Límites y continuidad de funciones de varias variables

Antonia González Gómez
Dep. de Matemáticas Aplicadas a los Recursos Naturales
ETSI de Montes
UPM

Índice

1. Introducción

1.1. Definiciones

Daremos una serie de nociones básicas que nos serán de gran utilidad a lo largo de todo este segundo parcial. Algunas de ellas son un recordatorio, puesto que se han visto en álgebra lineal y a lo largo del bachillerato, otras son generalizaciones de conceptos estudiados en $\mathbb{R}$.

Definición 1.1. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n-\text{veces}} = \mathbb{R}^n = \{\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \setminus x_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i = 1, \ldots, n\}$.

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definición 1.2. **Producto escalar usual Euclídeo en $\mathbb{R}^n$**. Sea $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} \langle\ \rangle: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\overline{x},\overline{y}) & \rightarrow \langle\overline{x},\overline{y}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 1^{\text{o}}. - \langle\overline{x},\overline{x}\rangle \geq 0; \quad \langle\overline{x},\overline{x}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \overline{x} \\ 2^{\text{o}}. - \langle\overline{x},\overline{y}\rangle = \langle\overline{y},\overline{x}\rangle \\ 3^{\text{o}}. - \langle\overline{x}+\overline{z},\overline{y}\rangle = \langle\overline{x},\overline{y}\rangle + \langle\overline{z},\overline{y}\rangle \\ 4^{\text{o}}. - \langle k\overline{x},\overline{y}\rangle = k\langle\overline{x},\overline{y}\rangle \end{cases}$$

Definición 1.3. **Norma Euclídea usual en $\mathbb{R}^n$**

$$\begin{array}{lll} \|\ \|: & \mathbb{R}^n \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\overline{x},\overline{y}) & \rightarrow \|\overline{x}\| = \langle\overline{x},\overline{x}\rangle^{\frac{1}{2}} \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 1^{\text{o}}. - \|\overline{x}\| \geq 0; \quad \|\overline{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \overline{x} = 0 \\ 2^{\text{o}}. - \|\lambda\overline{x}\| = \lambda\|\overline{x}\| \\ 3^{\text{o}}. - \|\overline{x}+\overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\| \end{cases}$$

Definición 1.4. **Distancia usual en $\mathbb{R}^n$**

$$\begin{array}{lll} d: & \mathbb{R}^n \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\overline{x},\overline{y}) & \rightarrow d(\overline{x},\overline{y}) = \|\overline{x}-\overline{y}\| \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} d(\overline{x},\overline{y}) \geq 0; d(\overline{x},\overline{y}) = 0 \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{y} \\ \qquad d(\overline{x},\overline{y}) = d(\overline{y},\overline{x}) \\ \quad d(\overline{x},\overline{y}) \leq d(\overline{x},\overline{z}) + d(\overline{z},\overline{y}) \end{cases}$$

Definición 1.5. Llamamos **Bola abierta** de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$

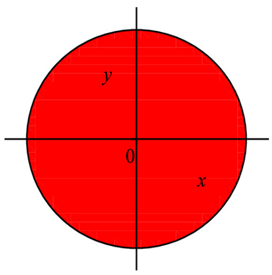
$$B_a(a,r) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\overline{x},a) < r\}$$

Bola cerrada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$

$$\overline{B(a,r)} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\overline{x},a) \leq r\}$$

■ Ejemplo **1.1.**

$$\overline{B((0,0),1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$$



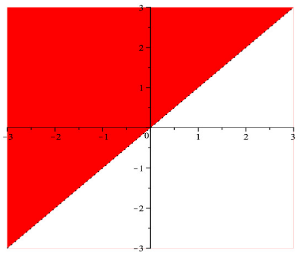
■ Ejemplo **1.2.** Cuando estamos en $\mathbb{R}$ $(n = 1)$ entonces las bolas abiertas son

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-a)^2} = |x-a| \leq r\} = (a-r, a+r)$$

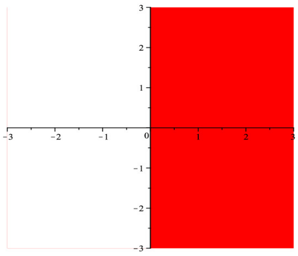
Definición 1.6. Diremos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto abierto** si para cada $x_0 \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_a(x_0, r) \subset U$. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complementario $\mathbb{R}^n - U$ es abierto.

■ **Ejemplo 1.3.**

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ abierto



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ cerrrado

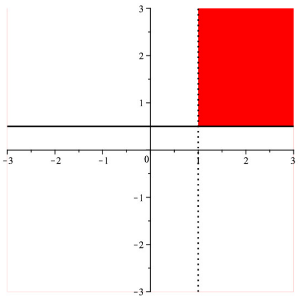


Definición 1.7. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe $k > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que $\|x\| \leq k$,

Observar que un conjunto de $\mathbb{R}^n$ puede no ser ni abierto ni cerrado

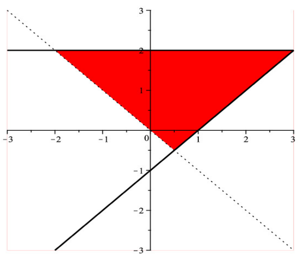
■ **Ejemplo 1.4.**

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\}$



3.

$\{y \leq 2, x - y \leq 1, 0 < x + y\}$



■ **Ejercicios 1.1.** Discutir si los siguientes conjuntos son abierto cerrados o ni abiertos ni cerrados:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 2\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 2\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| < 2\}$

Definición 1.8. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ es un **punto interior** a A si y sólo si existe $r > 0$ tal que $B_a(a, r) \subset A$. Diremos que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de A si toda bola centrada en x contiene al menos un punto en A y un punto que no está en A.

Un punto interior siempre pertenece al conjunto, pero un punto frontera puede no ser del conjunto.

■ **Ejemplo 1.5.** Sea $(1, 3) \subset \mathbb{R}$. Los puntos 1 y 3 son frontera, pero no son puntos interiores. Cualquier $1 < a < 3$ es un punto interior.

Definición 1.9. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que A es un conjunto acotado si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A$ verifica que $\|x\| \leq k$.

Definición 1.10. Diremos que $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto si y sólo si es un conjunto cerrado y acotado.

■ **Ejemplo 1.6.** Tanto los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ como las bolas cerradas de $\mathbb{R}^2$ son compactos.

Definición 1.11. Una aplicación de la forma

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^n \\ & k & \mapsto & \overline{x_k} = (x_k^1, \ldots, x_k^n). \end{array}$$

es una sucesión con valores en $\mathbb{R}^n$. Habitualmente se representará por $\{\overline{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Una sucesión $\{\overline{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente a $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $\|\overline{x_k} - \overline{a}\| < \varepsilon$.

Es fácil comprobar que $\lim_{k\to\infty} \overline{x_k} = \overline{a}$ si y sólo si $\lim_{k\to\infty} x_k^i = a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Funciones reales de variable vectorial o campos escalares

2.1. Definición y operaciones

Comenzamos estudiando este tipo de funciones que nos serán de gran utilidad cuando estudiemos las funciones vectoriales de variable vectorial.

Del mismo modo como una función real de variable real hace corresponder a cada elemento de su dominio un número real, podemos considerar una aplicación, definida sobre un conjunto D de $\mathbb{R}^n$ tal que a cada $x \in D$ le haga corresponder un elemento $f(x)$ de $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. Una función real de variable vectorial es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

■ **Ejemplos 2.1.** Los siguientes son ejemplos de funciones reales de variable vectorial

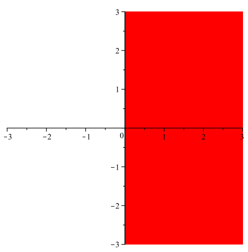
- Para especificar la temperatura T en una región del A del espacio se necesita una función $T : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t$
- La altura se puede especificar mediante una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

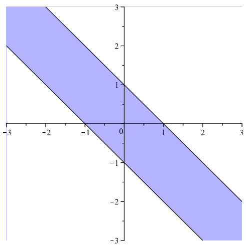
Definición 2.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces llamamos dominio, gráfica e imagen de f a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists\, f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ con } f(x_1, \ldots, x_n) = y\} \subseteq \mathbb{R}$$
$$G(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \setminus (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Dom}(f)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

■ **Ejemplo 2.1.** Calculamos el dominio de las siguientes funciones

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x}} \qquad\qquad f(x,y)=\arcsin(x+y)$$





■ **Ejemplo 2.2.** a) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ entonces su gráfica es una curva de $\mathbb{R}^2$.

b) Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ entonces su gráfica es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

c) Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=2$ su gráfica es el plano horizontal $Z=2$.

Definición 2.3. Sea $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Un conjunto de nivel de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ donde f es constante.

$$C\in\mathbb{R}\Longrightarrow C\equiv L_C=\{\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{Dom}(f):\ f(\overline{x})=C\}$$

En el caso de $n=2$ y $n=3$ los conjuntos de nivel reciben el nombre de curvas y superficie de nivel respectivamente.

■ **Ejemplo 2.3.** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

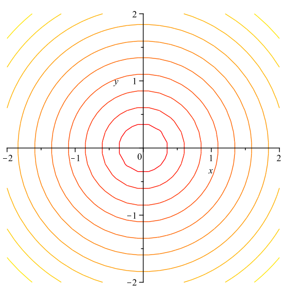
$$f(x)=|x|\Longrightarrow L_C=\begin{cases}\varnothing & \text{si } C<0;\\ 0 & \text{si } C=0;\\ \{C,-C\} & \text{si } C>0.\end{cases} \qquad f(x)=3\Longrightarrow L_C=\begin{cases}\varnothing & \text{si } C\neq 3;\\ \mathbb{R}^2 & \text{si } C=3.\end{cases}$$

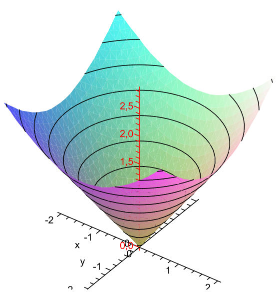
■ **Ejemplo 2.4.** Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y)=y-2\Longrightarrow L_C=\{y=C+2\}\quad \text{rectas}$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\Longrightarrow L_C=\begin{cases}\varnothing & \text{si } C<0;\\ x^2+y^2=C^2 & \text{si } C\geq 0.\end{cases}$$

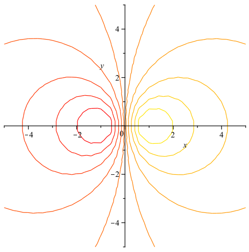
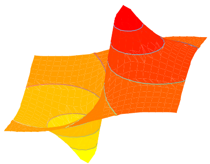
curvas de nivel





gráfica

■ **Ejercicios 2.1.** Sea $f(x,y) = \frac{5x}{x^2+y^2+1}$. Observa los gráficos y calcula las curvas de nivel y el dominio de la función f.

curvas de nivel   gráfica

Definimos ahora las principales operaciones entre funciones reales de variable vectorial, que es una generalización del caso de funciones reales de variable real.

Definición 2.4. a) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos $(f+g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ con $x \in$ Dom $f \cap$ Dom g.

b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define $\lambda f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ con $x \in$ Dom f.

c) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos $(f.g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ con $x \in$ Dom $f \cap$ Dom g.

d) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define $(g \circ f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $x \in$ Dom f y $f(x) \in$ Dom g. Observar que la composición de funciones no es conmutativa.

e) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in$ Dom g, definimos $\dfrac{f}{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $x \in$ Dom $f \cap$ Dom g.

■ **Ejercicios 2.2.** Calcular el dominio y describe los conjuntos de nivel de las siguientes funciones

$a) f(x,y) = -1$ $\quad b) f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad c) f(x,y,z) = 2x + y - z$

$d) f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad e) f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad f) f(x,y) = 2x - y$

2.2. Límites

Definición 2.5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diremos que $\lim_{\overline{x} \to a} f(\overline{x}) = l$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\overline{x} - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

$$\boxed{\lim_{\overline{x} \to a} f(\overline{x}) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \|\overline{x} - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}$$

■ **Ejemplo 2.5.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = x$. Demostramos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. observar que $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, $|f(x)-l| = |x-0| = |x|$ y $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$. Así tenemos

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \varepsilon \text{ tal que si } \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} \le |x| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x)-l| = |x-0| = |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Demostramos que $\lim_{(x,y)\to(0,0} f(x,y) = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta \text{ tal que si } \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x)-l| = \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \delta$$

como

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Por tanto basta con tomar $\delta = \varepsilon$.

■ **Ejercicios 2.3.** Demostrar que:

a) si $f(x,y) = x$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = a$.

b) si $f(x,y) = K$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = K$.

Propiedades de los límites.

Proposición 2.1. *(Unicidad del límite). Si* $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x}) = b_1$, *y* $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x}) = b_2$, *y existe dicho límite entonces* $b_1 = b_2$.

Proposición 2.2. *Sean* $f,\ g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

1. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = b_1$, *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = b_2$, *entonces* $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = b_1 \pm b_2$.
2. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = b_1$, *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = b_2$, *entonces* $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = b_1 b_2$.
3. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = b \ne 0$ *entonces* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.
4. *Si* $\lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$.

■ **Ejemplo 2.6.** Utilizando las propiedades del límite calculamos directamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (x^2y - 3y) = -3$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} = \dfrac{-6}{5}$.

■ **Ejemplo 2.7.** Si $p(x_1, \ldots x_n) = x_i, q(x_1, \ldots x_n) = k$ entonces se comprueba fácilmente que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x_0}} p(\overline{x}) = (x_0)_i$ y $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x_0}} q(\overline{x}) = k$,y por tanto para cualquier polinomio $p, q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se tiene que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x_0}} p(\overline{x}) = P(\overline{x_0})$, $\lim\limits_{x\to x_0} P(\overline{x})Q(\overline{x}) = P(\overline{x_0})Q(\overline{x_0})$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x_0}} e^{p(\overline{x})} = e^{p(\overline{x_0})}$ y si $q(\overline{x_0}) \neq 0$ entonces $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x_0}} \dfrac{p(\overline{x})}{q(\overline{x})} = \dfrac{p(\overline{x_0})}{q(\overline{x_0})}$

2.2.1. Cálculo de Límites

Cuando en un límite aparezca una indeterminación podemos intentar calcular dicho límite utilizando los siguientes métodos:

Usando operaciones algebraicas para el cálculo de límites. Suele ser útil en el caso de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$.

■ **Ejemplo 2.8.** a)Puesto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x-y} = \frac{0}{0}$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+xy+y^2) = 0$$

b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{0}{0}$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 2$$

Calculando límites direccionales. Si existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ entonces existe $\lim_{x\to a} f(x, \varphi(x)) = L$, donde $\varphi(x) = y$ es una trayectoria con $\varphi(a) = b$

Si el límite depende del camino por el que nos acerquemos al punto, entonces el límite no existe.

■ **Ejemplo 2.9.** Comprobamos que el siguiente límite no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

Nos acercamos a través de la recta $y = \lambda x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

Comprobamos que el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \frac{0}{0}$$

no existe acercándonos a través de la recta $y = \lambda x^2$.

$$\lim_{y\to 0} \frac{\lambda x^4}{x^4+\lambda^2 x^4} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

Límites Iterados. Llamamos límites reiterados a los límites

$$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) \quad \text{y} \quad \lim_{y\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$$

Si existen los límites reiterados y tienen distinto valor, entonces podemos asegurar que el límite no existe

$$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) \neq \lim_{y\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

La existencia o incluso la igualdad de dichos límites no implica la existencia del límite.

■ **Ejemplo 2.10.** Comprobamos que el siguiente límite no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Calculamos los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} - 1$$

Luego el límite no existe.

Observaciones

i) Si los límites iterados existen y ambos tienen el mismo valor L entonces el límite puede existir o puede no existir, pero si existe su valor será L.

■ **Ejemplo 2.11.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

ii) Si existe sólo uno de los límites iterados y vale L, entonces el límite puede existir o no existir pero si existe su valor es L.

■ **Ejemplo 2.12.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

iii) Puede que exista el límite y no exista ninguno de sus límites iterados

■ **Ejemplo 2.13.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Coordenadas polares. Podemos hacer el cambio $\left.\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right\}$. Si al expresar la función $f(x,y)$ en coordenadas polares $f(x,y)=F(\rho)G(\rho,\theta)$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{ll} |G(\rho,\theta)|\le c & c\in\mathbb{R} \\ \lim_{\rho\to 0}F(\rho)=0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$$

■ **Ejemplo 2.14.**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos(x^2+y^2) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in(0,2\pi]}} \underbrace{\rho}_{F(r)} \underbrace{\sin\theta\cos(\rho^2)}_{G(\rho,\theta)} = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \lim_{\rho\to 0}F(\rho)=\lim_{\rho\to 0}\rho=0 \\ |G(\rho,\theta)|=|\sin\theta\cos(\rho^2)|\le 1 \end{array}\right)$$

.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in(0,2\pi]}} \frac{1-\cos(\rho^2)}{\rho^2} = [\frac{0}{0}] \overbrace{=}^{\text{L'H}} \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho\sin(\rho^2)}{2\rho} = \lim_{\rho\to 0}\sin\rho^2 = 0$$

.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2e^{\sqrt{x^2+y^2}}-2}{3(x^2+y^2)^{1/2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in(0,2\pi]}} \frac{2e^{\rho}-2}{3(\rho)} = [\frac{0}{0}] \overbrace{=}^{\text{L'H}} \lim_{\rho\to 0}\frac{2e^{\rho}}{3} = \frac{2}{3}$$

Cambios de variable.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^{3/2}(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\right)^{3/2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in(0,2\pi]}} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sin(\rho^2)}{(\rho^2)}\right)^{3/2}$$
$$\overbrace{=}^{\rho^2=u} \lim_{u\to 0}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^{3/2} \overbrace{=}^{\text{L'H}} \frac{1}{3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u.v}{\sqrt{(u^2+v^2)}} = \lim_{\rho\to 0}(\frac{\rho^2\sin\theta\cos\theta}{(\rho)}$$
$$= \lim_{\rho\to 0}\rho\sin\theta\cos\theta = 0$$

■ **Ejercicios 2.4.** Calcula los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{y}e^x} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{y^2+x^6} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+2y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}-\sin\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}$$

2.3. Continuidad

Definición y ejemplos

Definición 2.6. Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *continua en un punto* $a \in D$ si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Es decir, el límite y el valor en el punto existen ambos y coinciden.

$$\boxed{f \text{ es continua en el punto } a \in D \Longleftrightarrow \lim_{\overline{x}\to a} f(\overline{x}) = f(a)}$$

f es continua en $D \subset \mathbb{R}^n$ cuando f es continua para todo punto $a \in D$.

■ **Ejemplo 2.15.** Como vimos en el ejemplo 2.5 tenemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, así pues, la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

verifica que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

Por tanto f es continua en el punto $(0,0)$.

Observar que la definición es una generalización de la definición de continuidad que se tenia en funciones reales de una variable.

Propiedades de las funciones continuas. Sean $f,\ g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $c \in \mathbb{R}$.

1. Si f y g son continuas en x_0, entonces también lo es $f + g$.
2. Si f y g continuas en x_0, entonces también lo es fg.
3. Si f es continua en x_0, y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $\frac{1}{f}$ también lo es.
4. Si f es continua en x_0 y $h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $f(x_0)$ entonces $h \circ f$ es continua en x_0

■ **Ejemplo 2.16.** 1. No es difícil demostrar que: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$. Por tanto cualquier función polinómica es continua y las funciones racionales y exponenciales son siempre continuas en su dominio.

2. Utilizando las propiedades de las funciones continuas, tenemos que

$$f(x,y) = xe^y \Longrightarrow f(a,b) = ae^b = \lim_{(x,y)\to(a,b)} xe^y \text{ por tanto, } f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}^2$$

ya que es un producto de un polinomio (continua) y una composición de funciones continuas.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}\cos xy \Longrightarrow f(a,b) = e^{a^2+b^2}\cos ab = \lim_{(x,y)\to(a,b)} e^{x^2+y^2}\cos xy$$

es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \ln(xy)(1-x^2+y^2) \Longrightarrow f(a,b) = \ln(ab)(1-a^2+b^2) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \ln(xy)(1-x^2+y^2)$$

es continua en todo punto de su dominio.

3. Si a la función del ejemplo 2.15 le aplicamos las propiedades 3 y 4 obtenemos que si $(a,b) \neq (0,0)$ entonces f es continua

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = f(a,b) \quad (a,b) \neq (0,0)$$

Además como en el ejemplo 2.15 demostramos que también era continua en $(0,0)$ concluimos que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplo 2.17.**

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin\theta\cos\theta}{\rho} = 0 = f(0,0)$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\ln(1-x^2-y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\ln(1-x^2-y^2)} \overbrace{=}^{u=x^2+y^2}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1-u)} \overbrace{=}^{L'H} \lim_{u\to 0} u - 1 = -1$$

c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & x > -y, \\ 2x & x \leq -y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a) \\ x>-y}} \frac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} \overbrace{=}^{u=x+y} \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a) \\ x>-y}} (x-y)\frac{x+y}{e^{x+y}-1} = 2a \\ \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a) \\ x\leq -y}} 2x = 2a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} = 2a = f(a,-a)$$

Definición 2.7. Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es continua en cada punto de su dominio D.

■ **Ejercicios 2.5.** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y^2+x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases} \quad b)\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy^2}{y^4+x^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$c)\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 1 & x+y=0\end{cases} \qquad d)\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x+2y}-1}{e^{y+x}-1}, & x+y\neq 0\\ 2 & x+y=0\end{cases}$$

$$e)\ f(x,y)=\begin{cases} y & x\leq 0\\ -y & x\geq 0\end{cases} \qquad f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2x-x^3}{y^2+x^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3. Función vectorial de variable vectorial

3.1. Definición y operaciones

Del mismo modo como una función real de variable vectorial hace corresponder a cada elemento de su dominio un número real, podemos considerar una aplicación, definida sobre un conjunto D de $\mathbb{R}^n$ tal que a cada $x \in D$ le haga corresponder un elemento $f(x)$ de $\mathbb{R}^m$. Así, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.1. Una función vectorial de variable vectorial es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (f_1(x_1,\ldots,x_n), f_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)). \end{array}$$

donde $\forall\, i=1,\ldots,m$

$$\begin{array}{rccc} f_i: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & f(x_1,\ldots,x_n). \end{array}$$

son las funciones componentes de f.

Es evidente que una función real de variable vectorial es un caso particular de función vectorial de variable vectorial con $m = 1$.

■ **Ejemplo 3.1.** 1. la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2, e^x, x+2yx-3y^2). \end{array}$$

es una función vectorial de variable vectorial donde $n = 2$ y $m = 3$. Las funciones componentes son funciones $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2+y^2\\ f_2(x,y) &= e^x\\ f_3(x,y) &= x+2yx-3y^2 \end{aligned}$$

2. la función
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (2\cos t, 2\sin t). \end{array}$$
es una función vectorial de variable vectorial donde $n = 1$ y $m = 2$. Las funciones componentes son funciones $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con
$$f_1(t) = 2\cos t$$
$$f_2(t) = 2\sin t$$

3. Para especificar la velocidad de un fluido en el punto (x, y, z) en el tiempo t necesitamos una función $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Observar que las funciones vectoriales de variable vectorial están formadas por funciones reales de variable vectorial.

Proposición 3.1. *Dada función vectorial de variable vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se tiene que:*
$$Dom\ f = \bigcap_{i=1}^{m} Dom\ f_i$$

■ **Ejemplo 3.2.** El dominio de la función $f(x, y) = (\sqrt{xy}, \ln(x^2 + y^2), \frac{x}{x^2+y^2})$ es
$$\left.\begin{array}{l} \text{Dom } (\sqrt{xy}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0, y \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right. \right\} \\ \\ \text{Dom } (\ln(x^2+y^2)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\} \\ \\ \text{Dom } (\frac{x}{\sqrt{y}}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$$

Definimos ahora las principales operaciones entre funciones vectoriales de variable vectorial, que es una generalización del caso de funciones reales de variable vectorial.

Definición 3.2. a) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos $(f+g) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ con $x \in$ Dom $f \cap$ Dom g.

b) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se define $\lambda f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ con $x \in$ Dom f.

c) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos $(f.g) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ con $x \in$ Dom $f \cap$ Dom g.

d) Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, se define $(g \circ f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $x \in$ Dom f y $f(x) \in$ Dom g. Observar que la composición de funciones no es conmutativa.

e) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in$ Dom g, definimos $\dfrac{f}{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $x \in$ Dom $f \cap$ Dom g. Observar que el cociente solo está definido para funciones reales de variable vectorial

3.2. Limites y continuidad

Definición 3.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diremos que $\lim_{\overline{x} \to a} f(\overline{x}) = l = (l_1, \ldots, l_m)$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\overline{x} - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, entonces $\|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.

$$\boxed{\lim_{\overline{x} \to a} f(\overline{x}) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \|\overline{x} - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon}$$

Proposición 3.2. *Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial y $a \in D$. Entonces $l = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a si y sólo si $l_i \in \mathbb{R}$ es el límite de $f_i(x)$ cuando x tiende a a.*

$$\boxed{\lim_{x \to a} f = (l_1, \ldots, l_m) \iff \lim_{x \to a} f_i = l_i \ \forall i = 1, \ldots, m}$$

■ **Ejercicios 3.1.** Calcula los siguientes límites.

i) $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2},\ y^2,\ \sin x^2 \right).$

ii) $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2 + y^2},\ x + y,\ \frac{\sin x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right).$

iii) $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (0,0)} e^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$

Gracias a este proposición vamos a poder tratar, para una mayoría de propiedades, las funciones vectoriales $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como si fueran funciones escalares de variable vectorial (consideraremos cada función componente, $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, por separado). No sólo el límite va a depender de las funciones componentes de la función vectorial de variable vectorial, también la continuidad, como veremos en la siguiente proposición

Definición 3.4. Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *continua en un punto* $a \in D$ si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Es decir, el límite y el valor en el punto existen ambos y coinciden.

$$\boxed{f \text{ es continua en el punto } a \in D \iff \lim_{\overline{x} \to a} f(\overline{x}) = f(a)}$$

Decimos que f es continua en $D \subset \mathbb{R}^n$ cuando f es continua para todo punto $a \in D$.

Proposición 3.3. *Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial y $a \in D$. Entonces $f(x)$ es continua en $x = a$ si y sólo si $f_i(x)$ es continua en $x = a$.*

$$\boxed{f \textit{ es continua en } x = a \Longleftrightarrow f_i \textit{ es continua en } x = a \ \forall i = 1, \ldots, m}$$

■ **Ejemplo 3.3.** vamos a probar que toda aplicación lineal es continua. Para ello, supongamos que $A = (a_{ij}) = M_{B_c, B'_c}(f)$. Entonces

$$\|f(x)\| = \left\| A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle \\ \cdots \\ \langle \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left(\left[\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle \right]^2 + \cdots + \left[\langle \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\left(\left[\left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \right\|^2 + \cdots + \left\| \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\|^2 \right] \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{\substack{=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}^2} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|.$$

Esta desigualdad prueba que f es continua en 0, puesto que si $x \to 0$, se tiene que $f(x) \to 0$. Por otra parte, también prueba la linealidad en cualquier punto $a \in \mathbb{R}^n$. En efecto, si $x \to a$ se tiene que $x - a \to 0$, con lo que $f(x) - f(a) = f(x - a) \to 0$, lo que es lo mismo que decir $f(x) \to f(a)$.

■ **Ejercicios 3.2.** Estudiar la continuidad de

$$f(x, y) = \left(\frac{x - 2y}{x^2 + y^2}, e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \right) \qquad h(x, y) = \left(\frac{2}{y - x^2}, \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}\right)$$