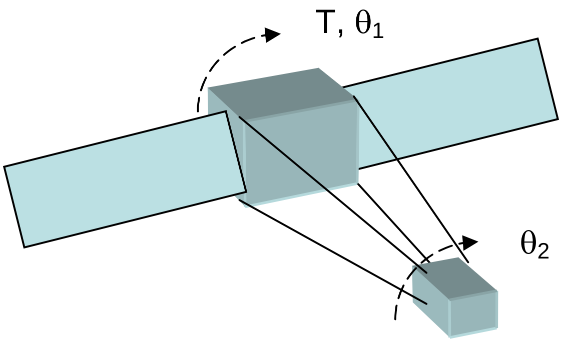
Problema 1

La figura muestra, de forma básica, un sistema de reconocimiento astronómico. En ella se puede ver cómo este satélite está formado por dos bloques (unidos por conexiones no rígidas), siendo el mayor de estos bloques el que contiene el sistema de comunicación, propulsión y fuentes de alimentación; mientras que el otro bloque sólo contiene sensores que deben estar aislados de las vibraciones del primer bloque. Si la estructura metálica de conexión entre los bloques se modelan por un resorte, K, y un rozamiento equivalente, B.



Se pide:

1. Demostrar la FDT entre el giro del segundo bloque respecto al par dado en el bloque principal:

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{0.6(s+2.97)}{s^2\left((s+3)^2+3^2\right)}$$

2. Si el sensor de posición del bloque segundo y el elemento de potencia tienen FDT unitaria, dibujar el diagrama a bloques del sistema de control realimentado.
3. Determinar el trazado directo del lugar de las raíces del sistema de control.
4. Obtener el trazado inverso.

Datos:

J_1= 10 kg m^2 J_2= 0.1 kg m^2 K= 1.78 Nm/rad B= 0.6 Nms/rad

(60 minutos)

Problema 2

La siguiente función de transferencia representa el comportamiento simplificado de un motor de corriente continua de imanes permanentes. Se desea estudiar su comportamiento desde el punto de vista frecuencial.

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{s+10}{s(s+1)}$$

Se pide:

1.- Obtener el diagrama de Bode tanto de fases como de amplitudes del mismo.
2.- Dibujar el correspondiente diagrama polar y obtener tanto en el bode como en el diagrama polar la representación del Margen de Fase y del Margen de Ganancia. Calcular lo más exactamente posible sus valores.

Para lograr un control de posición, se realimenta unitariamente dicho motor y el compensador tiene ganancia unitaria. El sistema resultante se comportará en frecuencia de distinta forma por lo que:

3.- Obtener el diagrama de Bode del sistema realimentado. Destacar los valores más significativos.
4.- ¿Cuánto vale el margen de fase ahora? ¿Qué significado tiene?

(45 minutos)

Publicación de las notas: 01/03/07
Revisión: 05/03/07

Resolución
Problema 1

1. El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que caracteriza la dinámica de rotación del satélite son:

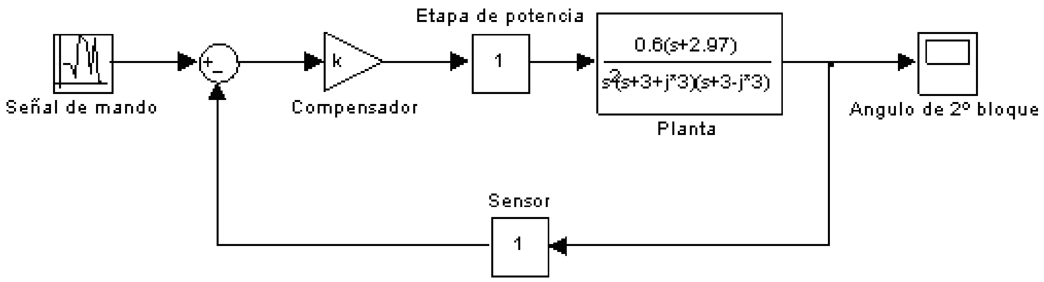
$$T(t) = J_1\ddot{\theta}_1(t) + K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + B(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t))$$

$$K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + B(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) = J_2\ddot{\theta}_2(t)$$

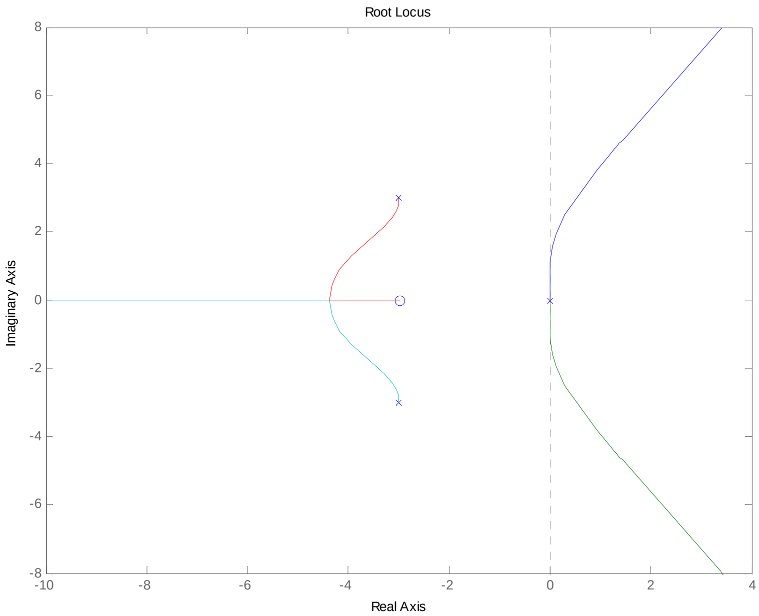
Aplicando transformadas de Laplace y considerando condiciones iniciales nula se obtiene la FDT solicitada:

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K + sB}{s^2\left(J_1 \cdot J_2 s^2 + B(J_1 + J_2)s + K(J_1 + J_2)\right)} = \frac{0.6(s + 2.97)}{s^2\left((s+3)^2 + 3^2\right)}$$

2.



3.
R1: Nº de ramas 4
R2: k=0 (0,0,-3+j3) k=∞ (-2.97)
R3: Ramas en el eje real
R4: Simetría con el eje real



$$R5 : \theta_a = \frac{(2q+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

$$R6 : \sigma_a = \frac{(-0-0-3-3)+2.97}{3} \approx -1$$

R7: Ángulos de salida de los polos complejos de la cadena abierta:

$$\alpha - (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = (2q+1)\pi$$

$$\alpha \cong \beta_3 = +\frac{\pi}{2} = 90° \quad \beta_1 = \pi - arc\,tg\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\beta_2 \cong -\frac{\pi}{2}$$

R8: Hay el punto de dispersión de los polos dobles del origen y un punto de confluencia que se calculará de manera numérica:

$$\frac{2\cdot(\sigma_c^s + 3)}{(\sigma_c^s + 3)^2 + 3^2} + \frac{1}{(\sigma_c^s + 0)} + \frac{1}{(\sigma_c^s + 0)} = \frac{1}{(\sigma_c + 2.97)}$$

σ_c^s	-3.5	-4.44	-4.37

R9: D $D(s) = s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 0.6ks + 1.78k$

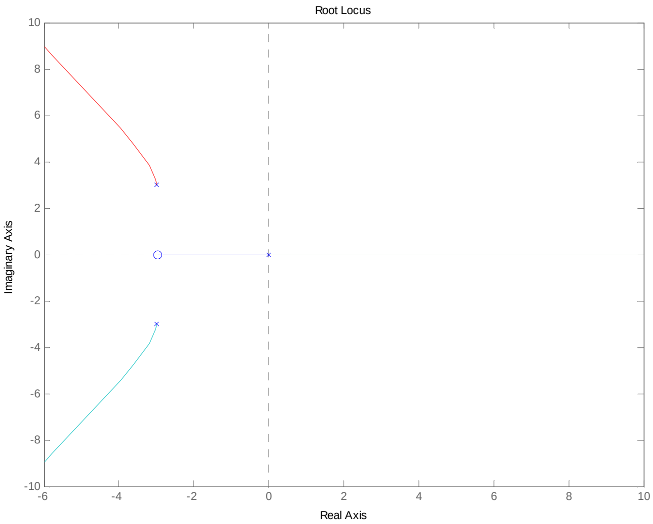
s^4	1	18	1.78k
s^3	6	0.6k	
s^2	$\frac{108-0.6k}{6}$	1.78k	
s^1	*		
s^0	1.78k		

$$* = \frac{\frac{108-0.6k}{6}0.6k - 1.782k \cdot 6}{\frac{108-0.6k}{6}}$$

Las condiciones de estabilidad son k>0, k<1.8 y k<180. Por tanto, resulta estable entre 0 y 1.8

4. Para el trazado inverso sólo habrá que modificar las reglas 3,5 y 7.

R3: Ramas en el eje real



$$R5: \theta_a = \frac{2\pi q}{3} = 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$$

R7: Ángulos de salida de los polos complejos de la cadena abierta:

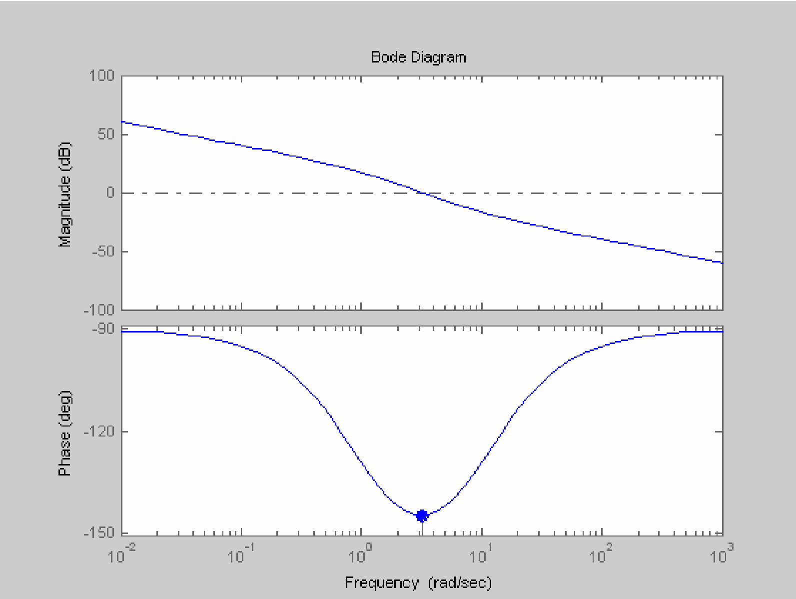
$$\alpha - (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 2.\pi q$$

$$\beta_2 \cong -\frac{6\pi}{4}$$

Resolución
Problema 2
1.- Obtener el diagrama de Bode tanto de fases como de amplitudes del mismo. (3 Puntos)

$$Kv = 10$$

$$\left|G(jw)\right|_{w=0.1} = 100 \Rightarrow 40dB$$

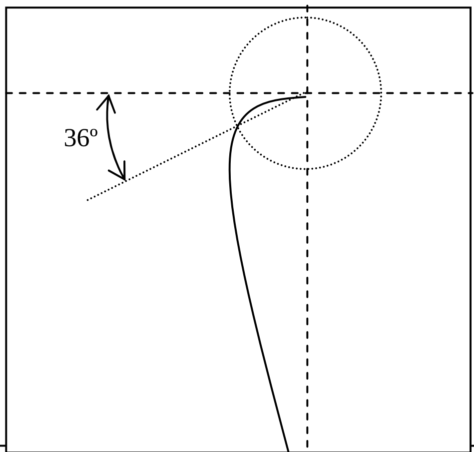


2.- Dibujar el correspondiente diagrama polar y obtener tanto en el bode como en el diagrama polar la representación del Margen de Fase y del Margen de Ganancia. Calcular lo más exactamente posible sus valores. (3 Puntos)

$$\left|G(jw_g)\right| = 1 \Rightarrow \frac{\left|jw_g + 10\right|}{\left|jw_g\right|\left|jw_g + 1\right|} = 1 \Rightarrow w_g = 3.16\,\tfrac{ras}{s}$$

$$\angle G(jw_g) = a\tan\frac{3.16}{10} - 90 - a\tan\frac{3.16}{1} = -144 \Rightarrow \gamma = 180 - 144 = 36$$

$$K_g = \infty$$



3.- Obtener el diagrama de Bode del sistema realimentado. Destacar los valores más significativos.(3 puntos)

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{s+10}{s^2+2s+10} = \frac{s+10}{((s+1)^2+3^2)}$$

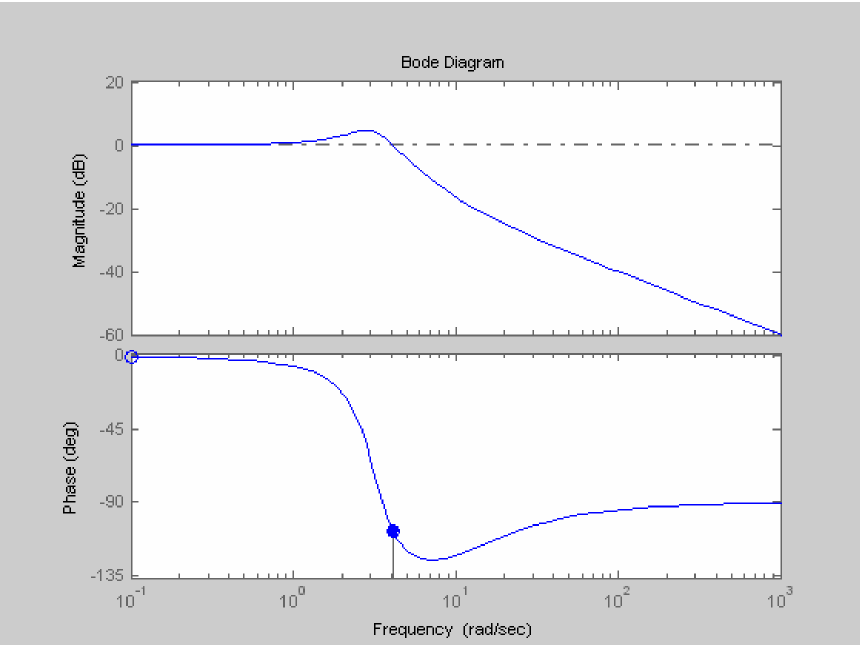
$$K_p = \lim_{s\to 0} M(s) = 1$$

$$\omega_n = \sqrt{1+3^2} = 3.16$$

$$\xi = \cos\theta = \frac{\sigma}{\omega_n} = 0.316$$

$$\omega_{resonancia} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = 2.82 \tfrac{rad}{s}$$

$$M_{resonancia} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.66 \Rightarrow 4.5dB$$



4.- ¿Cuánto vale el margen de fase ahora? ¿Qué significado tiene?(1 Punto)

$$|M(jw_g)| = 1 \Rightarrow \frac{|jw_g+10|}{|j2w_g+(10-\omega_g{}^2)|} = 1 \Rightarrow w_g = 4.12 \tfrac{rad}{s}$$

$$\angle M(jw_g) = a\tan\frac{4.12}{10} - a\tan\frac{7.12}{1} - a\tan\frac{1.12}{1} = -107.6 \Rightarrow \gamma = 180-107.6 = 72.4$$

$$K_g = \infty$$

Este margen de fase constituye una medida de cómo es de estable el sistema que resultaría de hacer una nueva realimentación con M(s). Es decir que tendríamos una medida de estabilidad de:

$$M^{II}(s) = \frac{M(s)}{1+M(s)}$$