

# Simplificación automática de las imágenes a partir de expresiones semi-analíticas

C. Platero Dueñas, J. Sanguino Botella, M.C. Tobar Puente, P.M. González Manchón, J.M. Poncela Pardo, G. Asensio Madrid

Grupo de Bioingeniería Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid, [carlos.platero@upm.es](mailto:carlos.platero@upm.es), [javier.sanguino@upm.es](mailto:javier.sanguino@upm.es), [pedro.gmanchon@upm.es](mailto:pedro.gmanchon@upm.es), [m.carmen.tobar@upm.es](mailto:m.carmen.tobar@upm.es), [josemanuel.poncela@upm.es](mailto:josemanuel.poncela@upm.es), [gabriel.asensio@upm.es](mailto:gabriel.asensio@upm.es)

## Resumen

*Las etapas de simplificación de las imágenes, eliminación del ruido y realce de los bordes, son esenciales para las tareas posteriores de segmentación. Estas técnicas de procesamiento requieren, normalmente, de la sintonización de sus parámetros de control, situación incompatible con la segmentación automática. Esta ponencia trata de emplear un procesamiento, basado en difusión no lineal, capaz de auto sintonizarse mediante el uso de expresiones analíticas que relacionen los tiempos de difusión con el módulo del gradiente. Se exponen dos métodos numéricos y se presentan resultados experimentales en 1D, 2D y 3D.*

**Palabras Clave:** Difusión no lineal, PDE, Cálculo Variacional, realzado de las imágenes.

## 1. INTRODUCCIÓN

Para la mayoría de las tareas de segmentación de las imágenes se requiere de un procesamiento previo. El objetivo de esta etapa es el realce de los bordes y el suavizado de las regiones. Existen diferentes planteamientos de actuación. Un resumen del estado actual se puede encontrar en [6]. Entre las distintas técnicas abordadas, esta ponencia se mueve entre los procesos de difusión no lineal y los métodos variacionales. Se pretende buscar las relaciones entre ambos enfoques, con el objeto de mejorar el diseño del filtrado.

Desde el filtrado de difusión no lineal, una imagen inicial  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  genera otra imagen  $u(x, t)$  como solución del proceso de difusión no lineal con condiciones de contorno de Neumann e iniciales [9]:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \operatorname{div}(g(|\nabla u|) \cdot \nabla u) & u(x, 0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial N} &= 0 & \partial \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $g(|\nabla u|)$  la difusividad. Ésta es una función no negativa y normalmente de carácter decreciente con el módulo del gradiente. La intención es aplicar un proceso de suavizado en áreas de bajo contraste y preservar o incrementar las pendientes de los bordes. La elección de la difusividad es la que define cómo se suaviza y se realza los bordes. El mayor inconveniente deriva de que muchas de las propuestas sobre la difusividad requieren de ajustes *ad hoc* de sus parámetros internos. Uno de los primeros intentos en soslayar estas dificultades fue una difusividad que conducía a un flujo TV [2]. Sin embargo, la idea originaria provenía del marco variacional, con la propuesta de regularización TV [11]. De hecho, se ha demostrado la equivalencia entre ambos procesos para el caso 1D [13]. Las conclusiones no son extensibles a mayores dimensiones por los grados de libertad introducidos por el carácter anisotrópico de la difusión en estos dominios. Además, sus implementaciones suelen no ser invariantes a rotaciones. Aunque el flujo TV presenta buenas características de suavizado y preservación de los bordes, no produce el efecto de realzado.

Las propiedades del filtrado de difusión no lineal pueden comprenderse desde su descomposición ortonormal. Se designa  $\eta = \nabla u / \|\nabla u\|$  tal que  $\nabla u \neq 0$ , junto con  $\xi_1$  y  $\xi_2$  que construyen la curva/superficie de nivel perpendicular a  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \partial_z u &= (g(|\nabla u|) + g'(|\nabla u|) \cdot |\nabla u|) \cdot u_{zz} & n=1 \\ &= g(|\nabla u|) \cdot u_{\xi_1 \xi_1} + (g(|\nabla u|) + g'(|\nabla u|) \cdot |\nabla u|) \cdot u_{\eta \eta} & n=2 \\ &= g(|\nabla u|) \cdot (u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2}) + (g(|\nabla u|) + g'(|\nabla u|) \cdot |\nabla u|) \cdot u_{\eta \eta} & n=3 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $u_{zz}$  representa la segunda derivada de  $u$  en la  $z$ -dirección. El carácter no negativo de la difusividad garantiza que en la curva/superficie de nivel se produce una difusión directa. Sin embargo, en la dirección del gradiente, la difusión puede ser directa, inversa o a tramos directa e inversa en función del módulo del gradiente.

Este proceso evolutivo también se puede justificar desde la regularización de la imagen. Se trata de minimizar un funcional de energía que mida las variaciones de la imagen:

$$E(u) = \int_{\Omega} \Phi(\|\nabla u\|) dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |u_0 - u|^2 dx \quad (3)$$

La primera componente del funcional trata de suavizar la imagen, mientras la segunda busca la fidelidad de la imagen de salida con la entrada. Este segundo término resulta perjudicial en el proceso de realzado de la imagen, ya que no permite evolucionar hacia una separación de las estructuras naturales existentes. Centrados sobre el proceso de optimización del suavizado, al insertar la condición necesaria de Euler-Lagrange y la localización del óptimo mediante el método del gradiente descendiente, queda el siguiente marco evolutivo [1]:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \operatorname{div} \left( \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{|\nabla u|} \cdot \nabla u \right) \\ &= \Phi''(\|\nabla u\|) u_{xx} \quad n=1 \\ &= \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{|\nabla u|} u_{\xi_1 \xi_1} + \Phi''(\|\nabla u\|) u_{\eta \eta} \quad n=2 \\ &= \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{|\nabla u|} (u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2}) + \Phi''(\|\nabla u\|) u_{\eta \eta} \quad n=3 \end{aligned} \quad (4)$$

De las ecuaciones (2) y (4) se deduce la conexión entre el filtrado de difusión no lineal y el funcional de suavizado de la imagen.

Desde este planteamiento dual equivalente, si se supone que se tiene un borde de pendiente positiva  $\partial_{\eta} u > 0$  (análogamente podría hacerse con bordes de pendiente negativa  $\partial_{\eta} u < 0$ ) entonces el borde es realzado si la pendiente se incrementa dinámicamente  $\partial_t(\partial_{\eta} u) > 0$ . Por tanto, si  $x$  está en el borde en el instante  $t$ , entonces se debe cumplir que  $\partial_{\eta \eta} u = 0$  y  $\partial_{\eta \eta \eta} u < 0$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} \operatorname{signo}(\partial_t(\partial_{\eta} u)) &= \operatorname{signo}(-g(\|\nabla u\|) + g'(\|\nabla u\|) \cdot |\nabla u|) \\ &= \operatorname{signo}(-\Phi''(\|\nabla u\|)) \end{aligned} \quad (5)$$

De la primera igualdad se deduce que el realce está unido a la difusión inversa en la componente normal. Lo que conduce a problemas de estabilidad y efecto escalera [4]. En cuanto a la segunda igualdad implica que proviene de un funcional cóncavo. Aunque desde el marco continuo el problema de optimización está mal propuesto, en su proceso de discretización puede resultar bien planteado [8] [17]. Se concluye, por tanto, en la búsqueda de una difusividad que

mantenga un balance entre la difusión directa en la curva/superficie de nivel con una difusión inversa en la componente normal. Además se desea que carezca de parámetros de control, de manera que el proceso de difusión no lineal sea robusto en cualquier escenario ya sea en 1D, 2D o 3D. También se solicita una compresión de su dinámica que permita la elección de los tiempos de evolución con el rango de pendientes a realzar. Por último, se plantea que desde el proceso de la regularización de la imagen esté bien planteado, en el sentido de existencia y unicidad en la solución discreta.

En este listado de prestaciones se propone una organización que defina una difusividad que garantice el balance entre el suavizado y el realzado. Para abordar el estudio teórico se simplifica el problema separando por un lado la dinámica 1D y por otro los problemas de interpretación de la difusión anisotrópica e invarianza a rotaciones en dimensiones superiores. Concluyendo, se explicará la dinámica 1D mediante una solución semi-analítica y posteriormente, la resolución en mayor dimensión se atacará aplicando operadores basados en la descomposición ortogonal [16] o basados en la solución semi-analítica [17].

## 2. DIFUSIÓN NO LINEAL SIN PARÁMETROS DE CONTROL

Aunque el flujo TV mostraba que su difusividad carecía de parámetros de control, su procedencia de un funcional convexo indicaba su incapacidad de producir el realce de los bordes. Recientemente se ha presentado una familia de difusividades de interés creciente que tampoco requiere de ajustes ad hoc:

$$g(\|\nabla u\|) = \frac{1}{|\nabla u|^p} \quad F(u) = \frac{\eta}{|\nabla u|^{p-1}} \quad p \in \mathbb{R}, p \geq 0 \quad (6)$$

Donde  $F(u)$  representa el vector campo creado por la difusividad. Para valor de  $p=0$  coincide con la difusión lineal, con  $p=1$  corresponde con TV y para  $p=2$  con BFB (*Balance Forward Backforwd*) [7]. Dada esta difusividad se trata de determinar cómo evoluciona el proceso difusivo dependiendo del valor de  $p$ , del tiempo y del módulo del gradiente. Se pretende determinar las relaciones entre el tiempo de difusión, el parámetro  $p$  y qué detalles difumina y qué otros realza. Algunos autores han impuesto condiciones a la primera y segunda derivada del funcional para cumplir las tareas de preservación de los bordes y eliminado del ruido [14]. De manera que si  $|\nabla u| \rightarrow 0$  y con el objeto de obtener un proceso de difusión lineal en dicho entorno, la difusividad y la segunda derivada del funcional deberían ser iguales y con valor acotado para que la difusión numérica sea estable. En cambio, para el caso de  $|\nabla u| \rightarrow \infty$  se

propone  $\Phi''(|\nabla u|)/g(|\nabla u|) \rightarrow 0$  con el propósito de preservar los bordes. En la tabla 1 se muestra las relaciones entre la difusividad y la primera y segunda derivada del funcional para valores de  $p \geq 0$ . Se observa que para que cumpla la primera condición  $p$  debería ser menor a la unidad, además se exigiría regularizar la difusividad ya cuando  $|\nabla u| \rightarrow 0$ , la difusividad no está acotada. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación (5), con  $p < 1$  no se produciría relace de los bordes. De la segunda condición y como consecuencia de emplear un funcional cóncavo, la relación entre la segunda derivada del funcional y la difusividad se mantiene constante con  $1-p$ . Para  $p > 1$  significa que habrá una difusión directa en la curva/superficie de nivel e inversa en la dirección del gradiente. El balance entre ambas componentes está definido por  $1-p$ .

Tabla 1: Relaciones entre las difusividades y el funcional.

$p$	$\phi(s)$	$g(s)=\phi'(s)/s$	$\phi''(s)$	$\phi''(s)/g(s)$
$p \geq 0$ $p \neq 2$	$\frac{s^{2-p}}{2-p}$	$\frac{1}{s^p}$	$(1-p)s^{-p}$	$(1-p)$
$p = 2$	$\log(s)$	$\frac{1}{s^2}$	$-\frac{1}{s^2}$	-1

Estas mismas conclusiones se llegan al descomponer el proceso de difusión entre la dirección del gradiente y las componentes de la curva/superficie de nivel:

$$\begin{aligned} \partial_i u &= \frac{1-p}{|\nabla u|^p} u_{xx} \quad n=1 \\ \partial_i u &= \frac{1}{|\nabla u|^p} (u_{\xi_1 \xi_1} + (1-p) \cdot u_{\eta\eta}) \quad n=2 \quad (7) \\ \partial_i u &= \frac{1}{|\nabla u|^p} (u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2} + (1-p) \cdot u_{\eta\eta}) \quad n=3 \end{aligned}$$

La comprensión de la dinámica de este proceso difusivo requiere de una solución analítica que permita comprender las relaciones entre el tiempo de difusión, la magnitud del gradiente y el valor de  $p$ . Tsurkov trató de localizar una solución en la dinámica continua 1D [15]. Con mayor acierto se ha abordado la solución semi-analítica de la difusión TV [13] y la minimización del funcional de suavizado [17].

## 2.1 DINÁMICA 1D PARA EL FLUJO DE REALCE DE BORDES

Desde el filtrado de difusión no lineal definido en (1) y utilizando como difusividad según (6), se establece

la siguiente dinámica semi-discreta, de manera que se ha empleado una discretización espacial mediante diferencias centradas:

$$\partial_t u_i = \Delta x^{p-2} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} - \frac{u_i - u_{i-1}}{|u_i - u_{i-1}|^p} \right] \quad (8)$$

Para buscar una solución a (8) se emplea un esquema a dos píxeles [13]. Se trata de establecer un modelo conservativo entre los dos píxeles que simule el balance de transferencia de energía en el proceso de difusión. Sin pérdida de generalidad, se considera sólo el intercambio de energía entre el píxel  $i+1$  e  $i$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i+1} &= 2\Delta x^{p-2} \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} \quad \dot{u}_i = -2\Delta x^{p-2} \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} \quad (9) \\ \dot{u}_{i+1} + \dot{u}_i &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación refleja que la energía cedida por un píxel es absorbida por el otro, manteniéndose constante el balance energético. El valor de 2 que aparece en (9) se justifica por la necesidad de consistencia del método numérico [12]. Definiendo la diferencia de niveles de grises entre los dos píxeles adyacentes mediante  $\omega = u_{i+1} - u_i$ , se puede establecer la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -4\Delta x^{p-2} \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} = -4\Delta x^{p-2} \frac{\omega(t)}{|\omega(t)|^p} \quad (10) \\ \omega(0) &= u_{i+1}(0) - u_i(0) = f_{i+1} - f_i \end{aligned}$$

Es evidente que la parte derecha no está definida para  $\omega(t)=0$ . Sin embargo, desde el punto de vista de la analogía física cuando los dos píxeles tienen el mismo nivel de gris, no debería de haber transferencia de energía. Por tanto, se considera que  $\omega(t)$  es una solución de (10), si se trata de una función absolutamente continua que verifica la ecuación evolutiva:

$$\omega(t) \stackrel{c.t.p}{=} \begin{cases} -4\Delta x^{p-2} \frac{\omega(t)}{|\omega(t)|^p} & |\omega(t)| \neq 0 \\ 0 & |\omega(t)| = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\omega(0) = f_{i+1} - f_i$$

casí por todo punto (c.t.p) en  $(0, +\infty)$ . La resolución de la ecuación diferencial depende del signo de  $\omega(t)$  y de la condiciones iniciales [12]:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega(0) \left[ 1 - \frac{4t \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}}{|\omega(0)|^p} \right]^{1/p} & 0 < t < \frac{|\omega(0)|^p}{4 \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}} \\ 0 & t > \frac{|\omega(0)|^p}{4 \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}} \end{cases} \quad (12)$$

A partir de (12) y centrándose en el pixel  $i$  es posible definir la dinámica del nivel de gris en este proceso difusivo [12]:

$$u_i(t) = \begin{cases} \mu + \left[ 1 - \frac{4t \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}}{|f_{i+1} - f_i|^p} \right]^{\frac{1}{p}} (f_i - \mu) & 0 < t < \frac{|f_{i+1} - f_i|^p}{4 \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}} \\ \mu & t > \frac{|f_{i+1} - f_i|^p}{4 \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}} \end{cases} \quad (13)$$

donde  $\mu = \frac{f_{i+1} + f_i}{2}$ . La expresión obtenida relaciona

el tiempo, el valor de  $p$  y del módulo del gradiente discreto. Se observa que para valores de tiempos pequeños y acotados por el módulo del gradiente y por  $p$ , el proceso difusivo se realizará si el gradiente es pequeño; en caso contrario, si el gradiente supera cierto umbral, definido por el tiempo y por  $p$ , no habrá intercambio de energía entre los píxeles. Para tiempos suficientemente grandes, con independencia del valor del gradiente y de  $p$ , se producirá una difusión lineal y en tiempo finito la señal final será continua y de valor igual a la media de nivel de gris de todos los píxeles de la señal de entrada. Welk et al [17] han llegado a similar planteamiento desde el cálculo variacional con la minimización de un funcional semi-discreto. Sus resultados también han sido extendidos a 2D y 3D.

Para comprender mejor el proceso de difusión no lineal se representa

$$h(p, t, \omega(0), \Delta x) = \left[ 1 - \frac{4t \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}}{|\omega(0)|^p} \right]^{\frac{1}{p}}$$

de la ecuación (13). Este término estará comprendido

entre 1 y 0 para  $0 \leq t < \frac{|f_{i+1} - f_i|^p}{4 \cdot p \cdot \Delta x^{p-2}}$ . De manera que

si vale 1, significará que no hay intercambio de energía y el nivel de gris permanecerá constante. Por el contrario, al disminuir su valor indica que se acentúa el proceso de difusión con los píxeles de alrededor. Evidentemente, para tiempos mayores al umbral este término quedará nulo y se producirá una difusión lineal. En la figura 1 se presenta cómo varía  $h(\cdot)$  para  $p = 1, 2$  ó  $3$ , relacionando el tiempo de la difusión no lineal con el módulo del gradiente. Se ha considerado que  $\Delta x$  es unitario.

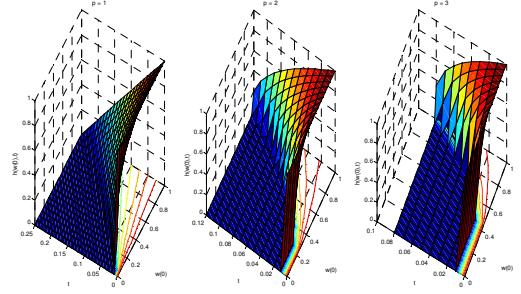


Figura 1: Evaluación de  $h(t)$  para tres valores distintos de  $p$ : a)  $p = 1$ , b)  $p=2$ , c)  $p=3$

Se concluye que el aumento de  $p$  hace el filtrado sea más selectivo con el módulo del gradiente, de manera que por debajo del umbral, dependiente también del tiempo, el nivel de gris del píxel se difuminará con su entorno. El tiempo, el valor de  $p$  y el gradiente del píxel definen si hay difusión lineal con el entorno o por el contrario mantendrá su valor. A medida que el tiempo se hace más grande, el proceso converge a la difusión lineal con independencia del valor de  $p$ , lo cual garantiza la estabilidad del filtrado y la unicidad y existencia de la solución. Además, gracias a que  $h(t)$  está acotado entre 0 y 1, cumple el principio de máximo-mínimo. En el proceso evolutivo no surgen nuevos máximos o mínimos locales, definiéndose como un proceso TVD (*Total Variation Decreasing*) [12].

### 3. NUMÉRICO

En el caso de aplicar una discretización explícita del tiempo sobre la ecuación (8), la solución numérica sería calculada en un esquema iterativo:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \Delta x^{p-2} \left[ \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{|u_{i+1}^k - u_i^k|^p} - \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{|u_i^k - u_{i-1}^k|^p} \right] \quad (14)$$

donde  $u^k$  indica el valor de  $u$  en la iteración  $k$ . Para la estabilidad del método numérico se requiere que la difusividad esté acotada, tal cual ya se había enunciado en el segundo punto. Sin embargo, para toda la familia de difusividades propuestas no está acotada cuando el gradiente tiende a ser cero. Una solución empleada en el marco de la minimización del variacional TV es la regularización de la difusividad con una constante positiva y tendiente a cero [3]:

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{(|\nabla u|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{p}{2}}} \quad (15)$$

La regularización limita la difusividad a  $\frac{1}{\varepsilon^p}$ .

Aplicando el criterio de estabilidad von Neuman para escenarios explícitos y considerando que  $\Delta x$  es unitario, los incrementos de tiempo estarán limitados por  $\varepsilon$  y por  $p$ ,  $\Delta t \leq \frac{\varepsilon^p}{2}$ . Se observa que si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , el escenario numérico tendrá un alto coste computacional, al necesitar muchas iteraciones para filtrar la señal. Por el contrario, si para disminuir el número de iteraciones se incrementase  $\varepsilon$ , el método numérico perdería consistencia. Estos inconvenientes pueden ser resueltos empleando un esquema semi-implícito que garantice la estabilidad para cualquier  $\Delta t > 0$ . Con este propósito, el esquema queda a partir de la ecuación (8):

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = g_{i+1/2}(u_i^k)(u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}) - g_{i-1/2}(u_i^k)(u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}) \quad (16)$$

$$g_{i+1/2}(u_i^k) = \frac{\Delta x^{p-2}}{\left((u_{i+1}^k - u_i^k)^2 + \varepsilon^2\right)^{\frac{p}{2}}} \quad g_{i-1/2}(u_i^k) = \frac{\Delta x^{p-2}}{\left((u_i^k - u_{i-1}^k)^2 + \varepsilon^2\right)^{\frac{p}{2}}}$$

Para extenderlo al conjunto de la señal se reescribe haciendo uso de la notación matricial:

$$(I - \Delta t \cdot A(u^k))u^{k+1} = u^k \quad (17)$$

donde  $I$  es una matriz diagonal unitaria  $m \times m$ , siendo  $m$  el número de píxeles de la señal y  $A(u^k)$  se define como una matriz de igual tamaño, cuyos coeficientes serán las difusividades entre dos píxeles:

$$a_{ij} = \begin{cases} g_{i \pm 1/2} & j = i \pm 1 \\ -g_{i+1/2} - g_{i-1/2} & i = j \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases} \quad (18)$$

La matriz  $(I - \Delta t A)$  es definida positiva y tridiagonal. La inversión de esta matriz se calcula de forma eficiente mediante el algoritmo de Thomas [16]. El salto cualitativo del esquema semi-implícito respecto al explícito es la conversión de filtro FIR, cuyos coeficientes están definidos por las difusividades, a otro de tipo IIR.

### 3.1 EXTENSIÓN A MAYORES DIMENSIONES

Desafortunadamente, el algoritmo de Thomas no puede ser directamente empleado en dimensiones superiores al 1D. Desde el desacoplamiento de la difusión como un proceso difusivo tomando los píxeles dos a dos, el resultado difusivo del conjunto puede ser aproximado por la ponderación parcial de sus difusiones. Por tanto, desde el escenario semi-implícito, la ecuación de difusión puede ser dividida en cada una de sus direcciones muestrales:

$$(I - \Delta t \cdot A_n(u_n^k))u_n^{k+1} = u_n^k \quad n=1,2,\dots,D \quad (19)$$

Por cada dirección, el sistema lineal de (19) se calcula separadamente mediante el algoritmo de Thomas. La solución de la difusión total será el promediado de las difusiones parciales:

$$u^{k+1} = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^D u_n^{k+1} \quad (20)$$

Aunque la estabilidad está garantizada para cualquier  $\Delta t > 0$ , no es así su consistencia y consecuentemente la pérdida de invarianza a rotaciones. Para tiempos grandes se puede observar rayas artificiales en las direcciones muestrales, debido al intercambio de energía parcial en las componentes privilegiadas. Este efecto se agudiza en los bordes, como consecuencia de la aplicación de difusión inversa para el realce. Para evitar estos inconvenientes sólo habrá que tomar valores de  $\Delta t$  que mantenga la invarianza a rotaciones, de manera que a medida de que  $p$  aumente, el paso de tiempo deberá de disminuir, ya que el efecto de la difusión inversa se incrementa. Experimentalmente se ha observado en imágenes 2D y 3D que para  $p > 2$ ,  $\Delta t$  debe ser extremadamente pequeño para evitar la aparición de rayas artificiales, lo cual no compensa. De los resultados experimentales, el valor  $p = 2$  resulta un buen compromiso entre el proceso de realce e invarianza a rotaciones.

Otra alternativa consistiría en establecer un esquema numérico a partir de la solución de la ecuación diferencial, dada en (13). El procedimiento se basaría en aplicar la difusión en  $(u_{i+1}, u_i)$  y en  $(u_i, u_{i-1})$  para posteriormente hacer un promediado de los valores obtenidos.

### 3.2 NUMÉRICO DESDE LA SOLUCIÓN SEMI-ANALÍTICA

La idea es utilizar la solución analítica para definir un esquema numérico para  $n$  píxeles. El procedimiento a seguir consiste en ponderar la difusión en  $(u_{i+1}, u_i)$  y en  $(u_i, u_{i-1})$  para evaluar la dinámica del pixel  $i$ . Empleando una discretización explícita del tiempo y siguiendo a Sanguino [12]:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta t \Delta x^{p-2} |u_{i+1}^k - u_i^k|^{1-p} \text{sign}(u_{i+1}^k - u_i^k) \min\left(1, \frac{|u_{i+1}^k - u_i^k|^p}{4\Delta t \Delta x^{p-2}}\right) - \Delta t \Delta x^{p-2} |u_i^k - u_{i-1}^k|^{1-p} \text{sign}(u_i^k - u_{i-1}^k) \min\left(1, \frac{|u_i^k - u_{i-1}^k|^p}{4\Delta t \Delta x^{p-2}}\right) \quad (21)$$

También es posible demostrar que el método propuesto es consistente, si los incrementos de tiempo son:

$$\Delta t \leq \frac{1}{4\Delta x^{p-2}} \min\left(|u_{i+1}^k - u_i^k|^p, |u_i^k - u_{i-1}^k|^p\right) \quad (22)$$

Similares conclusiones ha obtenido Welk et al [17] desde el calculo variacional. Además las ha extendido a 2D y 3D. A este método numérico se le ha nombrado *Locally semi-analytic schemes*, LSAS.

Brox [5] ha comparado los distintos métodos numéricos para TV 1D. En el dominio discreto existe una solución exacta de la evolución, lo que permite medir las diferencias entre los distintos escenarios numéricos. Se concluye que los escenarios de intercambio de energía entre dos píxeles son los más exactos, pero para mantener la consistencia se requiere que los incrementos de tiempo sean muy pequeños. Por el contrario, si se desea eficiencia computacional, el escenario semi-implícito con regularización ofrece una solución con suficiente exactitud para evitar sensibles desviaciones desde la solución exacta. Para las aplicaciones de procesamiento de imágenes resulta la técnica más factible, empleando *Additive Operator Split* (AOS) para su generalización a dimensiones superiores.

#### 4. EXPERIMENTAL

Para verificar la consistencia entre el método numérico semi-implícito y la solución semi-analítica de la ecuación (21), se ha construido una señal 1D con cuatro tramos lineales de niveles de grises. El rango del nivel de gris está normalizado a [0 1]. Las rectas están definidas por cuatro diferencias de grises: 0.045, 0.02, 0.01 y 0.002. Considerando  $\Delta x$  unitario, los tiempos de difusión para preservar las pendientes superiores a 0.02, según (22) deberían ser menores a 0.1 ms para  $p=2$  y  $2\mu s$  para  $p=3$ . El mayor inconveniente es el número de iteraciones a realizar. Si se emplea el método numérico semi-implícito los  $\Delta t$  cambian en más de un órdenes de magnitud. En las figuras 2, 3 y 4 se muestra la evolución para  $p = 1, 2$  y  $3$ , con un  $\Delta t$  de 2 ms. Se observa cómo a medida que aumenta el valor de  $p > 1$  se hace más selectivo con la pendiente. El efecto escalera se aprecia como una consecuencia del transitorio de la dinámica que desaparece a medida que aumentan las iteraciones. También se observa que la solución del régimen permanente existe y es única. Cuando  $p = 1$  se nota la falta de difusión inversa y su incapacidad de realce. Si a la señal se le añade ruido blanco con un SNR de 22 dB, los resultados son similares.

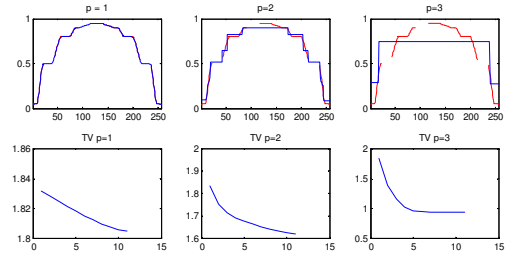


Figura 2: Evolución con 10 iteraciones de la señal y de su variación total: a)  $p = 1$ , b)  $p=2$ , c)  $p=3$

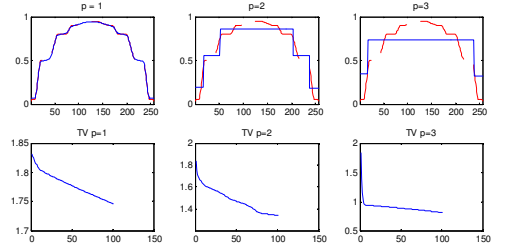


Figura 3: Evolución con 100 iteraciones de la señal y de su variación total: a)  $p = 1$ , b)  $p=2$ , c)  $p=3$

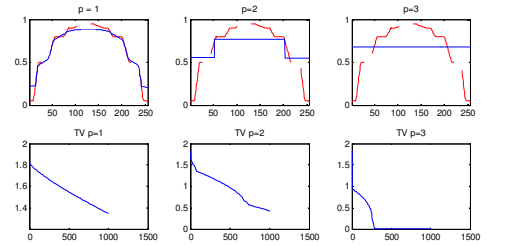


Figura 4: Evolución con 1000 iteraciones de la señal y de su variación total: a)  $p = 1$ , b)  $p=2$ , c)  $p=3$

Para dimensiones superiores se ha empleado el método explicado en la sección 3.1. A partir de la señal sintética 1D se ha construido una imagen mediante el proceso de revolución con un eje axial que pasa por el centro de la señal, con el propósito de de testear la invarianza a rotaciones del método numérico. En la figura 5 se aprecia el resultado de 10 iteraciones con un  $\Delta t$  de 2 ms, observando la isotropía de la difusión y el carácter selectivo del realzado dependiendo del valor de  $p$ .

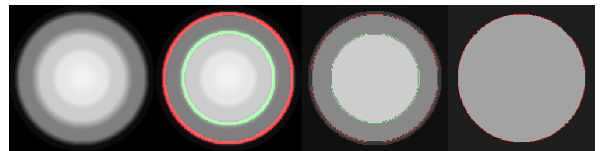


Figura 5: Evolución con 10 iteraciones: a) imagen de entrada, b)  $p=1$ , c)  $p=2$ , d)  $p=3$

Como aplicación práctica, esta técnica se usa en tareas de segmentación 3D sobre imágenes abdominales MRI para la localización del hígado y de posibles lesiones hepáticas [10].

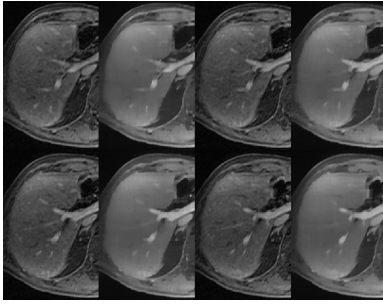


Figura 6: Cuatro cortes del hígado. A la izquierda la imagen original, a la derecha la imagen filtrada

## 5. CONCLUSIÓN

La simplificación de la imagen es esencial para tareas posteriores de segmentación. Se ha presentado un diseño de filtrado basado en la difusión no lineal auto sintonizado. Las expresiones analíticas que relacionan los tiempos de difusión con el módulo del gradiente y el parámetro de difusividad resulta la vía para ajustar la dinámica de evolución según la propia imagen a procesar. Se han comparado los métodos numéricos LSAS y AOS, obteniendo conclusiones sobre la consistencia y el coste computacional. Por último, se han presentado los resultados y sus aplicaciones.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la financiación del proyecto DPI2007-63654.

### Referencias

- [1] Alvarez, L., Guichard, F., Lions, P. L. et al.: Axioms and Fundamental Equations of Image Processing. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 123 (1993) 199-257
- [2] Andreu, F., Caselles, V., Díaz, J. et al.: Some Qualitative Properties for the Total Variation Flow. *Journal of Functional Analysis*, 188 (2002) 516-547
- [3] Breuß, M., Bürgel, A., Brox, T. et al.: Numerical Aspects of TV Flow. *Numerical Algorithms*, 41 (2006) 79-101
- [4] Breuß, M., & Welk, M.: Staircasing in Semidiscrete Stabilised Inverse Linear Diffusion Algorithms. *J. Comput. Appl. Math.*, 206 (2007) 520-533
- [5] Brox, T.: From Pixels to Regions: Partial Differential Equations in Image Analysis. Faculty of Mathematics and Computer Science, Saarland University, (2005)
- [6] Buades, A., Coll, B., Morel, J. M.: A Review of Image Denoising Algorithms, with a New One. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4 (2005) 490-530
- [7] Keeling, S. L., & Stollberger, R.: Nonlinear Anisotropic Diffusion Filtering for Multiscale Edge Enhancement. *Inverse Problems*, 18 (2002) 175-190
- [8] Kichenassamy, S.: The Perona-Malik Paradox. *SIAM J Appl Math*, 57 (1997) 1328-1342
- [9] Perona, P., & Malik, J.: Scale-Space and Edge Detection using Anisotropic Diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 12 (1990) 629-639
- [10] Platero, C., Poncela, J., Gonzalez, P. et al.: Liver Segmentation for Hepatic Lesions Detection and Characterisation. *Biomedical Imaging: From Nano to Macro, 2008.ISBI 2008.5th IEEE International Symposium on*, (2008) 13-16
- [11] Rudin, L., Osher, S., Fatemi, E.: Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D*, 60 (1992) 259-268
- [12] Sanguino, J., & Platero, C.: Solución Semi-Analítica 1D Para Funciones Uniparamétricas De Realce. *Jornadas de Automática*, (2008)
- [13] Steidl, G., & für Technomathematik, Z.: On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and SIDEs. *Zentrum für Technomathematik* (2003)
- [14] Teboul, S., Blanc-Feraud, L., Aubert, G. et al.: Variational Approach for Edge-Preserving Regularization using Coupled PDEs. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 7 (1998) 387-397
- [15] Tsurkov, V.: An Analytical Model of Edge Protection Under Noise Suppression by Anisotropic Diffusion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 39 (2000) 437-440
- [16] Weickert, J., Romeny, B., Viergever, M.: Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 7 (1998) 398-410
- [17] Welk, M., Steidl, G., Weickert, J.: Locally Analytic Schemes: A Link between Diffusion Filtering and Wavelet Shrinkage. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 24 (2008) 195-224