

2

Revisión de los fundamentos matemáticos

Se acaba de citar en el anterior capítulo que los modelos de las plantas o procesos, a tratar en este curso, estarán definidos por las ecuaciones diferenciales lineales y de coeficientes constantes, abreviándose con el acrónimo LTI (*Linear Time Invariant*). La determinación del comportamiento dinámico del sistema supone que conocida su función de transferencia, FDT, en este caso de tipo LTI, y la naturaleza del tipo de entrada, es posible predecir la señal de la salida. Obsérvese que sólo se enfoca sobre sistemas SISO (*Single Input, Single Output*) LTI.

Esta predicción está basada en el operador convolución matemática, cuya dificultad en el dominio temporal queda de manifiesto en su propia definición:

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (2. 1)$$

De estas necesidades aparecen dos tipos de transformadas matemáticas (Fourier y Laplace) que facilitarán el cálculo de la convolución. Pero además, estas transformaciones no sólo tienen interpretaciones matemáticas sino también tienen significado desde el punto de vista físico, sobre todo las de Fourier que hacen un cambio al dominio frecuencial. Así en relación con los sistemas, las respuestas en frecuencias darán características ingenieriles del funcionamiento dinámico. De otro lado

y desde la teoría de señales, la caracterización de las señales a través de sus espectros frecuenciales está íntimamente unida a las transformadas de Fourier.

Ambas transformaciones reflejarán los modelos de las plantas LTI continuas en expresiones algebraicas de variable compleja. Desde estos dominios existen reglas simples que son capaces de manipular las ecuaciones algebraicas y de obtener las soluciones en sus respectivos dominios. La evolución temporal se obtendrá aplicando la antitransformada correspondiente. Se concluye, por tanto, que no es necesario resolver la ecuación diferencial para predecir el comportamiento dinámico del sistema.

2.1 El concepto de la transformación

El concepto de la transformación va íntimamente unido al de correspondencia. A un determinado grupo de elemento del dominio D_1 se le hace corresponder a un nuevo grupo de elementos del dominio D_2 .

Según el carácter de la variable del tiempo, t , puede distinguirse inicialmente en dos grupos de transformaciones: continuas, cuando la variable t puede tomar cualquier valor comprendido dentro de un determinado intervalo, o discreta cuando solamente el tiempo está definido en valores concretos separados entre sí a distancias T (periodo de muestreo). De momento, durante estos primeros capítulos, se emplearán las transformadas definidas sobre variaciones continuas en el tiempo. Cuando se introduzca el computador, como elemento de control, se analizarán las transformadas discretas.

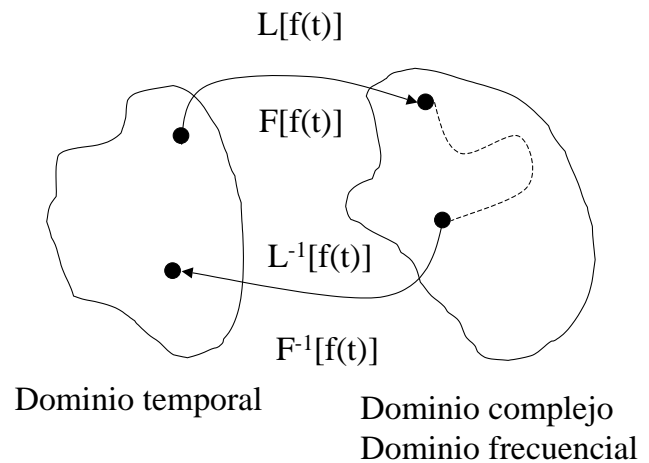


Figura 2. 1. Correspondencia entre dominios

De las transformaciones continuas destacan las transformaciones integrales:

$$F(s) = \int_a^b f(t) \cdot k(t, s) \cdot dt \quad (2. 2)$$

siendo $f(t)$ la función continua en el tiempo que se desea pasar a otro dominio, mientras $k(s, t)$ es el núcleo ('kernel') de la transformación:

$$k(t, s) = \begin{cases} e^{-j\omega t} & \text{Transformación de Fourier} \\ e^{-st} & \text{Transformación de Laplace} \end{cases} \quad (2. 3)$$

2.2 Serie y transformada de Fourier

En el análisis de las señales y de los sistemas, a veces, se requiere trasladar los problemas del dominio temporal al dominio de las frecuencias. Cuando se trata de señales se habla del espectro frecuencial de éstas (al cambiarlas del dominio temporal al frecuencial); mientras el estudio de los sistemas en frecuencia se les denomina respuesta en frecuencia.

En el caso más general, sea una función periódica temporal, $f(t)$, de periodo de T , acotada en un intervalo, con un número finito de máximos, mínimos y puntos discontinuos, ésta puede ser representada por una serie infinita de senos y cosenos. A esta serie se la llama de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.4)$$

donde a_0 representa el valor medio de la función y a_n y b_n son las amplitudes de los armónicos de orden n . Cuando n es igual a 1, se tratará del armónico fundamental o de primer orden. El armónico fundamental corresponde con una función senoidal o cosenoidal cuya frecuencia es la inversa del periodo de la función a convertir, $f(t)$, y su amplitud será b_1 o a_1 , respectivamente. Si se habla de armónico n , se está tratando de uno, cuya frecuencia es n veces la del armónico fundamental¹. El cálculo del valor medio y de las amplitudes de los armónicos estarán definidas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

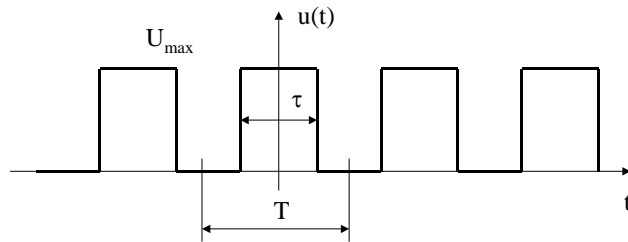
Cuando la función temporal, $f(t)$, tiene determinadas propiedades de simetría, los coeficientes a_n o b_n se simplifican. Así, cuando $f(t)$ sea función par, entonces no habrá desarrollo senoidal y cuando sea impar quedarán canceladas las amplitudes de la serie cosenoidal:

¹ Todo sonido lleva una combinación de armónicos que no se distinguen unos de otros, pero en su conjunto dan su timbre o color. El factor tímbrico no reclama la atención de los compositores hasta el siglo XVIII, y es Mozart el primero que de forma ostensible hace uso de sus posibilidades de contraste. Algunas obras de Bach, El Arte de la Fuga, por ejemplo, es una obra indiferente desde el punto de vista tímbrico.

$$\begin{aligned} f(t) &= f(-t) \Rightarrow b_n = 0 \\ f(t) &= -f(-t) \Rightarrow a_n = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ejemplo 2.1

Obtener el desarrollo de Fourier del tren de impulso de periodo T de la figura, sabiendo que el ancho del pulso es τ y la amplitud es U_{\max} .



Como la señal es de tipo par, sólo tendrá un desarrollo en serie cosenoidal.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} dt = U_{\max} \frac{\tau}{T} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2U_{\max}}{\pi n} \operatorname{sen}\left(n \cdot \pi \cdot \frac{\tau}{T}\right) \end{aligned}$$

Para el caso específico de tener un periodo de 10 ms, un ancho del pulso de 5ms y que la amplitud sea de 5V, los coeficientes serán:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.5V & a_1 &= 3.18V(100Hz) & a_2 &= 0V(200Hz) & a_3 &= -1.06V(300Hz) \\ a_4 &= 0V(400Hz) & a_5 &= 0.635V(500Hz) & a_6 &= 0V(600Hz) & a_7 &= -0.45V(700Hz), \dots \end{aligned}$$

A la representación de los armónicos de la función $f(t)$ en un diagrama, donde el eje de abscisas es la frecuencia y el módulo de las amplitudes de los armónicos está en el eje de ordenadas, se le llama el espectro frecuencial de la función. Nótese el cambio de la variable independiente, del dominio temporal, t , al dominio frecuencial, f .

Sin embargo, en el caso más general, las series tendrán desarrollos en sucesiones de senoides y cosenoides. Lo que viene a significar que el dominio

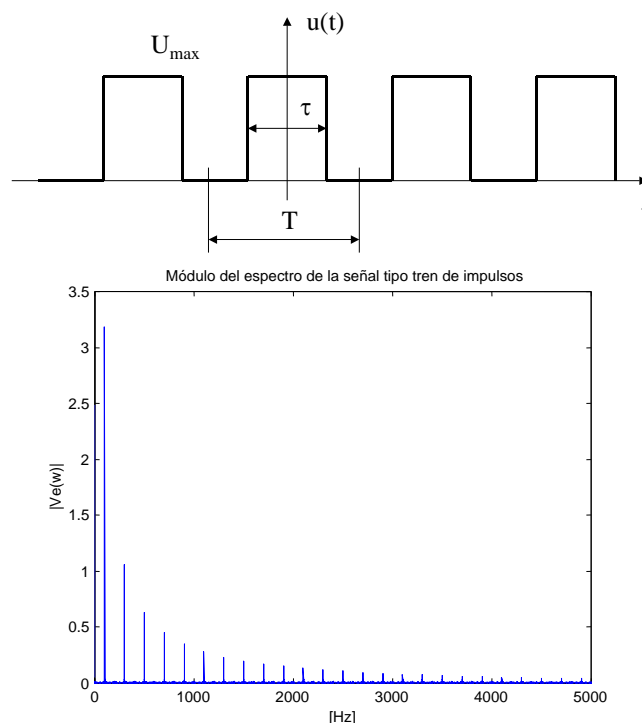


Figura 2. 2. a) señal en el tiempo b) espectro de la señal (módulo)

frecuencial es de variable compleja. De hecho, otra posible presentación de la serie de Fourier consiste en una sucesión de cosenoides con amplitud y desfase determinada para cada armónico. La segunda forma de expresar las series de Fourier estará definida por las amplitudes y los desfases de los armónicos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \psi_n) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \psi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (2.7)$$

Empleando las relaciones de Euler sobre el seno y el coseno en la primera forma de expresar las series de Fourier, se obtiene otra tercera expresión del desarrollo en función de las exponenciales:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad F(n \cdot \omega_0) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt \quad (2.8)$$

2.2.1 Transformas de Fourier

Como es de esperar, la mayoría de las señales no son periódicas. Para la aplicación de la serie de Fourier sobre señales aperiódicas, se procede al artificio matemático de hacer que el periodo de la señal sea infinito, convirtiendo todas las señales en periódicas. Empleando la tercera forma de representación de las series de Fourier, esto es, en exponenciales, se aplica que el periodo T tiende a infinito:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad (2.9)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt. \quad (2.10)$$

Estas expresiones concluyen con la transformada de Fourier y su inversa. Véase que ahora no se tiene sólo componentes discretos a determinadas frecuencias, sino que es una función continua en todo el espectro de la frecuencia. Por eso se dice que hay una transformada y no una serie.

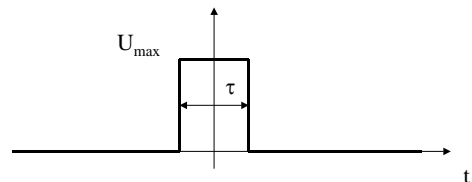
Sin embargo, para que una función tenga transformada de Fourier requiere del cumplimiento de la condición de convergencia absoluta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot dt < \infty \quad (2.11)$$

Todas las señales de la naturaleza cumplen esta condición, ya que no existe ninguna fuente de energía que sea de carácter infinito. En definitiva, todas las señales físicas tienen transformada de Fourier.

Ejemplo 2.2

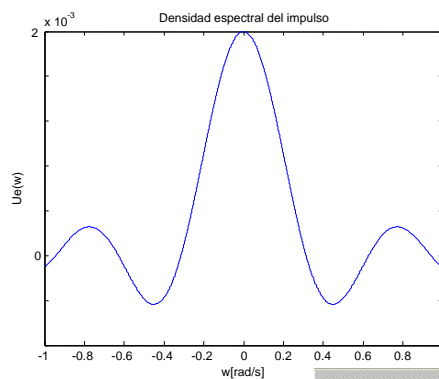
Calcular la transformada de Fourier de una señal impulsional.



$$U_e(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = 2U_{\max} \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega} = U_{\max} \cdot \tau \cdot \text{senc}(\omega\tau/2)$$

Para el caso de tener una amplitud de 10V y un ancho de impulso de 200μs. Nótese que se necesita para el cálculo de frecuencia nula, $\omega = 0$ [rad/s], la aplicación de H'opital para resolver la indeterminación:

$$U_e(\omega) = 2 \cdot 10 \frac{\text{sen}(\omega \cdot 0.001)}{\omega} \quad U_e(0) = 2 \cdot 10 \cdot 0.0001 = 0.002V$$



En la página web www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html (consultado septiembre 2014) puede encontrar un *applet* capaz de calcular las series de Fourier de algunas señales típicas.

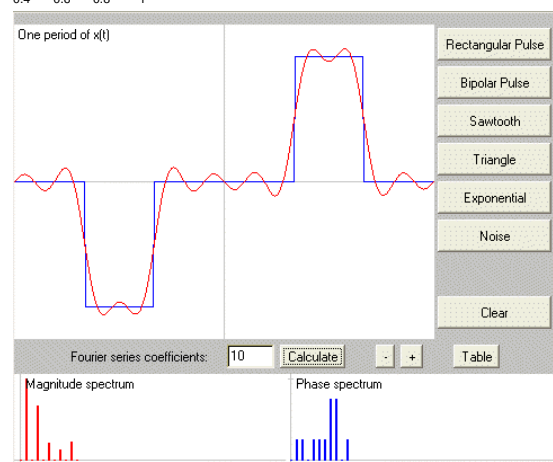


Figura 2. 3. Applet que determina las series de Fourier para algunas funciones típicas

2.3 Transformadas de Laplace

Como se acaba de ver, la condición de convergencia absoluta supone que muchas funciones temporales, empleadas en el Control, no tienen esta transformada de Fourier. Por ejemplo, la función al escalón, la rampa o la parábola. Todas ellas son utilizadas como entradas de test para averiguar la dinámica de las plantas o de los procesos.

Véase el caso de la función escalón unitario, ésta se define como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Nótese que esta función no puede tener transformada de Fourier, al no cumplir la condición de convergencia absoluta. Pero fíjese también, que esta función no existe en la naturaleza, pues supone un aporte de infinita energía; por dicha razón, no se ha puesto el nombre de señal al escalón sino de función escalón. ¿Pero, entonces, por qué esta discrepancia entre lo real y lo teórico?. Desde luego, todas las señales físicas² tienen transformadas de Fourier, ya que hay finitud de la energía y por ende cumplimiento de la condición de convergencia absoluta. Pero por otro, la teoría del Control emplea este artificio matemático para facilitar la comprensión evolutiva del sistema, ya que independiza la respuesta permanente de la transitoria.

Con el propósito de tener las transformadas para estas funciones, se añade al núcleo de la transformación una exponencial monótonamente decreciente con el tiempo, $e^{-\sigma t}$. La transformada de Laplace quedará definida por:

$$F(\sigma, \omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \xRightarrow{s=\sigma+j\omega} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.13)$$

Obsérvese que el límite inferior de la integración se ha definido con el tiempo igual a cero y no desde el menos infinito; ello es debido a que para valores de $\sigma > 0$ el factor de convergencia diverge cuando el tiempo se extienda por valores negativos de tiempo. Pero esto no es un problema, ya que se está expresando que la información contenida en $f(t)$ antes del tiempo inicial, $t = 0$ s, se ignora o se considera cero. Además, cuando un sistema es excitado por una entrada en un tiempo determinado, la referencia del tiempo es puesta a cero en el momento de iniciar el estímulo; esto supone que los sistemas físicos reales no comienzan a responder antes que $t = 0$ s, esto es, la salida no precede en el tiempo a la entrada. A estos sistemas se les llama causales o simplemente, físicamente realizables.

² Por supuesto se hace referencia a las ondas y que como tal se definen como las perturbaciones de un medio que se propagan en el espacio, transportando energía y cantidad de movimiento.

A continuación se emplea la transformada de Laplace sobre algunas de las funciones y señales típicas de control:

1. Función escalón unitario, $f(t) = 1 \quad t \geq 0$:

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

2. Función exponencial decreciente, $f(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0$:

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} \cdot dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{(s+\alpha)}.$$

3. Señal senoidal, $u(t) = U_{\max} \sin(\omega_0 t) \quad t \geq 0$:

$$L(u(t)) = U(s) = U_{\max} \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-st} \cdot dt = \frac{U_{\max}}{2j} \left[\frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{-(s-j\omega_0)} - \frac{e^{-(s+j\omega_0)t}}{-(s+j\omega_0)} \right]_0^{\infty} = U_{\max} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

2.3.1 Teoremas importantes de la transformada de Laplace

Las aplicaciones de la transformada de Laplace, en muchos casos, se simplifican al emplear las propiedades de la transformada. Estas propiedades se presentan con los siguientes teoremas, para los cuales no se dan ninguna demostración.

Teorema 1: Multiplicación por una constante: Sea k una constante, $L(k \cdot f(t)) = k \cdot F(s)$. Característica conseguida por las propiedades de las integrales.

Teorema 2: Suma y resta de dos funciones temporales: Considere a y b que son constantes, $L(a \cdot f_1(t) \pm b \cdot f_2(t)) = a \cdot F_1(s) \pm b \cdot F_2(s)$. Igualmente que en el teorema 1, es posible por las propiedades de las integrales.

Teorema 3: Diferenciación: $L\left(\frac{d(f(t))}{dt}\right) = s \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) = s \cdot F(s) - f(0)$.

Conseguida a través de una integración por partes. Mientras para el caso más general de derivada de orden n , se aplicará la regla de la recurrencia:

$$L\left(\frac{d^n(f(t))}{dt^n}\right) = s^n \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} \left(s^{n-1} f(t) + s^{n-2} \frac{d(f(t))}{dt} + s^{n-3} \frac{d^2(f(t))}{dt^2} + \dots + \frac{d^{n-1}(f(t))}{dt^{n-1}} \right)$$

$$L\left(\frac{d^n(f(t))}{dt^n}\right) = s^n \cdot F(s) - (s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f^1(0) + s^{n-3} f^2(0) + \dots + f^{n-1}(0))$$

Teorema 4: Integración: $L\left(\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$; de la misma manera que en la diferenciación, se consigue a través de integración por partes. Aplicando recurrencia, la integración de n-ésimo orden quedará como, $L\left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) \cdot d\tau \cdot dt_1 \dots \cdot dt_{n-1}\right) = \frac{F(s)}{s^n}$.

Teorema 5: Teorema del valor inicial (sólo aplicable si $f(t)$ está acotada):
 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$.

Teorema 6: Teorema del valor final (sólo aplicable si $f(t)$ está acotada):
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$.

Teorema 7: Traslación compleja: Considerando α una constante,
 $L(e^{\pm \alpha} f(t)) = F(s \mp \alpha)$.

Teorema 8: Traslación temporal. Sea una función temporal, $f(t)$, multiplicada por otra de tipo escalón unitario, $u(t)$, quedara $L(f(t) \cdot u(t)) = F(s)$. Cuando la señal está retrasada un tiempo T , es como se le aplicara un escalón también con ese retraso, $L(f(t-T) \cdot u(t-T)) = e^{-sT} F(s)$.

Teorema 9: Convolución. La convolución de dos funciones temporales es la convolución de sus transformadas pero que es igual a su multiplicación: $L(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) * F_2(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$.

2.3.2 Transformada inversa de Laplace mediante la expansión de fracciones simples

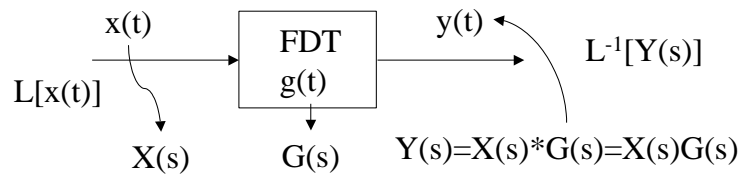
El modelado de los sistemas de Control mediante expresiones LTI continuas, supone que la función de transferencia, FDT, del sistema en transformada de Laplace aparece en forma de fracciones de polinomios en el dominio complejo, s . Desde otro punto de vista, se puede mencionar que cuando los modelos se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales, en el dominio complejo aparecen expresiones racionales en s (en el siguiente capítulo se demostrará), pudiéndose escribir de la forma:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.14)$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son dos polinomios en s . El grado de $D(s)$ coincide con el grado de la ecuación diferencial. Por la condición de causalidad, el grado de $N(s)$ será igual o menor al grado de $D(s)$. Las raíces del denominador, $D(s)$, se les llama polos y a las del numerador, $N(s)$, ceros.

Por otro lado, las señales típicas de control de entrada (escalón, rampa, senoidal,...), sus transformadas son también expresiones polinómicas. Luego por aplicación del teorema de la convolución, las transformadas de Laplace de las señales de salida de estos sistemas estarán constituidas por fracciones polinómicas.

Ya se tiene todos los elementos necesarios para el procedimiento de análisis del comportamiento dinámico, sin necesidad de calcular la ecuación diferencial. Una vez obtenida la expresión de la transformada de Laplace de la salida, sólo habrá de calcular su anti-transformada o transformada inversa, obteniendo la evolución temporal de la señal de salida.



Al ser $Y(s)$ en forma de polinomio en el denominador y el numerador, se puede hacer una transformada inversa a través de una descomposición en fracciones simples. Hay que considerar dos casos: a) las raíces del denominador son simples o b) hay multiplicidad en los polos.

Si los polos de $Y(s)$ son simples y el grado del denominador es n , al aplicarle la expansión en fracciones simples quedará como:

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s + s_1)} + \frac{k_2}{(s + s_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s + s_n)} \quad (2.15)$$

donde k_i es el coeficiente i-ésimo, cuyo calculo del residuo estará determinado por:

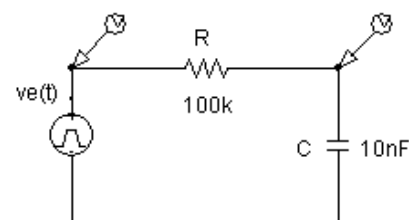
$$k_i = \left[(s + s_i) Y(s) \right]_{s = -s_i} \quad (2.16)$$

La solución en el dominio temporal resultará de aplicar el teorema de la traslación compleja:

$$y(t) = \sum_{i=0}^n k_i e^{-s_i t} \quad (2.17)$$

Ejemplo 2.3

Calcular la evolución temporal de la tensión de salida, $u_s(t)$, de un cuadripolo RC, ante una excitación en la entrada, $u_e(t)$, de tipo



escalón unitario. Considere condiciones iniciales nulas.

La ecuación diferencial que explica el comportamiento dinámico del cuadripolo es:

$$u_e(t) = RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$A_v(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

La transformada de la señal de salida resultará:

$$U_s(s) = U_e(s)A_v(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + RCs} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \quad (2.18)$$

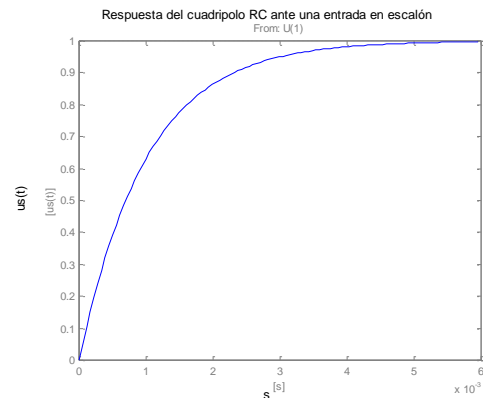
El cálculo de los residuos valdrá:

$$k_1 = [s \cdot U_s(s)]_{s=0} = 1$$

$$k_2 = \left[\left(s + \frac{1}{RC} \right) \cdot U_s(s) \right]_{s=-1/RC} = -1$$

El primer término de la ec. (2.18) corresponde con una salida en escalón unitario, mientras el segundo, por aplicación del teorema de traslación compleja, es una exponencial monótonamente decreciente:

$$u_s(t) = 1 - e^{-t/RC}$$



Si hay algún polo que tenga multiplicidad, el cálculo de los coeficientes para estos polos iguales será diferente. Sea el caso de tener un polo de multiplicidad r , el grado del denominador sea n y el resto de los polos sean simples:

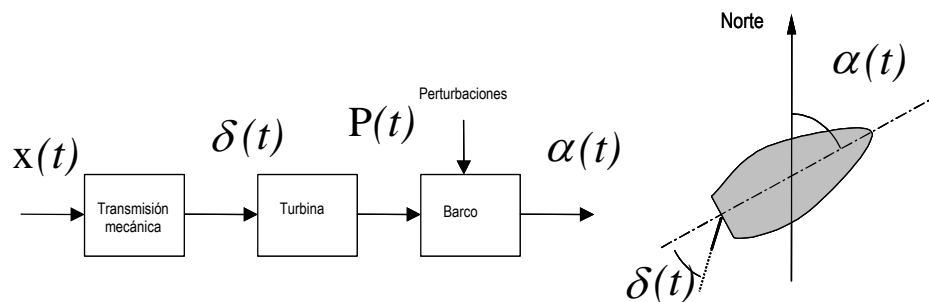
$$Y(s) = \frac{Q(s)}{(s + s_1) \dots (s + s_{n-r})(s + s_i)^r} = \frac{k_1}{(s + s_1)} + \dots + \frac{k_{n-r}}{(s + s_{n-r})} + \frac{A_1}{(s + s_i)} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r} \quad (2.19)$$

Los coeficientes de los polos simples, k_1, \dots, k_{n-r} , se calcula según la ec. (2. 16); mientras los coeficientes A_1, A_2, \dots, A_r de los polos de multiplicidad estarán determinados por las expresiones:

$$\begin{aligned}
 A_r &= \left[(s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i} \\
 A_{r-1} &= \left[\frac{d}{ds} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i} \\
 A_{r-2} &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i} \\
 &\vdots \\
 A_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i}
 \end{aligned} \tag{2. 20}$$

Ejemplo 2.4

Determinar el comportamiento dinámico de un barco ante una entrada unitaria en el cambio del timón de éste. Con este propósito se ha extraído un diagrama a bloques y un modelo de comportamiento para un conjunto de velocidades válidas. Así, se observa que el ángulo $\delta(t)$ dado en radianes del timón, provoca un par de giro sobre el barco de $P(t) = 500 \frac{Nm}{rad} \cdot \delta(t)$, el cual provoca un giro $\alpha(t)$ sobre el barco según la siguiente ecuación diferencial, $\dot{\alpha}(t) + 10\ddot{\alpha}(t) = 0.002 P(t)$. Por otro lado, el sistema de transmisión mecánica del timón de control, $x(t)$, al timón del barco, $\delta(t)$, responde a $\delta(t) + \dot{\delta}(t) = x(t)$.



Considérese condiciones iniciales nulas.

Las expresiones que modelan el comportamiento dinámico del sistema en el dominio complejo serán:

$$G_1(s) = \frac{\delta(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{P(s)}{\delta(s)} = 500$$

$$G_3(s) = \frac{\alpha(s)}{P(s)} = \frac{0.002}{s(10 \cdot s + 1)}$$

Por tanto, la transformada de Laplace del rumbo del barco, $\alpha(s)$, ante una entrada en escalón será:

$$\alpha(s) = X(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

$$\alpha(s) = \frac{1}{s} \frac{0.1}{s(s+1)(s+0.1)} = \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s} + \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+0.1)}$$

El cálculo de los residuos valdrá:

$$a_2 = [s^2 \alpha(s)]_{s=0} = 1$$

$$a_1 = \left[\frac{d}{ds} (s^2 \alpha(s)) \right]_{s=0} = -11$$

$$k_1 = [(s+1)\alpha(s)]_{s=-1} = -\frac{1}{9}$$

$$k_2 = [(s+0.1)\alpha(s)]_{s=-0.1} = \frac{100}{9}$$

La respuesta del barco ante un cambio de rumbo unitario será:

$$\alpha(t) = t - 11 - \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{100}{9} e^{-0.1t}$$

Mostrando que el barco es ingobernable con esta estrategia de control.

2.4 Uso de Matlab en las transformadas de Laplace

En estos apuntes se emplearán simulaciones numéricas con Matlab®. Algunos ejercicios llevan anotados sus *scripts* correspondientes, los cuales están soportados por el 'toolbox' de 'Control' de Matlab.

Así, en este lenguaje de programación para definir las FDT de los sistemas se empleará el comando *tf*(). Se definirán los vectores fila del numerador y del denominador a partir de los coeficientes del polinomio:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots a_n s^n}$$

$$>> g = tf([b_m \ b_{m-1} \dots b_2 \ b_1 \ b_0], [a_n \ a_{n-1} \dots a_2 \ a_1 \ a_0])$$

Ejemplo 2.5

Para determinar la respuesta del cuadripolo RC del ejemplo 2.3 sería:

```
>> g1 = tf(1,[1e-3 1])
>> step(g1)
```

El comando *step*() aplica una excitación de escalón unitario y visualiza la respuesta en el dominio temporal. Para el caso del barco del ejemplo 2.4 la salida sería:

```
>> g2 = tf(0.1,poly([0 -0.1 -1]))
>> step(g2)
```

La función *poly*() devuelve los coeficientes del polinomio a partir de sus raíces.

Si se desea realizar la descomposición en fracciones simples y por ende también el cálculo de los residuos, esta operación se realiza con el comando *residue*():

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots a_n s^n} = \frac{r(1)}{(s - p(1))} + \frac{r(2)}{(s - p(2))} + \dots + \frac{r(n)}{(s - p(n))} + k(s)$$

```
>> [r, p, k] = residue([b_m b_{m-1} \dots b_2 b_1 b_0], [a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0])
```

Ejemplo 2.6

En el ejemplo del cuadripolo RC sería:

```
>> [r1,p1,k1] = residue(1,[1e-3 1 0])
```

Y para el barco:

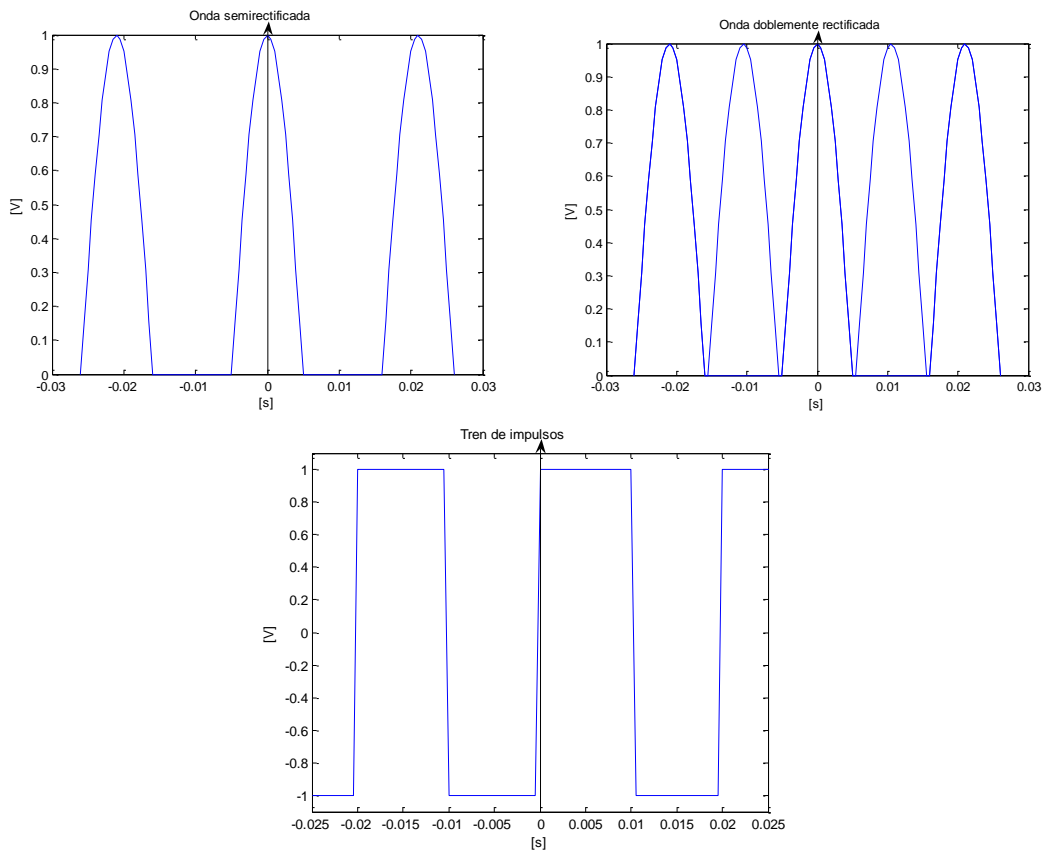
```
>> [r2,p2,k2] = residue(0.1,poly([0 0 -0.1 -1]))
```

Nótese que se ha añadido un polo en el origen en ambas expresiones. Éste es el resultado de haber dado una excitación de entrada escalón unitario, incrementando el orden del polinomio del denominador en una unidad.

2.5 Problemas propuestos

Cuestión 2.1

Determinar las series de Fourier de una onda semirectificada y doblemente rectificada. También haga lo mismo con un tren de impulsos. Para facilitar el cálculo se presentan las gráficas adjuntas de estas señales habiendo buscado alguna propiedad de función par e impar.



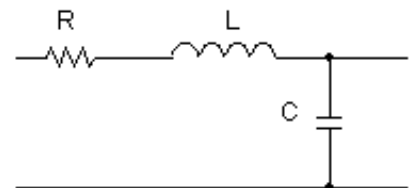
Cuestión 2.2

Determinar la transformada de Laplace de las señales de test: pulso de Dirac, escalón unitario, rampa unitaria y parábola unitaria.

1. Mediante la definición del operador de Laplace
2. Aplicando los teoremas

Cuestión 2.3

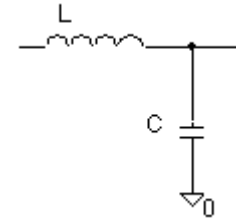
Determinar la FDT, ganancia de tensión, del cuadripolo eléctrico de la figura. Considérese



condiciones iniciales nulas.

Problema 2.1

Para determinar los valores del circuito LC de la figura se le aplica una entrada impulsional. Determinar



- Transformada de Fourier y de Laplace de la señal impulsional, $v_e(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t \geq \varepsilon \end{cases}$. Siendo ε que tiende a ser cero.
- Expresión analítica, en el dominio del tiempo, de la señal de salida al aplicar la entrada del apartado anterior.
- La salida es medida con un osciloscopio y el armónico es de 1kHz. Determinar el valor del condensador si la bobina es de 100 mH. Representar la señal de salida ante la entrada impulsional.

Problema 2.2

Se desea realizar el control automático de altura de un globo aerostático. Para ello se dispone de un quemador de gas controlado eléctricamente, de forma que ante una señal de referencia de 1 V, dicho quemador aporta 1 Kcal/seg al aire contenido en el globo.

Tras linealizar las ecuaciones del globo respecto de la altura del tejado de la Escuela, y de la presión y temperatura ambiental, se obtienen las siguientes ecuaciones que modelan su comportamiento:

$$\frac{d\Delta T(t)}{dt} = 0,3\Delta Q(t) - 0,1\Delta T(t)$$

$$\frac{d\Delta Z(t)}{dt} = \int_0^t \Delta T(t) - 2\Delta Z(t)$$

En donde $\Delta T(t)$ es el incremento, en grados Celsius, de temperatura del aire del globo respecto de la temperatura ambiental. $\Delta Z(t)$ es el incremento en metros de altura respecto del tejado de la Escuela. $\Delta Q(t)$ es el incremento en el flujo de calor (Kcal/seg) respecto del punto en el que el globo permanece equilibrado en las condiciones de linealización.

Para poder cerrar el lazo de control y de esta forma hacer el controlador de altura resistente a las perturbaciones, se dispone de un altímetro electrónico cuyo cero se ha fijado a la altura de linealización de las ecuaciones. Dicho altímetro da una señal de 10 mV/m . La referencia al sistema de control inicialmente se da por medio de un potenciómetro lineal calibrado de forma que a un incremento de 1 metro en la referencia provoca un incremento en la tensión de referencia de 10 mV .

Determinar el diagrama de bloques y la dinámica del globo ante una entrada en escalón unitario.

Problema 2.3

El sistema de control de una locomotora eléctrica está basado en una estructura de realimentación negativa. La velocidad de mando es convertida en una señal eléctrica con ganancia unitaria, la cual es comparada con la tensión de salida de un sensor de velocidad de traslación del tren, con ganancia k_T . La señal de error ataca a un amplificador de tensión con ganancia k . Esta etapa se conecta con el motor eléctrico de la locomotora, generando la fuerza de empuje del tren. Se pide:



1. Para determinar la función de transferencia del motor, se le aplica una función en escalón de 100V a la entrada del motor. La fuerza de empuje se registra y describe la siguiente evolución temporal:

$$f(t) = 5000 \cdot \left(1 - 1.5 \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 0.5 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \right)$$

Obtener la FDT del motor.

2. Diagrama a bloques del sistema de control de la locomotora.
3. Obtener el equivalente reducido de la FDT del motor, $\frac{f(s)}{u_m(s)}$.
4. Empleando el equivalente reducido del anterior apartado, determinar la expresión analítica de la evolución temporal de la velocidad del tren ante una entrada escalón de 1V al sistema de realimentación.

Datos

Masa del tren = 138 toneladas, $k = 20$, Constante de la dínamo, $k_T = 1$ [V/m/s]

1. Por la expresión temporal, la transformada de Laplace de la fuerza del motor aplicando el teorema de traslación compleja y descomposición en fracciones simples será del tipo:

$$F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{\left(s + \frac{1}{30}\right)} + \frac{k_3}{\left(s + \frac{1}{10}\right)}$$

Por tanto, si se aplica una entrada en escalón, la primera fracción corresponde a la excitación y el resto a la FDT entre la tensión aplicada al motor y su fuerza:

$$\frac{F(s)}{u_m(s)} = \frac{k_m}{\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{10}\right)}$$

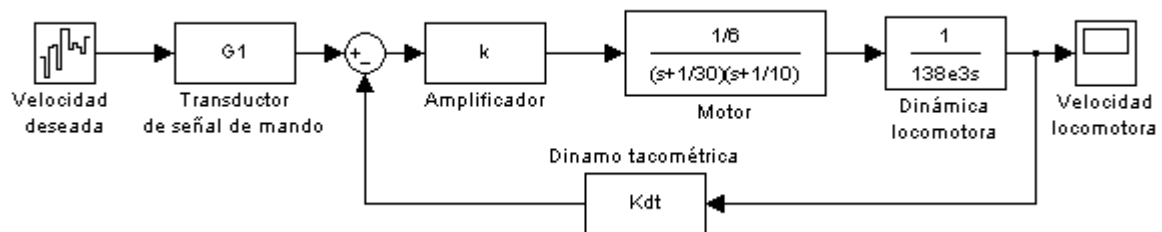
Para determinar k_m se aplicará el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{100}{s} \frac{k_m}{\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{10}\right)} = 5000 \Rightarrow k_m = \frac{1}{6}$$

2. La relación entre la fuerza aplicada a la locomotora y su velocidad será:

$$f = m_T \cdot \dot{v}_T \Rightarrow \frac{v_T(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_T \cdot s}$$

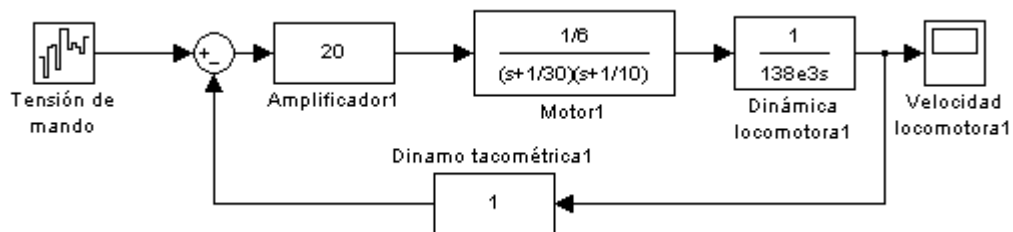
El diagrama a bloques quedará como:



3. El polo dominante será el ubicado en $-1/30$. Habrá que adecuar la ganancia estática:

$$G_{eq}(0) = \frac{10}{6} \quad G_{eq}(s) = \frac{10}{6 \cdot \left(s + \frac{1}{30}\right)}$$

4. La dinámica temporal requiere de saber cual es la FDT de la estructura realimentada:



La transformada de la velocidad de la locomotora es:

$$v_T(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{200}{828 \cdot 10^3 s^2 + 27 \cdot 10^3 s + 200}$$

Aplicando la antitransformada por descomposición en fracciones simples quedará:

$$v_T(t) = 1 - 1.88e^{-0.01t} + 0.88e^{-0.02t}$$

Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU".

La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](http://www.gnu.org/copyleft/) para [contenidos abiertos](http://www.gnu.org/copyleft/). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>