Diferenciabilidad de funciones de varias variables

v 2.1

Antonia González Gómez
Dep. de Matemática Aplicada
ETSI Montes, Forestal y del Medio Natural
UPM

Índice

1. Derivadas direccionales y derivadas parciales **2**
- 1.1. Derivadas direccionales 2
- 1.2. Derivadas Parciales 3

2. Diferenciabilidad **6**
- 2.1. Diferenciabilidad funciones reales de variable vectorial 6
  - 2.1.1. Condición suficiente de diferenciabilidad 10
- 2.2. Diferenciabilidad de funciones vectoriales de variable vectorial 12
  - 2.2.1. Condición suficiente de diferenciabilidad 14
- 2.3. Regla de la cadena 14

3. Gradiente y plano tangente **17**

Intentamos buscar un concepto parecido al de derivada de funciones reales de variable real, es decir, algo que nos informe la variación de la función y que tenga relación directa con la continuidad (que implique continuidad). Tanto las derivadas direccionales como las derivadas parciales nos informe la variación de la función, pero, como veremos, no implican continuidad. Así llegaremos a la definición de diferenciabilidad.

1. Derivadas direccionales y derivadas parciales

1.1. Derivadas direccionales

Es interesante conocer cuál es la variación de una función según una dirección prefijada. Para ello utilizaremos el concepto de *derivada según un vector.*

Definición 1.1. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función, a es un punto interior a A y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se define la derivada de f *según el vector* $\vec{v}$ en el punto a como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\vec{v})-f(a)}{h}$$

cuando este límite existe.

En algunas ocasiones no interesa conocer la variación de la función según el vector, sino según la dirección marcada por ese vector. En ese caso se toman vectores unitarios y utilizaremos el concepto de *derivada direccional.*

Definición 1.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $\overline{a}$ $\in$Dom f, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario y $h \in \mathbb{R}$. Se define la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto a como el siguiente límite, cuando este exista y sea un número real.

$$D_v(f(\overline{a})) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{a}+h\vec{v})-f(\overline{a})}{h}$$

Las derivadas direccionales miden la variación de la función cuando la variable se desplaza del punto a a otro punto en la dirección del vector $\vec{v}$.

■ **Ejemplo 1.1.**

1. Sea $f(x,y) = x^2+y^2$. Calculamos, en el punto $a = (0,0)$, la derivada direccional de f en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}(f(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f\Big((0,0)+h(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\Big)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\Big(h(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\Big)}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

2. Sea $f(x,y,z) = x^2e^{xyz}$. Calculamos, en el punto $a = (1,0,0)$, la derivada direccional de f en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$$D_{\overrightarrow{v}}(f(1,0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((1,0,0)+h(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\right)-f(1,0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left((1+\frac{h}{\sqrt{3}},\frac{h}{\sqrt{3}},\frac{h}{\sqrt{3}})\right)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+\frac{h}{\sqrt{3}})^2 e^{(1+\frac{h}{\sqrt{3}})\frac{h^2}{3}}-1}{h} \overbrace{=}^{L'H} \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & (x,y)=0. \end{cases}$$

Calcular la derivada direccional de f en la dirección de la recta $x = y$ en el punto $a = (0,0)$.

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}(f(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((0,0)+h(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(h(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\frac{h^3}{2\sqrt{2}}}{h^2}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

■ **Ejercicios 1.1.** a) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & (x,y)=0. \end{cases}$$

Calcular la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ en el punto $a = (0,0)$.

b) Sea $f(x,y) = \cos(x+y)\sin(x-y)$ Calcular la derivada direccional de f según el vector $\overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ en el punto $a = (0,0)$.

1.2. Derivadas Parciales

Definición 1.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\overline{a}\in$Dom f. Definimos la derivada parcial de f con respecto a la variable i-ésima en el punto $\overline{a}$ como el límite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) = D_{\overrightarrow{e_i}}(f(\overline{a})) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{a}+he_i)-f(\overline{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_n)}{h}$$

■ **Ejemplo 1.2.** Las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$ existen y valen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{\vec{e_1}}(f(0,0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+he_1)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{\vec{e_1}}(f(0,0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+he_2)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f((0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = 1$$

También podemos decir que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$ es la derivada de f respecto de la variable x_i, permaneciendo el resto de las variables fijas. De hecho si definimos la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $g(x) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n)$ tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_n)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(a_i+h)-g(a_i)}{h} = g'(a_i)$$

Así pues, para el calculo de las derivadas parciales son válidas las reglas y fórmulas de la derivación ordinaria. Basta con considerar todas las variables constantes (como si fuesen números) salvo aquella respecto la cual estamos derivando.

■ **Ejemplo 1.3.** calcular las derivadas parciales

1) $f(x,y,z) = \sin(x+2y+3z)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h+2b+3c)-\sin(a+2b+3c)}{h} = \cos(a+2b+3z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2b+2h+3c)-\sin(a+2b+3c)}{h} = 2\cos(a+2b+3z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2b+3c+3h)-\sin(a+2b+3c)}{h} = 3\cos(a+2b+3z)$$

2) $f(x,y) = \cos xy + x\cos y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\,\mathrm{sen}\,xy + \cos y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\,\mathrm{sen}\,xy - x\sin y.$$

3) $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}x^{1/3} \quad \forall\,(x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Observación.

a) las derivadas parciales son un caso particular de las derivadas direccionales, es decir, es la derivada de f en la dirección de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, si existen las derivadas direccionales entonces siempre existen las derivadas parciales. Sin embargo, la existencia de las derivadas parciales no es una condición suficiente para la existencia de las derivadas direccionales, como se comprueba en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 1.4.** 1. La función

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & x=0 \text{ o } y=0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, pero no existen las derivadas en la dirección del vector unitario $v = (v_1, v_2)$ con $v_1 \neq 0$ 0 $v_2 \neq 0$ en el punto $(0,0)$.

2. La función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$.

b) Una función puede tener derivadas direccionales o derivadas parciales o ambas y no ser continua. Así pues, la existencia de derivadas parciales o direccionales no implica la continuidad de la función.

■ **Ejemplo 1.5.** La función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ y no es continua en $(0,0)$ como vimos en el tema anterior (**Ejemplo** 2,7).

c) Una función puede ser continua y no tener derivadas direccionales o derivadas parciales

■ **Ejemplo 1.6.** La función

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$, pero no existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

d) Una función f puede tener todas las derivadas direccionales en un punto a y no ser continua en a.

■ **Ejemplo 1.7.** La función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$, pero existe $D_v f(0,0) = 0$.

e) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces geométricamente la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{(a,b)})$ es la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene al cortar la gráfica de f por el plano $y = b$ en el punto $P = (a, b, f(a, b))$.

$$f(x,b) = g(x) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{(a,b)}) = g'(a)$$

La interpretación geométrica la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{(a,b)})$ es análoga.

■ **Ejercicios 1.2.** Calcula las derivadas parciales de las funciones:

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad b)\ g(x,y) = \begin{cases} x+y & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases} \quad c)\ h(x,y) = (\cos xy, \sin y, 2y)$$

■ **Ejercicios 1.3.** Calcula las derivadas el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $v = (v_1, v_2)$ de las funciones

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad b)\ h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2. Diferenciabilidad

2.1. Diferenciabilidad funciones reales de variable vectorial

Definición 2.1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $a \in$ Dom (f) y $\overline{h} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es *diferenciable* en a si existe una aplicación lineal $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verificando que

$$\boxed{\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} = 0}$$

En ese caso a la aplicación T_a se le llama diferencial de f en a,

$$\boxed{Df(a)(x) = T_a(x)}$$

■ **Ejemplos 2.1.** a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = 3$ entonces para cualquiera que sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $T_{(a,b)}(x,y) = 0$, puesto que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f((a,b)+(h,k)) - f(a,b) - T_{(a,b)}(h,k)}{\|(h,k)\|} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - T_{(a,b)}(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3-3-0}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{0}{\|(h,k)\|} = 0$$

b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal entonces para cualquiera que sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $T_a(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) - T_{\overline{a}}(\overline{h})}{\|(\overline{h}\|} = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{f(\overline{a}) + f(\overline{h}) - f(\overline{a}) - f(\overline{h})}{\|(\overline{h}\|} = 0$$

Teorema 2.1. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferencial en un punto $a \in A$, se tiene que:*

1. *La diferencial de f es única.*
2. *f es entonces es continua en a.*
3. *$D_v(f(a)) = D(f(a))(v) = T_a(v)$*

Demostración. Llamamos

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \overline{h} & \mapsto & \dfrac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} \end{array}$$

Como, por hipótesis, f es diferenciable entonces $\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \varphi(h) = 0$. Por tanto

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} f(\overline{a}+\overline{h}) = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} (f(\overline{a}) + T_a(h) + \|h\|\varphi(h)) = T_a(h)$$

Además dado $v \in \mathbb{R}^n$,

$$D_v(f(\overline{a})) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{a}+t\vec{v}) - f(\overline{a})}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{T_a(t\vec{v}) + \|t\vec{v}\|\varphi(t\vec{v})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tT_a(\vec{v}) + |t|\|\vec{v}\|\varphi(t\vec{v})}{t} = T_a(\vec{v})$$

Supongamos que f tuviera dos diferenciales en el punto a, es decir, existirían dos aplicaciones lineales $T_a, R_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$D_v(f(\overline{a})) = T_a(\vec{v}) = R_a(\vec{v}) \Longrightarrow T_a = R_a$$

■

Corolario 2.1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Si f es diferenciable en a entonces existen todas la derivadas direccionales en el punto a y la matriz de la diferencial referida a las bases canónicas es la matriz Jacobiana de f.*

$$M(Df(a))_{B_c^{\mathbb{R}}}^{B_c^{\mathbb{R}^n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = Jf(a)$$

Nota Como ya hemos visto pueden existir todas las derivadas parciales de una función en un punto, o incluso todas la s derivadas direccionales, y sin embargo esa función no ser continua en el punto (Ejemplos 1.5, 1.7), y por lo tanto, no ser diferenciable en el punto. Pero si la función es diferenciable en a entonces la matriz de la diferencial esta formada por las derivadas parciales de f en a. Así pues, a la hora de comprobar si una aplicación es diferenciable los pasos a seguir son:

$$f \text{ no continua} \quad \Rightarrow \quad f \text{ no diferenciable}$$

$$f \text{ continua} \quad \Rightarrow \begin{cases} \nexists \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad f \text{ no diferenciable} \\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} \dfrac{f(a+h) - f(a) - J(f,a)h}{\|h\|} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ no diferenciable} \\ \lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} \dfrac{f(a+h) - f(a) - J(f,a)h}{\|h\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ diferenciable} \end{cases} \end{cases}$$

■ **Ejemplo 2.1.** Estudiamos si las siguientes funciones son diferenciables en $(0,0)$

1. La función
$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
no es continua en $(0,0)$ ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0)$ (cero por acotada), así que f no es diferenciable, ya que si fuese diferenciable entonces sería continua.

2. La función
$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
es continua en $(0,0)$ ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ (cero por acotada). Como se vio en el ejemplo 1.6 no existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, por tanto no puede ser diferenciable (si lo fuese entonces existirían sus derivadas parciales).

3. La función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$ ya que

$$\left| \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \left| \frac{x|y|}{\sqrt{y^2}} \right| \leq |x| < \delta \leq \varepsilon$$

luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Veamos si sus derivadas parciales existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;=\; D_{\vec{e_1}}(f(0,0)) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+he_1) - f(0,0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} 0 \;=\; 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{\vec{e_1}}(f(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+he_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Así pues de ser f diferenciable tendríamos que

$$M(Df(0,0))_{(B_c^{\mathbb{R}^2}, B_c^{\mathbb{R}})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = (0,0)$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - (0,0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{h_1^2+h_2^2}$$

Como

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{h_1^2+h_2^2} \overbrace{=}^{h_1=\lambda h_2} \lim_{h_2\to 0} \frac{\lambda h_2|h_2|}{(\lambda^2+1)h_2^2} \neq 0$$

Por tanto f no es diferenciable.

2.1.1. Condición suficiente de diferenciabilidad

Proposición 2.1. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supongamos que en un entorno del punto $a \in U$ existen y son continuas todas las derivadas parciales de f, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ con $i = 1, \dots, n$. Entonces f es diferenciable en a.*

Demostración. Supondremos, sin perdida de generalidad, que todas las derivadas parciales son continuas en U. Bajo estas hipótesis, estudiar la diferenciabilidad de la función a es equivalente a estudiar si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}}{\|h\|} = 0.$$

Haremos la demostración para $n = 2$. El caso general se prueba de manera análoga. Trabajemos entonces con el numerador de la fracción anterior:

$$f(a+h) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) + f(a_1+h_1, a_2) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot h_2\right)$$
$$= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2)\cdot h_2 +$$
$$f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2)\cdot h_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\cdot h_2.$$

Entonces

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}|}{\|h\|}$$
$$\leq \frac{|f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2)\cdot h_2|}{\|h\|}$$
$$+\frac{|f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1 a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1|}{\|h\|}$$
$$+\frac{|h_2|}{\|h\|}\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right|$$

y cada una de esas expresiones tienen por límite 0 cuando $h = (h_1, h_2) \to (0, 0)$.

■

■ **Ejemplo 2.2.** La función $f(x,y) = (x^2+1)\sin(x+y)$ es continua en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(x+y) + (x^2+1)\cos(x+y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2+1)\cos(x+y)$$

son continuas en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por tanto f es diferenciable y la matriz de su diferencial es

$$\begin{pmatrix} 2x\sin(x+y) + (x^2+1), & (x^2+1)\cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Nota Observar que la condición es suficiente pero no necesaria, es decir, puede que sea diferenciable y sus derivadas parciales existan pero sean discontinuas.

■ **Ejemplo 2.3.** la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$ y sus parciales existen pero son discontinuas.

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \cos\frac{1}{\rho^2} = 0$$

f es continua en $(0,0)$.

Veamos si sus derivadas parciales existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+he_1) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cos\frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{\vec{e_1}}(f(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+he_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cos\frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - (0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\cos\frac{1}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \cos\frac{1}{\rho} = 0$$

Luego f es diferenciable en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

Pero $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no existe así que las parciales no son continuas.

Propiedades de las funciones diferenciables Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces si f y g son diferenciables en $a \in U$

1. Si f es constante, f es diferenciable en todo $a \in U$ y $Df(a) \equiv 0$.
2. $f+g$ es también diferenciable $a \in U$ y
$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$$
3. λf es también diferenciable $a \in U$ y
$$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a)$$

2.2. Diferenciabilidad de funciones vectoriales de variable vectorial

Hasta aquí hemos considerado el caso de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pero sin mucho esfuerzo adicional podemos considerar un caso más general, el de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. En este caso se puede pensar en f como en una "colección" de m funciones, que son sus *componentes.*

Así, $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ puede pensarse como $f = (f_1, \ldots, f_n)$ donde cada $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

De esta manera, podemos hablar de la derivadas parciales de f en un punto a interior a su dominio de definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\overline{a}), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\overline{a})\right)$$

Podemos tener en cuenta las mn derivadas parciales que se obtienen cuando tenemos en cuenta todas las posibles derivadas parciales que se pueden calcular. Lo habitual es recoger esta información de forma matricial.

Definición 2.2. Dada la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, supongamos que a es un punto interior a A y que además existe $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ para cada $i = 1, \ldots, m$ y cada $j = 1, \ldots, n$. Entonces llamaremos *matriz Jacobiana* de f en el punto a a

$$J(f,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

■ **Ejemplo 2.4.**

Matriz Jacobiana en $(0,0)$ de $f(x,y)=(e^x+\cos y, x\cos y)$.
$f_1(x,y)=e^x+\cos y \qquad f_2(x,y)=x\cos y$.

$$J(f,(x,y))=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^x & -\sin y \\ \cos y & -x\sin y\end{pmatrix} \Longrightarrow J(f,(x,y))=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Tambien es posible extender la definición de *derivada direccional* a este contexto más general:

La definición de derivada direccional se generaliza para funciones vectoriales de variable vectorial

Definición 2.3. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función, $\overline{a}\in$Dom f y $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ un vector unitario. Se define la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto a como el siguiente límite, cuando este exista y sea un número real.

$$D_v(f(\overline{a}))=\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{a}+h\vec{v})-f(\overline{a})}{h}$$

Las derivadas direccionales miden la variación de la función cuando la variable se desplaza del punto a a otro punto en la dirección del vector $\vec{v}$.

Proposición 2.2. *Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, con $f(\overline{x})=(f_1(\overline{x}),f_2(\overline{x}),\ldots,f_m(\overline{x}))$, $\overline{a}\in$Dom f y $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ un vector unitario. Entonces se tiene que la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto a es*

$$D_v(f(\overline{a}))=(D_v(f_1(a)),D_v(f_2(a)),\ldots,D_v(f_m(a)))$$

■ **Ejercicios 2.1.** Calcular la derivada de la función $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,e^x)$ en el punto $(1,1,1)$ y en la dirección de la recta $x=y=z$.

Extendemos la definición de diferenciabilidad a funciones vectoriales de variable vectorial.

Definición 2.4. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $a\in$ Dom (f) y $\overline{h}\in\mathbb{R}^n$. Decimos que f es *diferenciable* en a si existe una aplicación lineal $T_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ verificando que

$$\boxed{\lim_{\overline{h}\to\overline{0}}\frac{f(a+h)-f(a)-T_a(h)}{\|h\|}=0}$$

En ese caso a la aplicación T_a se le llama diferencial de f en a,

$$\boxed{Df(a)(x)=T_a(x)}$$

Teorema 2.2. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $a \in$ *Dom* (f). f *es diferenciable en* a *si y solo si* f_i *es diferenciable en* a.

Teorema 2.3. *Si* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es diferenciable en un punto* $a \in A$, *se tine que:*

1. *La diferencial de* f *es única.*
2. f *es entonces es continua en* a.
3. $D_v(f(a)) = D(f(a))(v) = T_a(v)$

Corolario 2.2. *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $a \in A$. *Si* f *es diferenciable en* a *entonces existen todas la derivadas direccionales en el punto* a *y la matriz de la diferencial referida a las bases canónicas es la matriz Jacobiana de* f.

$$M(Df(a))_{(B_c^{\mathbb{R}^n}, B_c^{\mathbb{R}})} = J(f,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

2.2.1. Condición suficiente de diferenciabilidad

Proposición 2.3. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Supongamos que en un entorno del punto* $a \in U$ *existen y son continuas todas las derivadas parciales de* f, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *con* $i = 1, \ldots, n, \ \ j = 1, \ldots, n$. *Entonces* f *es diferenciable en* a.

■ **Ejemplos 2.2.** $f(x,y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$
Como las derivadas parciales existen y son continuas

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{x+y} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{x+y} + 1$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = y^2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2yx$$

entonces f es diferenciable

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y^2 & 2yx \end{pmatrix}$$

2.3. Regla de la cadena

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ con $f(U) \subset V$. Si f es diferenciable en a y g lo es en $f(a)$, entonces $h = g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en a y además

$$Dh(a) = D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

y su matiz Jacobiana es

$$J(g \circ f, a) = J(g, f(a)) \cdot J(f, a)$$

Expresión en coordenadas

$$J(g \circ f, a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(a)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_1}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_1}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_2}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_2}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_p}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_p}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_r}(f(a)) \frac{\partial f_r}{\partial x_j}(a)}$$

■ **Ejemplo 2.5.** Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $f(x, y) = (\cos xy, e^{x+2})$ y $g(x, y) = (x + y, 3y - 1, xy)$. Puesto que las parciales de f y g existen y son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, se sigue que f y g son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y

$$Dh(x, y) = D(g \circ f)(x, y) = Dg(f(x, y))Df(x, y).$$

veamos en $(x,y)=(0,0)$

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix} -y\sin xy & -x\sin xy \\ e^{x+2} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Df(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dg(f(x,y))=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ y & x \end{pmatrix} \Longrightarrow Dg(f(0,0))=Dg(1,e^2))=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ e^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Dh(0,0)=Dg(1,e^2)Df(0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ e^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 3e^2 & 0 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

También

$$(x,y)\xrightarrow{f}(\cos xy, e^{x+2})\xrightarrow{g}(\cos xy+e^{x+2}, 3e^{x+2}-1, e^{x+2}\cos xy)$$

$$Dh(x,y)=\begin{pmatrix} -y\sin xy+e^{x+2} & -x\sin xy \\ 3e^{x+2} & 0 \\ -y\sin xye^{x+2}+\cos xye^{x+2} & -x\cos xye^{x+2} \end{pmatrix} \Longrightarrow Dh(0,0)=\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 3e^2 & 0 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

■ **Ejemplo 2.6.** Sean $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ con $h(t)=(x(t),y(t))=(e^t+3e^{-t},5e^{-t})$ y $z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $z(x,y)=x^2+y$. Puesto que las parciales de h y z existen y son continuas en todo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente, se sigue que h y z son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto $z\circ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$

$$(t)\xrightarrow{h}(x(t),y(t))\xrightarrow{z}z(x(t),y(t))$$

Como

$$Dz(x,y)=D(z\circ h)(t)=Dz(h(t))Dh(t)=Dz(x(t),y(t))\cdot Dh(t)=$$
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x}(h(t)) & \dfrac{\partial z}{\partial y}h((t)) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(t) \end{pmatrix}=$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

veamos en $t=3$

$$Dz(x(t),y(t))=\begin{pmatrix} 2x & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Dz(x(3),y(3))=\begin{pmatrix} 2e^3+6e^{-3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(h(t))=\begin{pmatrix} e^t-3e^{-t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} \Longrightarrow D(h(3))=\begin{pmatrix} e^3-3e^{-3} \\ 5e^{-3} \end{pmatrix}$$

$$Dz(h(3)) = Dz(x(3), y(3))Dh(3) = \begin{pmatrix} 2e^3 + 6e^{-3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 - 3e^{-3} \\ 5e^{-3} \end{pmatrix} = (2e^3+6e^{-3})(e^3-3e^{-3})+5e^{-3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2x(t) \cdot (e^t - 3e^{-t})_3 + 1 \cdot (5e^{-t})_3$$

También

$$(t) \xrightarrow{h} (e^t + 3e^{-t}, 5e^{-t}) \xrightarrow{z} (e^t + 3e^{-t})^2 + 5e^{-t}$$

$$D(z \circ h)(t) = (2e^t + 6e^{-t})(e^t - 3e^{-t}) + 5e^{-t}$$

■ **Ejercicios 2.2.** Dadas las funciones

1. $f(x) = ((x-1)^2, (x+1)^2)$ y $g(y_1, y_2) = (y_1)^2 + (y_2)^2$
2. $f(t) = (t, t^2, t^3)$ y $g(x, y, z) = \int_x^{y+2x} (u^2 + u)\, du$
3. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1)$ y $g(u) = (\ln u, e^u)$

Calcula en cada caso si la composición es diferenciable y en esos casos da su matriz.

3. Gradiente y plano tangente

Definición 3.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con con $a \in V$. Llamamos vector gradiente de f en a y g lo es en $f(a)$, al vector $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ donde:

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

Así, si f es diferenciable en a entonces $\nabla f(a) = J(f, a)$. Por tanto, en este caso se podemos escribir que

$$Df(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle = \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\| \cos(\widehat{\nabla f(a), V})$$

Luego la derivada direccional en un punto es máxima, cuando nos movemos en la dirección de máxima variación de f en el punto, es decir, en la dirección del vector gradiente. Por tanto, cuando $\nabla f(a) \| v$ y ambos tienen el mismo sentido.

Observar que cuando me muevo en la dirección de $\nabla f(a)$, pero en sentido contrario, entonces f decrece lo máximo.

■ **Ejemplo 3.1.** el capitán Ralph tiene dificultades cerca del lado soleado de mercurio. La temperatura en el casco de la nave, cuando está en la posición (x, y, z) viene dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z}$. Está ahora en la posición $(1, 1, 1)$. ¿En que dirección debe avanzar la nave para que disminuya la temperatura al máximo?

Proposición 3.1. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una aplicación* C^1, $a \in U$ *y* $v \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

Proposición 3.2. *Si* $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una aplicación* C^1 *y sea* a *un punto de la superficie de nivel* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = K\}$. *Entonces el vector gradiente de* f *en* a *es un vector perpendicular a la superficie* S.

Corolario 3.1. *El plano tangente a* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = K\}$ *en el punto* a *es*

$$\nabla f(a_1, a_2, a_3) \cdot (x - a_1, y - a_2, z - a_3) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)(x - a_1, y - a_2, z - a_3) = 0$$

■ **Ejemplo 3.2.** calcula el plano tangente a la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3xy + z^2 = 4\}$ en el punto $(1, 1, 1) \in S$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3x, \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z$$
$$\Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = (3, 3, 2)$$

Luego la ecuación del plano tangente es

$$(3, 3, 2)(x - 1, y - 1, z - 1) = 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

Nota Para calcular el plano tangente a una la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto (x_0, y_0), basta con calcular el plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la superficie de nivel $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0\}$.

■ **Ejemplo 3.3.** Hallar el plano tangente a la función $z = x^2 + 2y^2$ en el punto $(1, 0, 1)$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -1$$
$$\Rightarrow \nabla f(1, 0, 1) = (3, 0, -1)$$

Luego la ecuación del plano tangente es

$$(3, 0, -1)(x - 1, y, z - 1) = 3x - z - 2 = 0$$

■ **Ejercicios** **3.1.** Sea $z = x^2 + y^2$. Hallar un plano tangente a la gráfica de en el punto $(1, 1)$