Problema 2 (50 minutos)

1) Un sistema discreto viene dado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_k = 3y_{k-1} + y_{k-2} + u_k$$

a) ¿Es dicho sistema causal? Estudie su estabilidad a partir de los valores de la secuencia de ponderación.

b) Compruebe el resultado obtenido analizando la función de transferencia (Z).

c) Calcule los 4 primeros términos de la secuencia de ponderación empleando el método de división larga y compruebe la consistencia con los valores previamente obtenidos en el apartado a).

d) Determine la transformada discreta de Fourier y Laplace de la secuencia de ponderación.

a) El sistema es causal (ver teoría). La secuencia de ponderación es la salida ante entrada $\{\delta_k\}$. Dando valores se comprueba que $\lim_{x\to\infty} g_n \neq 0$ luego el sistema es inestable.

k	δ_k	g_{k-1}	g_{k-2}	g_k
0	1	0	0	1
1	0	1	0	3
2	0	3	1	10
3	0	10	3	33
4	0	33	10	109

b) Haciendo la transformada Z a cada lado de la ecuación en diferencias del sistema seo obtiene que:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z^2 - 3z - 1}$$

que tiene un polo fuera del círculo unidad (z=3.30), por lo que el sistema es inestable.

c) La transformada Z de la secuencia de ponderación coincide con la ecuación característica del sistema. Para el método de la división larga es imprescindible que la función Z se encuentre en potencias de z^{-1}.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-3z^{-1}-2z^{-2} \\ \cline{2-2}
1-3z^{-1}-2z^{-2} & 1+3z^{-1}+10z^{-2}+33z^{-3}+\cdots \\ \cline{1-1}
3z^{-1}+z^{-2} & \\
3z^{-1}-9z^{-2}-3z^{-3} & \\ \cline{1-1}
10z^{-2}+3z^{-3} & \\
10z^{-2}-30z^{-3}-20z^{-4} & \\ \cline{1-1}
33z^{-3}+20z^{-4} &
\end{array}$$

d) $L\{g_k\} = 1 + 3e^{-s} + 10e^{-2s} + 33e^{-3s} + \cdots$ $\quad F\{g_k\} = 1 + 3e^{-jw} + 10e^{-2jw} + 33e^{-3jw} + \cdots$

2) Un modelo de planta discreta viene dado por

$$G(z)=\frac{z+\frac{1}{2}}{(z+1)(z-\frac{1}{2})(z-1)}$$

Se pide:

a) Suponiendo que sea estable, ¿puede seguir este sistema a una rampa discreta en cadena cerrada? Justifique la respuesta.

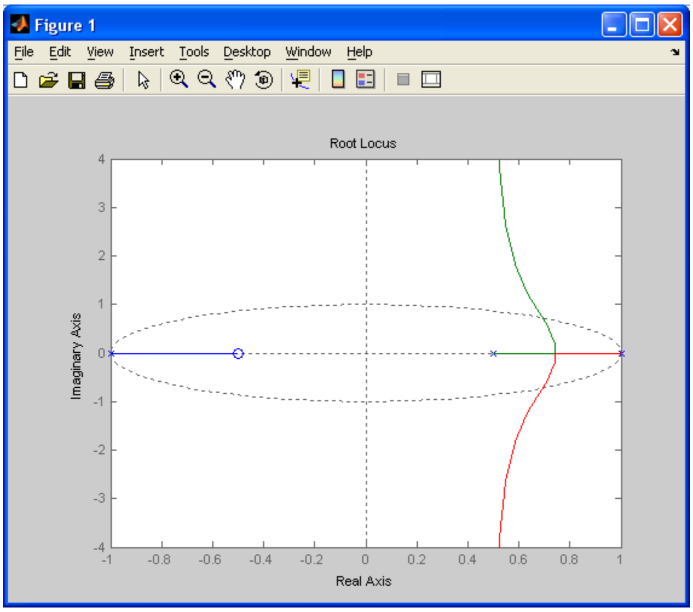
b) Dibuje de forma esquemática el lugar de las raíces directo

c) Determine los valores del compensador proporcional que hacen el sistema estable en cadena cerrada (considere la realimentación unitaria y la entrada $\{u_k\}=\{1_k\}$

d) Determine los 3 primeros valores de la salida para una compensación proporcional unitaria en el sistema del apartado c).

a) El sistema es de primer orden (puesto que tiene un polo en z=1). Esto implica que si es estable responderá con un error en régimen permanente ante entrada rampa.

b)



c) El polinomio característico es p(z)= $z^3-\frac{1}{2}z^2+(k-1)z+\frac{1}{2}(k+1)$

Aplicando Jury: **0<K<0,772**

d) El sistema tiene dos unidades de retardo al ser el orden del denominador mayor que el orden del numerador en dos unidades, por lo que los dos primeros valores de la salida son cero. Para encontrar el tercer valor es necesario determinar $Y^{-1}(z)$. Puesto que solo se piden tres términos, lo más simple es calcular Y(Z) (para K=1, entrada escalón unitario) y después efectuar la división larga.

$$M(z)=\frac{(z+\frac{1}{2})}{z^3-\frac{1}{2}z^2+1}\equiv\frac{z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-3}}$$

$$Y(z^{-1})=M(z^{-1})U(z^{-1})=\frac{z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-3}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{2}+z^{-3}-z^{-4}}$$

Puesto que solo se pide el tercer término es evidente que el primer término del cociente de $Y(z^{-1})$ es z^{-2} con lo que el tercer término de la salida es 1.

Solución: **$\{y_k\}=\{0,0,1,\ldots\}$**

El sistema es inestable para K=1. La forma de la salida es: