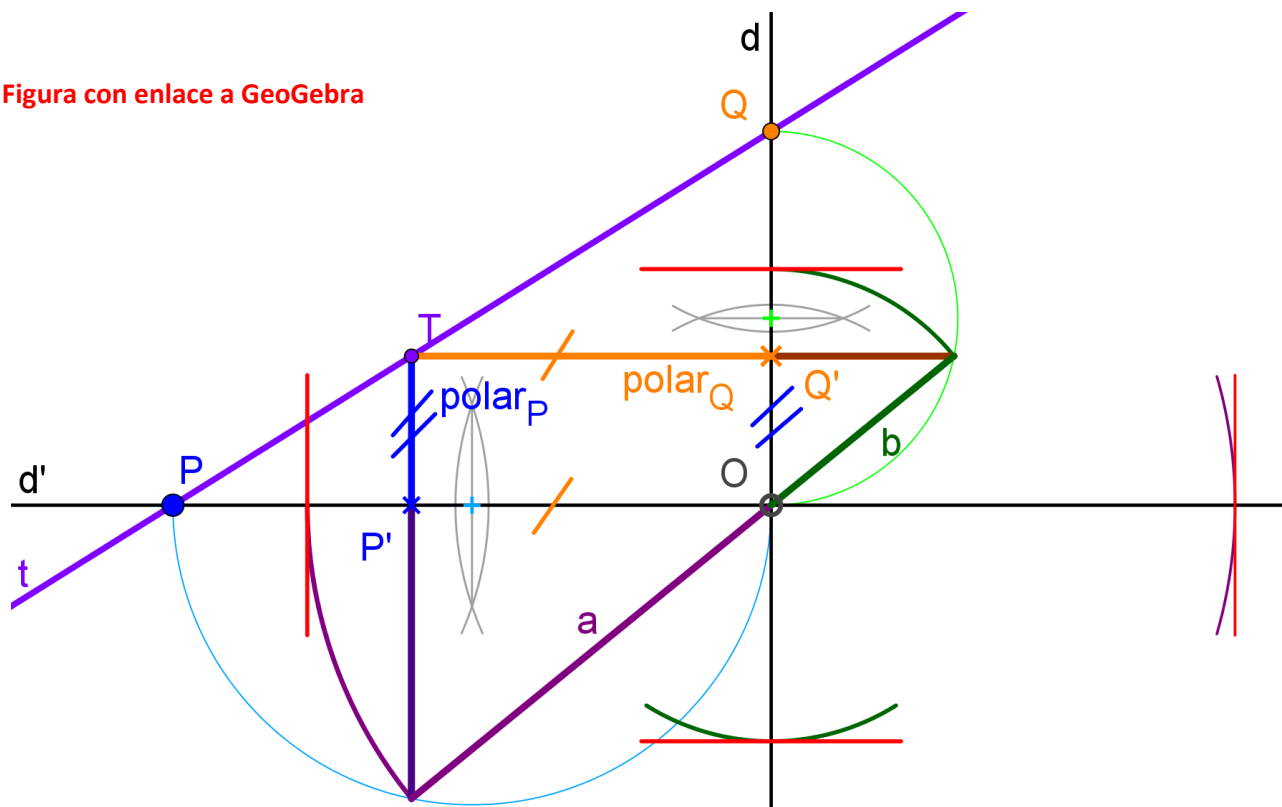
Si en la cónica se tienen tres tangentes, y 2 puntos de tangencia se puede determinar el centro. (GP 53) [\(en YouTube\)](#)

El **diámetro** de la **circunferencia** que pasa por el **centro de involución I** define un arco capaz de 90° desde el que el **centro de la cónica O** ve a dos diámetros conjugados (**d** y **d'**) que son perpendiculares: los ejes de la cónica.

Magnitud de los ejes [\(en YouTube\)](#)

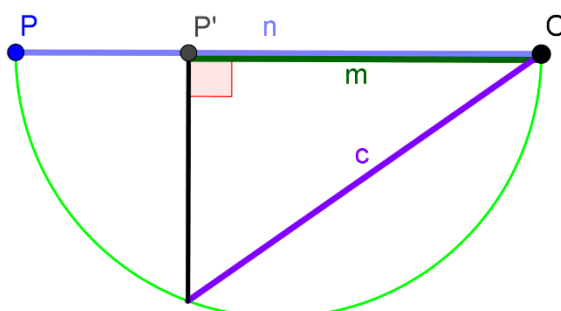
Una vez se tienen los ejes, o en realidad cualquier diámetro, existe una involución subordinada en dicha recta. El **punto P** en el que corta a cualquiera de las tangentes, y **P'** el pie de la **polar de P** subordinan una involución en la recta, de **centro O**, el centro de la cónica. Los puntos dobles de dicha involución (problema explicado [anteriormente](#)) son el corte del eje con la cónica, y por lo tanto determinan la **magnitud** del mismo.

Figura con enlace a GeoGebra

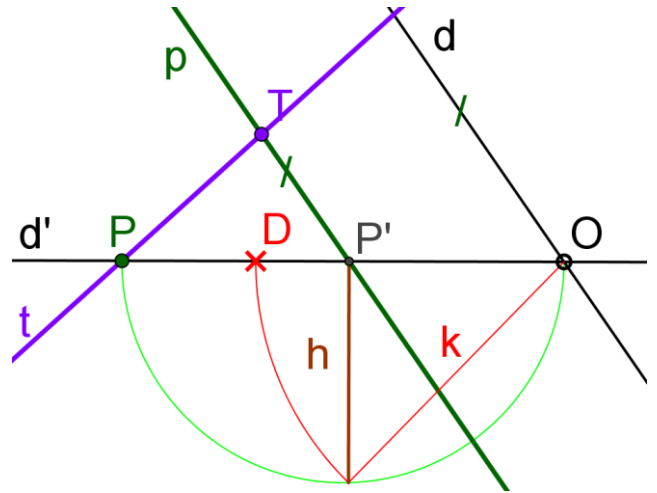


La construcción quizá más económica para determinar ese punto doble es la del teorema del cateto. Sólo hay que repetir el proceso para el otro eje.

$$c^2 = n \cdot m = PO \cdot P'O$$

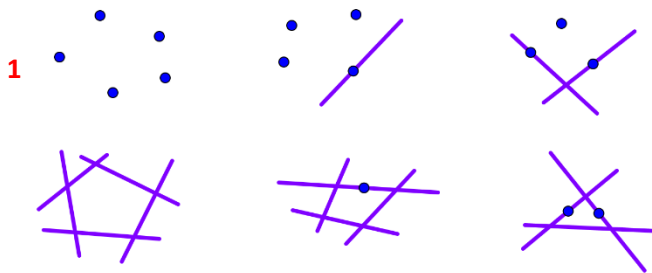


Nótese que sólo en el caso de los ejes la altura del teorema del cateto coincide con la polar del punto P , de manera general la polar p será paralela al diámetro conjugado d , y la altura h ortogonal al diámetro d' .

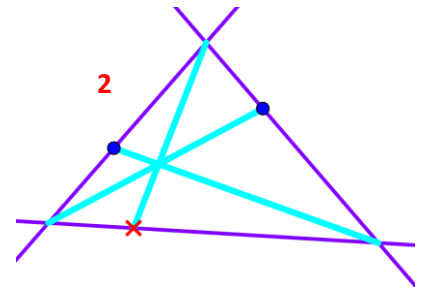


El proceso completo para pasar de datos simples a los ejes queda entonces:

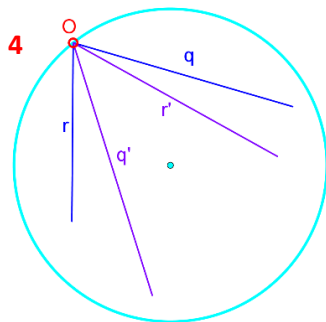
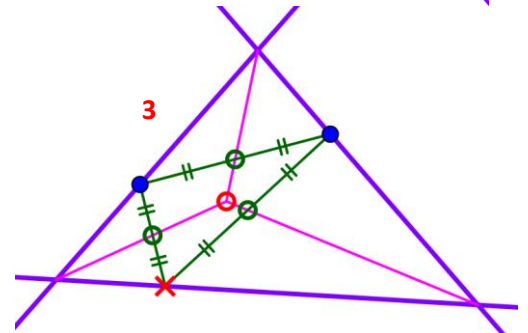
1-Partiendo de 5 datos simples



2-Se determinan tres tangentes con sus puntos de tangencia

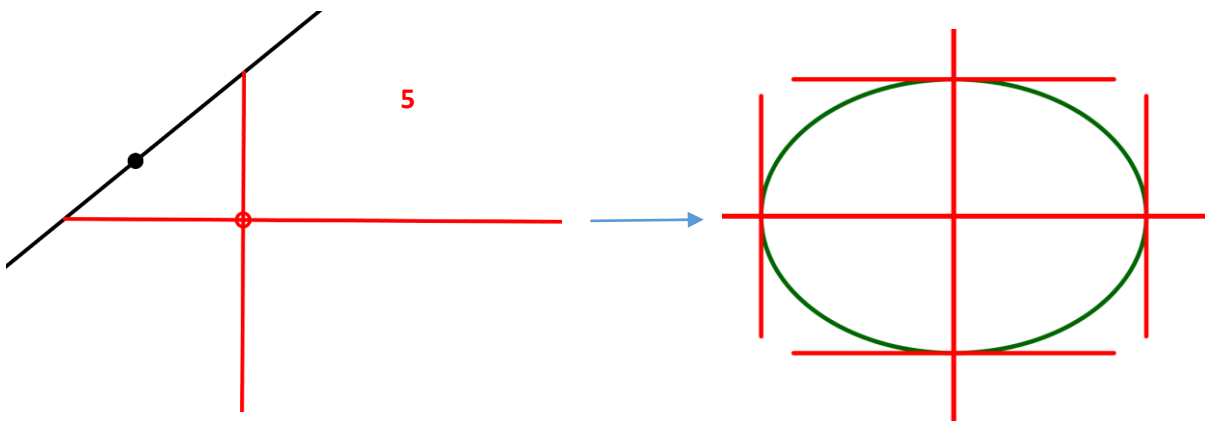


3-A partir de ello se obtiene el centro de la cónica, y dos pares de diámetros conjugados



4-Con los haces en involución, se determinan diámetros conjugados ortogonales (ejes).

5-Con los ejes, una tangente, y el punto de tangencia, se determina la magnitud de los mismos.



Resumen de Polaridad [\(en YouTube\)](#)

La relación polo-polar es una relación armónica con los elementos de la cónica. La polar p de un punto P exterior a una cónica pasa por los puntos de tangencia (T_1 y T_2) de las dos tangentes (t_1 y t_2) a la cónica.

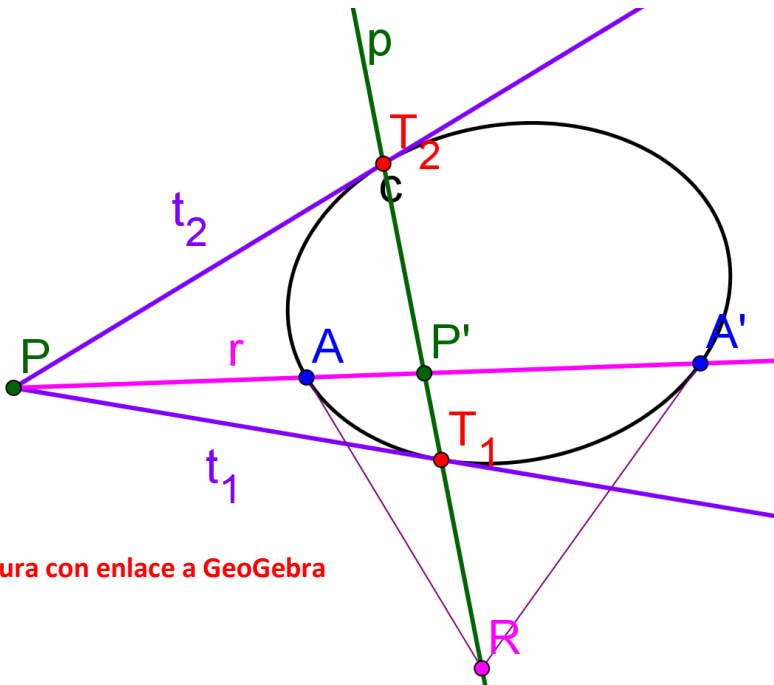


Figura con enlace a GeoGebra

Para todo A en la cónica:

$$(PP'AA') = -1$$

Y P' recorre la **polar** p .

En los casos límites, A , A' y P' colapsan en T_1 y T_2 (más allá los puntos de intersección son imaginarios).

La polaridad es, por naturaleza, simétrica. La **polar** r de cualquier **punto** R que pertenece a **la recta** p necesariamente pasa por P .

Además, estas relaciones armónicas llevan necesariamente al concepto de **involución**. Si en vez de tener un **punto** P cualquiera restringimos P a que pertenezca a la **recta** r , y consideramos P' , el pie de la **polar** p , los puntos P - P' están relacionados por una involución (siendo Q - Q' otra pareja), cuyos puntos dobles son los puntos de intersección de r con la cónica, $I_1=I_1'$ e $I_2=I_2'$. [\(en YouTube\)](#)

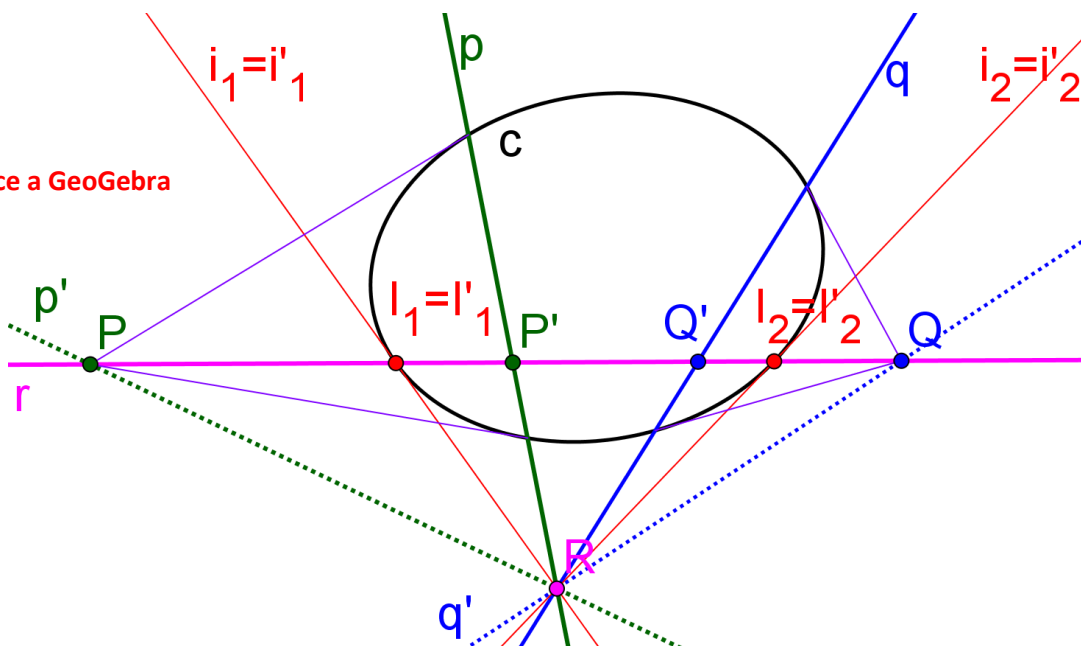
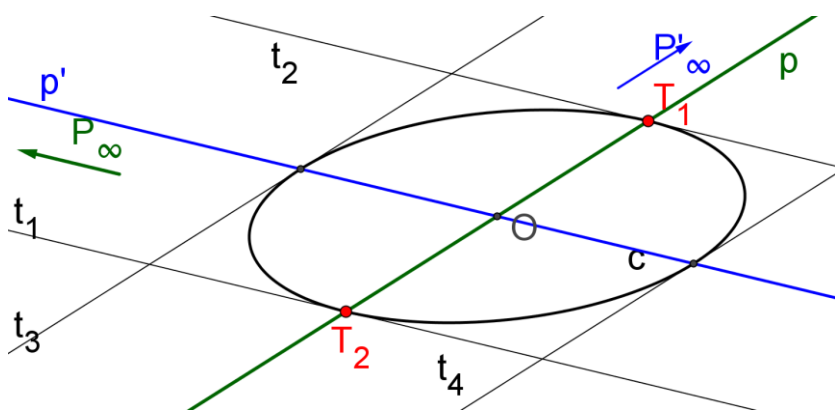
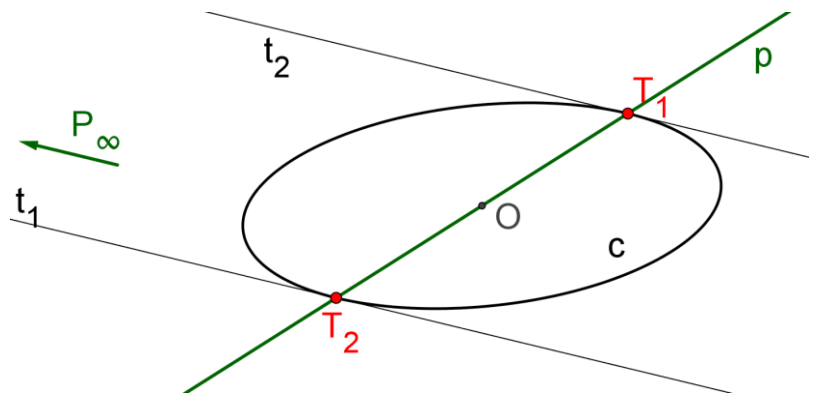


Figura con enlace a GeoGebra

Igualmente, si se considera el **punto R**, polo de la **recta r**, y se consideran las rectas que pasan por él, si a cada **recta p** se le hace corresponder la **recta p'** que pasa por su **polo, P**, se obtiene un haz de rectas en involución (siendo **q-q'** otra pareja), cuyos rayos dobles, $i_1=i_1'$ e $i_2=i_2'$ son las dos tangentes a la cónica desde **R**. Y como en el caso de la involución de puntos $(qq'i_1i_2)=-1$.

Estos conceptos de separación armónica, e involución subordinada permiten abordar varios problemas de polaridad, en los que la determinación de los puntos dobles en una involución determina la intersección de la recta base con la cónica, o la determinación de los rayos dobles de una involución determina las tangentes a la cónica por el punto que es la base del haz. Adicionalmente estas propiedades armónicas pueden permitir determinar de manera sencilla otras tangentes o puntos de paso. [Ejemplo 1](#). [Ejemplo 2](#).

La siguiente consideración es qué pasa si **P** es impropio. En ese caso las tangentes t_1 y t_2 desde P_∞ son paralelas, la **polar p** es un diámetro, y el punto medio de los dos puntos de tangencia, T_1 y T_2 , es el centro de la cónica, **O**, definido como el polo de la recta impropia.

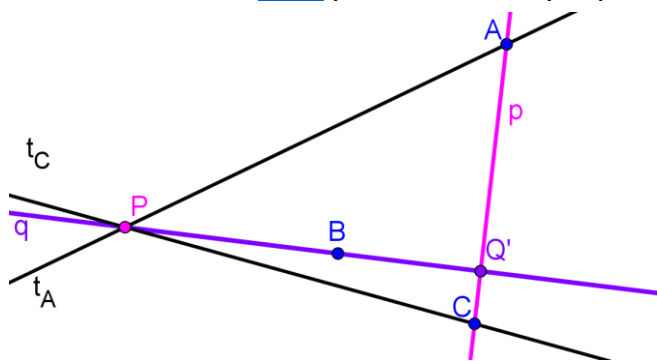


El punto impropio de **p**, P'_∞ tiene como **polar p'** una recta que pasa por **O** (al ser P'_∞ impropio) y pasa por P_∞ (al pertenecer P'_∞ a **p**). Esa recta **p'** es el diámetro conjugado a **p**. La involución de diámetros conjugados es una involución igual que la que aparecía sobre el **punto R** en la página anterior, con la diferencia que la base es el centro de la cónica, y todos los polos están en la polar de **O**, la recta impropia. Es por lo tanto una involución que relaciona *direcciones conjugadas*. Ya se ha [explicado en](#)

[detalle](#) que los ejes son la pareja de elementos que es ortogonal en esa involución, y cómo obtenerlos.

Otros problemas de determinación de magnitud de diámetros siempre se resuelven con estos conceptos de separación armónica de los elementos dobles y cualquier pareja de elementos conjugados en la involución. [Ejemplo 1](#). [Ejemplo 2](#). Es importante tener en cuenta que el mismo concepto de separación armónica de puntos sucede en el caso de las rectas. En una involución subordinada por una cónica en un punto cualquiera las tangentes a la cónica desde el punto separan armónicamente a direcciones conjugadas. [Ejemplo 3](#).

Cabe también señalar que la Polaridad permite resolver problemas vistos anteriormente, como la determinación de una tercera tangente o punto de tangencia en una cónica dada por dos datos híbridos, resuelto [aquí](#) por cónicas superpuestas. Pongamos el



ejemplo de una cónica dada por tres puntos, **A**, **B** y **C** y dos tangentes t_A y t_C . ([en YouTube](#))

Se puede considerar el **punto P**, intersección entre t_A y t_C , y su **polar p**, que ha de pasar por **A** y **C**. La tangente por **B** ha de pasar por un **punto Q**, perteneciente a **p** que ha de tener

como polar una **recta q**, que ha de pasar por **B** (por ser el punto de tangencia) y por **P** (por ser el polo de **p**). El pie de la **polar q** es **Q'**, y el par **Q-Q'** está separado armónicamente de los dos puntos dobles en la involución subordinada en **p**, es decir, los puntos de tangencia **A** y **C**. $(QQ'AC) = -1$. Empleando un **cuadrivértice completo** se obtiene **Q**, y por lo tanto la **tangente t_B**. Nótese que con esa posición del cuadrivértice el trazado es idéntico a la resolución por series superpuestas.

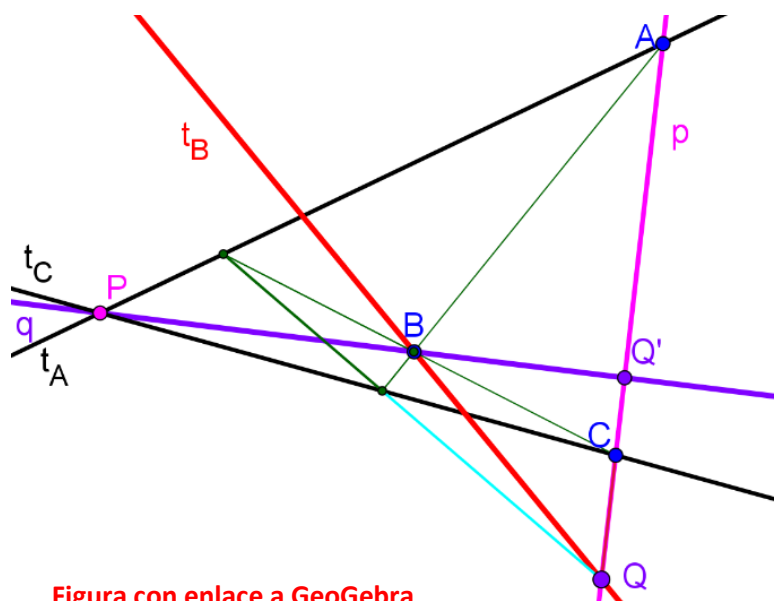
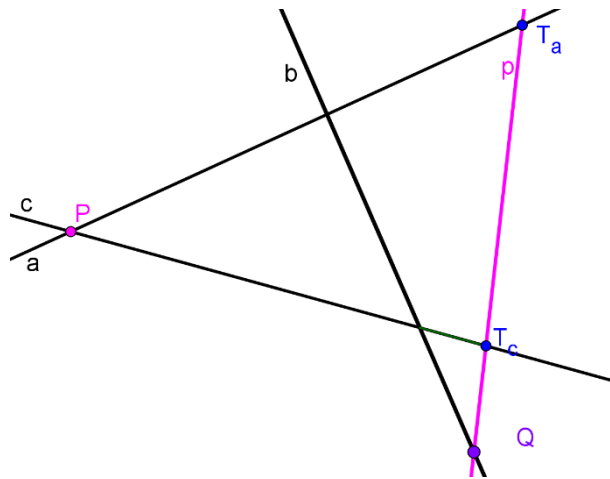


Figura con enlace a GeoGebra

El problema dual, en el que dadas tres tangentes, a , b y c , y dos de los puntos de tangencia T_a y T_c se busca determinar T_b se puede razonar de manera similar, e incluso más sencilla. [\(en YouTube\)](#)



El punto de corte de a y c , P , tiene como polar la **recta p** , por T_a y T_c . El **punto Q** , de intersección entre b y p , es el polo de una **recta q** , que ha de pasar necesariamente por el punto de tangencia T_b buscado.

Para determinar la **recta q** , se tiene en cuenta que el par $Q-Q'$ está separado armónicamente de los dos puntos dobles en la involución subordinada en p , es decir, los puntos de tangencia T_a y T_c , y por lo tanto con un **cuadrivértice completo** que ya está prácticamente construido se puede determinar q y T_b . Una vez más, determinando Q' con este **cuadrivértice**, el trazado resulta idéntico a la determinación por cónicas superpuestas.

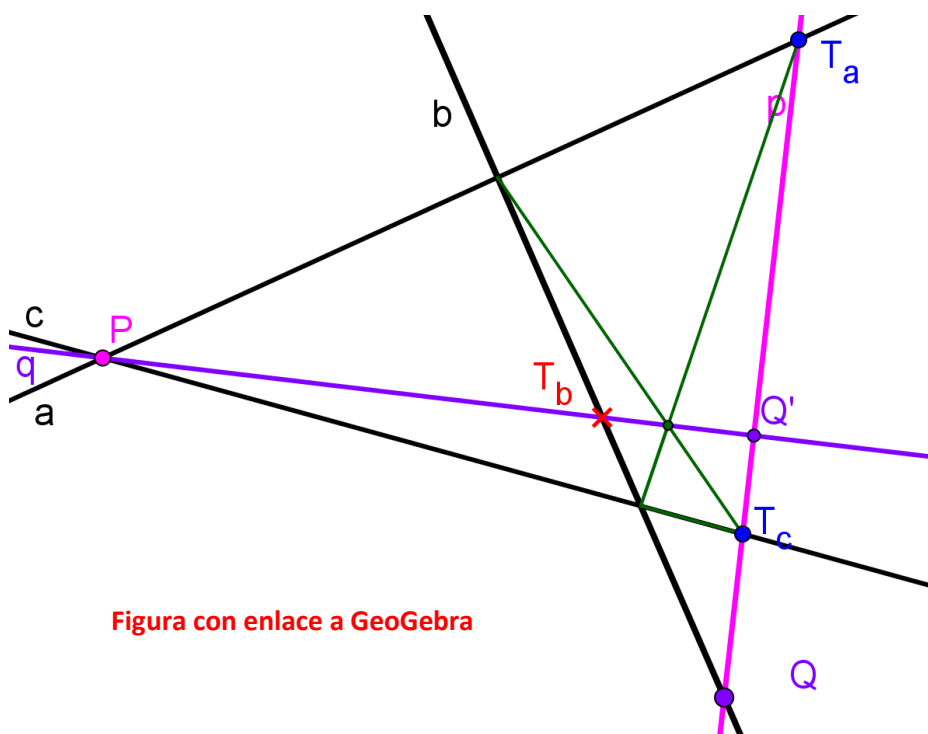


Figura con enlace a GeoGebra

La Polaridad permite resolver problemas de una manera elegante y con un trazado mínimo (véase el método 4 en [este problema](#)), pero a su vez requiere manejar conceptos más complejos y de difícil conceptualización, con lo que conviene dedicar tiempo a entenderla y dominarla.