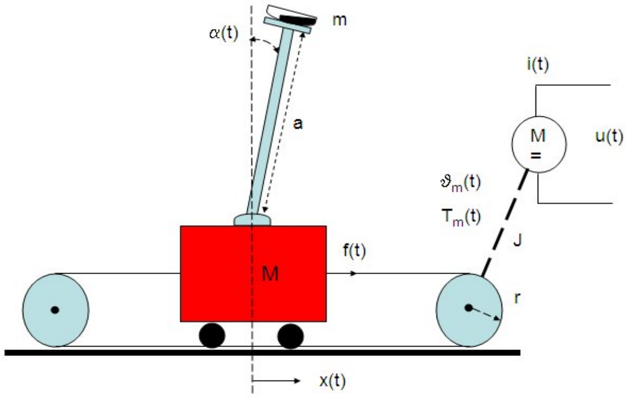
Problema 1 **(5 puntos - 70 minutos)**

El sistema de la figura representa el control de un péndulo invertido. Con el fin de mantener en posición una varilla de longitud **a**, situado sobre un carro móvil de masa **M** y en cuyo extremo lleva adosado un recipiente con líquido, de masa **m**, se dispone de un motor cuya tensión de entrada **u(t)** se puede manipular. La varilla forma en cada momento un ángulo **α(t)** respecto a la vertical y gira sobre un eje situado en su extremo en su parte inferior. El carro es arrastrado por una fuerza **f(t)** mediante un cable rígido, suponiendo despreciable el rozamiento correspondiente a su movimiento en el eje **x(t).** Las ecuaciones carro-varilla que relacionan la fuerza aplicada con el ángulo girado son:

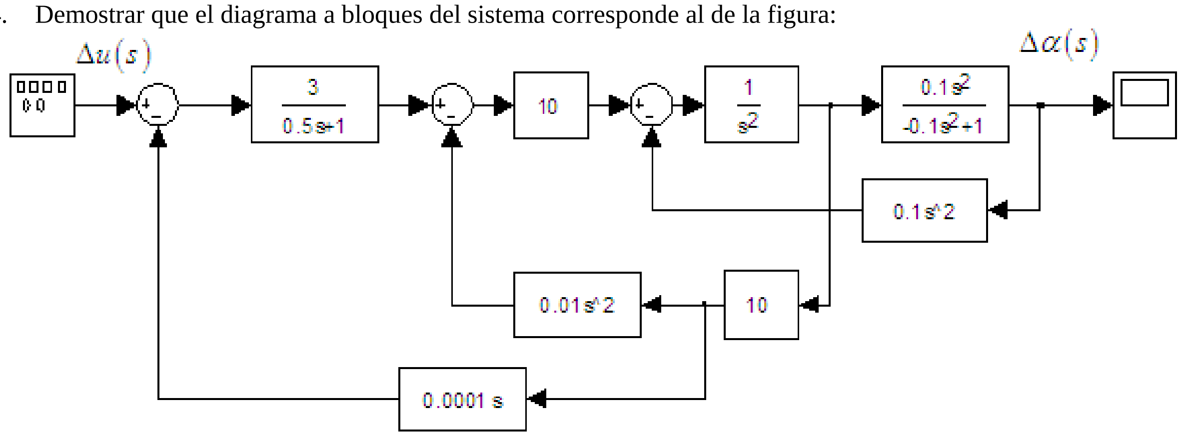


$$(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} - ma\left(sen\left(\alpha(t)\right)\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + ma\left(\cos\left(\alpha(t)\right)\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} = f(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\left(\alpha(t)\right) + ma\frac{d^2\alpha}{dt^2} = mgsen\left(\alpha(t)\right)$$

Se pide:

1. Sabiendo que el par generado por el motor, $\mathbf{T_m(t)}$, aplicado a través de un eje y una polea de radio **r** es la que origina la fuerza **f(t)**, una vez vencida la inercia **J** del conjunto eje-polea, determinar el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modele la dinámica del motor-eje-polea.
2. Punto de equilibrio del sistema dado por el reposo del carro, $x_0=0$.
3. Linealización alrededor del punto anterior de reposo de las ecuaciones carro-varilla.
4. Demostrar que el diagrama a bloques del sistema corresponde al de la figura:



5. Considerando que $\mathbf{k_B}$ tiende a ser nula, demostrar que $\dfrac{\Delta\alpha(s)}{\Delta u(s)} = \dfrac{-31.5}{(s+2)(s+3.24)(s-3.24)}$
6. Si al conjunto total, motor-polea-carro-varilla, se le da una estructura de realimentación negativa y unitaria, obtener el trazado directo e inverso del lugar de las raíces. ¿Con qué valores de k el sistema es estable?

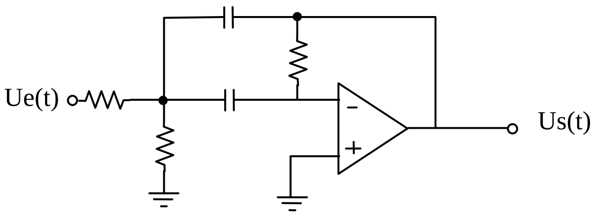
Datos:

$$\text{Motor-polea}: R=1\Omega \quad L=0.5H \quad k_p=3Nm/A \quad k_B=10^{-4}Vs/rad \quad J=0.01kgm^2 \quad r=0.1m$$

$$\text{carro-varilla}: m=0.1kg \quad M=0.9kg \quad a=1m \quad g\cong 10m/s^2$$

<u>Problema 2</u> (5 puntos - 60 minutos)

El circuito de la figura representa una etapa de acondicionamiento basada en un filtro de Rauch para un sensor acoplado al eje de salida de un micromotor eléctrico. Antes de proceder a analizar el conjunto del sistema Controlador-Sensor-Motor, se desea estudiar las propiedades de esta etapa de filtrado. La función de transferencia del filtro viene determinada por la siguiente expresión:



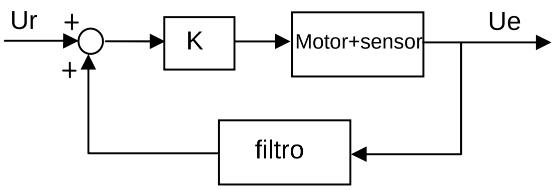
$$H(s) = \frac{Us(s)}{Ue(s)} = \frac{-10^{-3}s}{1 + 1.1 \cdot 10^{-3}s + 10^{-7}s^2}$$

Se pide:

1.- Obtener cuál es la respuesta en régimen permanente de la etapa de acondicionamiento si $Ue(t) = 2\cos(100t) + 5sen(1000t + 0.1)$. (1 punto)

2.- Obtener el diagrama de bode de amplitudes y fases del filtro indicando los puntos más significativos. (2 puntos).

Dado que el sensor tiene una ganancia negativa, se construye el siguiente esquema de control del motor:



Siendo la función de transferencia del conjunto motor+sensor la siguiente:

$$G(s) = \frac{500}{s(s+1000)}$$

3.- Analizar los errores en régimen permanente del sistema para un valor de K=20. (1 punto)

4.- ¿Qué valores de K logran que el sistema de control permanezca estable? (1 punto)

Publicación de las notas: 6-2-08 **Revisión: 11-2-08**

Problema 1

1.

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + k_B\frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

$$T_m(t) = k_p i(t) = J\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + rf(t)$$

$$x(t) = r\vartheta(t)$$

2.

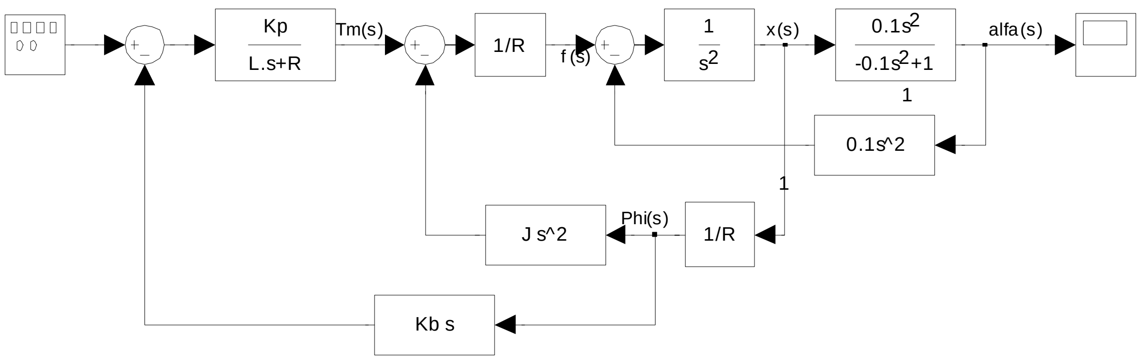
$$x_0 = 0m \quad f_0 = 0N \quad T_{m_0} = 0Nm \quad i_0 = 0A \quad u_0 = 0V \quad \alpha_0 = 0rad$$

3.

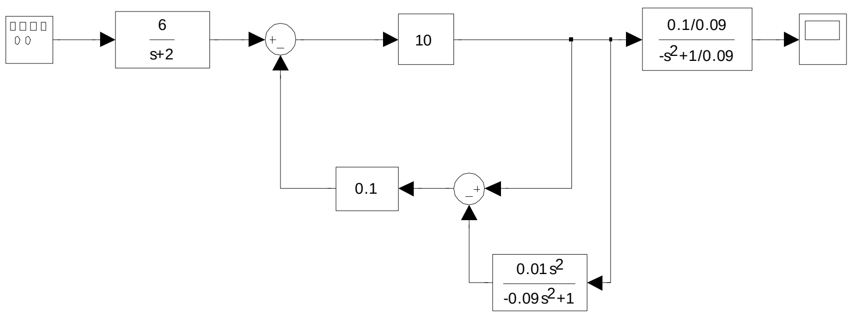
$$1\cdot\Delta\ddot{x}(t) + 0.1\cdot\Delta\ddot{\alpha}(t) = \Delta f(t)$$

$$0.1\cdot\Delta\ddot{x}(t) + 0.1\cdot\Delta\ddot{\alpha}(t) = \Delta\alpha(t)$$

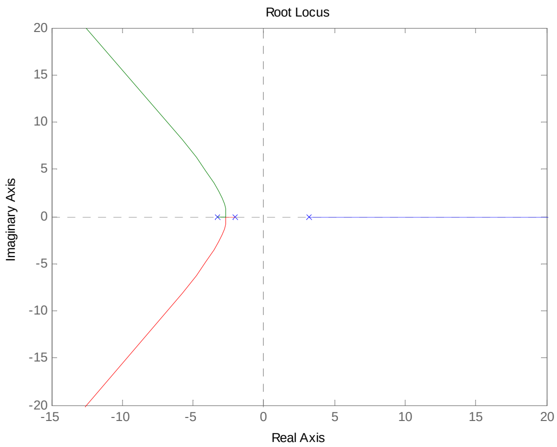
4.

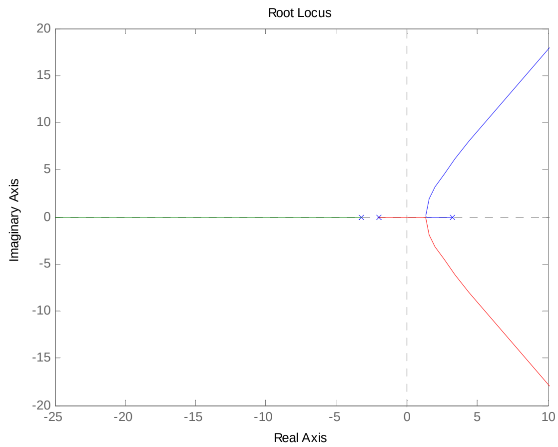


5.

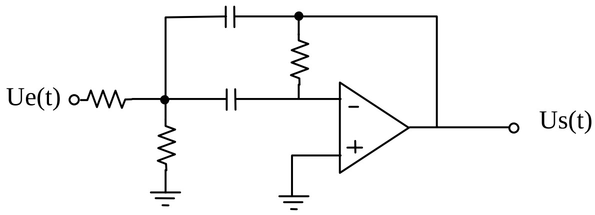


6. Trazado directo e inverso respectivamente. Como se observa no hay ningún valor de k que haga el sistema estable.





EJERCICIO 2. 1 hora. 5 puntos.



El circuito de la figura representa una etapa de acondicionamiento basada en un filtro de Rauch para un sensor acoplado al eje de salida de un micromotor eléctrico. Antes de proceder a analizar el conjunto del sistema Controlador-Sensor-Motor, se desea estudiar las propiedades de esta etapa de filtrado. La función de transferencia del filtro viene determinada por la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{Us(s)}{Ue(s)} = \frac{-10^{-3}s}{1 + 1.1 \cdot 10^{-3}s + 10^{-7}s^2}$$

Se pide:

1.- Obtener cuál es la respuesta en régimen permanente de la etapa de acondicionamiento si $Ue(t) = 2\cos(100t) + 5sen(1000t + 0.1)$ **. (1 punto)**

La respuesta en frecuencia en régimen permanente de un sistema estable viene determinada por el módulo y la fase de la función de transferencia en donde s toma el valor de jw, siendo w la frecuencia de la señal de entrada. Aplicando la propiedad lineal de los sistemas LTI, se tiene entonces que la respuesta ante Ue(t) viene determinada por:

$$U_{spermanente}(t) = 2|H(j100)|\cos(100t + \angle H(j100)) + 5|H(j1000)|sen(1000t + 0.1 + \angle H(j1000))$$

Calculando estos valores se tiene finalmente que:

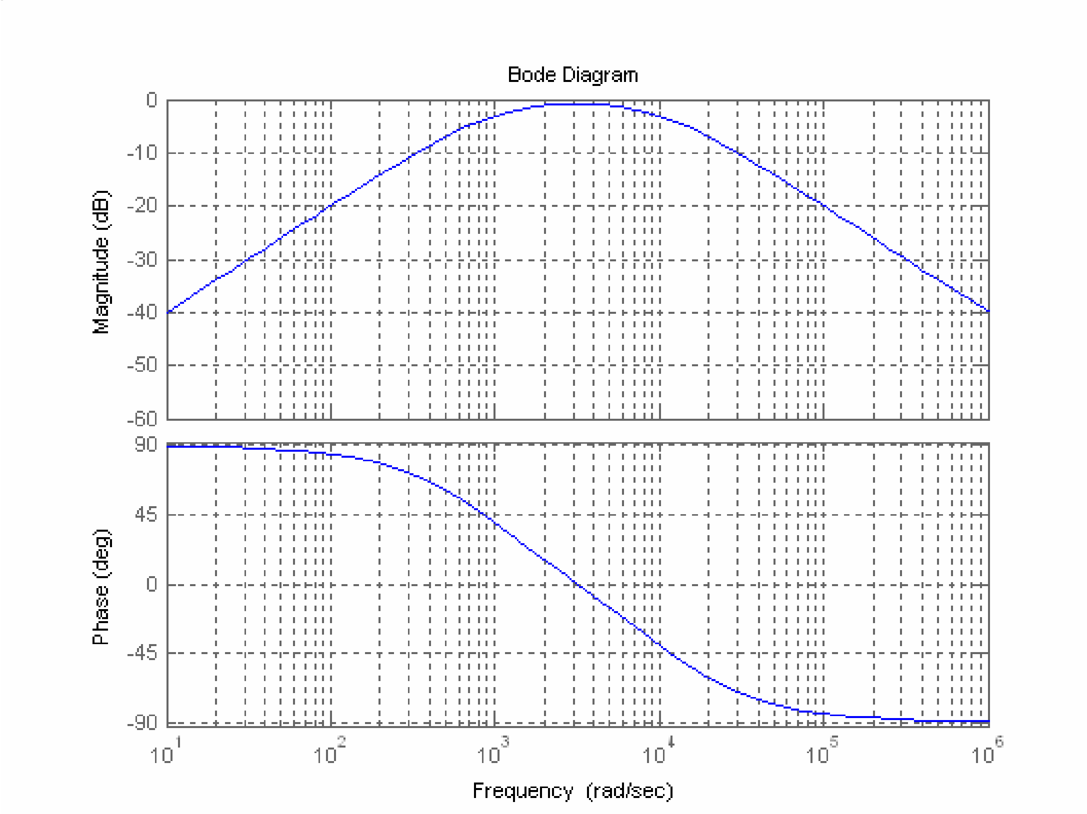
$$U_{spermanente}(t) = 2|0.1|\cos(100t + 1.4486) + 5|0.7|sen(1000t + 0.1 + 0.678)$$

2.- Obtener el diagrama de bode de amplitudes y fases del filtro indicando los puntos más significativos. (2 puntos).

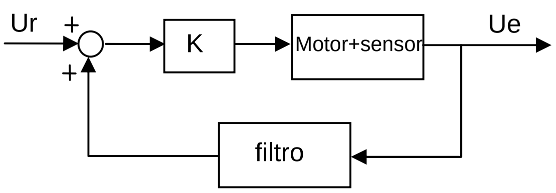
Es un filtro pasabanda, debido al cero en el origen, y la entrada de dos polos, uno a una frecuencia de 1000 rad/s y otro a 10000 rad/s. La amplificación asintótica entre ambas frecuencias es de 0dB, dada la función de transferencia expresada con los polos visibles:

$$H(s) = \frac{Us(s)}{Ue(s)} = \frac{-10^4 s}{(s + 1000)(s + 10000)}$$

. El diagrama de bode tiene el siguiente aspecto:



Dado que el sensor tiene una ganancia negativa, se construye el siguiente esquema de control del motor:



Siendo la función de transferencia del conjunto motor+sensor la siguiente:

$$G(s) = \frac{500}{s(s+1000)}$$

3.- Analizar los errores en régimen permanente del sistema para un valor de K=20. (1 punto)

Es un sistema con realimentación no unitaria, por lo que hay que interpretar el sentido de la señal de entrada según la función de realimentación. Se observa que el filtro tiene un cero en el origen por lo que la fórmula del error en régimen permanente será:

$$E_{rp} = \lim_{s \to 0} s \frac{X(s)}{sK_H}(1 - K_H sM(s))$$

Siendo $K_H = \lim_{s \to 0} \frac{H(s)}{s} = 0.001$ y $M(s) = \frac{KG(s)}{1 - KG(s)H(s)} = \frac{500K(s+10^3)(s+10^4)}{s(s+10^3)^2(s+10^4)+500K10^4)}$

Al hacer el limite para el escalón ($X(s) = \frac{1}{s}$) se observa entonces que el error en régimen permanente es infinito, por tanto el resto de errores (velocidad y aceleración) también lo son. Indica que puesto que el escalón está acotado, al menos para K=20 el sistema es no estable.

4.- ¿Qué valores de K logran que el sistema de control permanezca estable? (1 punto)

El polinomio característico de M(s) es:

$$P(s) = s^4 + 12000s^3 + 2.1 \cdot 10^7 s^2 + (10^{10} + 5K10^6)s$$

Que no cumple con la regla de Cardano-Vietta puesto que falta el término independiente. Siempre hay un polo en el origen. Luego el sistema es inestable para cualquier valor de K.