Diferenciabilidad de funciones de varias variables II

v.2.1

Antonia González Gómez
Dep. de Matemáticas Aplicadas a los Recursos Naturales
ETSI de Montes
UPM

Índice

1. Derivadas parciales de orden dos

Definición 1.1. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función, a es un punto interior a A. Si existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, para todo $i = 1 \cdots n$, se define la derivada parcial segunda de f o derivada de orden dos respecto a x_i y a x_j en $a \in A$ como

$$\frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Observación. De manera similar se definen las derivadas parciales de orden superior-

Teorema 1.1. Teorema de Schwarz. Igualdad de las derivadas cruzadas. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función $f \in C^2(U)$. Entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición 1.2. Matriz Hessiana. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in C^2(U)$. Llamaremos matriz Hessiana de f a la matriz

$$H(f,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Observación. La matriz Hessiana de una $f \in C^2(U)$ siempre es simétrica.

1.1. Polinomio de Taylor

Definición 1.3. Taylor de orden 2.- Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ U$ abierto de $\mathbb{R}^2,\ f \in C^3(U)$ y $[a, a+h] \subset U$. Entonces existe $\xi \in [a, a+h]$ verificando

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 \\ + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi)h_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi)h_1^2 h_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi)h_1 h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi)h_2^3, \end{aligned}$$

La fórmula de Taylor de orden 2 se puede escribir como

$$f(a+h) \simeq f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + h^t \cdot Hf(a) \cdot h$$

2. Extremos relativos y absolutos

Definición 2.1. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene un un máximo local o relativo (mínimo local o relativo) en $x_0 \in A$ si existe un abierto D con $a \in D$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) para todo $x \in D$.

■ **Ejemplo 2.1.** La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$ ya que $f(0, 0) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La función $g(x, y) = -x^2 - y^2$ tiene un máximo en el punto $(0, 0)$ ya que $f(0, 0) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Definición 2.2. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto interior $x_0 \in A$ es un punto crítico de f si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $\nabla f(x_0) = 0$, es decir,
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$
2. No existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ para algún $i \in \{1, \cdots, n\}$

■ **Ejemplo 2.2.** Calcular los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1$. Calculamos sus derivadas parciales e igualamos a cero:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 & \longrightarrow 2x + 2 = 0 & \longrightarrow x = -1 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 & \longrightarrow 2y + 2 = 0 & \longrightarrow y = -1 \end{array}\right\}$$

El punto $(-1, -1)$ es un punto crítico de la función.

■ **Ejemplo 2.3.** Calcular los puntos críticos de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observar que el punto $(0, 0)$ no existen las derivadas parciales y no existen puntos $(x, y) \neq (0, 0)$ donde las derivadas parciales se anulen ya que :

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 & \longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 & \longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \end{array}\right\}$$

En este caso el gradiente nunca se anula, en los puntos donde está definido, pero en el punto $(0,0)$ las derivadas parciales no existen así que $(0,0)$ es un punto crítico de la función.

■ **Ejercicios 2.1.** Calcula los puntos críticos de la función

$$h(x,y) = y^2 - 2y - 3x^2 - x^2y - 2x^3$$

Proposición 2.1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in A$. Si x_0 es un punto interior de A y f alcanza un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f (esto es, $\nabla f(x_0) = 0$).*

Observar que esta proposición geométricamente significa que los puntos críticos son aquellos cuyo plano tangente, si existe, es horizontal. Además la proposición nos asegura que los extremos relativos están entre los puntos críticos de la función. Es decir, todos los extremos son punto crítico. Sin embargo, al igual que ocurre para una funciones de una variable, los puntos críticos de una función de varias variables no siempre son máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos conducen a puntos de silla, que no son ni máximos ni mínimos relativos.

Definición 2.3. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto crítico $x_0 \in A$ es un **punto silla** de f si para todo abierto D con $x_0 \in D$ se verifica que existen puntos $x \in D$ tales que $f(x) \leq f(x_0)$ y puntos para los que $f(x) \geq f(x_0)$.

■ **Ejemplo 2.4.** Estudiar los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = x^5y + xy^5 + xy$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \implies x(5x^4 + y^4 + 1) = 0 \implies x = 0 \ (5x^4 + y^4 + 1 \geq 0) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \implies y(x^4 + 5y^4 + 1) = 0 \implies y = 0 \end{array}\right\}$$

Obtenemos que el punto $(0,0)$ es el único punto crítico de la función. Veamos si es extremo. Observar que $f(0,0) = 0$ y si nos acercamos a $(0,0)$ por puntos de la forma $y = x$ tenemos que $f(x,x) = 2x^6 + x^2 \geq 0$ y si lo hacemos por los puntos $y = -x$ tenemos que $f(x,x) = -2x^6 - x^2 \leq 0$. Concluimos así que $(0,0)$ es un punto silla.

Vamos ahora a resolver el siguiente problema.

■ **Ejemplo 2.5.** Se quieren construir cajas abiertas de 32 m^3 de volumen. Encontrar las dimensiones de dichas cajas que requiera la menor cantidad posible de material para su construcción.

Denominamos a las dimensiones por x ancho,y largo y z alto. Tenemos por tanto, por hipótesis, que $xyz = 32$ y $A(x,y,z) = xy + 2xz + 2zy$, por tanto, sustituyendo $z = \dfrac{32}{xy}$, la función que tenemos que minimizar es $A(x,y) = xy + \dfrac{64}{y} + \dfrac{64}{x}$ (notar que $x \neq 0, y \neq 0$).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial A}{\partial x}(x,y)=0 \implies y-\dfrac{64}{x^2}=0 \implies x^2y=64 \\[2ex] \dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y)=0 \implies x-\dfrac{64}{y^2}=0 \implies xy^2=64 \end{array}\right\} \implies y=\frac{64}{x^2};\ 64=x^3 \implies x=4=y$$

Teniendo en cuenta que $z=\dfrac{32}{xy}=2$ se sigue que el punto $(4,4,2)$ es el único punto crítico de la función A. La pregunta ahora es ¿cómo sabemos que es un mínimo y no es un máximo o un punto silla? La respuesta a nuestra pregunta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 2.1. Criterio del Hessiano.- *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in C^2(U)$. *Supongamos que* $x_0 \in U$ *y que* $\nabla f(x_0) = 0$. *Entonces*

a) Si $Hf(x_0)$ *es la matriz de una forma cuadrática definida negativa,* f *alcanza en* x_0 *un máximo relativo estricto.*

b) Si $Hf(x_0)$ *es la matriz de una forma cuadrática definida positiva,* f *alcanza en* x_0 *un mínimo relativo estricto.*

c) Si $Hf(x_0)$ *es la matriz de una forma cuadrática indefinida (no degenerada)* f *tiene en* x_0 *un punto de silla.*

Para entender el teorema anterior necesitamos hacer un inciso sobre álgebra lineal: supongamos que A es una matriz simétrica.

- A es **definida positiva** si $x^tAx > 0$ para cada $x \neq 0$.
- A es **definida negativa** si $x^tAx < 0$ para cada $x \neq 0$.
- A es **indefinida** si existen x_1 y x_2 tales que $x_1^tAx_1 > 0$ y $x_2^tAx_2 < 0$
- A es **degenerada** si $\det(A) = 0$

En términos de los autovalores de la matriz es muy sencillo saber cuándo una matriz simétrica entra en alguna de esas categorías:

- A es **definida positiva** si y solo si todos sus autovalores son **positivos**.
- A es **definida negativa** si todos sus autovalores son **negativos**
- A es **indefinida** si tiene algún autovalor positivo y algún autovalor negativo.
- A es **degenerada** si alguno de sus autovalores es 0

Para determinar si una matriz simétrica es definida positiva o definida negativa es muy útil el **criterio de Sylvester**. Funciona con matrices cuadradas de tamaño arbitrario. Se basa en estudiar los signos de los determinantes de los menores angulares de la figura:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

- **Si el signo de todos los determinantes señalados es positivo, la matriz es definida positiva.**
- **Si el signo de los determinantes alterna de este modo: -, +, -, +, - $\cdots$ (los determinates de tamaño impar son negativos y los de tamaño par son positivos) entonces la matriz es definida negativa.**

■ **Ejemplo 2.6.** 1) Supongamos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Calculamos los tres determinantes angulares:

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad D_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Como sus signos (por orden) son $+\ +\ +$ la matriz es definida positiva.

2) Sea $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ Calculamos los tres determinantes angulares:

$$D_1 = -1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad D_3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -3$$

Como sus signos (por orden) son $-\ +\ -$ la matriz es definida negativa.

3) Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Calculamos los tres determinantes angulares:

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

Como sus signos (por orden) son $+\ -\ -$ la matriz es indefinida. Podemos afirmarlo porque al ser $D_3 = |C| \neq 0$ no hay ningún autovalor nulo, con lo que no tenemos casos "dudosos".

Este criterio se aplica en los siguientes ejemplos:

■ **Ejemplo 2.7.** Clasificar los puntos críticos de las funciones.

1. $f(x, y, z) = x^4 - x^2y^2y + y^4 - 6y^2 + 4x^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \implies 2x(2x^2 - y^2 + 4) = 0 \quad \implies \left.\begin{array}{c} x = 0 \\ y^2 = 2x^2 + 4 \end{array}\right\} (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \implies 2y(-x^2 + 2y^2 - 6) = 0 \implies \left.\begin{array}{c} y = 0 \\ 2y^2 = x^2 + 6 \end{array}\right\} (2)$$

a) Si $x = 0$ en (1) entonces o $y = 0$ o $2y^2 = 6$. Es decir, obtenemos los puntos críticos $(0, 0)$ y $(0, \pm\sqrt{3})$

b) Si $y^2 = 2x^2 + 4$ en (1) entonces $2y^2 = x^2 + 6$ $(y \neq 0)$ o lo que es lo mismo $3x^2 + 2 = 0$ y por tanto no hay puntos críticos.

Vamos a calcular la matriz Hessiana para clasificarlos.

$$H(f, a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x 1 \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - y^2 + 8 & -4xy \\ -4xy & -2x^2 + 12y^2 - 12 \end{pmatrix}$$

$$H(f, (0, 0)) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \implies |H(f, (0, 0))| < 0 \implies (0, 0) \text{ es un punto silla.}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(f, (0, \pm\sqrt{3})) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \implies |H(f, (0, 0))| > 0 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \pm\sqrt{3})) = 5 > 0 \end{array}\right\} \implies (0, \pm\sqrt{3}) \text{ es un mínimo.}$$

2. $f(x,y) = \dfrac{3y^4 - 4y^3 - 12y^2 + 2}{1+x^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \implies \frac{-2x(3y^4 - 4y^3 - 12y^2 + 2)}{(1+x^2)^2} = 0 \implies \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 3y^4 - 4y^3 - 12y^2 + 2 = 0 \end{array}\right\} (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \implies \frac{12y(y^2 - y - 2)}{1+x^2} = 0 \implies \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \\ y = 2 \end{array}\right. (2)$$

a) Si $y = 0$ en (2) entonces para que se verifique (1) se sigue que $x = 0$. Es decir, obtenemos el punto $(0,0)$.

b) Si $y = -1$ en (2) de nuevo para que se verifique (1) se sigue que $x = 0$. Por tanto el punto crítico es $(0,-1)$.

c) Si $y = 2$ en (2) de nuevo para que se verifique (1) se sigue que $x = 0$. Por tanto el punto crítico es $(0,2)$.

Vamos a calcular la matriz Hessiana para clasificarlos.

$$H(f,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x 1 \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(6x^2-2)(3y^4 - 4y^3 - 12y^2 + 2)}{(1+x^2)^3} & \frac{-24xy(3y^2 - 2y - 2)}{(1+x^2)^2} \\ \frac{-24xy(y^2 - y - 2)}{(1+x^2)^2} & \frac{12(3y^2 - 2y - 2)}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} \implies |H(f,(0,0))| > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)) = -4 < 0 \end{array}\right\} \implies (0, \pm 0)) \text{ es un máximo.}$$

$$H(f,(0,-1)) = \begin{pmatrix} -6/8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \implies |H(f,(0,0))| < 0 \implies (0,-1) \text{ es un punto silla.}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(f,(0,2)) = \begin{pmatrix} 60/125 & 0 \\ 0 & 72/5 \end{pmatrix} \implies |H(f,(0,2))| > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)) > 0 \end{array}\right\} \implies (0,2) \text{ es un mínimo.}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(f,(0,\pm\sqrt{3})) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H(f,(0,0))| > 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm\sqrt{3})) = 5 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (0,\pm\sqrt{3}))\ \text{ es un mínimo.}$$

■ **Ejercicios 2.2.** Calcula y clasifica los puntos críticos de la función

$$h(x,y) = yx(x-2)(y+2)$$

Notar que si el determinante de la Hessiana es cero, el teorema 2.1 no decide, es decir, no nos da información acerca del punto es máximo, mínimo o punto silla. Así que tendremos que buscar otras formas que nos ayuden a decidir.

■ **Ejemplo 2.8.** Consideremos la función $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longrightarrow 6y^2 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right\} (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longrightarrow 12y(x - y^2) = 0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = y^2 \end{array}\right\} (2)$$

a) Si $x = y$ en (1) entonces en (2) tenemos que $x = x^2$. Es decir, obtenemos los puntos críticos $(0,0)$ y $(1,1)$

b) Si $-y = x$ en (1) entonces en (2) tenemos que $-y = y^2$, por tanto los puntos críticos $(0,0)$ y $(1,-1)$

Vamos a calcular la matriz Hessiana para clasificarlos.

$$H(f,a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x 1 \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(f,(1,1)) = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -24 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H(f,(1,1))| > 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (1,1)\ \text{ es un máximo.}$$

$$H(f,(1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -24 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H(f,(1,-1))| > 0 \quad \left.\begin{matrix} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)) < 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (1,-1) \text{ es un máximo.}$$

$$H(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H(f,(0,0))| = 0 \Longrightarrow (0,0) \text{ no sabemos .}$$

Para ver que en $(0,0)$ hay un punto silla basta con acercarnos por la recta $y = 0$, ya que $f(x,0) > 0$ si $x < 0$ y $f(x,0) < 0$ si $x > 0$.

3. Multiplicadores de Lagrange

Teorema de los multiplicadores de Lagrange.-

Teorema 3.1. *Sea* $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g_i : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones de clase* $C^1(U)$. *Sea* $a \in U$ *y* $g_i(a) = 0$ *y sean* $S = \{x \in U \setminus g_i(x) = 0\}$. *Suponer* $\nabla g(a) \neq 0$.

Si f *tiene un máximo o un mínimo sobre* S, *en* a, *entonces existe* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(a).$$

■ **Ejemplo 3.1.** 1. Hallar los puntos de la gráfica de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ cuya distancia al origen $(0,0,0)$ sea mínima.

La función que queremos mínimizar es $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la restricción $g(x,y,z) = z - \dfrac{1}{xy} = 0$

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) \Longrightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda(\frac{1}{x^2y}, \frac{1}{xy^2} 1) \Longrightarrow x = \pm y, z = \frac{\pm 1}{x^2}$$

Resolviendo llegamos a que $x^6 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$, luego los puntos críticos son $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$ y $(1,-1,-1)$ Como la función no alcanza el máximo, la distancia se hace tan grande como queramos, en estos puntos lo que se alcanza es el mínimo.

2. hallar los puntos extremos de la función $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 2$; $x + z = 1$. (un cilindro cortado con un plano)

   Llamamos $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2$ y $g_2(x,y,z) = x + z - 1$

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g_1(a) + \mu \nabla g_2(a) \Longrightarrow (1,1,1) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(1,0,1)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = \mu \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow x = 0,\ y = \pm\sqrt{2},\ z = 1$$

■ **Ejercicios** **3.1.** Hallar el máximo y el mínimo absolutos
$f(x, y, z) = x + y + z$ en $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$