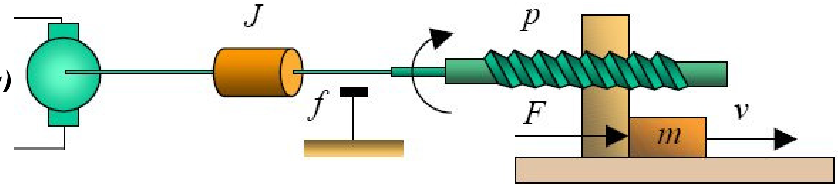
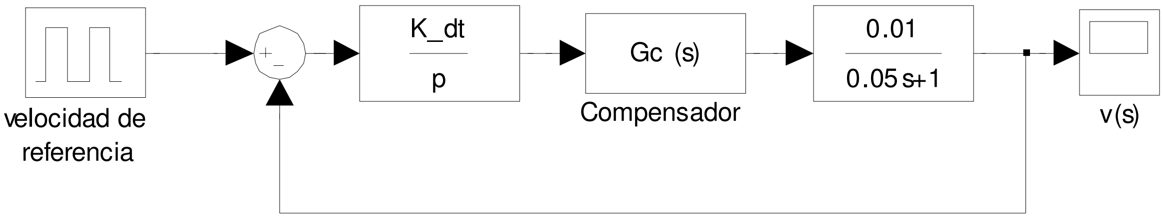
Problema 1 (5 puntos - 50 minutos)

Se desea el controlar la velocidad lineal de una masa situada en el extremo de un motor-husillo. Determinar:



1. Obtener la función de transferencia entre la velocidad lineal de la masa y la tensión aplicada al motor, $\frac{v(s)}{u(s)}$, sabiendo que el momento de inercia de la masa empujada por el husillo es $J_c = m \cdot p^2$. **(1 punto)**

2. Para el control se emplea una estructura de realimentación negativa mediante una dínamo tacométrica situada en el eje del motor. Demostrar que su diagrama a bloques queda definido como:
(1 punto)



3. Si se desea que el error en el régimen permanente ante un escalón sea nulo ¿Qué debe tener $G_c(s)$?. **(0.5 punto)**

4. Considerando que $G_c(s) = 10\frac{0.05s+1}{s}$ y una velocidad de referencia de 0.05 m/s determinar la evolución de la velocidad lineal en la masa. **(1 punto)**

5. Con las condiciones del apartado anterior, calcular las tensiones que se aplican en el inducido del motor en el instante inicial y final. **(1.5 puntos)**

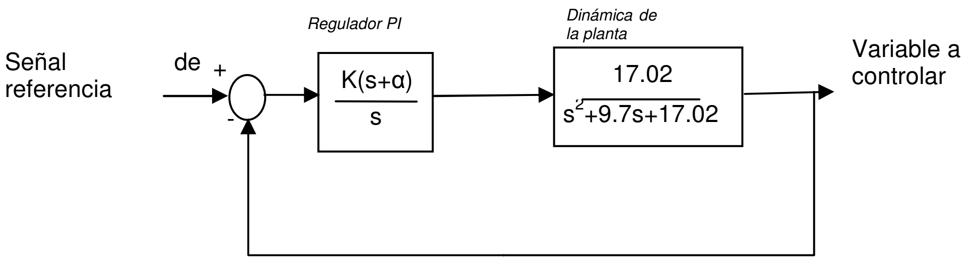
Motor de corriente continua: $R_i = 2.67\ \Omega$, $L_i \approx 0$ H, $k_p = 0.073$ Nm/A, $J = 1.12 \cdot 10^{-4}$ kg m^2

Husillo: $p = \frac{L}{2\pi} = 8 \cdot 10^{-4}$ m/rad (paso del husillo), $f = 2.18 \cdot 10^{-4}$ Nms/rad (rozamiento)

Carga: m = 1 kg; **Dínamo tacométrica:** $k_{DT} = 2.37 \cdot 10^{-2}$ V s/rad

Problema 2 (5 puntos - 50 minutos)

El diagrama de bloques siguiente representa un sistema controlado por medio de un regulador PI (Proporcional Integral). Se desea estudiar el efecto que sobre el mismo tiene el valor del parámetro que configura la acción Integral, que está directamente relacionado con α. Se pide:



1.- Estudiar la estabilidad del sistema realimentado en función del valor de α si K se fijase en 0.1. **(1.5 puntos)**

2.- Dibujar el Lugar de las Raíces de K considerando α=7.4. Obtener el valor que debería tener K para que el sistema realimentado situase sus polos dominantes en un mismo punto (polo doble) y el valor que debería tener K para que el coeficiente de amortiguamiento estos polos dominantes sea de 0.7 **(2 puntos)**

3.- Dibujar el diagrama de Bode del sistema en cadena cerrada (M(s)) para α=7.4 y K=0.3 **(1.5 puntos)**

Publicación de las notas: 4 de febrero de 2009

Revisión: 6 de febrero de 2009

Resolución
Problema 1

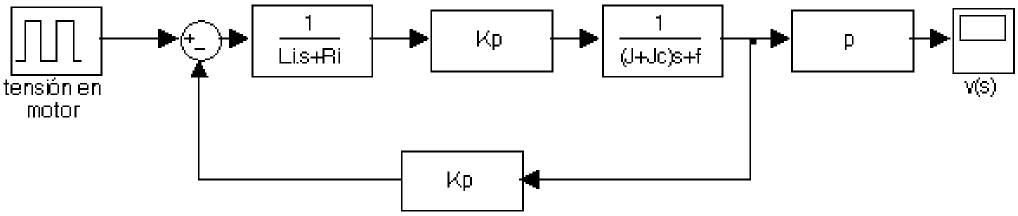
1. El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que definen la dinámica del motor-husillo son:

$$u(t) = R_i \cdot i(t) + L_i \frac{di(t)}{dt} + k_b \omega_m(t)$$

$$T_m(t) = k_p i(t) = (J + J_c)\frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t)$$

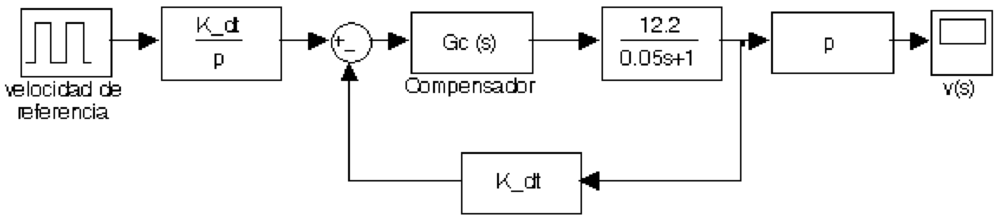
$$v(t) = p \cdot \omega_m(t)$$

Aplicando transformadas de Laplace queda definida la función de transferencia:



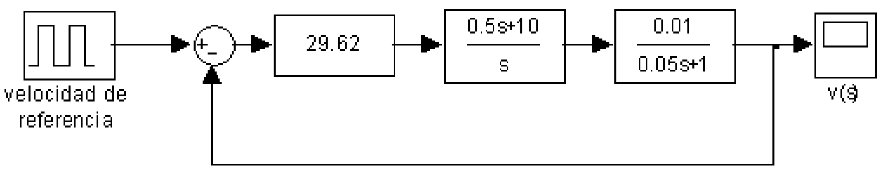
$$\frac{v(s)}{u(s)} = \frac{\dfrac{k_p}{R_i\left[(J+J_c)s+f\right]}}{1+\dfrac{k_p \cdot k_b}{R_i\left[(J+J_c)s+f\right]}} \cdot p = \frac{0.01}{0.05s+1}$$

2. El lazo de realimentación se realiza a través de la velocidad angular del eje del motor. Por lo tanto habrá que desplazar el sensor de realimentación hacia la velocidad lineal de la carga a través del álgebra de bloques. Respecto a la señal de mando para que se encuentre una comparación con la misma magnitud física y en el mismo rango dinámico deberá de añadirse un bloque que convierta la velocidad lineal deseada en una tensión comparable.



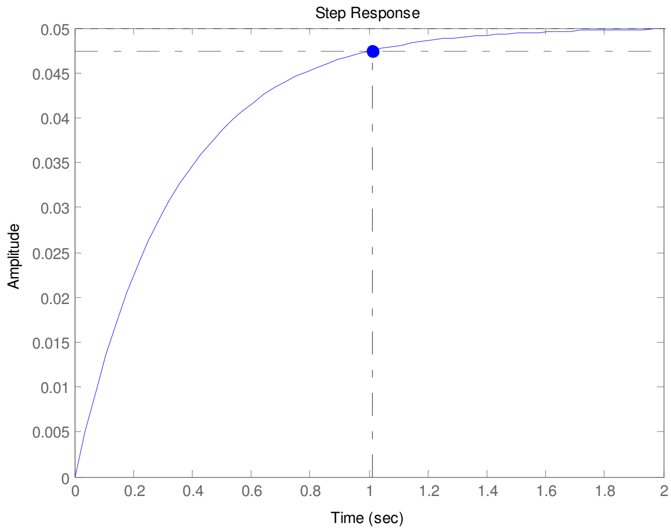
3. Como la estructura de realimentación es unitaria y se desea que el error al escalón sea nulo, el sistema debe ser de tipo I. El compensador debe de tener un integrador.

4. La FDT del conjunto total corresponde a un sistema de primer orden:



$$M(s) = \frac{1}{\frac{1}{2.96}s+1}$$

Y su evolución ante una entrada en escalón será:



5. La FDT entre la señal de mando y la tensión de salida es:

$$\frac{u(s)}{v_{ref}(s)} = \frac{296.2(0.05s+1)}{s+2.96}$$

Aplicando el teorema del valor inicial y final se obtendrá los valores de tensión en el motor en el momento del arranque y en el régimen permanente:

$$u(0) = 0.74V \quad u(\infty) = 5V$$

<u>Problema 2</u>

1.- Estudiar la estabilidad del sistema realimentado en función del valor de α si K se fijase en 0.1.
(1.5 puntos)

Se aplica el criterio de Routh sobre el polinomio característico de M(S):

$$1 + G_c(s)G_p(s) = 0 \rightarrow P(s) = s^3 + 9{,}7s^2 + 18{,}722s + 1{,}702 \propto = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 18.72 \\ s^2 & 9{,}7 & 1{,}7 \propto \\ s & m & 0 \\ s^0 & 1{,}7 \propto & 0 \end{array}$$

$$m = \frac{18{,}72 \cdot 9{,}7 - 1{,}702 \propto}{9{,}7} \geq 0 \Longrightarrow \alpha \leq 106.68$$

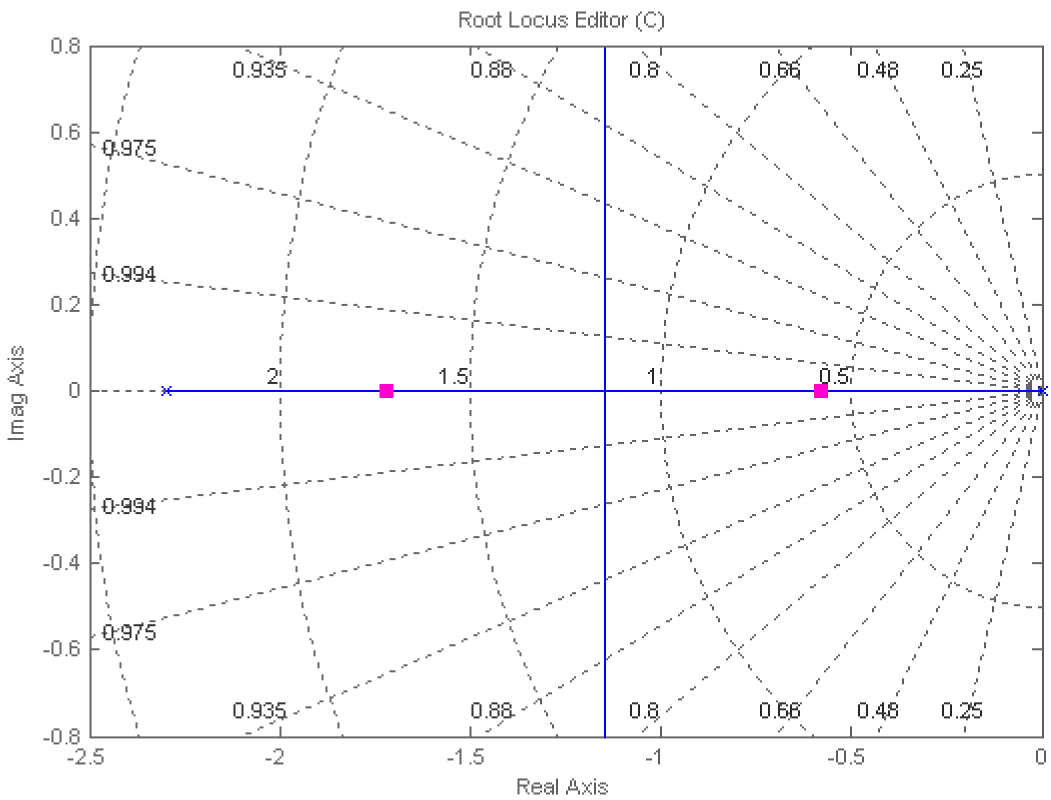
Luego el sistema será estable para $0 \leq \alpha \leq 106{,}68$

2.- Dibujar el Lugar de las Raíces de K considerando α=7.4. Obtener el valor que debería tener K para que el sistema realimentado situase sus polos dominantes en un mismo punto (polo doble) y el valor que debería tener K para que el coeficiente de amortiguamiento estos polos dominantes sea de 0.7
(2 puntos)

Calculamos el producto $G_c(s)G_p(s)$ que es la función de transferencia de la cadena abierta

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K(s+7{,}4)17{,}02}{s(s+7{,}4)(s+2{,}3)} = \frac{K \cdot 17{,}02}{s(s+2{,}3)}$$

Luego el LDR queda simplificado a el de una fdt con dos polos en el eje real, en o y en -2.3.
El punto de dispersión coincide con el centroide de las asíntotas (+90 y -90) y está en -1.15



Aplicando el criterio del módulo obtenemos el valor de la ganancia que situa los polos en:

a) El punto de dispersión $S_\Delta = -1.15$

$$17{,}02K = \frac{d_{2.3} \cdot d_0}{1} = 1.15^2 \Rightarrow K = 0.077$$

b) Si $\xi = 0.7$ y sabiendo que según el lugar de las raíces las ramas suben con una abscisa de -1.15, es inmediato obtener el punto del mismo en el que pueden situarse los polos:

$S_\Delta = -1.15 \pm 1.17j$

Por tanto aplicando el criterio del módulo:

$$17{,}02K = \frac{d_{2.3} \cdot d_0}{1} = 1.15^2 + 1.17^2 \Rightarrow K = 0.158$$

3.- Dibujar el diagrama de Bode del sistema en cadena cerrada (M(s)) para α=7.4 y K=0.3 (1.5 puntos)

Para esos valores de α y de K, obtenemos la expresión de M(s):

$$M(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{5{,}106}{s^2 + 2.3s + 5{,}106}$$

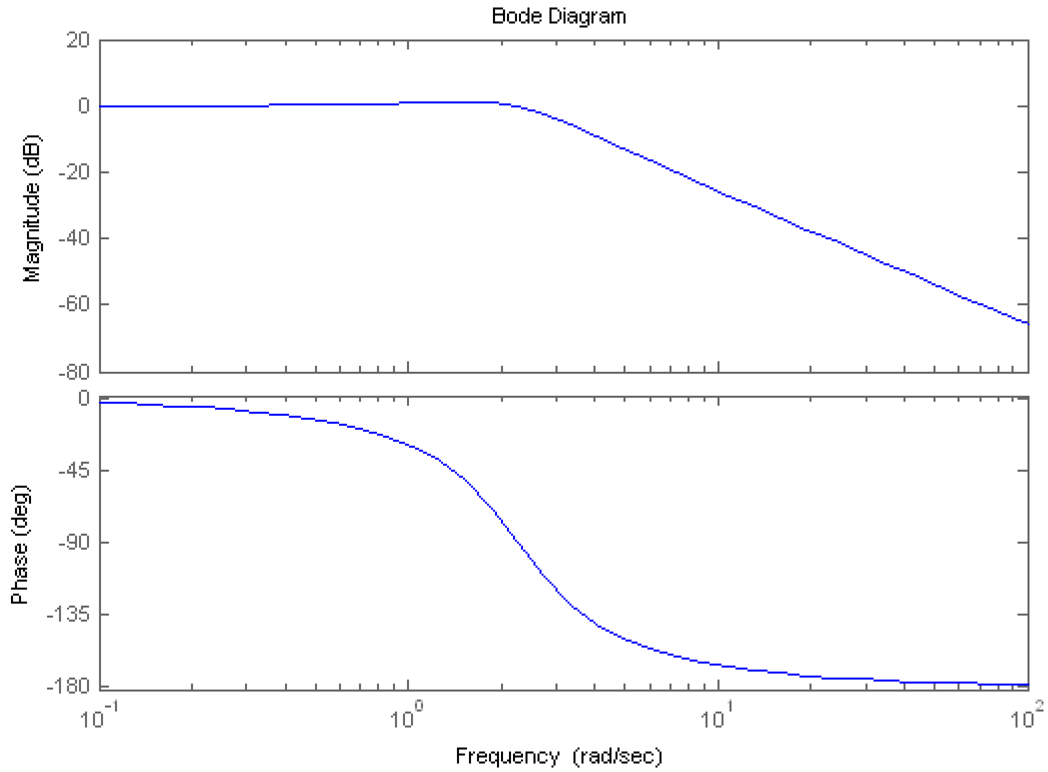
Que tiene dos polos complejos conjugados en $-1.15 \pm 1{,}94j$

A los cuales les corresponden la frecuencia de resonancia y el valor de resonancia en:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} = 1{,}6\,\frac{rad}{s}$$

$$M_r = 2\xi\sqrt{1 - \xi^2} = 1.15$$

Por lo que dibujamos sin más el diagrama de bode teniendo en cuenta que la ganancia estática es 1 y la frecuencia de corte del polo es de 2,25:


Bode Diagram
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
-80
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/sec)