

# 8

## Estabilidad absoluta

---

Una de las especificaciones más importantes en un sistema de control es la estabilidad de éste. Se dice que un sistema es estable, si en condiciones iniciales nulas, ante una entrada acotada, la respuesta también está acotada.

Hay dos tipos de estabilidad: la absoluta y la relativa. La primera hace referencia a si el sistema es estable o no, mientras la estabilidad relativa cuantifica el nivel de estabilidad del sistema. En esta lección se va a tratar de determinar la estabilidad absoluta de sistemas LTI de tipo SISO.

### 8.1 Estabilidad absoluta en el dominio complejo.

---

Dentro del marco de sistemas LTI-SISO se ha observado, en los capítulos anteriores, que la estabilidad depende de la ubicación de las raíces del polinomio característico. Aquellos polos, de primer o segundo orden, que se encontraban situados en el semiplano positivo, aunque fuese uno sólo, hacían que la evolución de la señal de salida no estuviera acotada.

Un primer método para conocer la estabilidad absoluta del sistema es calcular las raíces del polinomio característico y observar que todas están en semiplano negativo. Las regiones de estabilidad e inestabilidad se muestran en la figura 8.1

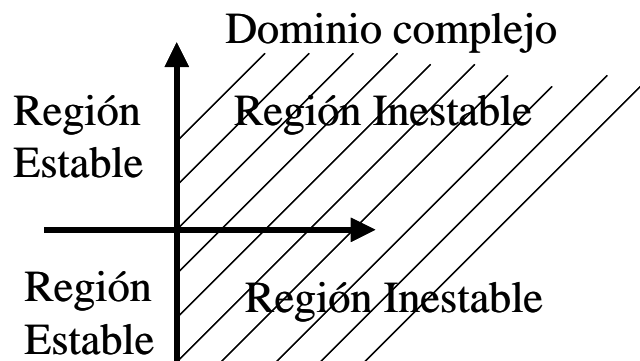


Figura 8. 1. Regiones estables e inestables en el dominio complejo

Se puede demostrar que para que la señal de salida sea acotada, ante una entrada acotada, se precisa que la respuesta impulsional del sistema tienda a cero cuando el tiempo aumenta. Esta condición se formula como una condición de convergencia absoluta:

$$\int_0^{t \rightarrow \infty} |g(\tau)| d\tau < \infty$$

## 8.2 Criterio de Routh-Hurwitz

Este criterio es un método algebraico que determina si las raíces de un polinomio de coeficientes constantes están en el semiplano izquierdo del dominio en  $s$ , sin necesidad de calcular las raíces.

Hoy en día, con los simuladores, la utilidad de este criterio es menor. Actualmente se suele emplear cuando hay un parámetro intrínseco y variable dentro del sistema y se desea predecir cuál es el rango que puede tener sin comprometer la estabilidad.

Como se ha comentado, la estabilidad de un sistema LTI-SISO depende de sus polos de la cadena cerrada. Las condiciones de Cardano-Vietta dice que para que un polinomio tenga sus raíces con parte real negativa, es necesario pero no suficiente que todos los coeficientes tengan el mismo signo y que ninguno sea nulo.

Para dar condición de suficiencia se requiere el criterio de Routh-Hurwitz basados en los determinantes de este último. Con el objeto de simplificar el cálculo de los determinantes de Hurwitz, Routh propuso una tabulación tal que si los elementos de la primera columna no cambian de signo, las raíces están en el semiplano negativo.

Sea  $D(s)$  el polinomio característico del sistema:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

El primer paso para construir la tabla consiste en ordenar los coeficientes en las dos primeras filas, alternando su posición entre la primera y segunda fila en orden decreciente del exponente:

$$\begin{array}{c|cccccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_3 & a_1 & \end{array}$$

La tabla estará constituida por  $n+1$  filas, siendo  $n$  el grado del polinomio característico. Los coeficientes a partir de la tercera fila, se formarán con los dados en las dos anteriores:

$$\begin{array}{c|cccccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_3 & a_1 & \\ s^{n-2} & b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & & & & \\ s^{n-3} & c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} & c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} & & & & \\ s^{n-4} & d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} & d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ s^1 & & & & & & \\ s^0 & & & & & & \end{array}$$

La expresión general de los coeficientes,  $x_{ij}$ , de cualquier fila  $i$ , a partir de la tercera, se constituirá por la fila  $i-1$  e  $i-2$ :

$$x_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{i-2,1} & x_{i-2,j+1} \\ x_{i-1,1} & x_{i-1,j+1} \end{vmatrix}}{-x_{i-1,1}}$$

Una vez calculada la tabla de Routh, si no hay cambio de signo en la primera columna de ésta no habrá raíces en el semiplano positivo. Tantos cambios en el signo de los coeficientes de la primera columna indican tantas raíces en el dominio complejo positivo.

**Ejemplo 8.1**

Estudiar la estabilidad de la planta:

$$G_p(s) = \frac{s-4}{s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10}$$

Cumple las condiciones de Cardano-Vietta, pero para la suficiencia habrá de constituir la tabla de Routh. Nótese que el cero no influye en la estabilidad, aunque éste se encuentre en el semiplano positivo. Eso sí, el sistema es de fase no mínima<sup>1</sup>.

$s^5$	1	3	16
$s^4$	1	9	10
$s^3$	-6	6	
$s^2$	10	10	
$s^1$	12	0	
$s^0$	10		

Hay dos cambios de signo, luego hay dos raíces con parte real positiva. El sistema es inestable. Así es, resolviendo el polinomio característico, los polos de la planta son:

$$1 \pm j2, -1 \pm j1 \text{ y } -1$$

**8.2.1 Casos especiales**

En las construcciones de las tablas se pueden encontrar con dos dificultades:

1. El primer coeficiente de una fila es cero.
2. Todos los coeficientes de una determinada fila son ceros.

Para el primer caso, con el propósito de terminar la confección de la tabla, se sustituirá el elemento nulo por un número positivo y tendente a cero,  $\varepsilon$ . Después se continuará elaborando la tabla y al acabarla se hace el límite del valor arbitrario  $\varepsilon$  hacia cero, analizándose los cambios de signo en la primera columna de la tabla.

---

<sup>1</sup> Un sistema de fase mínima tiene todos los polos y ceros en el semi-plano negativo del dominio complejo.

**Ejemplo 8.2**

Demostrar que hay dos polos en el semiplano derecho del dominio  $s$ :

$$G_p(s) = \frac{s+8}{s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3}$$

Al constituir la tabla de Routh, en la tercera fila aparece un cero en su primera columna. Se sustituye por  $\varepsilon$  y se continúa haciendo la tabla:

	$s^4$	1	2	3	Los polos son:
	$s^3$	1	2		$0.4057 \pm j 1.2928$
Cambio de	$s^2$	$\varepsilon$	3		$-0.9057 \pm j 0.902$
signo	$s^1$	$\frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon}$			
Cambio de	$s^0$	3			
signo					

Al hacer el límite cuando  $\varepsilon$ , desde los positivos, tiende a cero, se observan dos cambios de sentido, por tanto hay dos raíces con parte real positiva. El sistema es inestable.

Una fila de ceros en la tabla de Routh indica la existencia de raíces simétricas respecto del eje imaginario. El sistema bien tiene uno o más pares de polos en el eje imaginario o al menos un par de polos con igual valor absoluto, en la parte real, pero de signo contrario. El sistema resultante será inestable o críticamente estable.

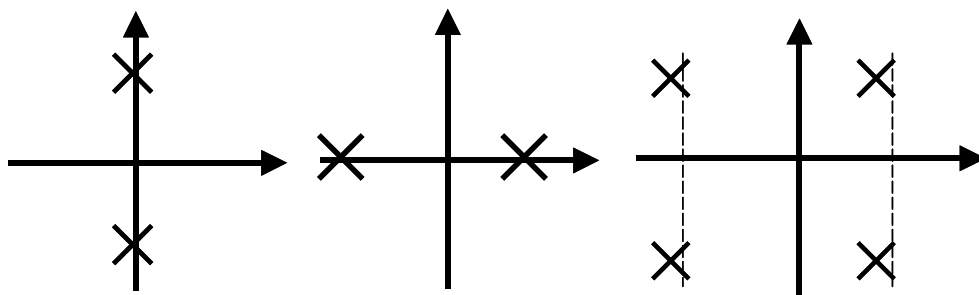


Figura 8. 2. Ubicación de los polos cuando aparece una fila entera de ceros en la tabla de Routh

Para continuar en la elaboración de la tabla de Ruth se seguirán los siguientes pasos:

1. Construir un polinomio auxiliar,  $D^*(s)$ , con los coeficientes de la fila anterior a la de los ceros.
2. Calcular  $dD^*(s)/ds$
3. Sustituir los ceros de la fila en cuestión, por los coeficientes dados por  $D^*(s)$ , según el grado del polinomio.
4. Continuar con la elaboración de la tabla

### **Ejemplo 8.3**

Determinar la estabilidad de una planta cuya FDT es:

$$G_p(s) = \frac{s^2 + 3s + 8}{s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4}$$

Realizando la tabla de Routh:

$s^5$	1	8	7
$s^4$	4	8	4
$s^3$	6	6	
$s^2$	4	4	
$s^1$	0		
$s^0$	?		

Se observa que en la fila de  $s^1$  hay una fila de ceros. El polinomio auxiliar se construye con la fila anterior,  $s^2$ ,

$$D^*(s) = 4s^2 + 4 \quad \frac{D^*(s)}{ds} = 8s^1$$

Sustituyendo el resultado del polinomio auxiliar en la fila de ceros,  $s^1$ :

$s^5$	1	8	7
$s^4$	4	8	4
$s^3$	6	6	
$s^2$	4	4	
$s^1$	8		
$s^0$	4		

No hay ningún cambio de signo, luego las raíces estarán en el eje imaginario. Efectivamente las raíces del polinomio característicos son

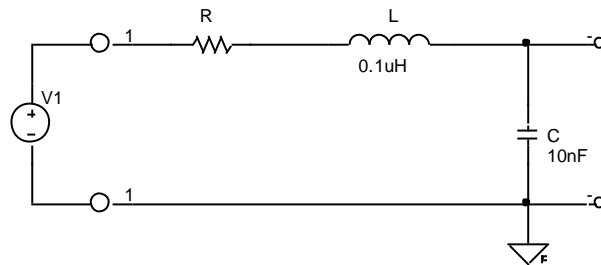
```
>> roots([1 4 8 8 7 4]) % Código MATLAB
```

-1,5±j1.32 , ±j1 , -1 (polos)

### 8.3 Problemas

#### Problema 8.1

Determinar la condición de oscilación y su frecuencia para el cuadripolo RLC en serie. Representar la salida ante una entrada en escalón.



La FDT del circuito y por tanto, su ganancia de tensión es:

$$A_v(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Aplicando sobre el polinomio característico la tabla de Routh se deduce que el sistema resonará si el valor de la resistencia se hace nulo. Esta conclusión se deriva de que sólo haciendo R igual a cero se consigue una fila de ceros,

$s^2$	LC	1	$D^*(s) = LCs^2 + 1$ $\frac{dD^*(s)}{ds} = 2LCs$
$s^1$	RC		
$s^0$	1		

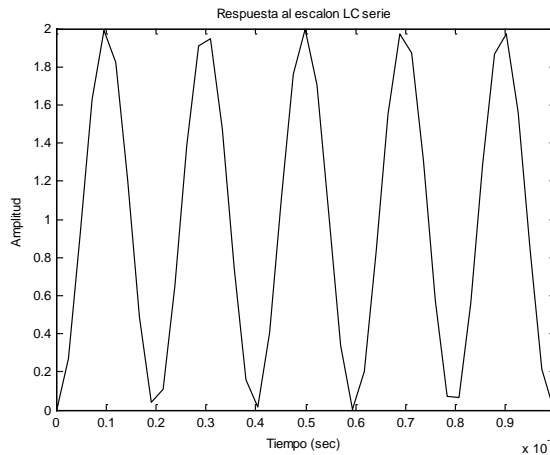
y al calcular el polinomio auxiliar no hay cambios de signo en la primera columna, por tanto las raíces son imaginarias puras y conjugadas:

$s^2$	LC	1
$s^1$	2LC	
$s^0$	1	

La frecuencia de oscilación coincidirá con la frecuencia de amortiguamiento:

$$R = 0\Omega \rightarrow \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left[ \frac{rad}{s} \right] \omega_d = 31.623 \left[ \frac{rad}{s} \right] T \approx 200\mu s$$

Ante una entrada en escalón, su respuesta será:

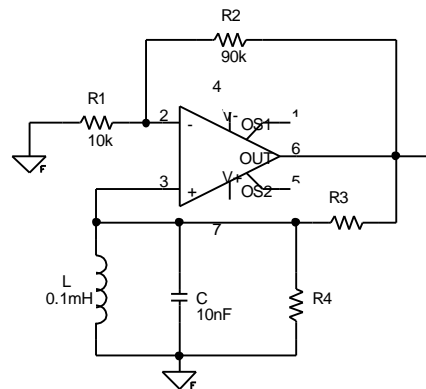


### Problema 8.2

Determinar la condición de oscilación y su frecuencia para el montaje de la figura. Considérese que el amplificador operacional es ideal.

El circuito está constituido por un amplificador no inversor y una red de realimentación. La ganancia del amplificador básico es:

$$A_v = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) = 10$$



La red de realimentación está formada por el cuadripolo pasivo de R3, R4, C y L. Empleando el método de mallas, la ecuación diferencial que explica su dinámica es:

$$u_s(t) = R3 \cdot i(t) + u_r(t) \quad i(t) = \frac{u_r(t)}{R4} + C \dot{u}_r(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u_r(\tau) d\tau$$

Aplicando transformada de Laplace se conseguirá la ganancia de tensión de realimentación:

$$u_s(s) = R3 \left[ \frac{1}{R4} + Cs + \frac{1}{Ls} \right] u_r(s) + u_r(s)$$



$$H(s) = \frac{u_r(s)}{u_s(s)} = \frac{1}{\frac{R3}{R4} + C \cdot R3 \cdot s + \frac{R3}{L \cdot s} + 1} = \frac{Ls}{s^2 LC \cdot R3 + sL \left(1 + \frac{R3}{R4}\right) + R3}$$

Si se designa por  $k$  la ganancia del amplificador no inversor,  $k = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right)$ , y se observa que el procesamiento de la señal corresponde con una realimentación positiva sin excitación en la entrada, por tanto:

$$A_v(s) = \frac{k}{1 - kH(s)} = \frac{k \left( s^2 LC \cdot R3 + sL \left(1 + \frac{R3}{R4}\right) + R3 \right)}{s^2 LC \cdot R3 + sL \left(1 + \frac{R3}{R4} - k\right) + R3}$$

$s^2$	LC R3	R3	$\Rightarrow k = 1 + \frac{R'}{R''}$
$s^1$	$L \left(1 + \frac{R3}{R4} - k\right)$		
$s^0$	R3		

(condición de oscilación)

La FDT del oscilador será:

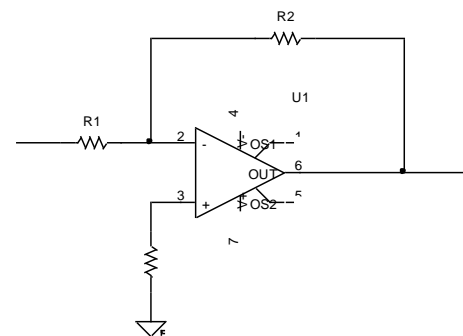
$$A_v(s) = \frac{k \left[ s^2 LC + sL \left( \frac{1}{R3} + \frac{1}{R4} \right) + 1 \right]}{[s^2 LC + 1]}$$

y la frecuencia de oscilación será  $\omega_d = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

### Problema 8.3

Determinar el rango de la red de realimentación,  $\beta$ , para que el amplificador inversor de la figura sea estable. Se puede demostrar que la ganancia de tensión del circuito es:

$$A_v(s) = -\frac{R2}{R1 + R2} \frac{A_{do}(s)}{1 + A_{do}(s)\beta(s)}$$



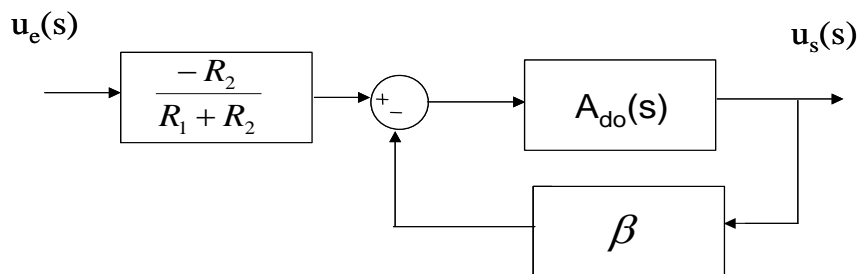
donde  $A_{do}$  es la ganancia de tensión en vacío del amplificador operacional:

$$A_{do}(s) = \frac{10^6}{\left(1 + s \frac{1}{2\pi \cdot 100}\right) \left(1 + s \frac{1}{2\pi \cdot 10^5}\right) \left(1 + s \frac{1}{2\pi \cdot 10^6}\right)}$$

y la FDT de la red de realimentación es:

$$\beta(s) = \frac{R1}{R1 + R2}$$

El modelo en diagrama de bloques del amplificador inversor sería:



El polinomio característico será:

$$D(s) = 1 + A_{do}(s)\beta = 1 + \frac{10^6 \beta}{\left(1 + s \frac{1}{2\pi \cdot 100}\right) \left(1 + s \frac{1}{2\pi \cdot 10^5}\right) \left(1 + s \frac{1}{2\pi \cdot 10^6}\right)}$$

$$D(s) = 4.031 \cdot 10^{-16} s^3 + 2.786 \cdot 10^{-9} s^2 + 1.593 \cdot 10^{-3} s + 1 + 10^6 \beta$$

Obsérvese que en este montaje, la estabilidad depende exclusivamente de la estructura de realimentación negativa. Empleando el criterio de Routh, la tabla se confecciona:

$s^3$	$4.031 \cdot 10^{-16}$	$1.593 \cdot 10^{-3}$
$s^2$	$2.786 \cdot 10^{-9}$	$1 + 10^6 \beta$
$s^1$	$\frac{(2.786 \cdot 10^{-9} \cdot 1.593 \cdot 10^{-3}) - (1 + 10^6 \beta) 4.031 \cdot 10^{-16}}{2.786 \cdot 10^{-9}}$	
$s^0$	$1 + 10^6 \beta$	

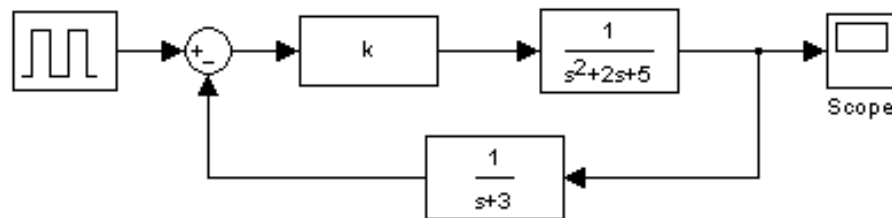
Cuyas condiciones sobre el valor de la red de realimentación vienen dada por las filas de  $s^1$  y  $s^0$ :

$$1 + 10^6 \beta > 0 \rightarrow \beta > -10^{-6} \cong 0$$

$$2.786 \cdot 10^{-9} \cdot 1.593 \cdot 10^{-3} - (1 + 10^6 \beta) 4.031 \cdot 10^{-16} \rightarrow \beta < 0.011$$

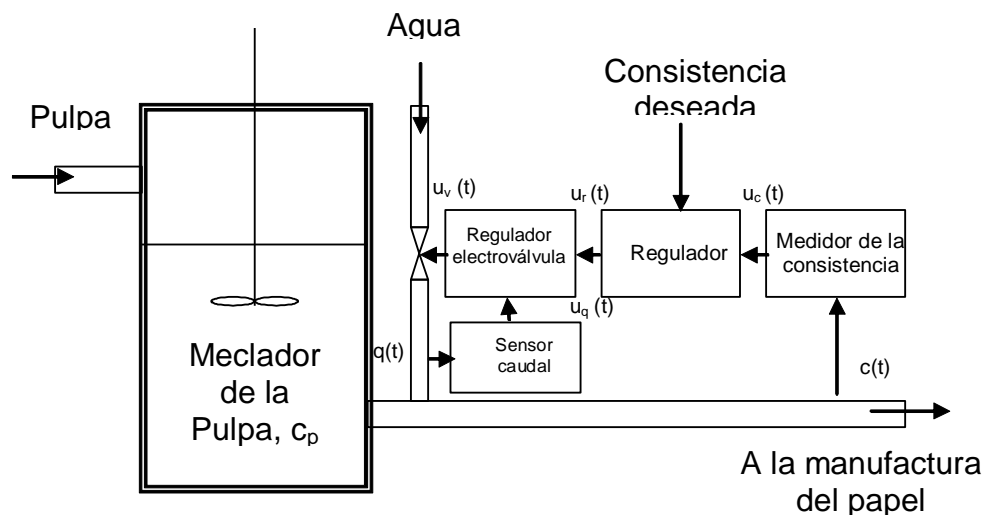
### Problema 8.4

Demostrar que los valores de la ganancia estática,  $k$  debe ser mayor que  $-15$  y menor a  $40$  para que sea estable el siguiente modelo de sistema de control.



### Problema 8.5

En un proceso de fabricación de papel, se pretende controlar la consistencia,  $c(t)$ , de la pasta antes de proceder con su secado. Esta consistencia se varía añadiendo mayor o menor cantidad de agua,  $q(t)$ , a la pasta que sale del mezclador de la pulpa, la cual tiene una consistencia previa,  $c_p(t)$ , de modo que se cumple:



$$\dot{c} + c - c_p = \dot{q} - q$$

Para asegurarse que la consistencia  $c$  se ajusta a las especificaciones, se dispone del sistema de control de la figura. La consistencia deseada es

comparada con el medidor de la consistencia. El transductor es un captador de tipo óptico capaz de proporcionar una tensión en función de la consistencia:

$$u_c = 3\sqrt{10c} + 4$$

La señal de error generada,  $u_{err}$ , es procesada por un compensador que responde a la ecuación diferencial de:

$$10\dot{u}_r + u_r = k \cdot u_{err}$$

La salida del regulador,  $u_r$ , ataca al regulador de la electroválvula, consistente en un sensor de caudal y un compensador proporcional de ganancia 0.5. El detector de caudal del agua produce una tensión eléctrica de la forma:

$$u_q = 125q^2$$

La electroválvula deja pasar el caudal del agua en función de la tensión dada:

$$\dot{q} + 0.1q = 0.1u_v$$

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que define el sistema de control.
2. Punto de reposo del sistema, si la consistencia inicial,  $c_0$ , es 0.4 y la previa,  $c_{p0}$ , es 0.8.
3. Linealización del sistema a partir del punto de reposo.
4. Diagrama a bloques del sistema.
5. Función de transferencia  $\frac{\Delta c(s)}{\Delta c_{deseada}(s)}$  y  $\frac{\Delta c(s)}{\Delta c_p(s)}$
6. Estabilidad del sistema en función de la ganancia  $k$  del regulador.

1. Las ecuaciones que modelan el comportamiento de fabricación del papel son:

$$\begin{aligned}
c_{deseada}(t) - u_c(t) &= u_{err}(t) & 10\dot{u}_r(t) - u_r(t) &= k \cdot u_{err}(t) \\
u_r(t) - u_q(t) &= u_{err2}(t) & u_v(t) &= 0.5 \cdot u_{err2}(t) \\
\dot{q}(t) + 0.1 \cdot q(t) &= 0.1 \cdot u_v(t) & c + c - c_p &= \dot{q} - q \\
u_c(t) &= 3\sqrt{10 \cdot c} + 4 & u_q &= 125 \cdot q^2
\end{aligned}$$

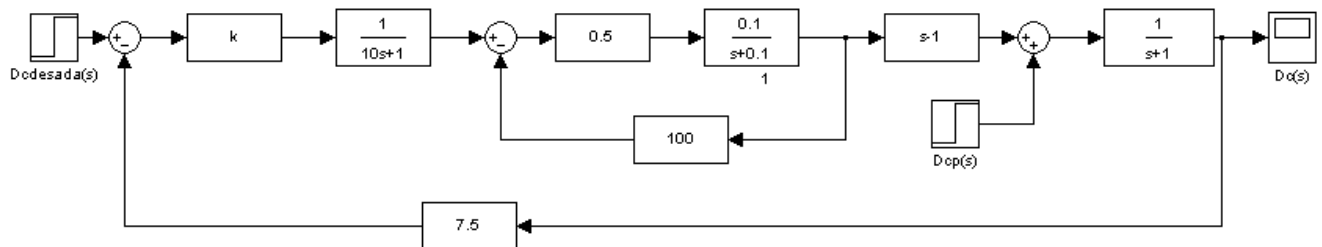
2. El punto de reposo del sistema es:

$$\begin{aligned}
u_{c0} &= 10V & u_{q0} &= 20V & u_{v0} &= 0.4V & u_{err20} &= 0.8V \\
u_{r0} &= 20.8V & u_{err0} &= 20.8/k V & c_{deseado0} &= 20.8/k + 10V & q_0 &= 0.4 \frac{m^3}{s}
\end{aligned}$$

3. La linealización del conjunto de ecuaciones respecto del punto de reposo estará definido por:

$$\begin{aligned}
\Delta c_{deseada}(t) - \Delta u_c(t) &= \Delta u_{err}(t) & 10\Delta \dot{u}_r(t) - \Delta u_r(t) &= k \cdot \Delta u_{err}(t) \\
\Delta u_r(t) - \Delta u_q(t) &= \Delta u_{err2}(t) & \Delta u_v(t) &= 0.5 \cdot \Delta u_{err2}(t) \\
\Delta \dot{q}(t) + 0.1 \cdot \Delta q(t) &= 0.1 \cdot \Delta u_v(t) & \Delta c + \Delta c - \Delta c_p &= \Delta \dot{q} - \Delta q \\
\Delta u_c(t) &= 7.5 \Delta c & \Delta u_q &= 100 \cdot \Delta q
\end{aligned}$$

4.



5.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta c(s)}{\Delta c_{deseada}(s)} &= \frac{k \cdot 0.05 \cdot (s-1)}{(10 \cdot s+1)(s+5.1)(s+1) + 7.5 \cdot k \cdot 0.05 \cdot (s-1)} \\
\frac{\Delta c(s)}{\Delta c_p(s)} &= \frac{(10 \cdot s+1)(s+5.1)}{(10 \cdot s+1)(s+5.1)(s+1) + 7.5 \cdot k \cdot 0.05 \cdot (s-1)}
\end{aligned}$$

6. Como ambas FDT tienen igual polinomio característico, realizando Routh el valor de ganancia queda establecido en el rango de -129.2 a 13.6.

Derecho de Autor © 2013 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU". La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](#) para [contenidos abiertos](#). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>