

7

Sistemas de orden superior

Hasta ahora sólo se ha estudiado la respuesta del régimen transitorio de los sistemas de primer y segundo orden simples. En este capítulo se pretende analizar la evolución temporal de sistemas de orden superior (tercero, cuarto, etc.). El procedimiento para conseguirlo será a través de la adición de los polos y ceros a una FDT simple (de las analizadas en el capítulo anterior). No obstante, hay aspectos teóricos que se han analizado anteriormente y que son aplicables con independencia del grado del sistema. Así, se estableció en el capítulo 5 que la estabilidad de los sistemas LTI depende de la ubicación de los polos de la FDT del conjunto total (también denominado de la cadena cerrada si es realimentado), dentro del dominio de Laplace. Además, también se observó que los polos o raíces del polinomio característico definen la evolución temporal del régimen transitorio.

En este capítulo se tratará de la adición de ceros y polos tanto en la cadena de una arquitectura de realimentación como en el procesamiento en serie o cascada. Se observará que estas adiciones también van a influir notablemente en la estabilidad del sistema y en la evolución temporal de la señal de salida.

Otro aspecto que se abordará será la determinación de los sistemas equivalentes reducidos. Se analizará la búsqueda de un modelo de menor grado de la FDT que aproxime el análisis temporal de los equipos. Para conseguirlo se necesitará introducir el concepto de polos dominantes y de cancelación de polos y ceros.

7.1 Efectos de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia

Cuando se dice que se añade un polo o un cero en la cadena abierta, se está haciendo referencia a que se tiene una estructura de control con realimentación y se añade el efecto de un polo o un cero en la FDT de la planta o en la realimentación, i.e. en $G(s)$ o en $H(s)$. Por eso se dice que es en la cadena abierta, ya que es la adición del efecto del polo o del cero cómo si se abriera el lazo de realimentación, $G(s)H(s)$.

En cambio, si el procesamiento del efecto añadido se hace en cascada o serie con el sistema total, se dice que se ha añadido un cero o un polo al conjunto total. Obsérvese los diagramas de la figura 7.1 para diferenciar en la adición en la cadena abierta y en serie.

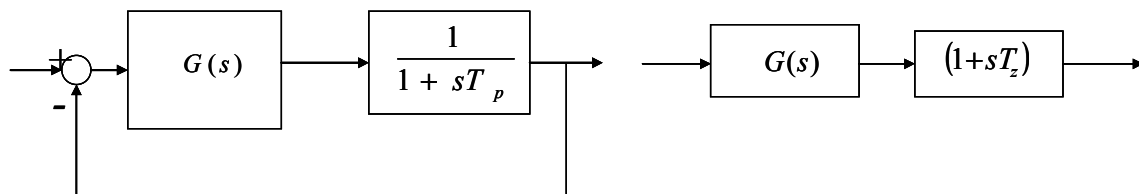


Figura 7. 1. Ejemplos de adición. a) Añadir un polo en la cadena abierta b) Añadir un cero en serie

7.1.1 Adición de un polo en la cadena abierta

La adición de un polo en la cadena abierta tiende a que el sistema en su conjunto sea más lento y pueda perder estabilidad.

Una de las formas para llegar a esta conclusión es a través de las técnicas del lugar de las raíces, LDR (ver capítulo 10). Estas técnicas describen, mediante criterios gráficos, las raíces del polinomio característico, $1 + G(s)H(s) = 0$, a partir de la información de la cadena abierta, $G(s)H(s)$. Los resultados son los polos de la cadena cerrada y por lo tanto definirán la estabilidad y el tipo de respuesta temporal.

Si a un sistema subamortiguado, por ejemplo el indicado en la figura 7.2, se le añade un polo en la cadena abierta, las ramas del LDR (soluciones del conjunto cerrado dependiente de la ganancia estática) se orientan hacia el semiplano positivo. De este efecto se concluye que el sistema se hace más inestable y más lento.

Con el fin de tener un marco de referencia idéntico se va a utilizar la misma planta piloto, facilitando la explicación de los efectos de añadir los polos y ceros, tanto en la cadena abierta como en serie. Se ha elegido un modelo de segundo orden simple y subamortiguado, con una frecuencia natural de 1 [rad/s], un factor de amortiguamiento de 0.5 y una ganancia estática unitaria.

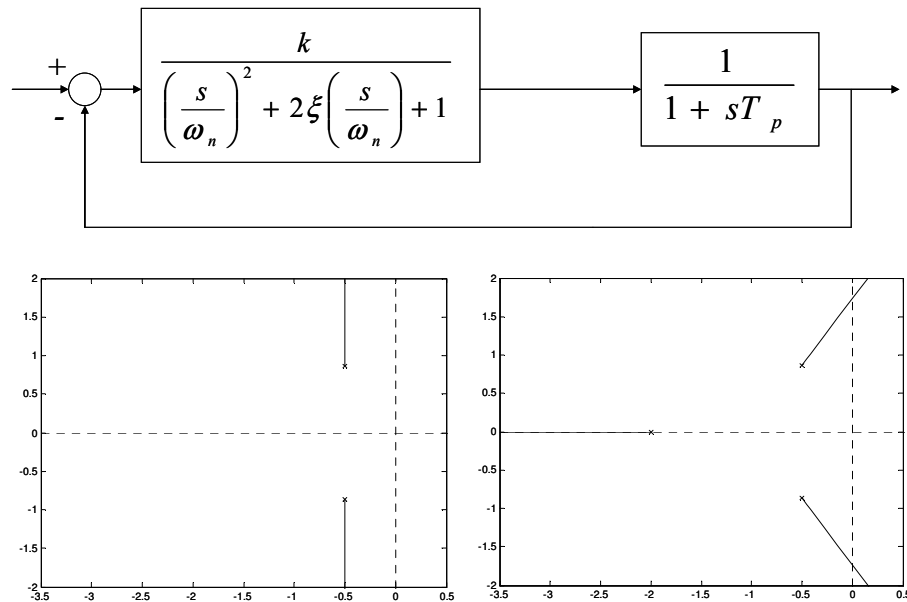


Figura 7. 2. Efecto de añadir un polo en la cadena abierta. a) Diagrama a bloques, b) LDR sin polo y con un polo con una constante de tiempo de 0.5s

Comparando los dos LDR sin y con polo añadido, figura 7.2b, se observa que las ramas dominantes se orientan hacia el *semi-plano* positivo del dominio complejo a medida de que se aumente la ganancia estática, k . Los polos dominantes del sistema con el polo añadido en la cadena abierta se aproximan al eje imaginario, haciéndose más lento su dinámica y perdiendo estabilidad. El efecto supone que el ángulo de apertura de los polos dominantes complejo y conjugado sea creciente con el incremento de k , haciendo que el sistema tenga mayor sobre-oscilación hasta alcanzar la inestabilidad.

En la figura 7.3 se contempla la respuesta ante la entrada en escalón del conjunto realimentado, utilizando la planta referencia ($\omega_n = 1, \xi = 0.5$ y $k = 1$), y variando la constante del polo añadido. Se observa que la evolución más rápida se da cuando no hay polo añadido, $T_p = 0$ s. Por otro lado, mientras el polo añadido esté más alejado del eje imaginario que los polos complejos de la cadena abierta, los polos dominantes serán complejos y conjugados y con mayor sobreoscilación. Si se hace elevada la constante de tiempo del polo añadido, por ejemplo $T_p = 5$ s, la respuesta dominante es vuelve sobre-amortiguada.

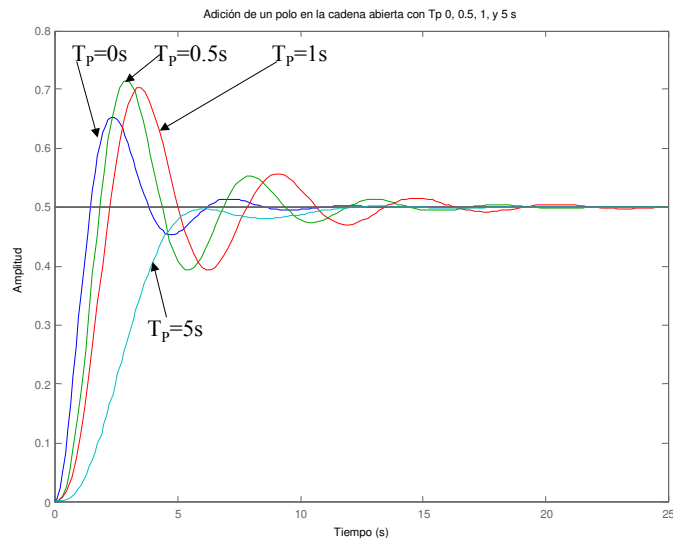


Figura 7. 3. Respuesta al escalón con un polo añadiendo en la cadena abierta

7.1.2 Adición de un polo en serie

Si se añade un polo en cascada, a medida de que aumente su constante de tiempo asociada, T_p , el conjunto total se volverá más lento y sobreamortiguado.

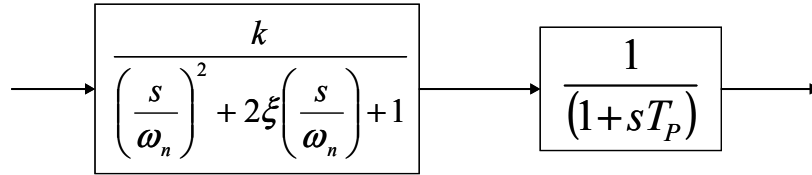


Figura 7. 4. Efecto de añadir un polo en serie

En general, los polos en serie o en cascada hacen que el sistema sea más lento, ya que suponen un filtro paso bajo, atenuando la respuesta del espectro de alta frecuencia. Estas componentes frecuenciales están relacionadas con la rapidez del sistema aunque también con el ruido. Por tanto, el sistema será más lento pero también será más inmune a las perturbaciones.

Empleando la planta referencia ($\omega_n = 1, \xi = 0.5$ y $k=1$) y al añadirle en serie o cascada un polo, se observa que el sistema es más rápido cuando no se le agrega, $T_p=0$. Si la constante de tiempo del polo añadido aumenta, disminuirá la frecuencia de corte del filtro paso bajo, permitiendo sólo el procesamiento del espectro de baja de la frecuencia de la señal. En el análisis temporal significará que tenderá a ser más sobreamortiguado y más lento.

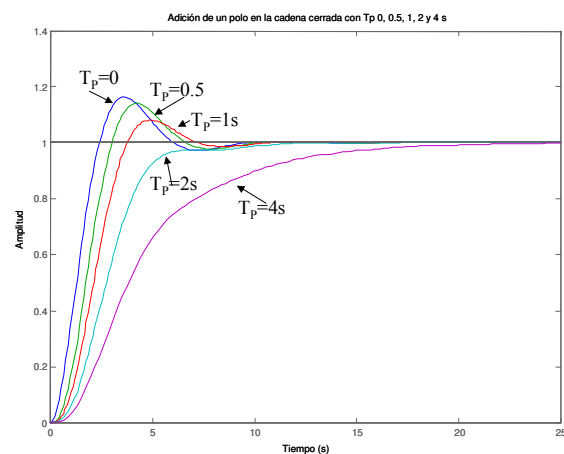
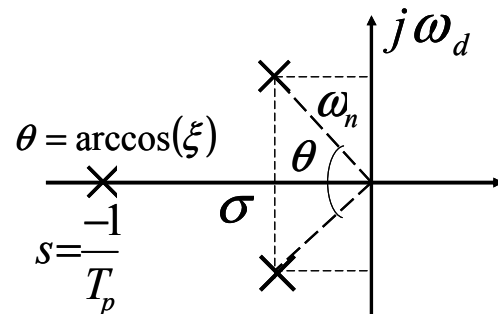


Figura 7. 5. Respuesta al escalón de la planta referencia con un polo añadido en cascada

7.1.3 Adición de un cero en la cadena abierta

Los ceros en la cadena abierta hacen que el sistema se vuelva más estable y más rápido. Este efecto se observa empleando el LDR. Las ramas del LDR son atraídas hacia la ubicación del cero. Luego si el cero está en el semiplano negativo, las ramas se alejarán del semiplano positivo y consecuentemente, el sistema se volverá más estable y también más rápido.

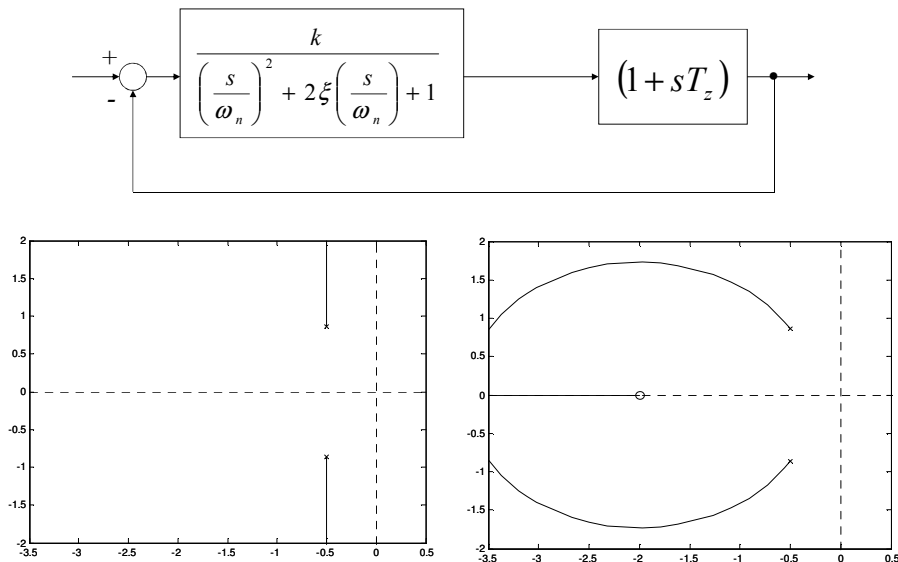


Figura 7. 6. Efecto de añadir un cero en la cadena abierta. a) Diagrama a bloques, b) LDR sin polo y con un cero con una constante de tiempo de 0.5s

No obstante, un aumento desmedido de la constante de tiempo del cero, T_z , provocará un aumento de la sobreoscilación. En la figura 7.6 se le ha añadido un cero en la cadena abierta a la planta de referencia. La salida del sistema sin el cero es más lenta que cuando se le ha añadido un cero con una constante de tiempo de 0.5 s y de 1s. Al aumentar excesivamente la constante de tiempo su comportamiento deja de ser adecuado.

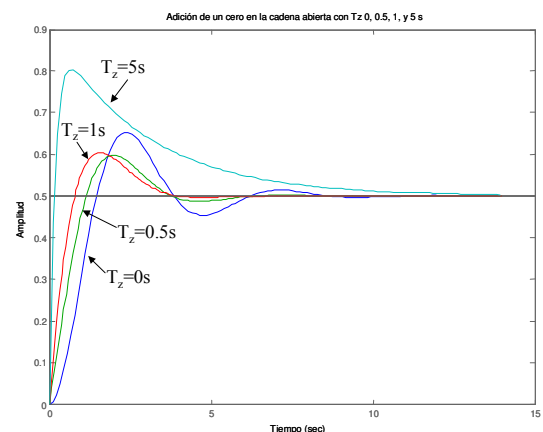


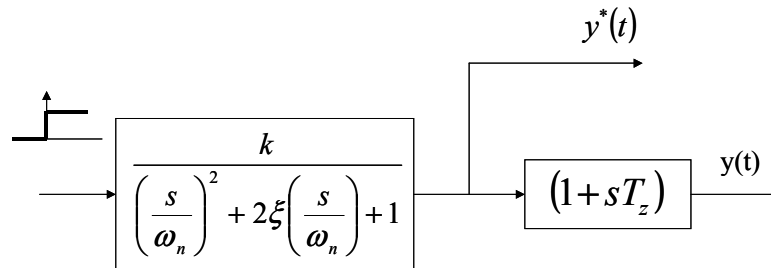
Figura 7. 7. Respuesta al escalón unitario de la planta referencia al que se le ha añadido un cero en la cadena abierta

7.1.4 Adición de un cero en serie

Los ceros en serie tienen una componente predictiva o anticipadora como consecuencia de su efecto derivativo. En el dominio frecuencial, los ceros suponen una amplificación del espectro de la alta frecuencia. Por lo tanto es fácil de entender que ante una excitación, el sistema al que se

le ha agregado el cero, su respuesta tendrá un aumento de la sobreoscilación y una disminución del tiempo de pico.

Para su verificación considérese un sistema de segundo orden al que se le añade un cero de primer orden. Al conjunto se le aplica una entrada en escalón. En la transformada de Laplace permitirá una descomposición en dos fracciones:



$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{k}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} + T_z \frac{s \cdot k}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} \right) \quad (7.1)$$

Si se llama $y^*(t)$ a la respuesta del sistema sin el cero, la salida del conjunto ante una entrada en escalón será:

$$y(t) = y^*(t) + T_z \dot{y}^*(t) \quad (7.2)$$

La respuesta es una combinación lineal entre la respuesta del sistema sin el cero más la derivada de la respuesta. Nótese por el teorema de la diferenciación que s es el operador derivador respecto del tiempo. Suponiendo que el modelo sea el de referencia ($\omega_n=1, \xi=0.5$ y $k=1$), la salida ante una entrada en escalón será dada por la suma de sus dos partes. En la figura 7.8 queda reflejada la respuesta del sistema con el cero añadido en serie. El tiempo de pico disminuye cuando se añade el cero, véase la evolución de $y(t)$ y de $y^*(t)$. También se aprecia el carácter típico de la derivada de una señal, la

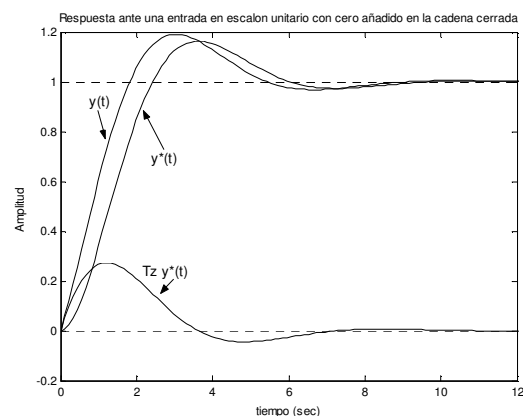


Figura 7. 8. Respuesta de la planta referencia al que se le ha añadido un cero con una constante de tiempo de 0.5s

anticipación. La derivada de la señal de salida sin el cero, ($T_z \dot{y}^*(t)$), es predictiva respecto a ésta, $y^*(t)$.

A la planta referencia se le ha añadido varios ceros en serie, cuyas constantes de tiempo de los ceros se han hecho variar y se le han aplicado una entrada en escalón. En la figura 7.9 se nota que un aumento de la constante de tiempo, por aplicación de la ec. 7.2, supone un incremento de la influencia de la componente derivativa. El conjunto presenta mayor sobreoscilación y una disminución del tiempo de pico.

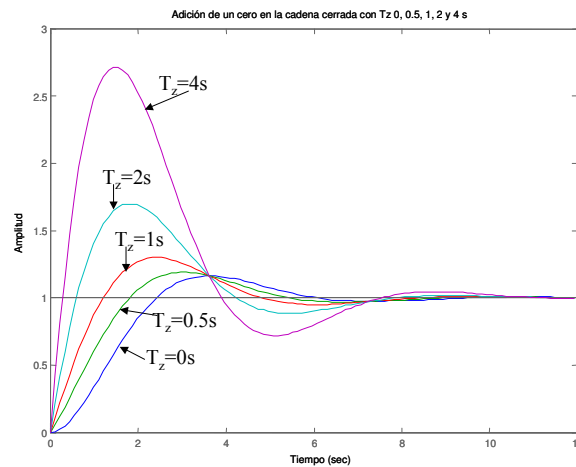


Figura 7. 9 Evolución de la planta con la adicción de un cero en la cadena cerrada

Las gráficas aquí obtenidas de la respuesta de la planta referencia ante la adición de polos y ceros puede conseguirla a través del siguiente código de MATLAB:

```
%Efecto de añadir polos en serie
w = 1; %Frecuencia natural
e= .5; %Factor de amortiguamiento
g1 =tf(w^2,[1 2*e*w w^2]);
step(g1,series(g1,tf(1,[.5 1])),series(g1,tf(1,[1 1])),...
    series(g1,tf(1,[2 1])),series(g1,tf(1,[4 1])));
title('Adición de un polo en serie con Tp 0, 0.5, 1, 2 y 4 s');
pause;
%Efecto de añadir polo en la cadena abierta
step(feedback(g1,1),feedback(series(g1,tf(1,[.5 1])),1),...
    feedback(series(g1,tf(1,[1 1])),1),feedback(series(g1,tf(1,[5 1])),1));
title('Adicion de un polo en la cadena abierta con Tp 0, 0.5, 1, y 5 s');
pause;
%Efecto de añadir ceros en serie
step(g1,series(g1,tf([.5 1],1)),series(g1,tf([1 1],1)),...
    series(g1,tf([2 1],1)),series(g1,tf([4 1],1)));
title('Adicion de un cero en serie con Tz 0, 0.5, 1, 2 y 4 s');
pause;
%Efecto de añadir uncero en la cadena abierta
step(feedback(g1,1),feedback(series(g1,tf([.5 1],1)),1),...
    feedback(series(g1,tf([1 1],1)),1),feedback(series(g1,tf([5 1],1)),1));
title('Adicion de un cero en la cadena abierta con Tz 0, 0.5, 1, y 5 s');
pause;
```

7.2 Sistema equivalente reducido

Los modelos de las plantas, en la práctica, suelen superar a los sistemas de segundo orden. Sin embargo, la influencia de los polos de la cadena cerrada no son todos de igual importancia. Aquellos que están más cerca del semiplano positivo son más lentos en su evolución temporal que otros orientados hacia el $-\infty$ del semiplano negativo.

A los polos más próximos al semiplano positivo se les llama dominantes y a los otros polos no significativos.

La regla práctica de clasificación de unos sobre otros depende de si el polo dominante es complejo conjugado o de primer orden. Si es complejo conjugado debe de haber una distancia sobre el eje real de 5 a 10 veces el valor de la constante de amortiguamiento, entre el polo dominante y el resto de los polos. Para los polos dominantes de primer orden, el valor de la constante del polo dominante debe de ser al menos 5 a 10 veces mayor que el de los polos no significativos.

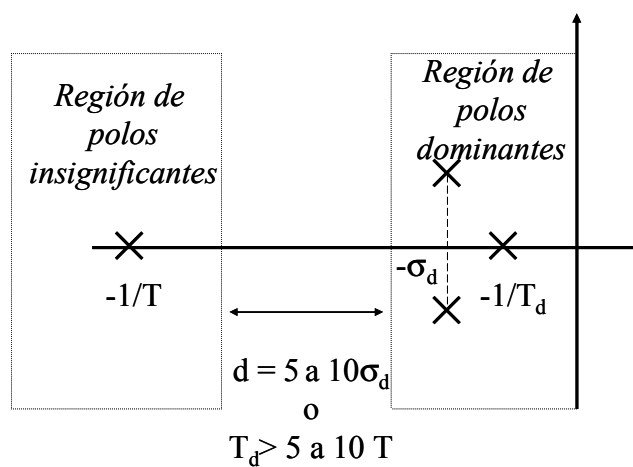


Figura 7. 10. Reglas para la determinación de la región de los polos dominantes

La reducción del orden del sistema simplifica tanto la fase de análisis como de diseño. En la práctica se suele emplear las características dinámicas de los sistemas de primer o de segundo orden para definir los requisitos de diseño, aunque el sistema sea de mayor orden. Desde luego no tiene sentido hablar del coeficiente de amortiguamiento o de la frecuencia natural de un sistema si es de tercer, cuarto o de orden superior.

El comportamiento de los sistemas de orden elevado puede aproximarse por otro equivalente de segundo o primer orden. La respuesta del equivalente no es idéntica, no tiene tantos matices, pero se aproxima y se hace factible poder aplicar reglas sencillas tanto para la predicción de su comportamiento como para el diseño.

Hay dos formas de reducir el orden de un sistema:

1. Por aplicación de la teoría de polos dominantes. Los polos ubicados en la región de polos no significativos pueden ser eliminados.
2. Mediante la cancelación entre el efecto de un polo y un cero próximo entre sí.

Una vez reducido el grado del polinomio característico se ajustará la ganancia para que el comportamiento en el régimen permanente sea idéntico. Esta condición requiere que las ganancias sean idénticas, tanto la del equivalente reducido como la del modelo de la planta. Con este propósito se aplicará el teorema del valor final en la señal de salida y en la correspondiente salida del equivalente reducido. Ambas deberán ser idénticas, esto es, se iguala la respuesta del régimen permanente:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_{eq}(s) \quad (7.3)$$

Ejemplo 7.1

Dibujar la respuesta aproximada al escalón unitario de estos dos sistemas

$$\text{a) } G_1(s) = \frac{3(s+5)}{(s^2 + 2s + 5)(s+3)}$$

$$\text{b) } G_2(s) = \frac{30(s+1)}{(s+0.1)(s^2 + 20s + 15)}$$

a) Para el primer caso, la planta está constituido por un polo complejo y conjugado, $s_{1,2} = -1 \pm j2$, y por un polo de primer orden, $s_3 = -3$. No están separados a una distancia de 5 veces la constante de amortiguamiento del polo dominante. Sin embargo, el efecto del polo de primer orden y del cero se puede cancelar. Si se hace la reducción, habrá diferencias entre la respuesta de la planta y la de su equivalente, debido a la discrepancia de constantes de tiempo entre el polo y el cero a cancelar.

El equivalente reducido estará determinado por el polo complejo conjugado y por una ganancia k^* que mantenga la misma respuesta en el régimen permanente:

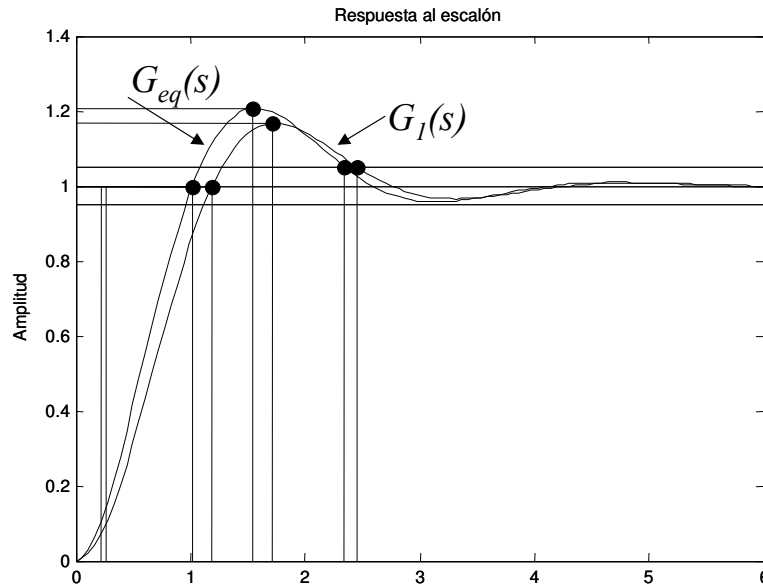
$$G_{eq}(s) \approx \frac{3k^*}{s^2 + 2s + 5} \Rightarrow Y_{eq}(0) = \frac{3 \cdot k^*}{5} = Y_1(0) = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = 1 \Rightarrow G_{eq}(s) \approx \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

El equivalente reducido es un sistema de segundo orden simple, luego será posible calcular sus valores característicos de la evolución temporal:

$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} = \pi \quad t_p = \frac{\pi}{2} = 1.57s \quad M_p = e^{-\pi/\zeta} = 0.2079 \Leftrightarrow 20.79\%$$

$$\vartheta = \arctg 2 = 1.1rad \quad t_r = \frac{\pi - \vartheta}{2} = 1s$$

Los resultados de la simulación en MATLAB hacen notar que las discrepancias son aceptables:



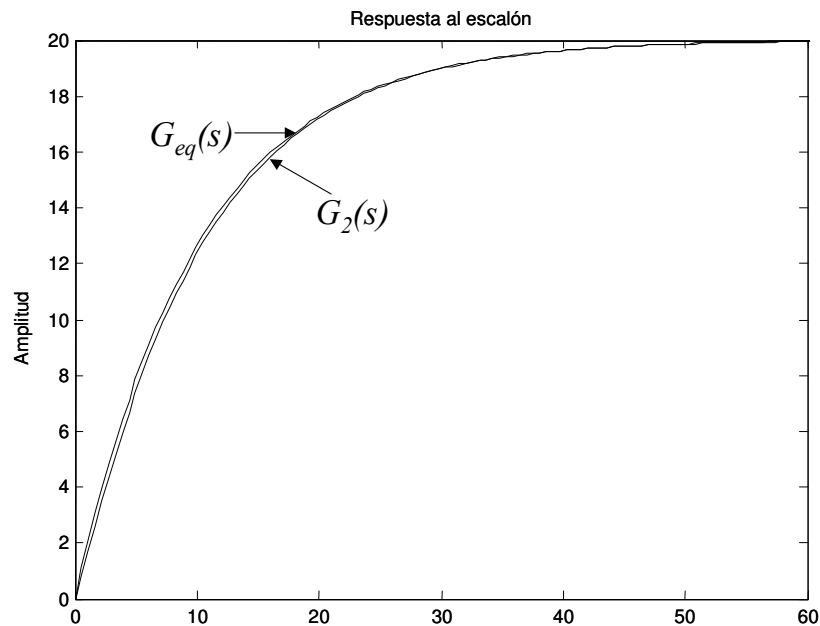
b) El segundo caso también se trata de un sistema de tercer orden. Al descomponerlo en polos y ceros la FDT, se observa que el efecto del cero se puede compensar con el polo de constante de tiempo 1/0.78s:

$$G_2(s) = \frac{30(s+1)}{(s+0.1)(s^2+20s+15)} = \frac{30(s+1)}{(s+0.1)(s+19.22)(s+0.78)}$$

El resultado de esta reduciendo puede ser simplificado al analizar la ubicación del polo -19.22 respecto de -0.1 . Hay suficiente distancia como para aplicar el concepto de polo dominante. Igualando las respuestas en el régimen permanente se tendrá el equivalente reducido:

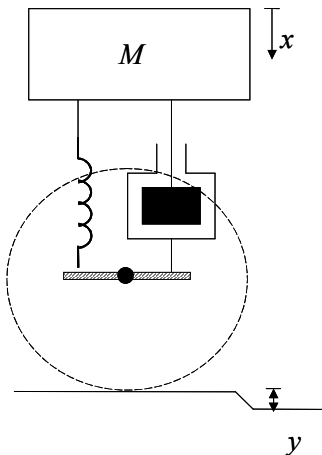
$$G_{eq}(s) = \frac{k}{s+0.1} \Rightarrow Y_{eq}(0) = \frac{k}{0.1} = \frac{30}{0.1 \cdot 19.22 \cdot 0.78} = 20 \Rightarrow G_{eq} = \frac{20}{s+0.1}$$

La respuesta ante una entrada en escalón se corresponderá a un sistema de primer orden, con ganancia 20 y con un tiempo de establecimiento de 30s. La simulación muestra que no hay casi diferencias entre la planta y su equivalente reducido.



7.3 Problemas

Problema 1



En la figura se muestra un modelo de suspensión de vehículos de tracción. Haciendo suposiciones de simplificación y de reparto del peso del coche sobre las cuatro ruedas. Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del modelo simplificado.
2. Función de transferencia entre el desnivel del pavimento (causa), $Y(s)$, con el desplazamiento del chasis (efecto), $X(s)$.
3. Obtener el equivalente reducido.
4. Empleando el modelo del apartado anterior, determinar la dinámica del chasis ante una variación del asfalto de 10 cm.
5. Deducir si la respuesta del equivalente reducido es más lenta o rápida que la del propio modelo.

Datos

El peso del vehículo es de una tonelada y las características del amortiguador están dadas por $B = 500 \text{ Ns/m}$ y $K = 1000 \text{ N/m}$.

1. El modelo simplificado de suspensión del coche es:

$$M\ddot{x} = M\ddot{y} + K(x(t) - y(t)) + B(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

$$f_n(t) = K(x(t) - y(t)) + B(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

2. El conjunto de ecuaciones requiere variaciones alrededor del punto de reposo. Su FDT es:

$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta y(s)} = \frac{K + Bs}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1 + 0.5s}{1 + 0.5s + 0.25s^2}$$

3. El equivalente reducido será eliminado el cero de la cadena cerrada:

$$\Delta M_{eq}(s) = \frac{1}{1 + 0.5s + 0.25s^2}$$

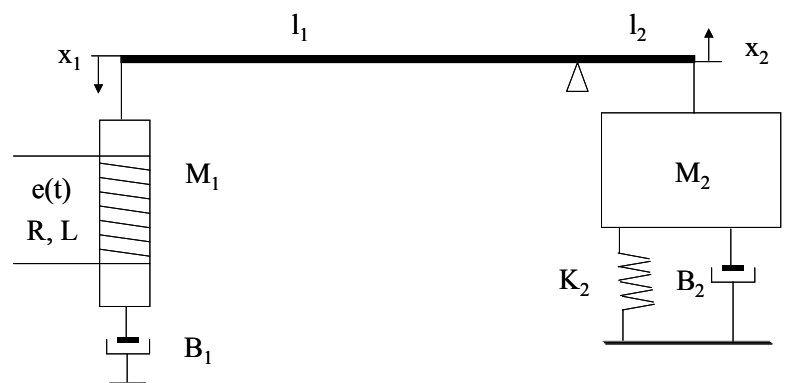
4. Determinado la frecuencia natural del equivalente y el coeficiente de amortiguamiento se determinará los valores característicos de la respuesta al escalón:

$$t_s = 3.14s \quad t_p = 1.81s \quad M_p = 16.67\% \quad t_r = 1.21s$$

5. La respuesta del modelo tendrá mayor sobreoscilación y el tiempo de pico disminuirá respecto al del equivalente reducido por añadir un cero en la cadena cerrada.

Problema 2

La figura muestra el modelo simplificado de un telégrafo. Ante la recepción de un pulso eléctrico se produce una fuerza magnética proporcional a la corriente de su bobina, originando un desplazamiento en la palanca que provoca el movimiento de la masa del martillo, el cual choca contra una campana, produciendo una onda sonora. Sabiendo que la FDT es:



$$\frac{\Delta x_2(s)}{\Delta e(s)} = \frac{k_p}{(R + sL) \left(\left(M_1 \frac{l_1}{l_2} + M_2 \frac{l_2}{l_1} \right) s^2 + \left(B_1 \frac{l_1}{l_2} + B_2 \frac{l_2}{l_1} \right) s + k_2 \frac{l_2}{l_1} \right)}$$

1. Determinar la evolución de $x_2(t)$ ante una entrada en escalón de un voltio. Empléese un modelo equivalente simplificado.
2. Respuesta de la salida ante un impulso en la entrada.

Datos

Bobina: $L = 1 \text{ mH}$, $R = 10 \text{ } \Omega$, $k_p = 0.4 \text{ N/A}$, $M_1 = 1 \text{ g}$, $B_1 = 0.01 \text{ Ns/m}$.

Palanca: $l_1 = 8 \text{ cm}$, $l_2 = 2 \text{ cm}$.

Martillo: $M_2 = 10 \text{ g}$, $B_2 = 0.8 \text{ Ns/m}$, $K_2 = 16 \text{ N/m}$.

Problema 3

Para la traslación horizontal de una cámara de vídeo pan-tilt se ha utilizado una cinta transportadora. En el control se ha utilizado un motor de continua y una reductora. Se pide:



- 1) Diagrama de bloques del sistema
- 2) FDT entre la velocidad de desplazamiento del carro y la tensión en el motor.
- 3) Si se le aplica una tensión de 10V al motor, determinar la evolución de la velocidad del carro, tanto gráficamente como analíticamente (aplíquese equivalente reducido).
- 4) Con la señal recibida del anterior apartado, ¿Cuánto se habrá desplazado, aproximadamente, la cámara después de cinco segundos?

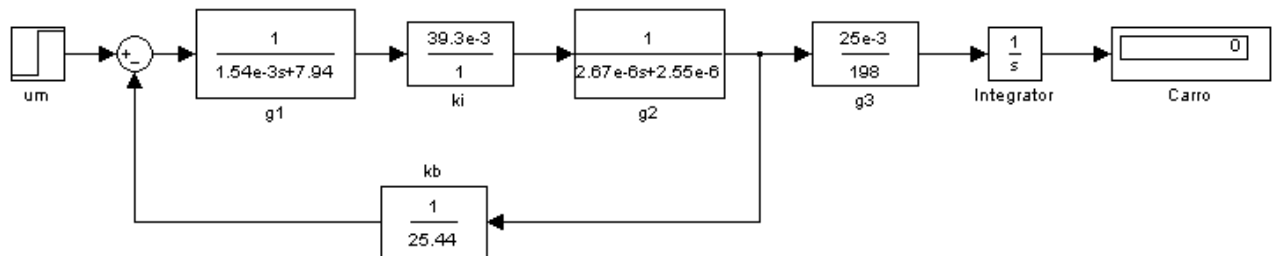
Datos:

Motor: Resistencia de armadura = $7.94 \text{ } \Omega$, Inductancia equivalente del flujo disperso = 1.54 mH , Constante del par motor = 39.3 mNm/A. , Constante de la fuerza contraelectromotriz $\Rightarrow 243 \text{ rpm/V}$, Momento de inercia del rotor = 26.6 gr cm^2

Tren de engranajes: relación de transmisión = 1:198

Cinta transportadora: Radio de las poleas = 25 mm, Peso de la cámara= 1200 gr. Rozamiento viscoso equivalente de las poleas = 10^{-1} N.m.s/rad.

1.



2. La FDT entre la velocidad de desplazamiento del carro con la tensión del motor es:

$$\frac{\dot{x}(s)}{u_m(s)} = \frac{4.96 \cdot 10^{-6}}{4.96 \cdot 10^{-9} \cdot s^2 + 2.11 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1.56 \cdot 10^{-3}} = \frac{1211.33}{(s + 5082)(s + 75.17)}$$

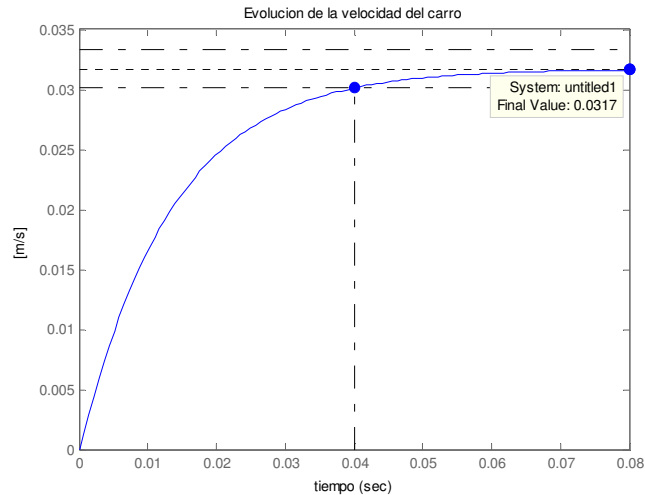
3. El equivalente reducido queda:

$$\frac{\dot{x}(s)}{u_m(s)} \approx \frac{0.238}{(s + 75.17)}$$

Ante una entrada de 10V, la velocidad de desplazamiento de carro sigue la expresión analítica de:

$$\dot{x}(t) = 0.0317(1 - e^{-75.17t})$$

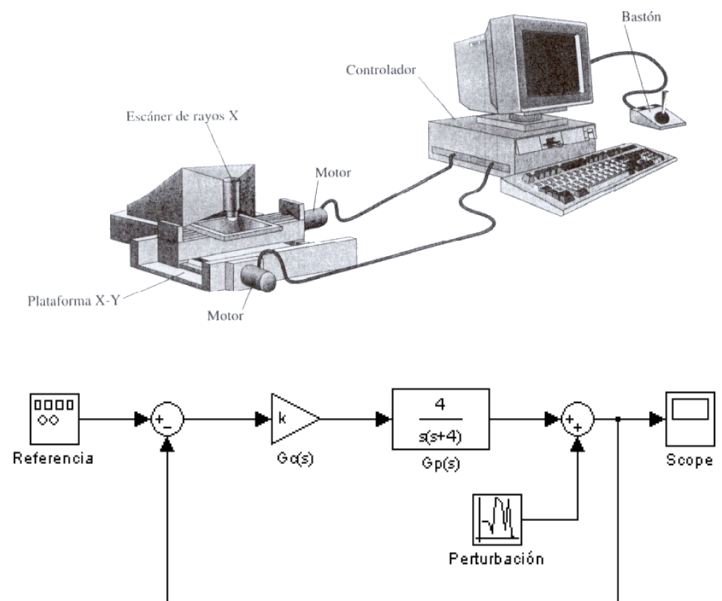
Y la evolución de la velocidad del carro con el tiempo será:



4. Como se ve en la gráfica, la velocidad del carro alcanza el régimen permanente en 40 ms, por tanto, la velocidad es prácticamente constante y el espacio recorrido en 5 segundos será $0.0317 \text{ [m/s]} \times 5 \text{ [s]} = 0.1585 \text{ [m]}$.

Problema 4

Se utiliza un dispositivo de rastreo digital de rayos X para inspeccionar tarjetas de circuitos impresos, montados en una plataforma X-Y accionada por un tornillo, como se muestra en la figura a). La posición de la plataforma o referencia es calculada por un computador. La figura b) muestra el diagrama de bloques del control proporcional ($G_c(s)=K$) de uno de los ejes de la plataforma. $G_p(s)$ representa la dinámica del motor y la plataforma. Para el sistema realimentado de la figura b), caracterizar la evolución temporal de la salida ante una perturbación de escalón unitario (puede considerarse un equivalente reducido). El regulador es de ganancia unitario.



La FDT entre la salida y la perturbación será:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{s(s+4)}{(s+2)^2}$$

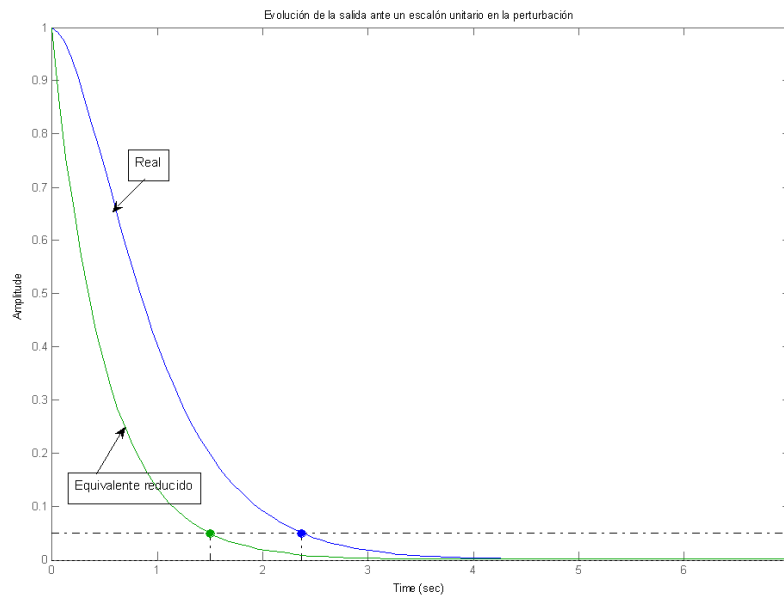
Por las proximidades entre el cero de -4 y el polo doble de -2 se podría obtener un equivalente reducido:

$$G_{Peq}(s) \cong \frac{s}{(s+2)}$$

Ante una entrada en escalón unitario de la perturbación, la evolución de la salida corresponderá a:

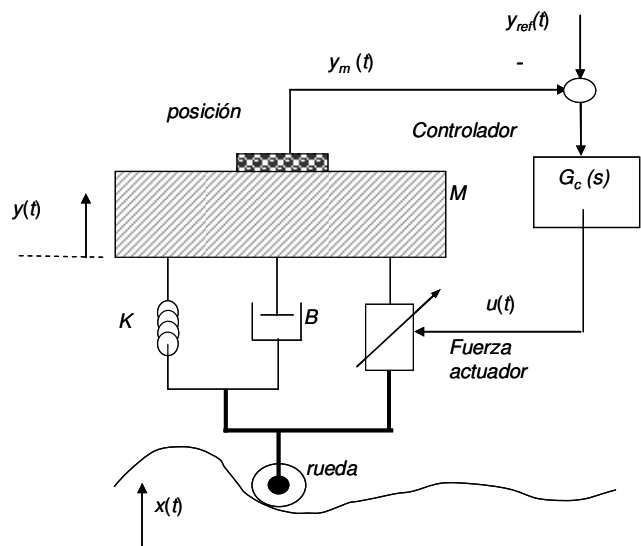
$$y(t) = e^{-2t}$$

Simulación entre la respuesta real y la obtenida por el equivalente reducido:



Problema 5

En la figura se muestra un sistema de suspensión activa para un vehículo. En paralelo con el clásico amortiguador pasivo (con constante equivalente K , B), el sistema activo utiliza un actuador hidroneumático, controlado a partir de la medida captada por la posición de la cabina. La fuerza del actuador es proporcional, k_a , a la tensión recibida en la electroválvula, $u(t)$. La señal mostrada de posición, y_m , sigue con ganancia k_m al movimiento vertical de vehículo. El compensador es de tipo proporcional, k_c . Se pide:



1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del sistema de control.

2. Diagrama a bloques del sistema linealizado alrededor del punto de reposo.

3. Calcular la FDT $\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}$, cuando la señal de mando es nula $\Delta y_{ref}(t) = 0$ y el compensador es unitario.

4. Evolución temporal aproximada de la salida del apartado anterior ante un escalón unitario como excitación.

5. Evaluar las mejoras de la suspensión activa respecto al sistema clásico: excitar la entrada con un escalón unitario y ver la evolución temporal con la suspensión clásica y comparar los resultados con el apartado anterior.

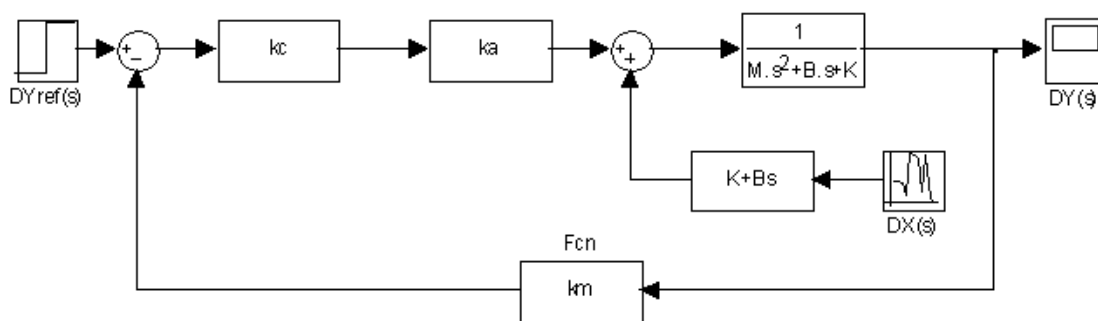
Datos

$M = 250 \text{ kg}$, $B = 500 \text{ Ns/m}$, $K = 1000 \text{ N/m}$, $k_a = 100 \text{ N/V}$, $k_m = 10 \text{ V/m}$, $k_c = 1$

La suspensión activa queda definida por el siguiente conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales:

$$\begin{aligned} e(t) &= y_{ref}(t) - y_m(t) & u(t) &= k_c \cdot e(t) & f(t) &= k_a \cdot u(t) \\ Mg + f(t) &= M\ddot{y}(t) + K(y(t) - x(t)) + B(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) \\ y_m(t) &= k_m y(t) \end{aligned}$$

El diagrama a bloques incremental del modelo estará definido por:



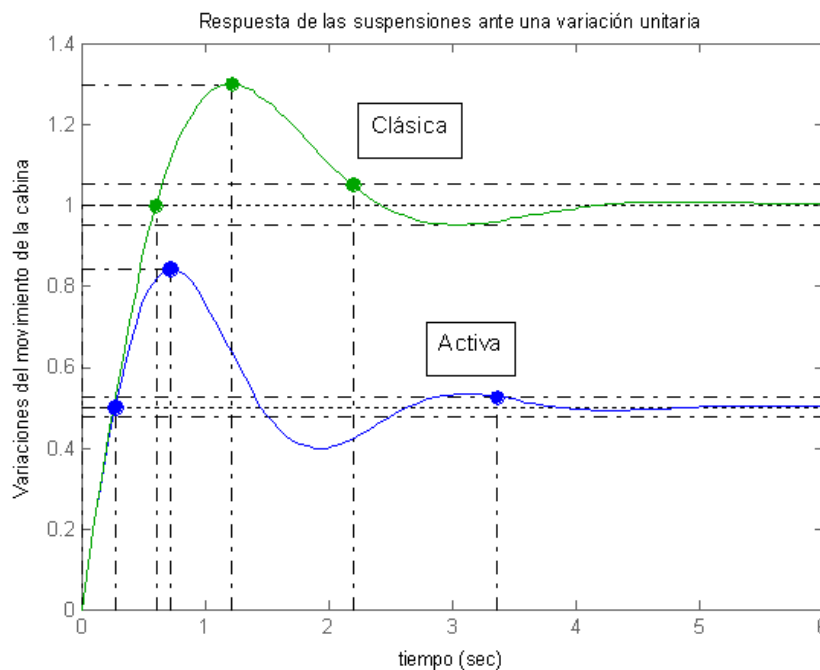
Lo normal es que la señal de referencia sea nula, esto es, preservando la posición inicial de la cabina. La FDT entre las variaciones en camino, Δx , y las variaciones de la cabina, Δy será:

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} = \frac{1000 + 500 \cdot s}{250 \cdot s^2 + 500 \cdot s + 2000}$$

La FDT sin suspensión activa es igual a:

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} = \frac{1000 + 500 \cdot s}{250 \cdot s^2 + 500 \cdot s + 1000}$$

Las diferencias entre el método clásico y el activo quedan reflejadas ante una variación en escalón unitario. Mientras que en el sistema de suspensión clásica, la cabina sigue las irregularidades del camino, no sucede lo mismo con la suspensión activa. Obsérvese que si se variase el compensador, la fuerza activa podría mantener la cabina, al cabo de un cierto tiempo, en posición de reposo.



Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU". La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](#) para [contenidos abiertos](#). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>