名词解释

什么是仿射球面？

Daniel J. F. Fox

由线性映射与平移生成的 *仿射运动* 群 Aff, 系由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的保直线的微分同胚组成. Aff 所保持的最简单有趣的一类超曲面是 *仿射球面*, 仿射球面由仿射不变条件定义，其 *仿射法线* 交于一点，可能在无穷远点. 仿射球面包括非退化的二次曲面，也包括很多其它的例子. 一个简单例子就是曲面 $\{xyz = 1 \colon x > 0, y > 0\}$. 这看起来像一个扁平化的双曲面渐近于由坐标平面界定的正卦限. 正如以下要说明的，不等价仿射球面的无限性源自于解某些 *Monge-Ampère* (蒙日 – 安培) 型偏微分方程 (PDE), 即涉及某未知函数的 Hesse (黑塞) 行列式. 仿射球面的构造在解 Monge-Ampère 方程 [4] 的技术发展中起非常重要的作用, 同时, 仿射球面也出现在平坦射影结构 [1] 与凸优化 [3] 这样明显不同问题的研究中.

最直观的几何概念都与描述位置 (如距离、角度) 与相对位置 (如中点、平行), 大小 (如体积、长度), 形状 (如圆形的或平坦的) 等有关. 在某种特定的情形下 *几何* 所意味的东西系由不同的或等同的特性操作时所确定的，旋转与平移生成 Euclid (欧几里得) 运动 Euc, 它由保标准内积 $\langle , \rangle$ 的仿射运动组成，$\mathbb{R}^{n+1}$ 的 Euclid 几何与仿射几何指的是那些分别在 Euc 和 Aff 下保持的结构. 例如，Euclid 几何区分球面与椭球面，因为它们的曲面以不同的方式弯曲，尽管它们不能由 Euclid 运动重叠，但是可以通过适当的剪切和伸缩而合二为一. 因为 Aff 包含 Euc, 仿射等价性和不变性是比相应的 Euclid 概念粗糙一些的概念. 例如，任何两个椭球面或任何两个三角形都是仿射等价的. 由于 Aff 保标准的方向导数算子 D, 却不保 $\langle , \rangle$, 距离和角度在仿射几何中没有意义，但是直线、平行、中点有意义. 虽然没有自然的方式把函数的微分看成向量场，通常的微积分 (基于 D) 仍然有意义.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 *光滑超曲面* 是指可以局部表示为一个光滑函数 f 的图 $\Sigma_f = \{x^0 = f(x^1, \ldots, x^n)\}$ 的子流形. 假设 Σ 是 *双侧的* (*two sided*), 也就是有一个处处与 Σ 横截的非零向量场 N. 这样排除了诸如 Möbius (默比乌斯) 带这样的例子, 但是局部地却总是成立的, 而且简化了讨论. 对与 Σ 相切的向量场 X 和 Y, 方向导数 $D_X Y$ 在横截 N 的方向的部分形式为 $h(X, Y)N$, h 为对称双线性型的场. 如果 N 改变，那么 h 要乘以一个非零函数. Σ 的 *第二基本形式* 是 h 等价类 $[h]$, 两个双线性型相差一个非零函数，则视为等价. 因为 $[h]$ 仅依赖于 D, 所以 Aff 保持 $[h]$. 因此，假定超曲面 Σ *非退化*, 则 h 非退化. 如果 h 是定的，那么 Σ 就是 *局部一致凸的*, 这时它也是局部严格凸的. 对一个图 Σ_f, Hesse 行列式 $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ 是对应于横截 $\frac{\partial}{\partial x^0}$ 的 $[h]$ 的代表元. 因此，Σ_f 非退化 (分别地，局部

译自：Notices of the AMS, Vol. 59 (2012), No. 3, p. 420–423, What Is an Affine Sphere? Daniel J. F. Fox. Copyright ©2012 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

Daniel J. F. Fox 是 the Escuela Universitaria de Ingeneria Técnica Industrial, Universidad Politécnica de Madrid 的助理教授，他的邮箱地址是 daniel.fox@upm.es.

一致凸) 当且仅当 f_{ij} 非退化 (分别地，定的). 例如，鞍面 $z=xy$ 非退化，但不是凸的，同时 $z=x^4+y^4$ 是严格凸的，但不是一致凸的，因为 $xy=0$ 时是退化的. Aff 保 $[h]$, 所以 Σ_f 的这些局部凸性质是仿射不变的. 可以通过要求对应的 h 等于由 $|\det f_{ij}|^{-1/(n+2)}f_{ij}$ 局部给出的 *等仿射* (*equiaffine*)(或 *Blaschke* (*布拉施克*))*度量* 使 N 的缩放比例保持固定，尽管未必沿着 N 的方向. 前缀 *equi* 表示是保体积仿射运动群 SAff 所保持的结构. 局部一致凸性推出 Σ 与中心在 $P\in\Sigma$ 的小球 B 的交包含在 P 点的切平面 $T_P\Sigma$ 分隔出的半空间之一，把 B 分隔成与 $T_P\Sigma$ 相交的 *外部* 区域以及不与 $T_P\Sigma$ 相交的 *内部* 区域. 在此情形，如果 N 指向内部区域，h 就是正定的.

形状算子 (*shape operator*) 是 $T_P\Sigma$ 的自同态 S, S 将切向量场 X 对应于导数 $-D_XN$ 的切向部分，它的本征值是 Σ 的 *主曲率*. 这些事实刻画了 Σ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中如何相对于 N 弯曲和扭曲. Euclid 不变的横截可通过要求与 Σ 垂直且为单位范数而确定，至多相差一个符号. 对应的形状算子 S 与双线性型 h 通过 Euclid 度量可视为是相同的. 由于在仿射几何中没有正交的概念，所以我们选择使用横截. 尽管如此，定义一个 Aff 保持的可区分的仿射法线方向还是可能的，虽然对应的 S 和 h*不能* 自然地视为相同.

W. Blaschke 给出的仿射法线的下述刻画基于质心的仿射等变性. 如果 $[a,b]\subset\mathbb{R}$, 且 $x\in(a,b)$, 那么 $|x-a|$ 与 $|x-b|$ 在平移和缩放比例一致的伸缩下不变，从而应用于 a,b, 与 x 的仿射变换不改变比值 $A(x)=|x-a|/|x-b|$. 使得 $A(x)=1$ 的唯一的 $x\in(a,b)$ 是 $[a,b]$ 的中点. 这是一个区域的 *形心* (*centroid*) (也称为 *质心* (*center of mass*), 或 *重心* (*barycenter*)) 通常概念的一维特殊化. 由积分的换元公式可知，质心是仿射等变的，即一个区域在 $g\in$Aff 下像的质心与该区域的质心在 g 下的像相同. 考虑在局部一致凸的超曲面 $\Sigma\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 上的点 P 以及与 Σ 在 P 点相切的平面 K. 由于 Σ 的凸性，它与 K 的从 P 点距离为 t 的平行移动 $K(t)$ 围成一个 $n-1$ 维的凸子集 $\Omega(t)\subset K(t)$. 曲线 $n(t)$ 在 P 点的切线由 $\Omega(t)$ 的质心构成，它们张成 *仿射正规子空间*. 因为仿射变换保质心和平行性，这个构造显然是仿射等变的，尽管距离 t 在 Aff 下不保持，$n(t)$ 在 $t=0$ 的切向量也不保持. 但是，因为 $s(t)$ 等于 $K(t)$ 与 Σ 所围体积的一个适当的函数，易知 $n(t(s))$ 在 $s=0$ 处的导数是 SAff 等变的 *等仿射法线*. 等价地，等仿射法线的缩放可通过要求对应的 h 是等仿射度量确定. 对应的 S 是 *等仿射形状算子*.

例如，如果 Σ 是一个球面，那么它与在 P 点的切平面的平行移动的交是该平面中的圆球，这个球的形心是平面与 Σ 过 P 的半径的交. 因此一个球面的众仿射法线交于其中心. 由仿射不变性，结论对于椭球面也成立. 抛物线 $y=x^2$ 的任意割线被抛物线所截时，其所截线段的中点的横坐标等于平行于这条割线的抛物线的切线切点的横坐标. 推广此过程可以证明，开口向上的椭圆抛物面的仿射法线是垂线.

我们的基本任务是确定和刻画超曲面的 Euclid 不变类或仿射不变类，许多这样的类由形状算子的代数条件所刻画，如迹或行列式为常数. 研究最多的 Euclid 不变超曲面是 *极小* 曲面 —— 曲面面积泛函关于微小的法向变分的临界点. 这些从物理上看就像把一个金属丝框浸入肥皂水中张成的薄膜. 它们称为 *极小*, 是因为当取极值时，它们事实上取极小值. 对一个图 Σ_f, Euclid 体积元是 $(1+|df|^2)^{1/2}dx$, Σ_f 的极小性是由平均曲

率等于零给出的 f 的非线性二阶 PDE, 平均曲率按定义是 Euclid 主曲率的平均值. Σ 的 *等仿射体积* 是 $|\det h|^{1/2}$ 关于等仿射度量 h 在 Σ_f 上的积分. 微小的法向变分的临界点由 *仿射平均曲率*, 也就是等仿射主曲率的平均值等于零给出. 仿射平均曲率为零的超曲面多年来一直被称为 *仿射极小* 的, 这个称呼一直持续到 E. Calabi (卡拉比) 计算得出, 当取极值时, 这样的超曲面是局部体积 *极大* 的. 现在改称 *仿射极大* 的. 对于图 Σ_f, $|\det h|^{1/2} = |\det D^2 f|^{1/(n+2)}|dx|$, 且 Σ_f 仿射极大是关于 f 的非线性 *四* 阶 PDE.

最简单的超曲面是 *脐* (*umbilical*) 超曲面, 其上每一点的主曲率都相等. 等价地, 形状算子是恒等算子的倍数. 不严格地说, 这种超曲面在每一点都在各个方向以相同的方式弯曲. 在 Euclid 情形, 这些仅仅是超平面或球面. 因此, 仿射脐超曲面 Σ 的仿射平均曲率一定是常数. 这等价于几何条件: Σ 的仿射法线要么交于一点, 它的 *中心*, 要么都平行, 这时也说 Σ 的 *中心在无穷远点*. 由此激发我们将一个仿射脐超曲面称为 *仿射球面*. 一个仿射球面当其中心在或不在无穷远点时分别是 *假的* (*improper*) 或 *真的* (*proper*). 例如, 对于任意的 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $z = xy + \phi(x)$ 的图是携有等仿射法向 $\frac{\partial}{\partial z}$ 的假仿射球面.

在凸的情形, 从仿射球面作为椭圆型 Monge-Ampère 方程的解的表示可以得到比较强的结论. 局部严格凸函数 f 的图 Σ_f 是平均曲率为 H 的中心在原点或无穷远点的仿射球面当且仅当 f 的 Legendre (勒让德) 变换 u 是

$$\det \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} = \begin{cases} (Hu)^{-n-2}, & \text{当 } H \neq 0 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } H = 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{1}$$

的解. $u(y)$ 是在由 $u = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - f$ 关于 Ω 上的坐标 $y_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ 隐式地定义的微分 df 的像 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的严格凸函数. 在真的情形, *径向图* $\{u^{-1}(-1, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n\}$ 也是一个仿射球面, 平均曲率为 H^{-1}. 在假的情形, 交换 (1) 中 u 和 f 的角色可以证明 u 的通常的图也是一个假仿射球面. 这种方式产生成对的仿射球面是 Legendre 变换对偶性的深刻体现.

如果一个凸仿射球面是假的, 也称为 *抛物型* 的. 同时, 如果是真的, 又依 H 是正的或负的 (这分别意味着其中心包含在内部或外部), 称为 *椭圆型* 的或 *双曲型* 的. 运用 Jörgens, Calabi 与 Pogorelov (波戈列洛夫) 关于类似 (1) 的 Monge-Ampère 方程解的增长的基本结果, 在一些技术性假设之下可以证明, 一个椭圆仿射球面是椭球面, 抛物仿射球面是一个椭圆抛物面. 在双曲情形, 可能性更多. 对于 $\rho(x) = -z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2$, 双曲面

$$\mathbb{H}_r = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho(z) = -r^{2(n+2)/(n+1)},\, z_0 > 0 \right\}$$

是当 $H = -r^2$ 时 (1) 的解 $u = -r^{-(n+2)/(n+1)}(1 - |x|^2)^{1/2}$ 的单位球上的径向图, $\mathbb{H}_r$ 渐近于零锥 $\{\rho(z) = 0\}$, 且填充它的内部 $\{\rho(z) < 0\}$. 由 S. Y. Cheng (郑绍远) 和 S. T. Yau (丘成桐) 的一个定理可以证明, 在一个有界凸域 Ω 上, 对于 $H < 0$, 有唯一的可以连续地扩充为在 Ω 的边界上是 0 的 (1) 的负的凸解, 因此有一个一般得多的类似的几何图像 ([2] 和 [4]). 换句话说, 假设凸锥 K 是 *尖锐的* (*sharp*), 意思是它不包含整条直线 (这排除了如半空间这样的对象). 因而 K 的内部以唯一的方式表示成渐近于 K 且中心在 K 的顶点

的平均曲率为 $-r^2$ 的双曲仿射球面 L_r 的不交并 $\cup_{r>0}L_r$. 此外，由郑绍远和丘成桐以及 Mok (莫毅明) 和丘成桐的其它定理可知，在 K 上 Monge-Ampère 方程 $\det \frac{\partial^2 F}{\partial z_I \partial z_J} = e^{2F}$ 有唯一解在 K 的边界上趋于 $+\infty$, 使得 $\frac{\partial^2 F}{\partial z_I \partial z_J}$ 是一个完备 Riemann (黎曼) 度量, 使 K 成叶状的仿射球面是 F 的等高面. 事实上，对于 (1) 的解 u, F 等于 $-(n+1)\log|z_0 u(z_i/z_0)|$ 加上一个常数. 例如，

$$u = -\sqrt{n+1}(y_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n)^{1/(n+1)} \tag{2}$$

在卦限 $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y_i > 0\}$ 的径向图是一个包含在 $-\log|\prod_{I=1}^{n+1} z_I|$ 的等高面中渐近于 $\{\prod_{I=1}^{n+1} z_I = 0\}$ 的平均曲率为 -1 的仿射球面. 尽管该定理对每个尖锐凸锥产生一个仿射球面，这样的球面却难于精确描述，除非 K 是齐次的，也就是其自同构群 G 的作用是可迁的. 此时，$G \cap \mathsf{SAff}$ 的轨道是渐近于 K 的仿射球面，也就是，(2) 产生于对角线性映射的群. 二元三次型 $f(u,v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v + x_3 u v^2 + x_4 v^3$ 的判别式 $x_2^2 x_3^2 + 18 x_1 x_2 x_3 x_4 - 4 x_1 x_3^3 - 4 x_2^3 x_4 - 27 x_1^2 x_4^2$ 的非零等高面的分支是以这种方式产生的一个引人注目的例子. 尽管这样的构造能产生许多例子，我们对带不定符号差的等仿射度量的仿射球面的理解很不深入，部分原因是非椭圆 Monge-Ampère 方程的理论发展不够充分. 同时，渐近于非齐次锥的双曲型仿射球面的精确表示也未知，即便是像多面体锥这样表面上看来简单的情形也是如此.

仿射球面在一些应用中作为模型出现. 数学成像中研究超曲面沿着等仿射法线的流. 它的自相似 (孤立子) 解是仿射球面. 在另一个方向上, 函数 $-\log|\prod_I z_I|$ 是在解凸规划问题的多项式时间内点法中起关键作用的 *自和谐障碍函数* (*self-concordant barrier function*) 的原型 [3].

Cheng-Yau 定理把仿射球面与具有 *平坦射影结构* 的流形 M 的万有覆盖上的锥相关联 [1], 从它是一个凸域关于射影变换群的商的意义上来说 M 是 *凸的*. 等仿射度量约化为 M 上的典范度量，类似于有负的第一 Chern (陈省身) 类的紧 Kähler (凯莱) 流形上的 Kähler-Einstein (爱因斯坦) 度量，该度量对于更好地理解凸射影结构应该是根本的. 例如，J. Loftin 证明如何用它来确定在 M 的 Teichmüller (泰希米勒) 空间上具有全维数 $16g-16$ 的向量丛的亏格 $g>1$ 的紧的可定向曲面 M 上的凸射影结构的形变空间.

参考文献

[1] W. M. Goldman, What is a projective structure?, Notices Amer. Math. Soc. 54 (2007), no. 1, p. 30–33.

[2] J. C. Loftin, Survey on affine spheres, Handbook of Geometric Analysis. Vol. II, Adv. Lect. Math., vol. 13, International Press, Somerville, MA, 2010, `http://arxiv.org/abs/0809.1186`, p. 161–192.

[3] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, Interior-point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 13, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[4] N. S. Trudinger and X.-J. Wang, The Monge-Ampère equation and its geometric applications, Handbook of Geometric Analysis. No. 1, Adv. Lect. Math., vol. 7, International Press, Somerville, MA, 2008, p. 467–524.

(王玉玺 译 王世坤 校)