Problema 2 (50 minutos) (5 puntos)

1) Un sistema S responde ante una secuencia escalón unitario$\{1_k\}$ con la secuencia $\{0,1,3,3,\ldots\}$.

a) Determine la ecuación en diferencias que representa S

La ecuación característica puede obtenerse (entre otras formas) a partir de la trasformada Z de las señales de entrada $\{u_k\}$ y salida $\{y_k\}$:

$$U(z)=\frac{z}{z-1} \qquad Y(z)=z^{-1}+3\frac{z}{z-1}z^{-2} \qquad G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+2}{z^2}$$

$$De\ G(z^{-1})=z^{-1}+2z^{-2}\rightarrow y_k=u_{k-1}+2u_{k-2} \quad (I)$$

b) Obtenga el valor de los elementos de la secuencia de salida ante una entrada $\{1,2,3\}$

A partir de la ecuación en diferencias se obtiene la secuencia de salida dando valores de manera trivial:

k	u_k	u_{k-1}	u_{k-2}	y_k
0	1	0	0	0
1	2	1	0	1
2	3	2	1	4
3	0	3	2	7
4	0	0	3	6
5	0	0	0	0

$$y_k=u_{k-1}+2u_{k-2}=\{0,1,4,7,6,0,0,\ldots\}$$

También se podía haber llegado al mismo resultado calculando la secuencia de ponderación g_k por convolución a partir de la entrada y salida del apartado 1.

A partir de g_k, la salida pedida (aplicando linealidad) es $y_k=\{g_k\}+2\{g_{k-1}\}+3\{g_{k-2}\}$

c) Determine la transformada discreta de Fourier y Laplace de la secuencia de ponderación de S.

Primeramente se obtienen los términos de la secuencia ponderatriz que corresponderán con la salida del sistema ante entrada impulso discreto $\{\delta_k\}$.

k	δ_k	δ_{k-1}	δ_{k-2}	g_k
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	1	2
3	0	0	0	0

$g_k=\{0,1,2,0,0\ldots\}$ (Nota: Se podía obtener directamente de (I))

Las transformadas discretas de Fourier y Laplace son, por tanto,

$$F(\{g_k\})=e^{-jw}+2e^{-2jw} \qquad L(\{g_k\})=e^{-s}+2e^{-2s}$$

2) Un modelo de planta discreta viene dado por

$$G(z) = \frac{z}{(z+1)(z-\frac{2}{3})(z-1)}$$

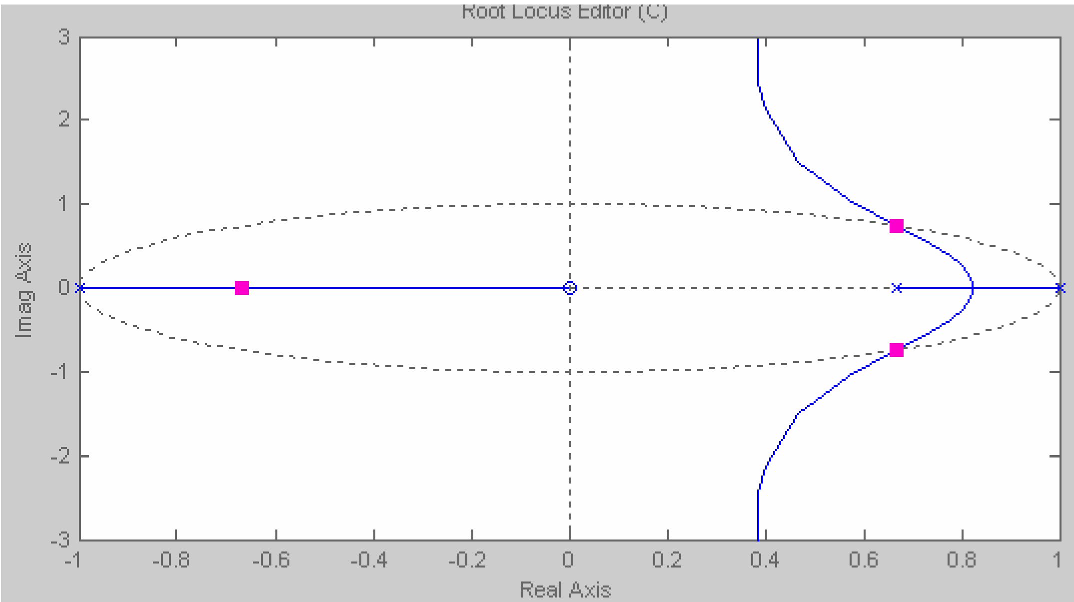
Se pide:

a) Suponiendo que sea estable, ¿puede seguir este sistema a una rampa discreta en cadena cerrada? Justifique la respuesta. Sin realizar ningún cálculo determine asimismo el retardo del sistema.

El sistema es de orden uno (polo en z=1) luego puede seguir a la rampa con un error en régimen permanente constante, siempre que sea estable.

El retardo del sistema es 2 (orden del denominador dos unidades superior al numerador). Esto implica que la salida del sistema (en cadena abierta) presentará al menos dos muestras nulas ante cualquier entrada.

b) Dibuje de forma esquemática el lugar de las raíces directo indicando el centroide y la zona de estabilidad (si la hubiere).



Centroide: $\sigma = \dfrac{\sum Re(p) - \sum Re(z)}{n_p - n_z} = \dfrac{1+\frac{2}{3}-1-0}{3-1} = \dfrac{1}{3}$

Se observa que existe un intevalo de ganancias [0,K_c] donde el sistema es estable (todos los polos se encuentran dentro de la circunferencia unidad).

c) Determine los valores del compensador proporcional que hacen el sistema estable en cadena cerrada (considere la realimentación unitaria y la entrada el escalón unitario).

El polinomio característico en cadena cerrada es

$$p(z) = D(z) + k \cdot N(z) = (z+1)(z-\frac{2}{3})(z-1) + k \cdot z = z^3 - \frac{2}{3}z^2 + (k-1)z + \frac{2}{3}$$

Aplicando Jury se obtiene una ganancia del compensador proporcional para el límite de estabilidad de $k \simeq 1{,}11$

Solución: El sistema será estable para valores $0 < k < 1{,}11$