

# 10 Análisis dinámico.

## Técnicas del lugar de Raíces (LDR)

La respuesta del régimen transitorio de un sistema de control en cadena cerrada, tipo SISO-LTI, depende de la ubicación de los polos del lazo cerrado. Por dicho motivo y con el propósito de conocer los polos de la cadena cerrada, sin calcularlo analíticamente, se presenta una técnica gráfica que exhibe su colocación en el dominio de Laplace, a partir de la información de la cadena abierta. Debe de quedar claro, desde el principio, que esta metodología sólo se puede aplicar para estructuras de realimentación negativa. Su importancia actual no es tanta por evitar la carga matemática de calcular las raíces del polinomio característico, como el de ajustar el punto de funcionamiento de estos sistemas mediante la variación de algún parámetro intrínseco, en general, la ganancia estática. Por tanto, la técnica del lugar de raíces muestra las infinitas soluciones del polinomio característico de la cadena cerrada,  $1+G(s)H(s)$ , a través de una representación gráfica en el dominio complejo, empleando sólo la información de los polos y ceros de la cadena abierta.

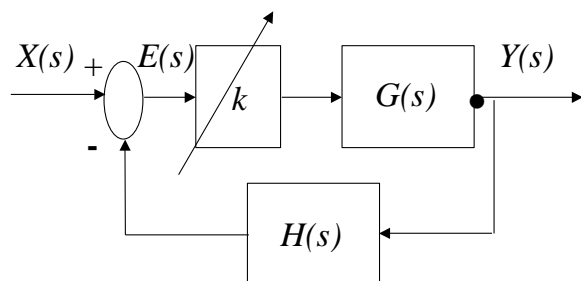


Figura 10. 1. Esquema de aplicación del LDR

Como se acaba de comentar, la peculiaridad de este análisis no está en

la resolución gráfica de los polos de la cadena cerrada, sin necesidad de cálculo; la gran ventaja que ofrece es visualizar cómo se modifica el comportamiento dinámico del lazo cerrado, al realizar una variación de algún parámetro intrínseco de la planta.

El método del lugar de las raíces, LDR, consiste en un conjunto de reglas mediante las cuales se puede determinar la posición de los polos de la cadena cerrada, cuando varía uno o varios parámetros del sistema. Normalmente el parámetro es único y suele ser la ganancia estática de la cadena abierta,  $k$ .

La representación gráfica da una idea sobre la estabilidad y la naturaleza de la repuesta transitoria al variar  $k$ . Estrictamente hablando se suele denominar como lugar directo de las raíces, al trazado del LDR variando la ganancia en valores positivos,  $k \geq 0$ , y se llama lugar inverso cuando la variación de la ganancia es negativa,  $k \leq 0$ . Si lo que se varía es una constante de tiempo asociado a un polo o un cero de la cadena abierta se llama el contorno de las raíces. En este temario sólo se expondrá la variación de la ganancia. Para un estudio sobre el contorno de las raíces habrá de recurrir a la bibliografía recomendada.

## 10.1 Ecuación básica del Lugar de las Raíces

Las soluciones o raíces del polinomio característico de una estructura de realimentación negativa se obtienen igualando el polinomio del denominador a cero:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Los polos de la cadena cerrada estarán definidos por:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 0 \\ G(s)H(s) &= -1 \end{aligned}$$

Dado que  $G(s)H(s)$  es una expresión compleja, ésta se puede dividir en dos ecuaciones, la primera correspondiente al módulo y la segunda la relacionada con el argumento:

$$\begin{aligned} |G(s)H(s)| &= 1 \\ \arg(G(s)H(s)) &= \pi(2q + 1) \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (10.1)$$

Los valores del dominio complejo,  $s$ , que cumplan ambas ecuaciones serán los polos de la cadena cerrada de esa estructura. El criterio del argumento señalará la pertenencia de los polos como raíces del polinomio característico, mientras la condición de módulo devolverá el valor del parámetro intrínseco.

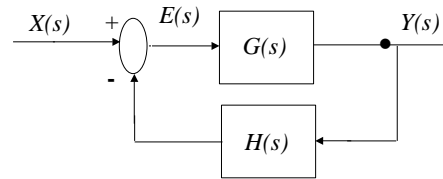


Figura 10. 2. LDR aplicable a estructuras de realimentación negativa

Empleando el ejemplo genérico de la figura 10.3 se pretenderá primeramente determinar si dado un punto  $s$  arbitrario pertenece o no al LDR. Por tanto, se aplicará el criterio del argumento:

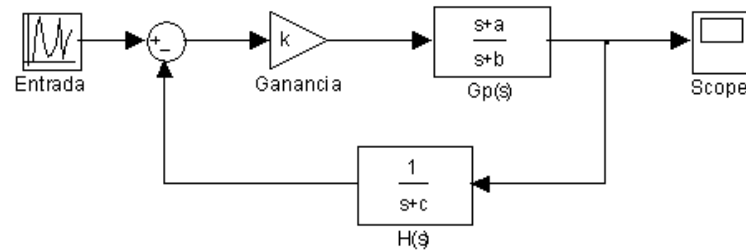
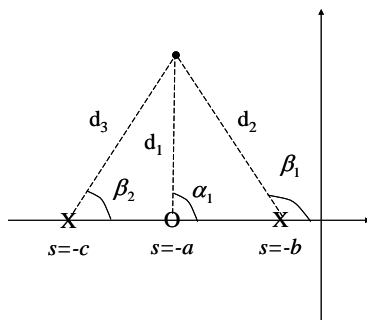


Figura 10. 3. Ejemplo de aplicación del LDR

$$\arg(G(s)H(s)) = \alpha_1 - (\beta_1 + \beta_2) \angle = \pm 180(2q+1) \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10. 2)$$



Si la igualdad es cierta, el punto arbitrario  $s$  es solución del polinomio característico. En caso contrario, no será un polo de la cadena cerrada. El criterio del módulo determinará el valor de  $k$  para este punto que pertenece al LDR. Empleando el cálculo de los módulos, los cuales coincide con la distancia euclídea entre los polos y ceros de la cadena abierta con el polo de la cadena cerrada seleccionado, se fijará el nivel de  $k$ :

$$k \frac{|s_p + a|}{|s_p + b||s_p + c|} = 1$$

$$k = \frac{|s_p + b||s_p + c|}{|s_p + a|} = \frac{d_2 \cdot d_3}{d_1}$$

Afortunadamente, el trazado del lugar de las raíces no requiere de la búsqueda exhaustiva de puntos en el dominio complejo, sino que sigue una serie de reglas.

## 10.2 Reglas para el trazado directo del lugar de las raíces

---

Empleando los criterios del módulo y el argumento existen unas reglas que permiten una construcción manual, de manera aproximada, del lugar de las raíces.

Se enuncian las reglas para el trazado directo, i.e. cuando se varía  $k$  desde 0 hasta  $+\infty$ . Estas variaciones de la ganancia producen que los polos de la cadena cerrada también se modifiquen, describiendo unas curvas a las que se denominan ramas.

### **Regla 1: Número de ramas**

El número de ramas del LDR es igual al número de polos de la cadena abierta.

### **Regla 2: Puntos de inicio y final**

Cada rama del LDR comienza en un polo de la cadena abierta, para el cual corresponde con  $k=0$ , y termina en un cero de la misma, correspondiente a  $k=\infty$ . Si el número de ceros es inferior al de polos, existirán un número de ceros en el infinito complejo igual a la diferencia entre los polos y ceros en cadena abierta.

### **Regla 3: Lugar de las raíces que están en el eje real**

Un punto situado sobre el eje real pertenecerá al LDR, si el número de polos y ceros contados desde la derecha hacia la izquierda, esto es, desde los positivos reales hacia los negativos reales del dominio complejo, es un número impar de ellos.

### **Regla 4: Simetría**

El LDR es simétrico respecto del eje real.

### **Regla 5: Ángulos de las asíntotas**

Las ramas del LDR que terminan en el infinito complejo son asíntotas a rectas cuyos ángulos con el eje real vienen dados por la expresión:

$$\vartheta_a = \frac{(2q+1) \cdot \pi}{n-m} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.3)$$

siendo  $n$  el número de polos de la cadena abierta y  $m$  el número de ceros en cadena abierta:

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (10.4)$$

$$n = \text{grado}(D(s))$$

$$m = \text{grado}(N(s))$$

### **Regla 6: Centroide de las asíntotas**

Las asíntotas, las provenientes de la anterior regla, cortan al eje real en un punto situado a una distancia  $\sigma_a$  del origen, dado por:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{partes reales polos } GH(s) - \sum \text{partes reales ceros } GH(s)}{n - m} \quad (10.5)$$

### **Regla 7: Ángulos de salida y de llegada para raíces complejas conjugadas**

Los ángulos de salida de los polos complejos de la cadena abierta forman una tangente a la correspondiente rama del LDR respecto al eje real que habrá de aplicar el criterio del argumento:

$$\arg(G(s)H(s)) = (2q+1)\pi \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.6)$$

De igual manera son calculados los ángulos de llegada para los ceros complejos y conjugados de la cadena abierta. Sus ángulos son determinados por el criterio del argumento. Concluyendo, cuando el sistema tiene polos o ceros complejos en cadena abierta, las ramas del LDR salen o llegan, según el caso de polos o ceros respectivamente, con un ángulo calculable a partir del criterio del argumento.

### **Regla 8: Puntos de dispersión y confluencia**

Cuando las ramas abandonan el eje real o confluyen en él, lo hacen en un punto de dispersión o de confluencia respectivamente. Si el lugar en el eje real está limitado por un polo y un cero de la cadena abierta, no existirá punto de dispersión o confluencia, ya que la rama empieza en el polo y acaba en el cero. En el caso de coincidir sobre el eje real dos polos próximos entre sí o dos ceros, uno al lado del otro, darán una situación de dispersión o confluencia, respectivamente, sobre el eje real. Estos puntos se calculan a través de dos métodos. En el primer método se trata de despejar  $k$ , derivar la expresión respecto de  $s$  e igualar a cero, calculando las raíces. Supóngase que el polinomio característico pueda ser expresado como una combinación de dos términos,  $A(s)$  y  $B(s)$ :

$$1 + G(s)H(s) = B(s) + kA(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-B(s)}{A(s)}$$

Los puntos de dispersión y confluencia serán las raíces de la derivada de  $k$  respecto a  $s$  igualado a cero:

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0$$

Esta condición es necesaria pero no suficiente. No todas las soluciones de esta expresión corresponden con puntos de dispersión o confluencia. Serán valores válidos, aquellas raíces que además sean soluciones del polinomio característico. Este método para polinomios superiores a segundo orden requiere de métodos numéricos.

Para polinomios característicos mayores al tercer orden un segundo método iterativo se plantea. La alternativa es la siguiente ecuación:

$$\sum_i \frac{1}{s + p_i} = \sum_j \frac{1}{s + z_j} \quad (10. 7)$$

La forma de actuar para expresiones superiores al segundo orden consiste en suponer un valor inicial,  $s_0$ , de dispersión o confluencia y sustituirlo en la ecuación anterior  $s$  por  $s_0$  en todos los sumandos excepto a los polos o ceros que limiten la zona del eje real donde se localice el punto de confluencia o dispersión. A continuación se resolverá la ecuación de 2º grado resultante. Si la solución obtenida se aproxima lo suficiente al valor de la semilla,  $s_0$ , se tomará como bueno. Si no se volverá a repetir el proceso con el nuevo valor obtenido. Para el caso de raíces complejas conjugadas,

$$s = -\alpha \pm j\beta, \text{ el término se pondrá de la forma: } \frac{2(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

### **Regla 9: Intersección del LDR con el eje imaginario**

Los puntos de corte del LDR con el eje imaginario corresponden a polos que hacen al sistema críticamente estable, lo que implica la aparición de una fila de ceros en la tabla de Routh.

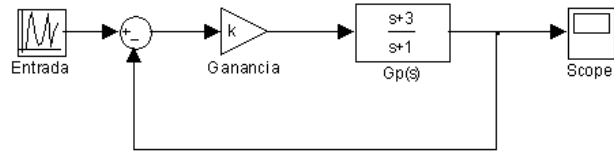
### **Regla 10: Valor de $k$**

El valor de  $k$  para un punto cualquiera,  $s$ , del LDR puede calcularse aplicando el criterio del módulo:

$$1 + kG(s)H(s) = 0 \quad k = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{\prod_{i=1}^n |s + p_i|}{\prod_{j=1}^m |s + z_j|} \quad (10. 8)$$

**Ejemplo 10.1**

Trazado directo del LDR del siguiente sistema de control:

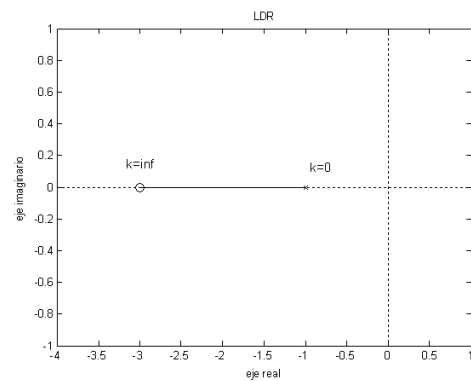


R1: Número de ramas 1

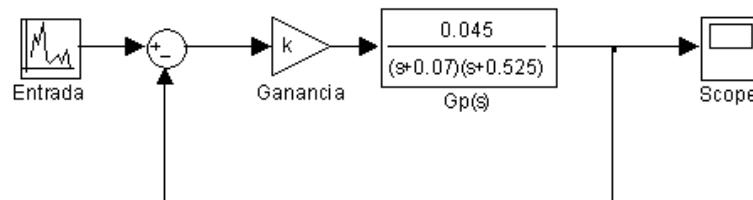
R2:  $k=0 \quad s=-1$

$k=+\infty \quad s=-3$

R3: Ramas en el eje real

**Ejemplo 10.2**

Calcular el trazado directo LDR del equipo Peltier sometido a una realimentación unitaria



R1: Número de ramas 2.

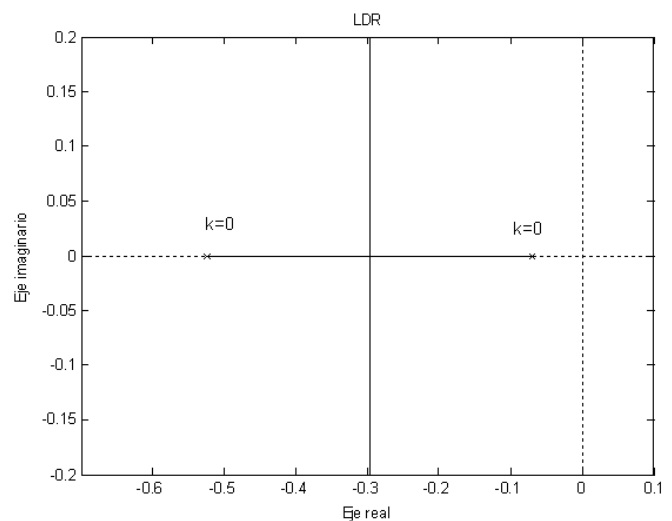
R2:  $k=0 \quad s=-0.07$ .

$k=0 \quad s=-0.525$ .

R3: LDR en el eje real entre -0.07 y -0.525.

R4: Simetría respecto al eje real.

R5:  $\vartheta_a = \frac{(2q+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$



$$R6: \sigma_d = \frac{-0.07 - 0.525}{2} = -0.2975$$

R8: Punto dispersión

$$\frac{1}{\sigma_d + 0.525} + \frac{1}{\sigma_d + 0.07} = 0 \rightarrow \frac{(\sigma_d + 0.07) + (\sigma_d + 0.525)}{(\sigma_d + 0.525)(\sigma_d + 0.07)} = 0$$

$$\sigma_d = \frac{(-0.07 - 0.525)}{2} = -0.2975$$

R9: No hay cortes con el eje imaginario

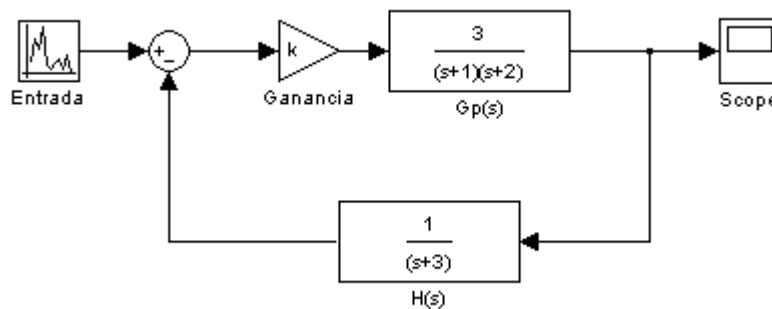
$$R10: k \rightarrow \frac{k \cdot 0.045}{|s + 0.07||s + 0.525|} = 1 \quad ; \quad k = \frac{|s + 0.07||s + 0.525|}{0.045}$$

Por ejemplo, la ganancia en el punto de dispersión,  $s = -0.2975$ , será:

$$k = \frac{|-0.2975 + 0.07||-0.2975 + 0.525|}{0.045} = 1.15$$

### Ejemplo 10.3

Calcular el trazado directo del LDR para la estructura de realimentación indicada en la figura adjunta.



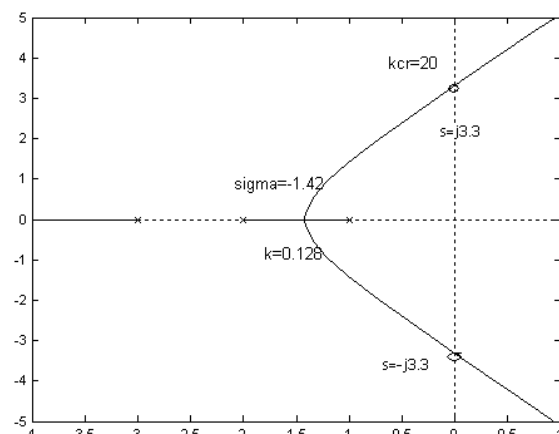
R1: Número de ramas 3

$$R2: k=0 \quad \left| \begin{array}{l} S=-1 \\ S=-2 \\ S=-3 \end{array} \right.$$

R3: Ramas en el eje real

R4: Simetría sobre el eje real.

$$R5: \vartheta_a = \frac{(2q-1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$





$$R6: \sigma_a = \frac{-1-2-3}{3} = -2$$

R7: No hay ceros ni polos en la cadena abierta que sean complejos conjugados.

$$R8: \frac{1}{(\sigma_d + 3)} + \frac{1}{(\sigma_d + 1)} + \frac{1}{(\sigma_d + 2)} = 0 \rightarrow$$

$$(\sigma_d + 1)(\sigma_d + 2) + (\sigma_d + 3)(\sigma_d + 2) + (\sigma_d + 3)(\sigma_d + 1) = 0$$

$$3\sigma_d^2 + (3+5+4)\sigma_d + (2+6+3) = 0 \Rightarrow 3\sigma_d^2 + 12\sigma_d + 11 = 0 \Rightarrow \sigma = -1.42$$

R9: Ganancia crítica mediante las tablas de Routh

$$1 + kG(s)H(s) = 1 + \frac{3k}{(s+1)(s+2)(s+3)} \rightarrow 1 + kG(s)H(s) = (s+1)(s+2)(s+3) + 3k$$

$$M(s) = \frac{3k(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3) + 3k} = \frac{3k(s+3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 3k}$$

$s^3$	1	1	11
$s^2$	6	$6+3k$	
$s^1$	$\frac{66-(6+3k)}{6}$		$66-(6+3k)=0$
$s^0$	$6+3k$		$k_{cr}=60/3=20$

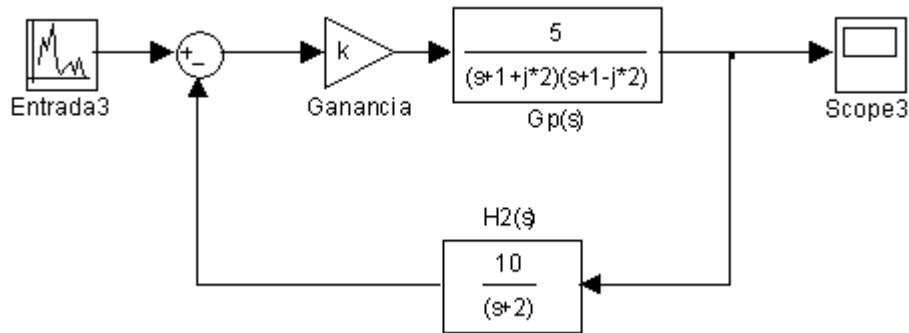
Los polos imaginarios para la ganancia crítica de 20 es  $\pm j3.3$

$$R10: k = \frac{|s+1||s+2||s+3|}{3}$$

La ganancia en el punto de dispersión de las raíces será:  $s=-1.42 \rightarrow k=0.128$

#### **Ejemplo 10.4.**

Determinar el trazado directo del LDR del siguiente sistema de control

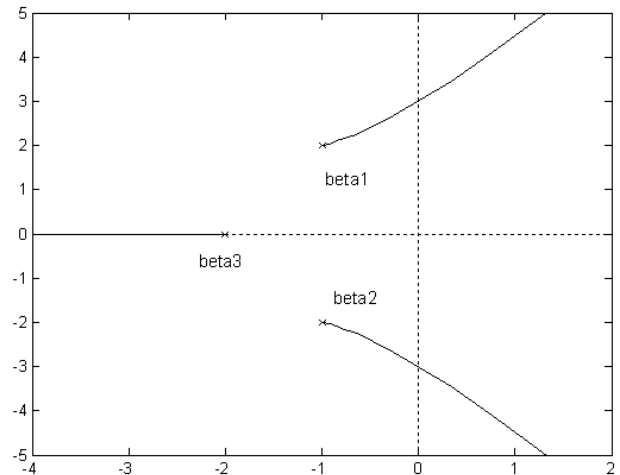


R1: N° de ramas 3

$$R2: k=0 \quad \begin{cases} s=-2 \\ s=-1+j2 \\ s=-1-j2 \end{cases}$$

R3: Ramas en el eje real

R4: Simetría con el eje real



$$R5: \theta_a = \frac{(2q+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

$$R6: \sigma_a = \frac{\sum(-1-1-2)-0}{3} = -\frac{4}{3} = -1.33$$

R7: Ángulos de salida de los polos complejos de la cadena abierta:

$$-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = (2q+1)\pi \Rightarrow \beta_1 ?$$

$$\beta_2 = +\frac{\pi}{2} \angle 90^\circ \quad \beta_3 = \arctg\left(\frac{2}{2-1}\right) = 63.43^\circ$$

$$\beta_1 = 26.56^\circ$$

R8: No hay puntos de dispersión

$$R9: \quad M(s) = \frac{5k(s+2)}{\left[(s+1)^2 + 2^2\right](s+2) + 50k}$$

$$= \frac{5k(s+2)}{(s^2 + 2s + 5)(s+2) + 50k} = \frac{5k(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 9s + 10 + 50k}$$

$$\begin{array}{r|ll}
 s^3 & 1 & 9 \\
 s^2 & 4 & 10+50k \\
 s & \frac{36-(10+50k)}{4} & \\
 s^0 & 10+50k & 
 \end{array}$$

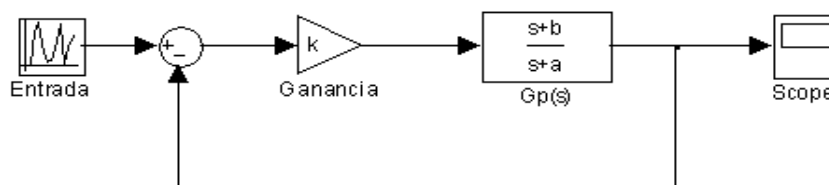
$$k_{cr} = \frac{26}{50} \cong \frac{1}{2}$$

Los polos para la ganancia crítica serán de  $\pm j3$ .

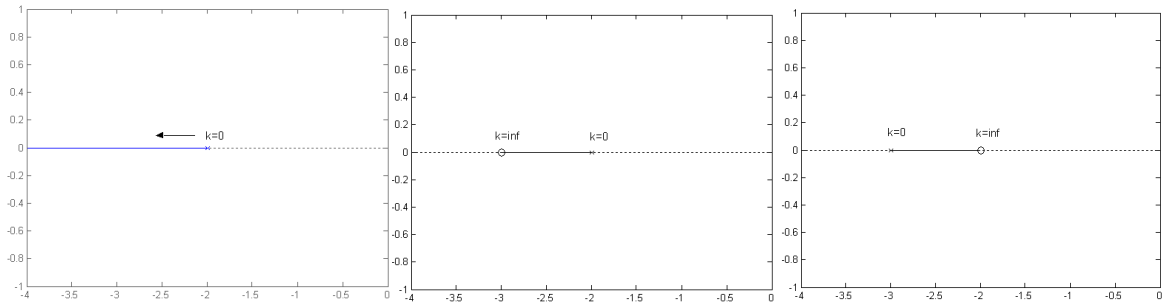
### 10.3 Formas básicas del LDR

El conocimiento de las formas que presentan ciertos LDR facilita de gran manera el trazado de otros LDR de sistemas específicos. Para empezar véanse las ubicaciones de sistemas de primer orden, seguidamente los sistemas de segundo orden y para acabar los de orden superior.

Las formas del LDR de los sistemas de primer orden son fáciles de obtener. Supóngase el caso más general de un sistema de primer orden, con un polo y un cero, cuyas constantes de tiempo sea  $-1/a$  y  $-1/b$  respectivamente:

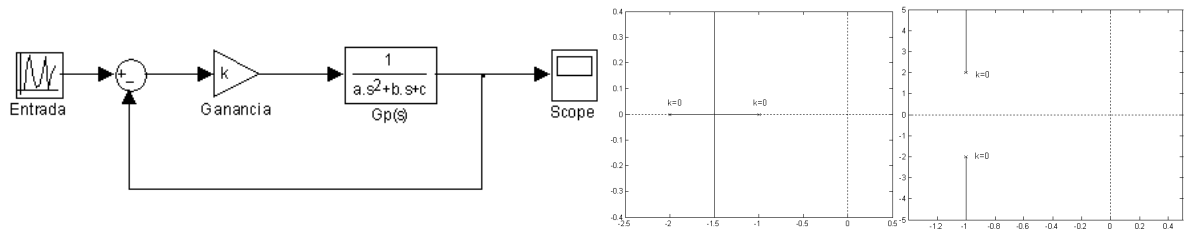


Como se observa de las gráficas de los LDR adjuntos, el conjunto realimentado resultante también es otro sistema de primer orden (regla nº2). Si el polo de la cadena abierta domina sobre el cero,  $b > a$ , al aumentar la ganancia,  $k$ , el conjunto se vuelve más rápido. En caso contrario,  $a > b$ , el polo de la cadena cerrada se acerca hacia el semiplano positivo, haciendo que el sistema realimentado sea más lento.



**Figura 10. 4 a) Cero en el infinito, b=inf, b) Polo domina sobre el cero, c) Cero domina sobre el polo**

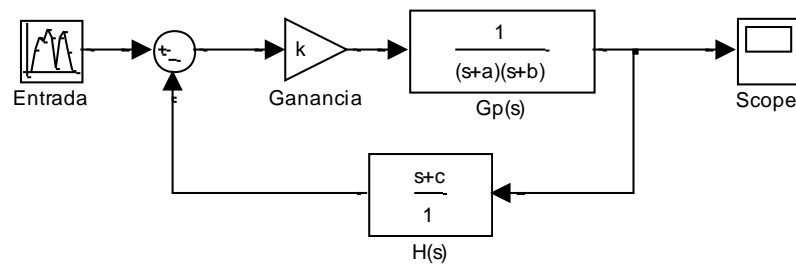
Para los sistemas de segundo orden simples, al realimentarlo puede presentar dos formas de LDR, una correspondiente a polos reales y otra a polos complejos conjugados:



En ambos casos cumple que al aumentar el valor de  $k$  el sistema tiende a ser más subamortiguado,  $\uparrow k \rightarrow \downarrow \xi_{cc}$ . Por tanto, su respuesta temporal presenta más sobreoscilación y tiene tendencia a perder estabilidad relativa.

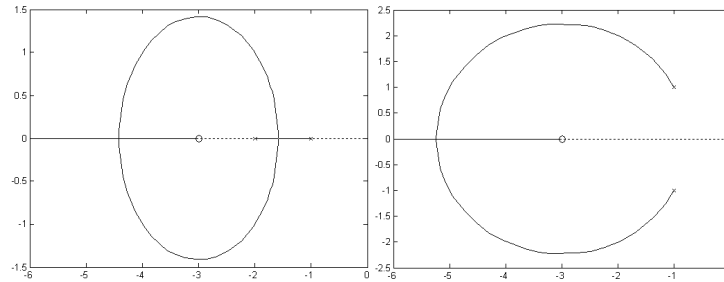
### 10.3.1 Adición de polos y ceros a un sistema de segundo orden simple

Al introducir un cero en la cadena abierta de un sistema de segundo orden simple, el añadido puede ocupar tres posiciones. En la primera posición se supone que la constante de tiempo del cero sea más pequeña que la de los polos. Ya sean polos reales o complejos conjugados, provocará que el sistema realimentado se vuelva más rápido y estable, como consecuencia de la atracción de las ramas hacia el cero:



1.  $c > a$

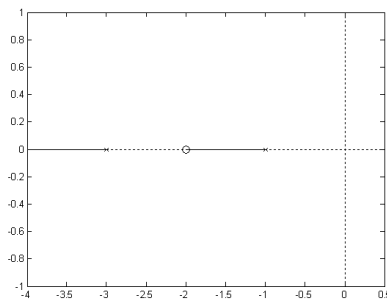
$c > b$



Si el cero se sitúa entre media de los polos, esta posición sólo se da si los polos de la cadena abierta son reales. Los polos de la cadena cerrada también serán reales.

2.  $c > b$

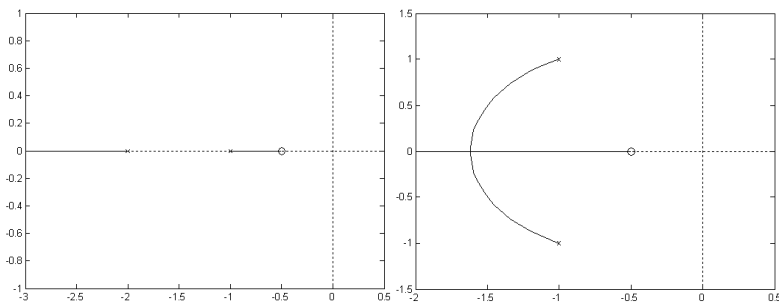
$c < a$



Por último, si la constante de tiempo del cero es mayor que el de los polos, las ramas del sistema tenderá a dirigirse hacia el cero.

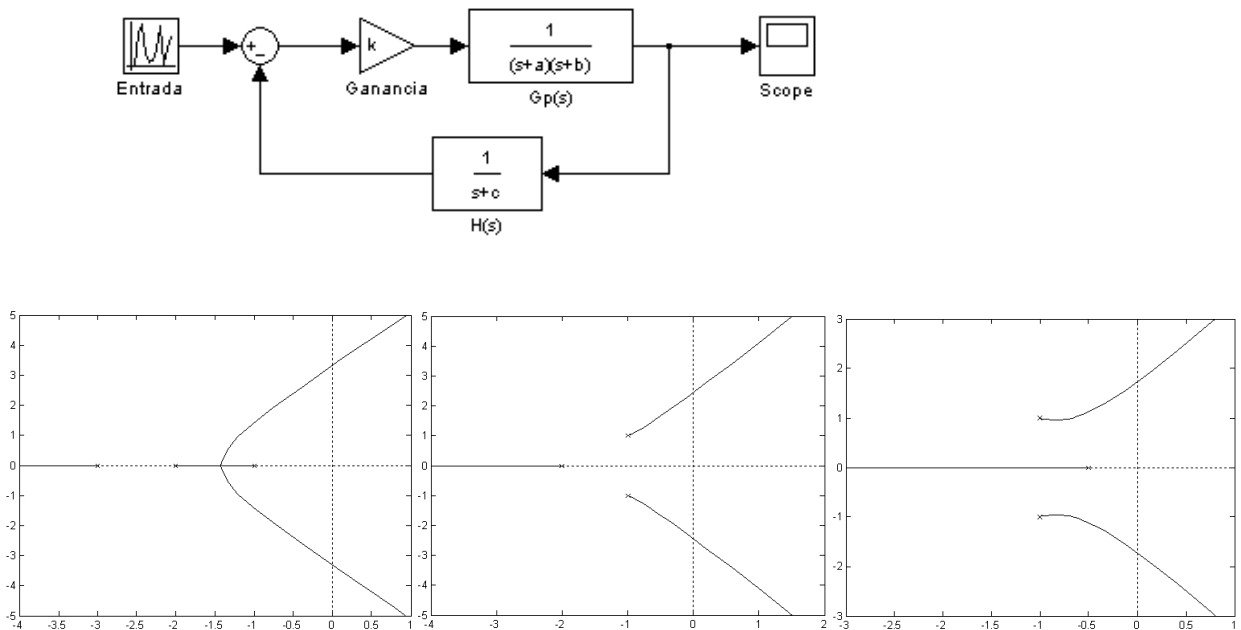
3.  $c < a$

$c > b$



Concluyendo, para los dos primeros casos, la colocación de un cero real provoca el distanciamiento de las ramas del eje imaginario, por consiguiente el sistema será más rápido.

En sentido contrario se presenta la adición de polos en la cadena abierta. El efecto de introducir un polo adicional es desviar el LDR hacia la parte real positiva del dominio de Laplace, desplazando simultáneamente el punto de dispersión en el mismo sentido. Todo ello origina una disminución de la estabilidad.



**Figura 10. 5 a) Polo adicional en un sistema de segundo orden con polos reales, b) y c) Adición de un polo en un sistema de segundo orden de polos complejos y conjugados**

### 10.3.2 Adición de polos y ceros a un sistema de orden superior

En general, los ceros en la cadena abierta hacen que el sistema se vuelva más rápido. Este efecto se observa empleando el LDR. Las ramas son atraídas hacia la ubicación del cero. Luego si el cero está en el semiplano negativo, las ramas se alejarán del semiplano positivo y consecuentemente, el sistema se volverá más rápido.

Por otro lado, se puede comprobar que la adición de un polo en bucle abierto reduce la estabilidad relativa del sistema en bucle cerrado. De hecho, recordando lo que se comentó en el capítulo de sistemas de orden superior, la adición de un polo en la cadena abierta, tiende a que el sistema en su conjunto sea más lento y pierda estabilidad.

## 10.4 Reglas para el trazado del lugar inverso

En el trazado de las ramas del lugar inverso de las raíces,  $-\infty \leq k \leq 0$ , la ganancia de la cadena abierta resulta negativa y el criterio del argumento cambia de  $180^\circ$  a  $360^\circ$ . En cambio, el criterio del módulo se mantiene. El efecto producido es la variación de las reglas del trazado del LDR cuyo fundamento se basa en el criterio del argumento. Para el lugar inverso, los dos criterios establecidos en el LDR se modifican a:

$$\begin{aligned} |G(s)H(s)| &= 1 \\ \arg(G(s)H(s)) &= 360 \cdot q \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (10.9)$$

Véanse las diferencias respecto a la ec. 10.1. El criterio del modulo se mantiene, pero varía el del argumento. Las reglas que se modifican son las numeradas con 3, 5 y 7. Las restantes son idénticas al trazado directo del LDR.

### **Regla 3: Comportamiento en el eje real**

Un punto situado sobre el eje real pertenecerá al lugar inverso de las raíces, si el número de polos y ceros contados desde la derecha, i.e. desde los positivos reales hacia los negativos del dominio complejo, es un número **par** de ellos.

### **Regla 5: Ángulos de las asintóticas**

Las ramas del lugar inverso de las raíces que terminan en el infinito son asintóticas, para grandes valores de  $s$ , a rectas cuyos ángulos con el eje real vienen dados por la expresión:

$$\vartheta_a = \frac{q \cdot 2\pi}{n - m} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.10)$$

siendo  $n$  el número de polos de la cadena abierta y  $m$  el de los ceros en cadena abierta.

### **Regla 7: Ángulos de salida y de llegada**

Los ángulos de salida de los polos complejos de la cadena abierta forman una tangente a la correspondiente rama del lugar inverso de las raíces respecto el eje real que habrá de aplicar el criterio del argumento:

$$\arg(G(s)H(s)) = q \cdot 2\pi \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.11)$$

De igual manera, para los ceros complejos y conjugados de la cadena abierta, sus ángulos, en este caso de llegada, también son determinados por el criterio del argumento. Concluyendo, cuando el sistema tiene polos o ceros complejos en cadena abierta, las ramas del lugar inverso de las raíces salen o llegan, según el caso de polos o ceros respectivamente, con un ángulo calculable a partir del criterio del argumento.

## **10.5 Sistemas de fase no mínima**

---

Si todos los polos y ceros de un sistema se encuentran en el semiplano negativo de  $s$ , el sistema se denomina de fase mínima. Si el sistema tiene al menos un polo o un

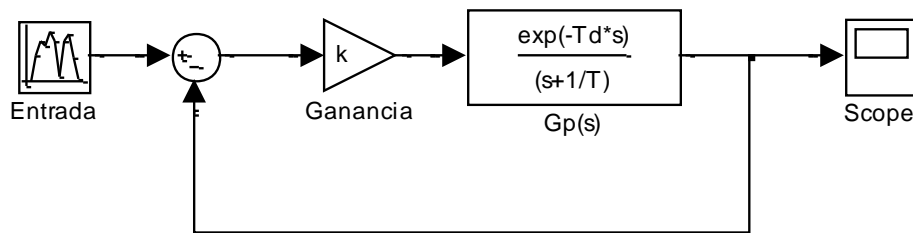
cero en el semiplano positivo se considera que es de fase no mínima. Este concepto viene dado por el cambio de fase que se produce en la respuesta en frecuencia.

Esta situación se presenta cuando hay retardos puros en la transmisión de la señal. Así por ejemplo, para sistemas sobre-amortiguados modelados según el criterio de Ziegler-Nichols aparece un retardo puro en la función de transferencia. El problema está en el modelo matemático del retardo temporal que corresponde a un término exponencial y por lo tanto no lineal. Para resolverlo, este término puede ser linealizado a través de la aproximación de Pade:

$$e^{-sT} \cong \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} \quad (10.12)$$

Como se observa de la expresión, ésta introduce un cero en el semiplano positivo. Luego las plantas que llevan un retardo en la transmisión y son aproximados por Pade tienen un modelo LTI de fase no mínima. Si a estas plantas se las realimentan, sus lugares de raíces quedarán modificados por las inserciones de los ceros en el semiplano positivo. Además, la aproximación de Pade hace que el trazado sea inverso al introducir un signo menos en la ganancia. El cero en el semi-plano positivo produce que las ramas se dirijan hacia él. La estructura de realimentación negativa tiene tendencia a la inestabilidad.

Supóngase una planta sobre-amortiguada modelada por Ziegler-Nichols que se le dé una realimentación unitaria:

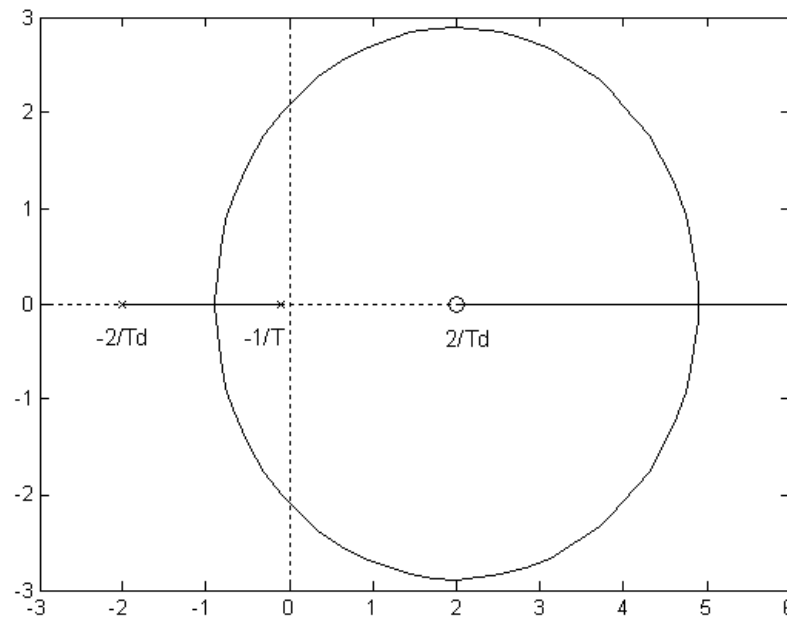


La ganancia de la cadena abierta se aproximará por Pade a:

$$G(s)H(s) = k \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{\left(1 + \frac{T_d}{2}s\right)(1 + sT)} = -k \frac{s - \frac{2}{T_d}}{T \left(s + \frac{2}{T_d}\right) \left(s + \frac{1}{T}\right)} \quad (10.13)$$



Si  $k > 0$ , el cambio de signo debido al cero del semiplano positivo obligará a emplear las reglas del trazado inverso de las raíces. El LDR quedará definido por los dos polos de la cadena abierta en el semiplano negativo y el cero en la parte positiva:

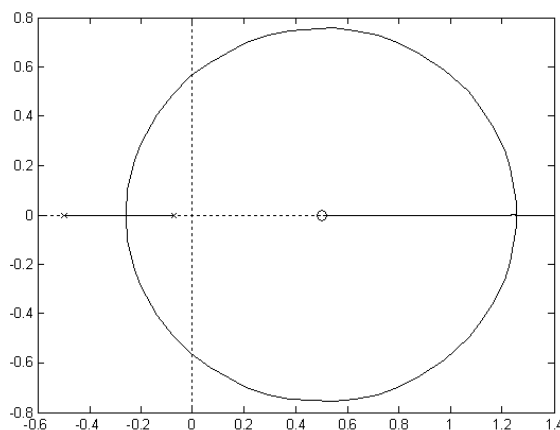


### **Ejemplo 10.5**

En el trabajo de campo, la respuesta del equipo de prácticas Peltier ante una entrada en escalón se caracteriza por un modelo de Ziegler-Nichols de plantas sobre-amortiguadas. Las medidas realizadas dan un retardo aproximado de 4s., el tiempo de establecimiento es de 45 segundos y tiene una ganancia estática de 1.22. Determinar el trazado del lugar de las raíces.

La constante de tiempo del modelo de ZN será un tercio de 45s-4s y su FDT quedará definida por:

$$G_p(s) = \frac{(1-2s)1.22}{(1+2s)(1+13.66s)} = \frac{-0.09(s-0.5)}{(s+0.5)(s+0.073)}$$



R1: Número ramas  $\equiv 2$

R2:  $k=0 \quad \begin{cases} s=-0.5 \\ s=-0.073 \end{cases}$

$K=\infty \rightarrow s+0.5$

R3: Ramas del eje real

R4: Simetría

$$R5: \vartheta_a = \frac{360q}{2-1} = 360$$

$$R6: \sigma_a = \frac{-0.5 - 0.073 - 0.5}{2-1} \quad \sigma_a = -1.0073$$

R7: No se aplica.

R8: Punto de dispersión:

$$\frac{1}{\sigma + 0.5} + \frac{1}{\sigma + 0.073} = \frac{1}{\sigma - 0.5}$$

Para calcular el punto de dispersión se emplea como semilla el valor medio de los extremos y se hace la iteración de:

$$\sigma_d^s = \frac{-0.073 - 0.5}{2} = -0.2865$$

$$\frac{1}{\sigma_d^s + 0.5} + \frac{1}{\sigma_d^s + 0.073} = \frac{1}{\sigma_d^s - 0.5}$$

$\sigma_d^s$	-0.2865	-0.258	-0.257
--------------	---------	--------	--------

En el punto de confluencia, al tener el cero en el origen, la semilla no es tan fácil de determinar, se empezará por el tipo de LDR en un valor de +1.

$$\sigma_c^s = 1$$

$$\frac{1}{\sigma_c^s + 0.5} + \frac{1}{\sigma_c^s + 0.073} = \frac{1}{\sigma_c^s - 0.5}$$

$\sigma_c^s$	1	1.25	1.189	1.22	1.24	1.25	1.25
--------------	---	------	-------	------	------	------	------

$$R9: s^2 + (0.579 - 0.09k)s + 0.0365 + 0.045k$$

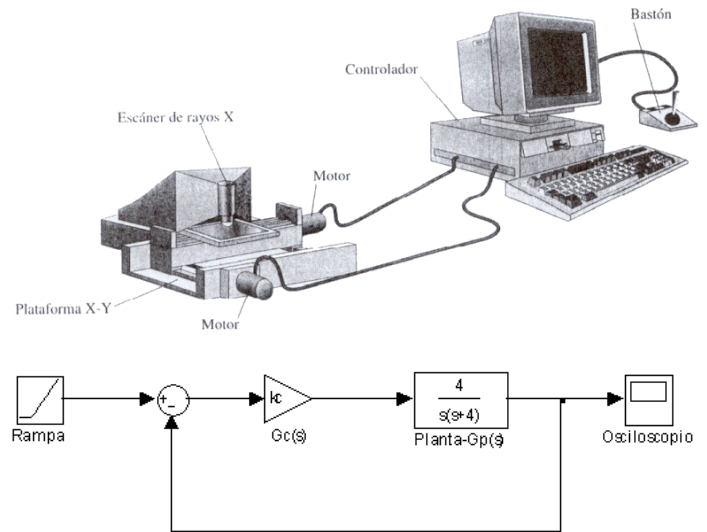
$s^2$	1	$0.0365 + 0.045k$
$s^1$	$0.579 - 0.09k$	$k_{cr} = \frac{0.579}{0.09} = 6.36$
$s^0$	$0.0365 + 0.045k$	

Los polos para la ganancia crítica serán de  $\pm j0.57$

## 10.6 Problemas

### Ejercicio 10.1

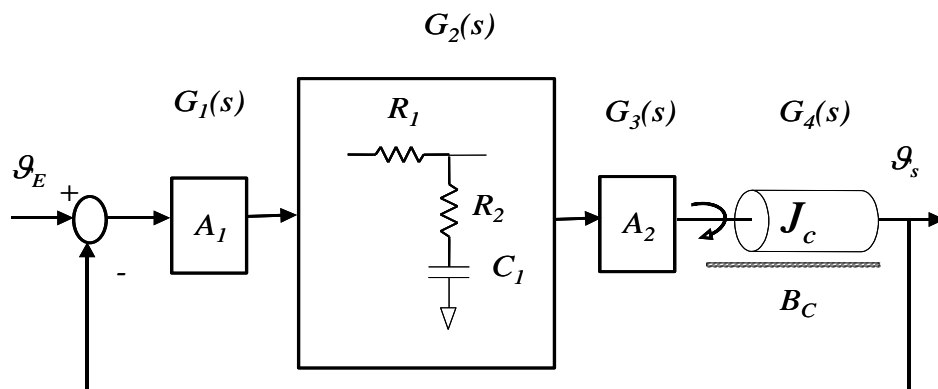
Se utiliza un dispositivo de rastreo digital o escaneo de rayos X para inspeccionar tarjetas de circuitos impresos y chips de tableta, montados en una plataforma X-Y accionada por un tornillo, como se muestra en la figura a). La posición de la plataforma es gobernada por un controlador basado en una computadora. La figura b) muestra el diagrama de bloques del control proporcional ( $G_c(s)=K_c$ ) de uno de los ejes de la plataforma.  $G_p(s)$  representa la dinámica del motor y la plataforma, con la razón de la inercia al coeficiente de amortiguamiento  $J/\beta=1/4$ .



1. Dibújese el LDR del sistema.
2. Calcúlese el valor de  $K_c$ , si se desea que la sobreoscilación,  $M_p$ , sea del 40% cuando al sistema le apliquemos un escalón unitario.
3. Se desea que el error del sistema en régimen permanente sea menor o igual a 0.10 para una entrada en rampa unitaria, calcúlese el valor de  $K_c$  correspondiente.

### Ejercicio 10.2

La figura representa un sistema de control realimentado:



1. Obténgase la función de transferencia de  $G_2(s)$  y  $G_4(s)$ , así como la FDT en cadena abierta,  $G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$  del sistema. Háganse en  $G(s)$  las siguientes sustituciones:

$$A_1A_2/B_C=k; R_2C_1=0.25 \text{ s}; J_C/B_C=1; (R_1+R_2)C_1=0.50 \text{ s}$$

2. Hállese la función de transferencia total o transmitancia en bucle cerrado del sistema.
3. Dibújese el LDR.
4. Calcúlese el valor de  $k$  y las raíces para que el sistema oscile.
5. Para las raíces obtenidas en el apartado d), determínese la respuesta del sistema para una entrada en escalón unitario.

### Resolución

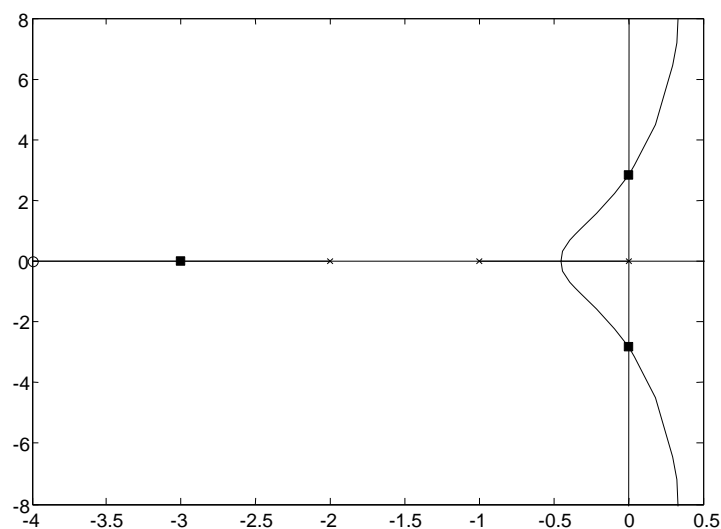
1. La FDT de la cadena abierta es:

$$G(s) = \frac{A_1A_2}{B_c} \frac{(1+s \cdot 0.25)}{(1+s \cdot 0.5)} \frac{1}{s(s+1)}$$

2. FDT de la cadena cerrada:

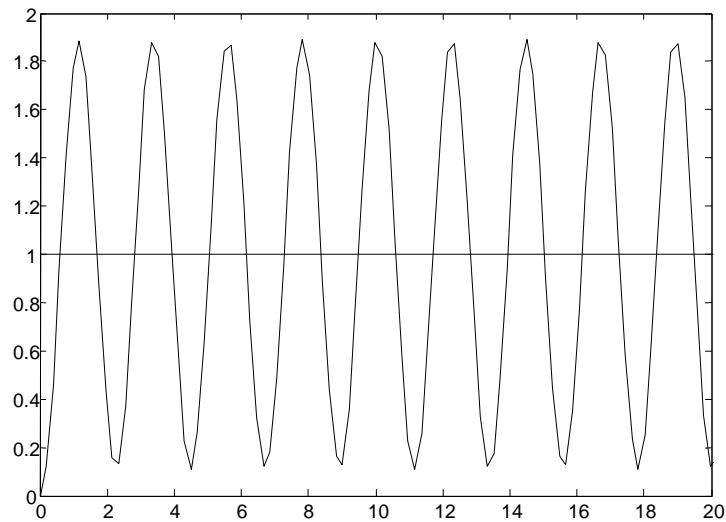
$$M(s) = \frac{k(1+s \cdot 0.25)}{(1+s \cdot 0.5)(1+s) \cdot s + k(1+s \cdot 0.25)}$$

- 3.



4.  $k_{cr} = 12$

5.  $\omega_d = 2.85 [\text{rad} / \text{s}] \rightarrow T = 2.2 \text{s}$

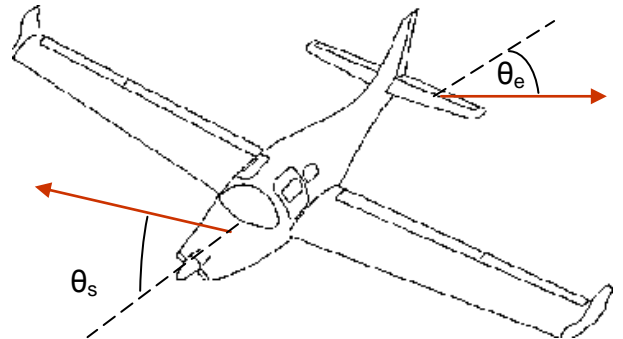


### Ejercicio 10.3

Un avión comercial con piloto automático presenta en el modo de oscilación longitudinal la función de transferencia siguiente.

$$G(s) H(s) = \frac{k \left( s + \frac{1}{T_2} \right)}{s \left( s - \frac{1}{T_1} \right) (s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$$

donde:  $T_1 = 1$  ;  $T_2 = 2$  ;  $\zeta = 0.5$  ;  $\omega_n = 4$ .  
Construir el Lugar de Raíces del sistema.



R1: Número ramas  $\equiv 4$

R2:  $k=0$  (0,+1,-2+j3.45,-2-j3.46)  $k=\infty$  (-0.5)

R3: Ramas del eje real

R4: Simetría

$$R5: \vartheta_a = \frac{(2q+1)180}{4-1}$$

$$= 60, -60, 180$$

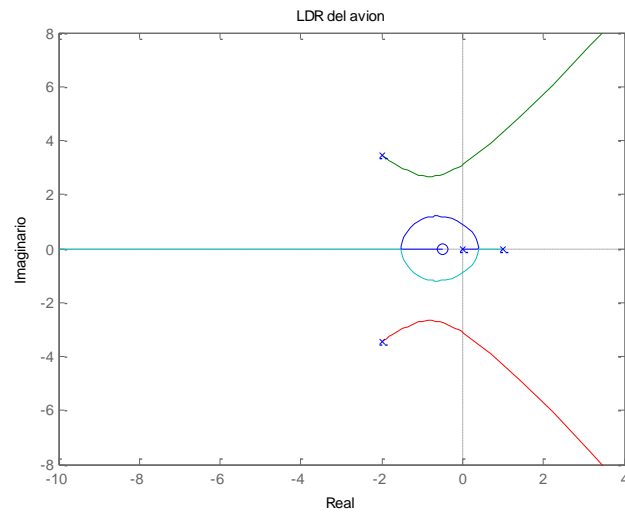
$$R6: \sigma_a = \frac{-0+1-2-2+0.5}{4-1}$$

$$\sigma_a = -0.83$$

R7:

$$\alpha_1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \theta_s) = (2q+1)180$$

$$\Rightarrow \theta_s = -47^\circ$$



R8: El punto de dispersión y confluencia puede aproximarse a la ecuación de segundo orden:

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma-1} \approx \frac{1}{\sigma+0.5}$$

$$\Rightarrow \sigma = \begin{cases} -1.36 \\ 0.36 \end{cases}$$

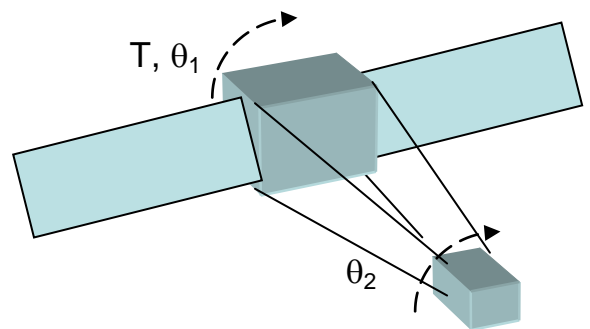
$$R9: s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s + ks + 0.5k$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 12 & 0.5k \\ s^3 & 3 & k-16 & \\ s^2 & \frac{36-(k-16)}{3} & 0.5k & \\ s^1 & * & & \\ s^0 & 0.5k & & \end{array}$$

$$k_{cr} = \begin{cases} 18.48 \\ 45.02 \end{cases}$$

### Ejercicio 10.4

La figura muestra, de forma básica, un sistema de reconocimiento astronómico. En ella se puede ver cómo este satélite está formado por dos bloques (unidos por conexiones no rígidas), siendo el mayor de estos bloques el que contiene el sistema de comunicación, propulsión y fuentes de alimentación; mientras que el otro bloque sólo contiene sensores que deben



estar aislados de las vibraciones del primer bloque. Si la estructura metálica de conexión entre los bloques se modelan por un resorte,  $K$ , y un rozamiento equivalente,  $B$ . Se pide:

1. Demostrar la FDT entre el giro del segundo bloque respecto al par dado en el bloque principal:  $\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{0.6(s+2.97)}{s^2((s+3)^2 + 3^2)}$

2. Si el sensor de posición del bloque segundo y el elemento de potencia tienen FDT unitaria, dibujar el diagrama a bloques del sistema de control realimentado.

3. Determinar el trazado directo del lugar de las raíces del sistema de control.

4. Y el trazado inverso.

Datos:

$$J_1 = 10 \text{ kg m}^2 \quad J_2 = 0.1 \text{ kg m}^2 \quad K = 1.78 \text{ Nm/rad} \quad B = 0.6 \text{ Nms/rad}$$

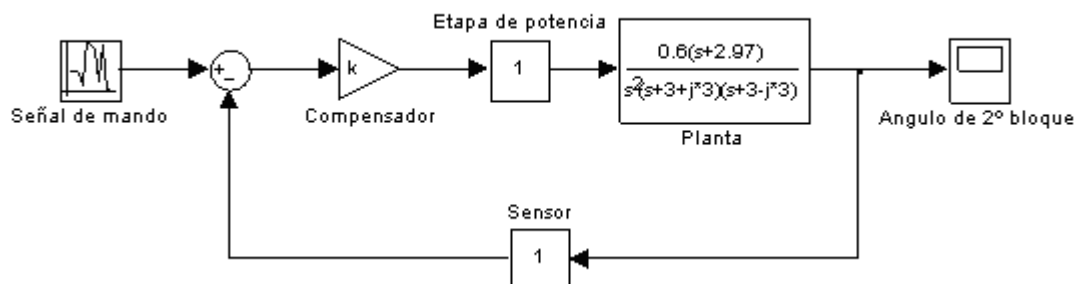
1. El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que caracteriza la dinámica de rotación del satélite son:

$$\begin{aligned} T(t) &= J_1 \ddot{\theta}_1(t) + K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + B(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) \\ K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + B(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) &= J_2 \ddot{\theta}_2(t) \end{aligned}$$

Aplicando transformadas de Laplace y considerando condiciones iniciales nula se obtiene la FDT solicitada:

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K + sB}{s^2(J_1 \cdot J_2 s^2 + B(J_1 + J_2)s + K(J_1 + J_2))} = \frac{0.6(s+2.97)}{s^2((s+3)^2 + 3^2)}$$

2.



3.

R1: N° de ramas 4

R2:  $k=0(0,0,-3+j3) \quad k=\infty (-2.97)$

R3: Ramas en el eje real

R4: Simetría con el eje real

$$R5: \theta_a = \frac{(2q+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

$$R6: \sigma_a = \frac{(-0-0-3-3)+2.97}{3} \approx -1$$

R7: Ángulos de salida de los polos complejos de la cadena abierta:

$$\alpha - (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = (2q+1)\pi \quad \alpha \cong \beta_3 = +\frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad \beta_1 = \pi - \arctg\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} \quad \beta_2 \cong -\frac{\pi}{2}$$

R8: Hay el punto de dispersión de los polos dobles del origen y un punto de confluencia que se calculará de manera numérica:

$$\frac{2 \cdot (\sigma_c^s + 3)}{(\sigma_c^s + 3)^2 + 3^2} + \frac{1}{(\sigma_c^s + 0)} + \frac{1}{(\sigma_c^s + 0)} = \frac{1}{(\sigma_c + 2.97)}$$

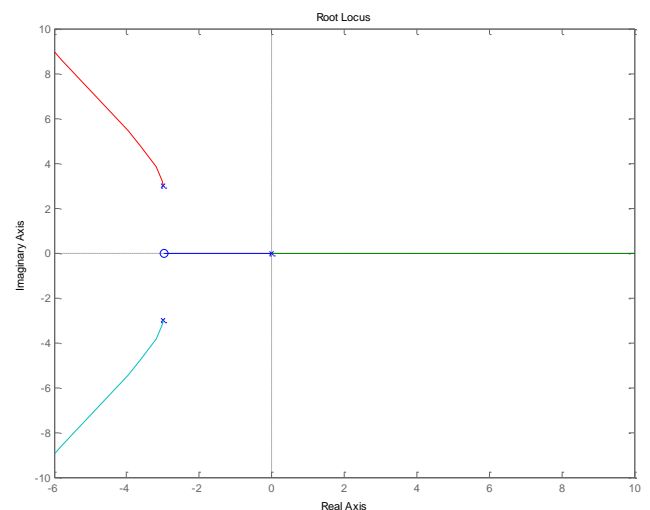
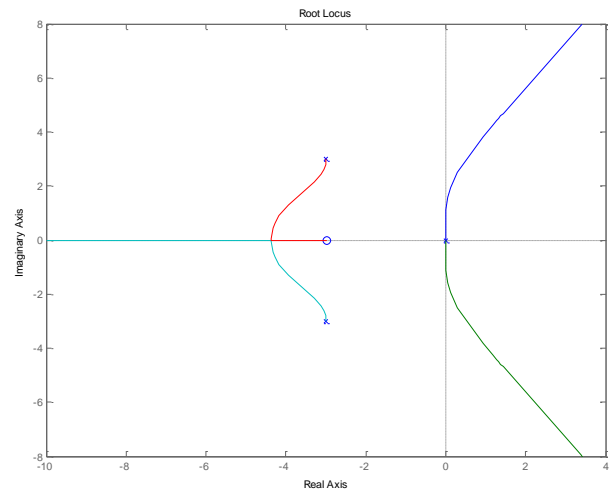
$\sigma_c^s$	-3.5	-4.44	-4.37
--------------	------	-------	-------

R9:  $D(s) = s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 0.6ks + 1.78k$

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 18 & 1.78k \\ s^3 & 6 & 0.6k & \\ s^2 & \frac{108-0.6k}{6} & 1.78k & \\ s^1 & * & & \\ s^0 & 1.78k & & \end{array}$$

$$* = \frac{\frac{108-0.6k}{6} \cdot 0.6k - 1.782k \cdot 6}{108-0.6k}$$

Las condiciones de estabilidad son  $k>0$ ,  $k<1.8$  y  $k<180$ . Por tanto, resulta estable entre 0 y 1.8





4. Para el trazado inverso sólo habrá que modificar las reglas 3,5 y 7.

R3: Ramas en el eje real

$$R5: \theta_a = \frac{2\pi q}{3} = 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$$

R7: Ángulos de salida de los polos complejos de la cadena abierta:

$$\alpha - (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 2\pi q \quad \beta_2 \cong -\frac{6\pi}{4}$$

### Ejercicio 10.5

El sistema de la figure representa un mecanismo elevador de posicionamiento vertical que desplaza un elemento móvil con masa  $m(t)$  variable (perturbación del sistema). La altura de la carga,  $x(t)$ , queda fijada por la tensión de mando,  $u_m(t)$ . Determinar:

1. Demostrar que la linealización del balance del par mecánico queda como:

$$k_p \Delta i(t) = J_r \Delta \dot{\omega}_m(t) + B_r \Delta \omega_m(t) + [m \cdot r^2]_0 \Delta \dot{\omega}_m(t) + [r \cdot g] \Delta m(t)$$

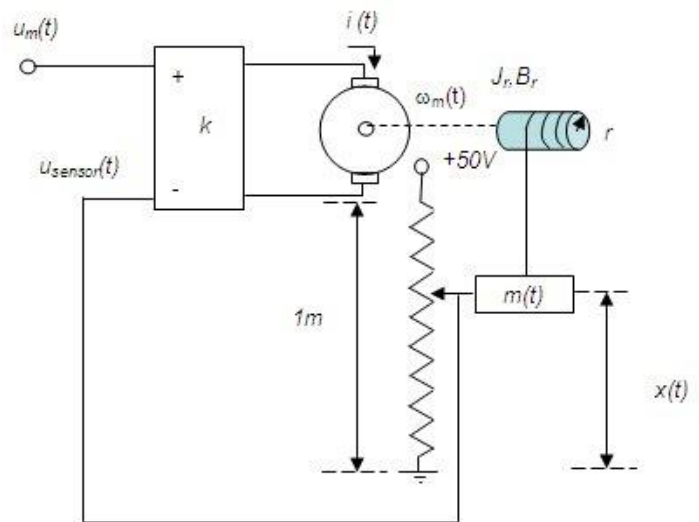
2. Obtener el diagrama de bloque sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio con una carga de masa 0.3 kg a una altura de 0.5 m.

3. Obtener la función de transferencia entre la altura de la carga y la señal de mando,  $\frac{\Delta x(s)}{\Delta u_m(s)}$ .

4. Determinar el valor del regulador proporcional,  $k$ , para que el sistema tenga una sobreoscilación del 4% ante el escalón.

5. Representar la evolución del elevador ante un incremento en escalón de 2V a la señal de mando.

**DATOS:** Motor corriente continua:  $R_i = 5 \Omega$ ,  $L_i \approx 0H$ ,  $k_p = 0.1Nm/A$ ,  $k_b = 0.09 Vs/rad$



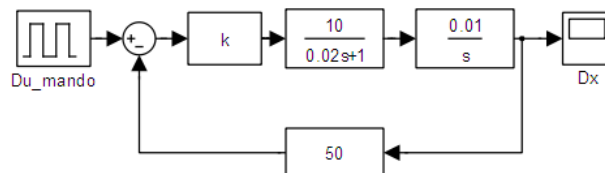
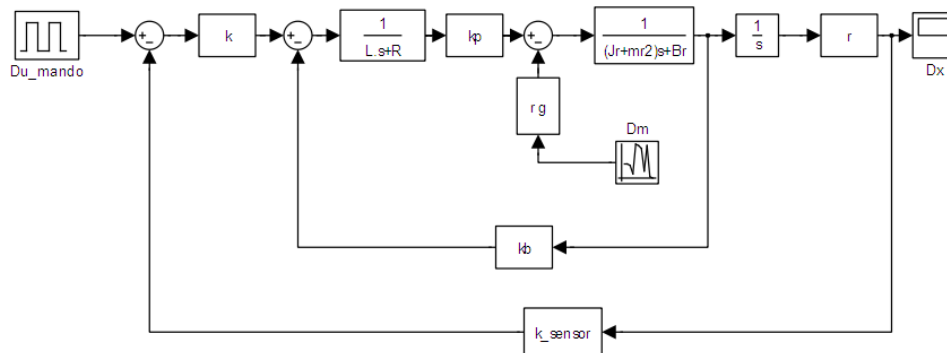
**Rodillo:**  $J_r = 10^{-5} \text{ kg m}^2$ ,  $B_r = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ Nms/rad}$ ,  $r = 0.01 \text{ m}$   $g \approx 10 \text{ m/s}^2$

1. El balance del par mecánico estará determinado por el siguiente conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales:

$$T_m(t) = k_p i(t)$$

$$T_m(t) = J_r \dot{\omega}_m(t) + B_r \omega_m(t) + m(t) \cdot r^2 \dot{\omega}_m(t)$$

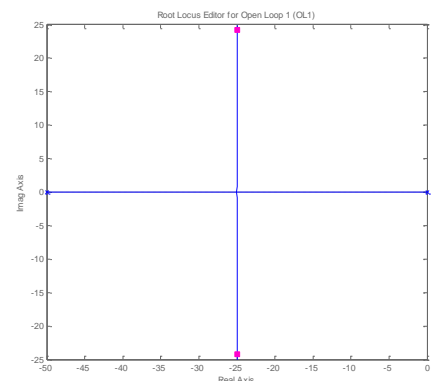
Debido a la no linealidad de la dinámica habrá que linealizarlo alrededor de un punto de reposo.



$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta u_m(s)} = \frac{5k}{s^2 + 50s + 250k}$$

4. Habrá que fijar los polos dominantes y posteriormente calcular el valor de  $k$ . Se empleará la técnica del trazado directo del lugar de las raíces. La función de transferencia de la cadena abierta es:  $\frac{250k}{s(s+50)}$ .

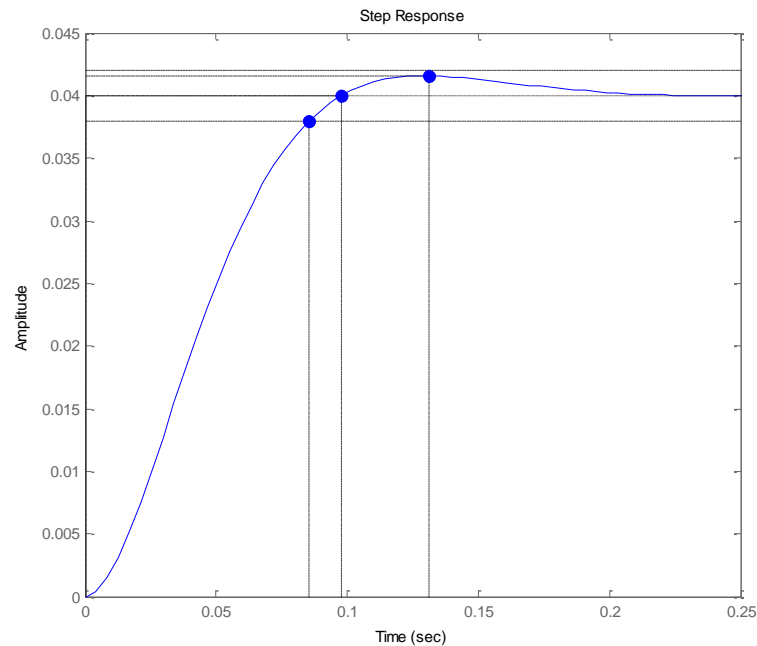
Si la sobre-oscilación es de 4%, el ángulo de apertura de los polos dominantes es de 0.77 [rad]. Como la constante de amortiguamiento es de 25, la frecuencia de oscilación es de 24.25 [rad/s]. Los polos dominantes son  $-25 \pm j24.25$ . Aplicando el criterio del módulo se calcula el valor de  $k$ :



$$\left| \left[ \frac{250k}{s(s+50)} \right]_{s=-25 \pm j24.25} \right| = 1$$

El valor de k es igual a 4.85.

5.



Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU". La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](#) para [contenidos abiertos](#). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>