

# 4 Modelado matemático de los sistemas dinámicos

---

En la predicción del comportamiento dinámico de un sistema (fase de análisis), o en su mejora en la evolución temporal o frecuencial (fase de diseño), se requiere de modelos matemáticos tanto del equipo como de las señales que hay en su alrededor. Este requisito es cada vez más importante en las nuevas fases de elaboración y producción de los equipos y está relacionado con la competitividad de las empresas. Hoy en día, cuando un nuevo producto se está diseñando, antes de iniciar las etapas de realización física del sistema, éste debe haber superado las pruebas de la simulación. Los simuladores son programas de ordenador que predicen el comportamiento dinámico de los sistemas. Estos paquetes de software se basan en el modelado matemático de los elementos que constituyen los sistemas y de las señales que les atacan<sup>1</sup>. La validez de los simuladores depende de la aproximación que hay entre los modelos matemáticos de los componentes y sus verdaderos comportamientos físicos. Luego una mayor sofisticación en los modelos supondrá una mayor veracidad al comportamiento real, produciendo casi nulas diferencias entre lo indicado por la simulación y su implementación física. Por tanto, no es de extrañar la importancia que tienen los simuladores en las empresas.

---

<sup>1</sup> Por ejemplo, en Ingeniería Electrónica es ampliamente utilizado el programa PSPICE. Al emplear este programa se utilizan unas librerías de modelos de los componentes electrónicos, de esta forma es posible analizar o diseñar los circuitos.

Hay una gran variedad de modelado dinámico, se podrían citar áreas de la construcción, la aeronáutica, la producción industrial o la logística, entre otros. Pero concretando sobre los sistemas de control, estos suelen tener componentes eléctricos y mecánicos, aunque algunos también llevan elementos neumáticos e incluso hidráulicos. En este capítulo se va a tratar del modelado de algunos sistemas eléctricos y mecánicos. De otro lado, la importancia en la Ingeniería de Control de los motores de corriente continua de imanes permanentes y sus transductores marcará un apartado distinto. Para finalizar, también se estudiará el modelado de los sistemas térmicos.

## 4.1 Sistemas eléctricos y electrónicos

En estos sistemas se aplicarán las leyes de Kirchhoff, tanto los métodos de mallas y nudos. Por ejemplo, el programa PSPICE suele emplear el método de los nudos.

Para el análisis de los cuadripolos eléctricos se empleará, en este caso, el método de mallas y se tratará de obtener el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que expliquen las relaciones entre las entradas y las salidas. Posteriormente, se aplicará las transformadas de Laplace y se conseguirá la FDT, ya sea por tratarse de un sistema LTI o por un proceso de linealización.

En el capítulo 2, en el ejemplo 2.3, se había analizado la relación entre la tensión de salida y entrada en un cuadripolo RC. Considerando condiciones iniciales nulas, se obtenía fácilmente la ganancia de tensión y por tanto su FDT:

$$u_e(t) = RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

Aplicando transformada de Laplace, con condiciones iniciales nulas:

$$A_v(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

Un cuadripolo algo más complejo es el mostrado en la figura 4.1 b. A simple vista parece que resulta una cascada en serie de dos circuitos RC y que podría decirse que su FDT, por lo estudiado en el anterior capítulo, es el producto de los dos bloques:

$$A_v(s) = A_{v1}(s) \cdot A_{v2}(s) = \frac{1}{1 + R_1 C_1 s} \cdot \frac{1}{1 + R_2 C_2 s} \quad (4.1)$$

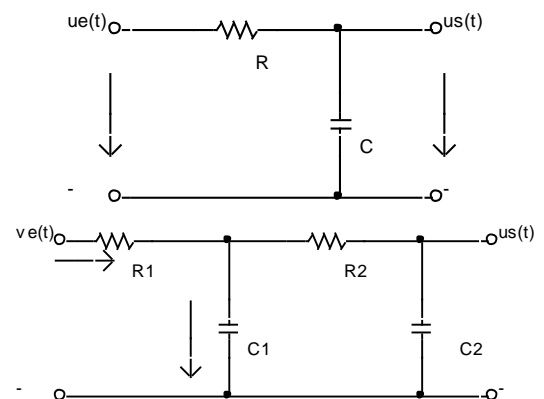


Figura 4. 1 a) Cuadripolo RC b) Cuadripolo R1C1-R2C2

Sin embargo, el resultado es falso. No se ha cumplido con la definición de bloque, dada en el anterior capítulo (ver apartado 3.3). Para que sea un bloque, la señal de salida del subsistema sólo debe depender de la entrada. Sin embargo, en este ejemplo, la salida del primer cuadripolo está acoplada con la impedancia de entrada del segundo.

No es verdad que la relación que hay entre la tensión del condensador 1 y la entrada sea:

$$u_e(t) = R_1 C_1 \dot{u}_{c1}(t) + u_{c1}(t)$$

La corriente que circula por  $R_1$  es la que circula por  $C_1$  más otra corriente que pasa por  $R_2$ . Se observa que existe un acoplamiento entre los dos cuadripolos. Es un problema de adaptación de impedancias entre los dos subsistemas eléctricos. El planteamiento correcto podría hacerse a través del método de las mallas:

$$\begin{aligned} u_e(t) &= R_1 (C_2 \dot{u}_{c2}(t) + C_1 \dot{u}_{c1}(t)) + u_{c1}(t) \\ u_{c1}(t) &= R_2 C_2 \dot{u}_{c2}(t) + u_{c2}(t) \\ u_s(t) &= u_{c2}(t) \end{aligned}$$

En el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales se hace notar que la corriente que circula por  $R_2$  es igual que a la de  $C_2$ , lo que supone que la impedancia que ve la salida hacia el exterior es infinita. Esta consideración es válida bien porque se está empleando un equipo de medida en la salida o bien se encadenará la salida a una estructura de amplificación lineal con operacionales, la cual presenta la característica de alta impedancia en su entrada.

Considerando condiciones iniciales nulas, la FDT del cuadripolo 4.1b) será:

$$A_v(s) = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1} \quad (4. 2)$$

Vea las discrepancias existentes entre la ecuación (4. 1) y (4. 2).

En el tratamiento de las señales continuas de las estructuras de control se suele emplear el procesamiento eléctrico. Los sistemas que se encargan de esta tarea están constituidos por una combinación de cuadripolos eléctricos pasivos y de amplificadores operacionales. Sus posibilidades van desde la implementación de reguladores PID, hasta la construcción de las señales de mando, los acondicionamientos de los transductores y acabando en la realización física de los sumadores. Desde luego, la amplitud de este conocimiento es tan grande que existe una disciplina para su elaboración. Se llama Instrumentación Electrónica. Sólo se va a dar un par de pinceladas, las suficientes, para poder comprender la importancia de esta materia, así como, cumplir con los prerequisites necesarios para entender los aspectos de construcción que van a verse a lo largo de este curso básico de Ingeniería de Control.

## **Amplificadores operacionales**

El amplificador operacional, AO, es un circuito que resuelve de forma sencilla muchos problemas de la Electrónica de Control. Sus aplicaciones son muy diversas, entre las que cabe destacar la implementación de funciones de transferencia y el acondicionamiento de las señales de los sensores. Este circuito se caracteriza por una elevada ganancia de tensión diferencial, al que se suele agregar una realimentación para controlar la dinámica de salida. Tiene una entrada diferencial, con tensiones  $u_+$  y  $u_-$ , aplicadas al terminal no inversor e inversor respectivamente. La ganancia entre la señal de salida,  $u_s$ , y el terminal no inverso es positivo, mientras que la ganancia entre la salida y la entrada inversora es negativa. Además de estos pines principales, un amplificador operacional tiene más patillas, como las del conexionado para la compensación de respuesta en frecuencia y las de la red de compensación del desplazamiento de tensión de continua, así como terminales de polarización del operacional. El símbolo del AO es como se detalla en la figura 4.2.

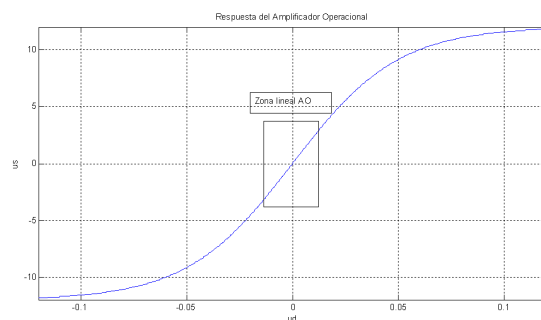
Las características de un AO ideal son:

- La de impedancia de entrada diferencial y la de cada canal respecto a masa son infinitas.
- Ganancia de tensión diferencial infinita,  $A_{do}$ .
- Ancho de banda infinito.
- Tensión de desviación de continua nula
- Ausencia de desviación de las anteriores características con la temperatura.

Debida a la elevada ganancia de tensión diferencial en la práctica,  $A_{do}$  (valores típicos de por encima de  $10^6$ ), el AO es prácticamente incontrolado en lazo abierto, ya que fácilmente se satura. A primera vista puede parecer una desventaja, en cambio es una de sus mayores virtudes. Aplicando una fuerte realimentación sobre el AO y gracias a la teoría de realimentación, las propiedades ideales de los AO son alcanzadas en la práctica. De forma que si la tensión diferencial en la entrada es menor a la tensión térmica,  $V_T$ , el AO se comportará de forma cuasi-lineal; en caso contrario se saturará. El modelo del AO entre la tensión diferencial y la salida es visualizado y aproximado analíticamente por:

$$u_d = u_+ - u_-$$

$$u_s = \begin{cases} +V_c & u_d > V_T \\ A_{do} \cdot u_d & |u_d| < V_T \\ -V_c & u_d < -V_T \end{cases}$$



La realimentación negativa se requiere para mantener la tensión diferencial de entrada,  $u_d$ , dentro de los márgenes de comportamiento lineal del AO. Para estos casos,

la  $u_d$  en valor absoluto será menor que la tensión térmica y en el análisis de los circuitos con AO (siempre que tenga realimentación negativa), se puede suponer que las tensiones de los terminales de entrada son prácticamente idénticas:

$$|u_d| < V_T \rightarrow u_+ \cong u_-$$

La primera estructura a tratar es el amplificador de tensión. Los amplificadores de tensión se caracterizan por tener una alta impedancia de entrada y una baja impedancia de salida. Su mayor utilidad es la adaptación de impedancias entre distintos bloques electrónicos. Una de sus posibles implementaciones se basa en una realimentación unitaria con un amplificador operacional.

$$u_s(t) = u_e(t)$$

En la Electrónica de Control es muy utilizado los amplificadores de tensión para hacer señales de mando o para hacer FDT determinadas. En el caso de señales de mando, los potenciómetros suelen ser empleados como instrumentos en manos de los usuarios que fijan un cierto nivel deseado de gobierno. Para convertirla en señal de mando, la variabilidad de la resistencia dada por el usuario es convertida en un divisor de tensión, cuyo valor es mantenido por el amplificador de tensión:

$$u_m(t) = V_{CC} \frac{\zeta R}{(1-\zeta)R + \zeta R} = V_{CC} \zeta$$

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

Otra estructura muy utilizada es el amplificador inversor (ver figura 4.3). El potencial en la entrada diferencial del AO es prácticamente nulo. La corriente que circula por la resistencia en la entrada es igual a de la salida, luego:

$$i = \frac{u_e(t)}{R_1} = -\frac{u_s(t)}{R_2} \rightarrow \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

También se puede construir un amplificador no inversor. En vez de realizar la realimentación unitaria como en el seguidor de tensión, se utiliza un divisor de tensión. Con el mismo razonamiento, se obtendrá su ganancia de tensión:

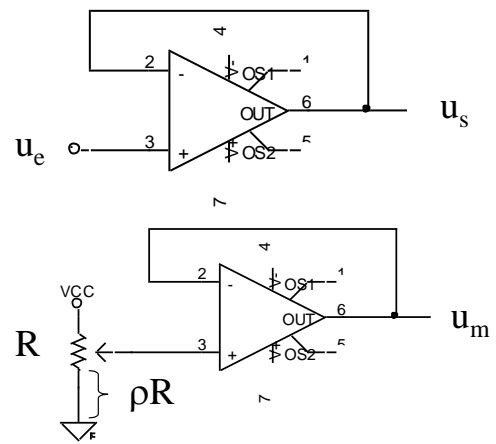
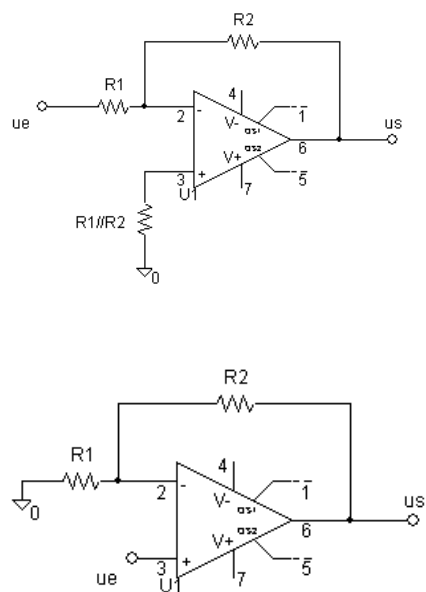


Figura 4. 2. a) Seguidor de tensión b) Señal de mando



$$i = \frac{u_e(t)}{R_1} = \frac{u_s(t) - u_e(t)}{R_2} \rightarrow \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

La arquitectura de los amplificadores diferenciales es empleada para la construcción de los amplificadores de error. Estos circuitos hacen una resta analógica de la tensión en la entrada positiva con la entrada negativa. La diferencia es amplificada por una constante. Una de las formas de obtener la FDT es mediante la aplicación del principio de superposición. Véase la ganancia de la entrada positiva y de la negativa:

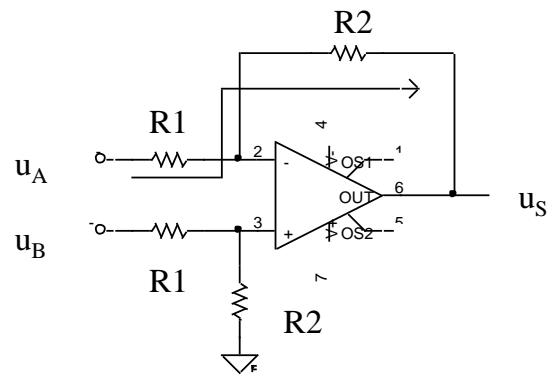


Figura 4. 3. Amplificador diferencial

$$\left. \begin{aligned} u_s &= A_1 u_B + A_2 u_A \\ A_1 &= \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1} \\ A_2 &= -\frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_s = \frac{R_2}{R_1} (u_B - u_A)$$

Cuando se hace procesamiento analógico lineal de la señal se suele emplear bien estructuras inversoras o no inversoras de amplificadores operacionales. Las realizaciones físicas son diseñadas como una combinación de cuadripolos pasivos con una de estas dos estructuras definidas de AO. Las redes pasivas RLC aparecen definidas a través de dos conceptos: la ganancia de tensión en circuito abierto de salida,  $A$ , y la impedancia de transferencia en cortocircuito,  $Z$ .

Sea un cuadripolo eléctrico genérico pasivo, se define la ganancia de tensión en circuito abierto como la relación entre la tensión de salida respecto a la entrada cuando la corriente de salida es nula:

$$A(s) = \left. \frac{u_s(s)}{u_e(s)} \right|_{i_s=0}$$

La impedancia de transferencia en cortocircuito está dada por el cociente entre la tensión de entrada y la corriente de salida, cuando la tensión de salida es nula:

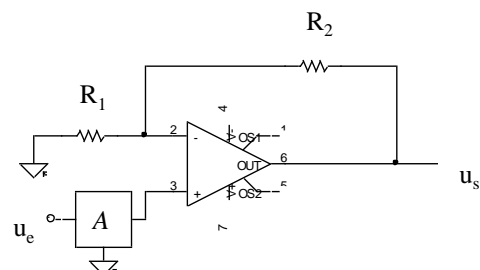
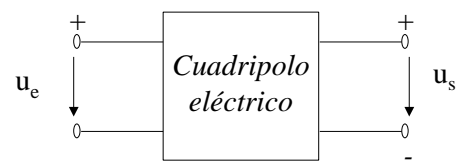


Figura 4. 4. Estructura inversora

$$Z(s) = \left. \frac{u_e(s)}{i_s(s)} \right|_{u_s=0}$$

La ganancia de tensión en circuito abierto es empleada en las estructuras de amplificación no inversora. Cuando se encadena la red pasiva a este amplificador, la salida del cuadripolo pasivo ‘ve’ una impedancia casi infinita, la propia de la entrada del operacional. La ganancia de tensión del conjunto será:

$$A_v(s) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) A(s)$$

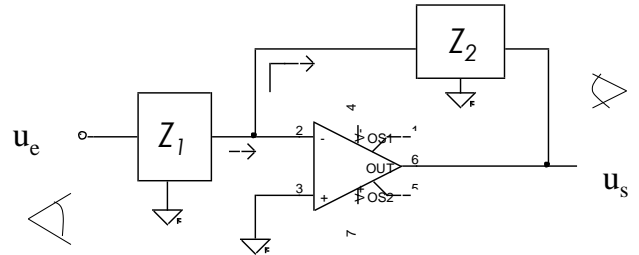


Figura 4. 5. Estructura inversora

Cuando se emplea una estructura inversora se hace uso del concepto de impedancia de transferencia en cortocircuito. Al analizar el circuito de la figura 4.5, se observa que tanto la salida de la red pasiva 1 y de la 2, la primera vista desde la entrada y la segunda desde la salida, están cortocircuitadas por tener en la entrada diferencial del operacional una tensión prácticamente nula.

La corriente de salida del cuadripolo 1 y la del 2 son iguales pero de signo contrario. La FDT del conjunto está definida en la relación de las dos impedancias de transferencia en cortocircuito con signo negativo, dado por los sentidos de la corriente, indicando el carácter inversor de la estructura:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{u_e(s)}{Z_1(s)} \\ i_2 &= -\frac{u_s(s)}{Z_2(s)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_v(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

A partir de estas dos formas de procesamiento de la señal analógica, se construyen FDT ayudados por tablas de cuadripolos pasivos. En las tablas adjuntadas en el anexo, aparecen por cada red pasiva RC, la ganancia de tensión en circuito abierto y la admitancia de transferencia en cortocircuito. Resulta obvio que la relación entre la impedancia y la admitancia de transferencia está en su inversa.

## 4.2 Sistemas mecánicos

Los movimientos de los sistemas mecánicos se pueden clasificar como de traslación o de rotación o de una combinación de ambos. Las ecuaciones que definen la dinámica los sistemas mecánicos están formuladas por las leyes de movimiento de Newton.

### Movimiento de traslación

Son los movimientos que se caracterizan por el desplazamiento de un cuerpo a lo largo de una línea recta. La ley de Newton sobre cuerpos rígidos dice que la suma algebraica de fuerzas es igual a la masa del cuerpo por el vector de la aceleración:

$$\sum_i \vec{f}_i = M \cdot \vec{a} \quad (4.3)$$

En la relación causa-efecto del desplazamiento, los cuerpos sometidos a un conjunto de fuerzas pueden ser modelados a través de tres elementos base: masa, resorte o muelle y rozamiento o fricción. La masa es la propiedad de un elemento de almacenar energía cinética del movimiento de traslación:

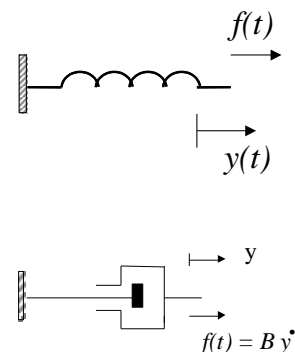
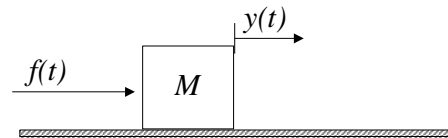
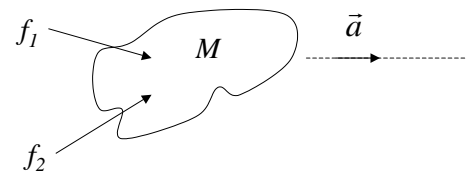
$$f(t) = M \ddot{y}(t) \quad (4.4)$$

Muelle es un elemento que almacena energía potencial al ser sometido por una fuerza externa:

$$f(t) = ky(t) \quad (4.5)$$

Siendo  $k$  la constante del muelle. En cuanto a la fricción o rozamiento, ésta se modela por la conversión de la potencia mecánica en flujo calorífico, fenómeno que aparece cuando se deslizan dos superficies que están en contacto. Su expresión matemática es no lineal. Existen tres tipos de modelos: fricción viscosa, fricción estática y fricción de Coulomb. La primera es lineal y las otras dos siguientes no son lineales. En este curso sólo se empleará el rozamiento viscoso para simplificar la función de transferencia de estos sistemas.

La fricción viscosa representa la relación lineal entre la fuerza aplicada a un cuerpo con la velocidad de desplazamiento entre este cuerpo y otro que está en contacto con él. Se modela como un pistón que se mueve dentro de un cilindro. El pistón se desliza dentro del cilindro a través de una película de aceite. El aceite resiste cualquier movimiento relativo entre el pistón y la concavidad del cilindro. Este efecto es debido a que el aceite puede fluir alrededor de la cámara del pistón. En este tipo de rozamiento, la transferencia de energía mecánica a calorífica es de carácter lineal. La expresión matemática es:



**Figura 4. 6. a) Muelle b) Fricción**



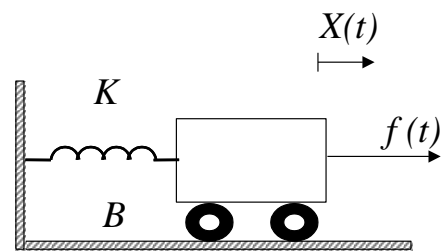
$$f(t) = B\dot{y}(t) \quad (4.6)$$

Donde  $B$  es el coeficiente de fricción viscosa. Desde el punto de vista del análisis dimensional, las unidades en el sistema internacional de los elementos de modelado de los movimientos de traslación están relacionadas con las expresiones (4.4), (4.5) y (4.6):

Magnitud Física	S.I.
Fuerza	N
Masa	kg
$k$	N/m
$B$	Ns/m

#### Ejemplo 4.1

Obtener la relación causa efecto entre la fuerza aplicada a un carro sujeto a la pared a través de un muelle y el desplazamiento que se produce en éste. La masa del carro es  $M$ , el coeficiente del resorte es  $K$  y el rozamiento entre las ruedas y la superficie se modela con el coeficiente de rozamiento viscoso  $B$ . Considere condiciones iniciales nulas.



La ecuación diferencial que explica el desplazamiento del carro según el eje  $X$ , en la misma dirección que la fuerza, es:

$$F(t) = M \ddot{x}(t) + Kx(t) + B \dot{x}(t) \quad (4.7)$$

Aplicando transformadas de Laplace resulta la FDT pedida:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + 1} \quad (4.8)$$

#### Sistemas análogos

Se denominan sistemas análogos aquellos que tienen igual modelo matemático pero son diferentes físicamente. Las ventajas que tiene este proceder son dos básicamente:

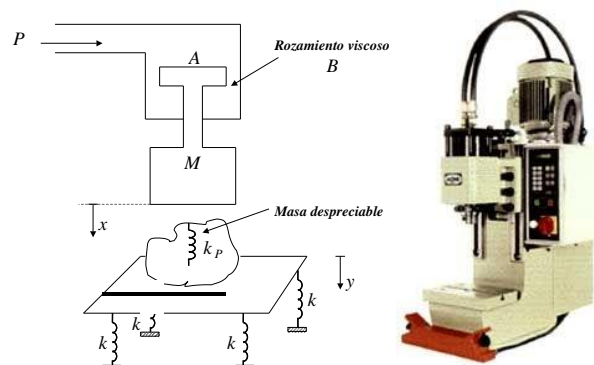
1. La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede ser resuelta por un sistema análogo de otro campo físico. Por ejemplo, si se convierte un sistema mecánico a un circuito eléctrico equivalente, se podrá aplicar todas las herramientas de la teoría de los circuitos eléctricos.
2. Facilidad en el trabajo experimental. Resulta más económico montar un circuito eléctrico que un montaje mecánico y las medidas son más asequible y hasta más fiables.

Existen varias analogías entre los movimientos de traslación y los circuitos eléctricos. Se ha elegido una de ellas, la que resulta más sencilla:

movimiento de traslación	sistema eléctrico
fuerza	corriente
desplazamiento	potencial

### **Ejemplo 4.2**

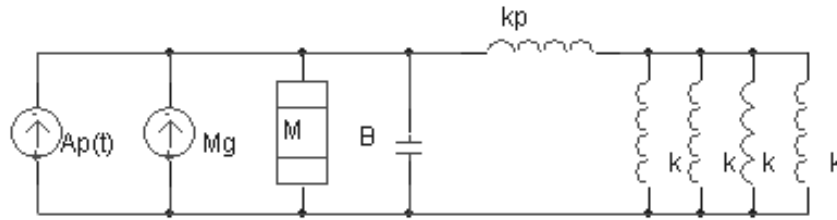
El esquema de la figura muestra el comportamiento dinámico de una prensa hidráulica. Al dar presión al fluido,  $P$ , transmite una fuerza sobre el pistón que al desplazarse comprimirá al cuerpo. Este efecto se modela por un muelle, cuya constante es  $k_p$ . Además, se considera despreciable la masa del cuerpo a comprimir respecto al de la prensa. No así la masa del pistón, al que se le asigna por la letra  $M$ . La dinámica del tablero, donde se apoya el cuerpo, es modelada por cuatro amortiguadores de constante  $k$ . Se pide:



- a) Ecuaciones físicas del sistemas
- b) Linealizar el sistema cuando la presión del fluido sea nula,  $P=0$ .
- c) Diagrama a bloques
- d) FDT entre la causa (variación de la presión) y el efecto (grado de compresión del cuerpo).

a) La fuerza dada por el fluido se suma a la de la propia gravedad de la masa del pistón. Ambas desplazarán el pistón hacia abajo, dando lugar a un rozamiento entre las paredes del émbolo y el pistón. Estas fuerzas comprimirán al cuerpo y el tablero se opondrá a deformarse.

Para obtener el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales de la prensa se emplea las analogías entre los sistemas mecánicos de traslación y los sistemas eléctricos, de cuya representación se conseguirá las ecuaciones del sistema:



$$Ap(t) + Mg = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + k_p(x(t) - y(t)); \quad k_p(x(t) - y(t)) = 4ky(t)$$

El nivel de compresión del cuerpo es una variable dependiente entre el desplazamiento del pistón y del tablero, al que se le designará por  $z$ .

$$x(t) - y(t) = z(t); \quad k_p z(t) = 4k(x(t) - z(t))$$

b) Se hace notar que la fuerza de la gravedad del cilindro produce un término constante que hace necesario la linealización de las ecuaciones diferenciales, para luego obtener el modelo incremental. En el punto de equilibrio, esto es, sin presión, marcará las condiciones de reposo:

$$P = 0 \text{ N/m}^2 \rightarrow Mg = K_p(x_0 - y_0) = 4ky_0$$

$$y_0 = \frac{Mg}{4k}; \quad x_0 = \frac{Mg}{k_p} + y_0 = Mg \left( \frac{1}{k_p} + \frac{1}{4k} \right)$$

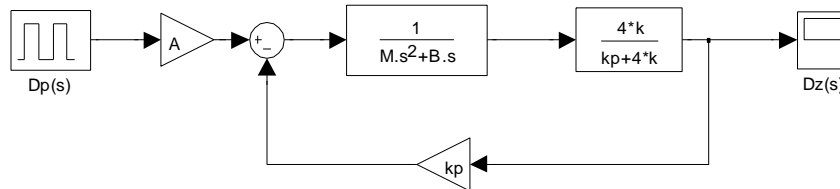
La dinámica del sistema es una función que depende de la presión,  $p(t)$ , de la primera y segunda derivada del desplazamiento del cilindro respecto al tiempo,  $x$ , y de la compresión del cuerpo,  $z$ . Procediendo a linealizar a:

$$\begin{aligned} A\Delta p(t) &= M\Delta\ddot{x}(t) + B\Delta\dot{x}(t) + k_p\Delta z(t) \\ k_p\Delta z(t) &= 4k(\Delta x(t) - \Delta z(t)) \end{aligned}$$

c) El diagrama a bloques entre la compresión del cuerpo (efecto) y su causa (presión en el fluido), estará definida por las siguientes FDT:

$$A\Delta p(s) - k_p \Delta z(s) = (Ms^2 + Bs)\Delta x(s)$$

$$\Delta z(s) = \frac{4k}{k_p + 4k} \Delta x(s)$$



d) Sólo faltará aplicar la expresión de estructuras de realimentación negativa y el encadenamiento en cascada para obtener la FDT solicitada:

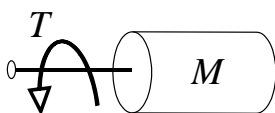
$$\frac{\Delta z(s)}{\Delta p(s)} = A \cdot \frac{4k}{(Ms^2 + Bs)(k_p + 4k) + 4k \cdot k_p}$$

En la analogía del sistema mecánico al circuito eléctrico, las fuerzas se convierten en fuentes de corriente y los desplazamientos mecánicos suponen los nodos de potencial.

### Movimientos de rotación

Los movimientos de rotación se definen como extensión de la ley de Newton: La suma algebraica de momentos o pares alrededor de un eje fijo es igual al producto de la inercia por la aceleración angular alrededor de un eje. Los elementos bases constitutivos son: el momento de inercia, el resorte torsional y la fricción viscosa.

Inercia,  $J$ , se considera a la propiedad de un elemento de almacenar energía cinética del movimiento de rotación:



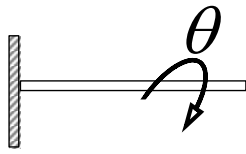
$$T(t) = J\alpha(t) = J\dot{\omega}(t) = J\ddot{\theta}(t) \quad J = \sum_i m_i r_i^2$$

$$J = \frac{1}{2}Mr^2 \quad (\text{Momento de inercia cilindro})$$

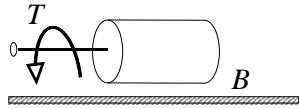
**Figura 4. 7 Momento de inercia de un cilindro**

Donde  $r$  es el radio del cilindro de masa  $M$  y  $\alpha$ ,  $\omega$  y  $\theta$  son la aceleración, velocidad y desplazamiento angular respectivamente del cilindro.

Resorte torsional,  $k$ , es el elemento que almacena energía potencial por desplazamiento de unidad angular:



$$T(t) = k\vartheta(t)$$



Fricción viscosa del movimiento de rotación,  $B$ , modela el rozamiento provocado por la velocidad angular entre el cilindro y la superficie de contacto:

$$T(t) = B\omega(t) = B\dot{\vartheta}(t)$$

En el análisis dimensional, las magnitudes físicas de los elementos de modelado de los movimientos de rotación en el sistema internacional son:

Mag.Física	SI
$T$	Nm
$J$	kg m <sup>2</sup>
$k$	Nm/rad
$B$	Nm s/rad

En la analogía con los sistemas eléctricos, el par mecánico será análogo a la corriente eléctrica y el desplazamiento angular con el potencial eléctrico. Los pares mecánicos serán representados como fuentes de corriente y el desplazamiento angular como nodos del circuito eléctrico.

#### 4.2.1.1 Conversión entre movimientos de traslación y de rotación

Hay una gran variedad de aplicaciones que requieren que el movimiento circular de los motores se convierta en un desplazamiento lineal. Una de las formas de conseguirlo es a través de las poleas, cuya base da origen a las cintas transportadoras. Para su estudio, se considerará que el momento de inercia equivalente que ve el eje del motor es igual a la masa trasladada por la cinta,  $M$ , por el radio de la polea al cuadrado:

$$J = M \cdot r^2 \quad T(t) = (Mr^2) \cdot \ddot{\vartheta}(t)$$

Si en vez de emplear las poleas, se hace con un sistema de cremallera, el modelado es idéntico. Sólo faltará sustituir, el radio de la polea por el radio del piñón. Otro caso parecido resulta de la conversión del movimiento circular en traslación a través de un tornillo sin fin. El par mecánico será

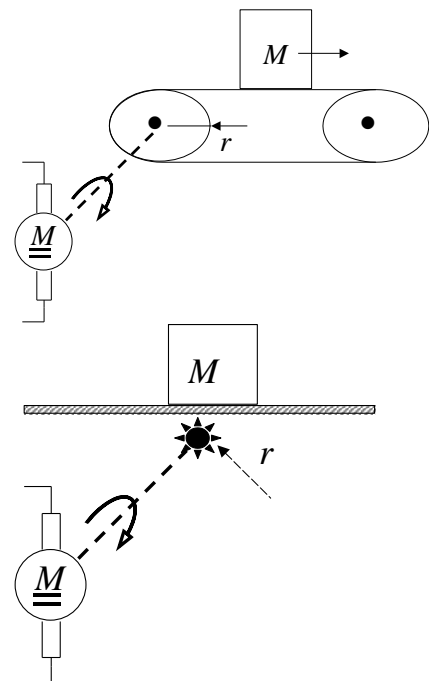
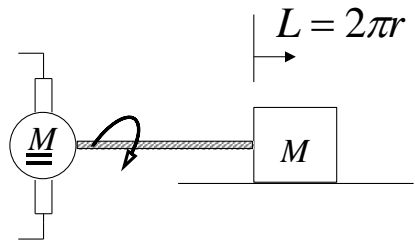


Figura 4. 8 a) Conversión mediante poleas b) usando el método de la cremallera

igualado al momento de inercia equivalente, donde el radio será determinado por la traslación producida en un paso del tornillo sin fin,  $L$ , i.e. la longitud de la circunferencia:



$$L = 2\pi r$$

$$T(t) = \left( M \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \right) g''(t) \quad (4.9)$$

#### 4.2.1.2 Trenes de engranajes

Las velocidades angulares de los motores suelen ser mucho más elevada que el nivel de rotación que hay que dar a la carga. O por el contrario, el par necesario en la carga es bastante más alto que el dado por el motor. Para adaptar la potencia mecánica entregada por el motor a la carga se hace uso de los trenes de engranajes. Estos sistemas mecánicos transmiten la energía de un punto a otro, adaptando la velocidad angular y el par mecánico. En la analogía eléctrica, los trenes de engranajes hacen el mismo papel que los transformadores eléctricos. En los transformadores, la potencia eléctrica es prácticamente igual en la entrada y en la salida y su función es adaptar los niveles de tensión y corriente. Los trenes de engranajes transmiten la potencia mecánica, casi sin pérdidas, y adaptan la velocidad angular y el par de la entrada a la salida.

El modelado ideal de los trenes de engranajes se hace a partir de tres supuestos:

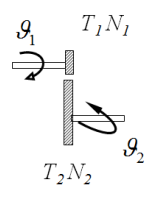
1. El número de dientes sobre la superficie de los engranajes,  $N_1$  y  $N_2$ , es proporcional a los radios  $r_1$  y  $r_2$ :

$$\frac{r_1}{N_1} = \frac{r_2}{N_2} \quad (4.10)$$

2. La distancia recorrida por la periferia de cada engranaje es la misma, igualando las circunferencias de ambas según el desplazamiento angular dado para un tiempo determinado,  $\vartheta_1$  y  $\vartheta_2$ :

$$\vartheta_1(t)r_1 = \vartheta_2(t)r_2 \quad (4.11)$$

3. La potencia transmitida en la entrada en un engranaje es igual al que se da en la salida, ya que se supone que no hay pérdidas:

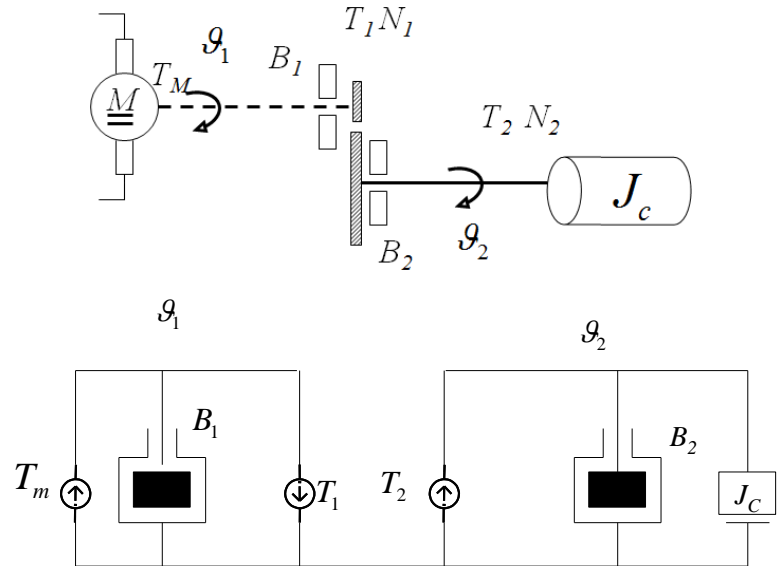


$$\vartheta_1(t)T_1(t) = \vartheta_2(t)T_2(t) \quad (4.12)$$

A partir de estos tres supuestos se consiguen las siguientes razones:

$$\frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \frac{\vartheta_2(t)}{\vartheta_1(t)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \quad (4.13)$$

Nótese que las relaciones de desplazamiento angular entre los engranajes,  $\vartheta_i$ , son idénticas a sus velocidades,  $\omega_i$ . Los trenes de engranajes reales se modelan como ideales acompañados de unas pérdidas debidas a los rozamientos. En la figura 4.9 se muestra una representación simplificada del arrastre de una carga por parte de un motor eléctrico a través de un tren de engranajes.



Analizando la salida, el par mecánico transmitido es igualado al momento de inercia de la carga y a la fricción viscosa producida en los cojinetes de salida:

**Figura 4. 9. a) Modelado de los trenes de engranajes reales b) Circuito equivalente**

$$T_2(t) = J_c \ddot{\vartheta}_2(t) + B_2 \dot{\vartheta}_2(t) \quad (4.14)$$

La potencia dada por el motor se transmitirá por el tren de engranajes y habrá pérdidas por los rozamientos. Introduciendo la ec. (4. 14) y las razones del tren de engranajes, se trasladará la carga a la entrada y quedará definida su ecuación dinámica:

$$T_m(t) = B_1 \dot{\vartheta}_1(t) + T(t)_1 = B_1 \dot{\vartheta}_1(t) + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_c \ddot{\vartheta}_1(t) + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2 \dot{\vartheta}_1(t) \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1(t) &= \frac{N_1}{N_2} T_2(t) \\ \vartheta_2(t) &= \frac{N_1}{N_2} \vartheta_1(t) \end{aligned} \right\} \uparrow$$

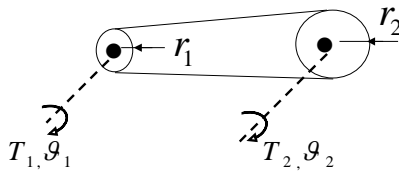
Los elementos de modelado de la salida (el momento de inercia de la carga y los rozamientos de salida) son vistos desde la entrada como otros equivalentes ponderados

por la relación del tren de engranajes. Similares resultados se consiguen en el estudio de los transformadores eléctricos:

$$\left. \begin{aligned} Beq &= B_1 + B_2 \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \\ Jeq &= J_c \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_m(t) = Beq \dot{\vartheta}_1(t) + Jeq \ddot{\vartheta}_1(t) \quad (4.16)$$

#### 4.2.1.3 Cadenas mecánicas

Las cadenas mecánicas permiten transmitir la energía mecánica a mayor distancia que los trenes de engranajes. Sin embargo, las cadenas son menos precisas en su transmisión y tienen mayores pérdidas. Para su modelado, se supone que no hay deslizamientos entre la cinta transportadora y las poleas, las ecuaciones son similares a las de los trenes de engranajes:



$$\vartheta_1(t)r_1 = \vartheta_2(t)r_2 \quad (4.17)$$

$$T_1(t)\vartheta_1(t) = T_2(t)\vartheta_2(t) \quad (4.18)$$

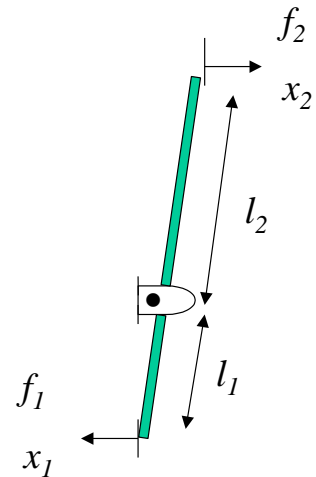
#### 4.2.1.4 Palancas<sup>2</sup>

Los sistemas de palanca transmiten movimientos de traslación. La fuerza en la entrada produce un par que es dado en la salida. Considerando que los brazos de la palanca son cuasi-ortogonal con las fuerzas:

$$f_1(t)l_1 = f_2(t)l_2$$

En cuanto al trabajo realizado, dará una relación con el desplazamiento de traslación y con las distancias al centro de la palanca:

$$f_1(t)x_1(t) \cong f_2(t)x_2(t)$$



<sup>2</sup> Arquímedes dijo “Dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré el mundo”



$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{l_2}{l_1}$$

### 4.3 Sistemas electromecánicos

Muchos de los equipos presentes en la industria son una combinación de elementos mecánicos y eléctricos-electrónicos. Posiblemente el motor eléctrico sea el mejor exponente de lo comentado. Pero antes de entrar en los motores, se va a analizar dos transductores asociados a estos. Los motores eléctricos, y en general cualquier motor, necesitan de transductores que conviertan sus magnitudes físicas de velocidad y desplazamiento angular en señales eléctricas. Los sensores más empleados son los tacómetros y en un mayor auge, por su carácter digital, los *encoders*.

Los tacómetros son transductores que convierten la energía mecánica en eléctrica. Suelen ser dinamómetros (generador de cc) que dan una tensión proporcional a la velocidad angular. El eje del tacómetro está unido solidariamente al eje del rotor del motor. La salida del tacómetro es una tensión inducida por la velocidad angular del motor. Esta tensión es de carácter proporcional a la velocidad angular y está definida por la constante del tacómetro,  $k_{DT}$ . El tacómetro es visto por el motor como una carga más en su eje. Se suele modelar con un momento de inercia.

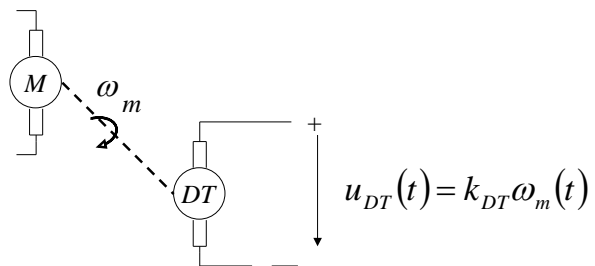
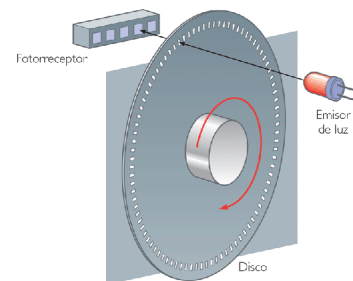


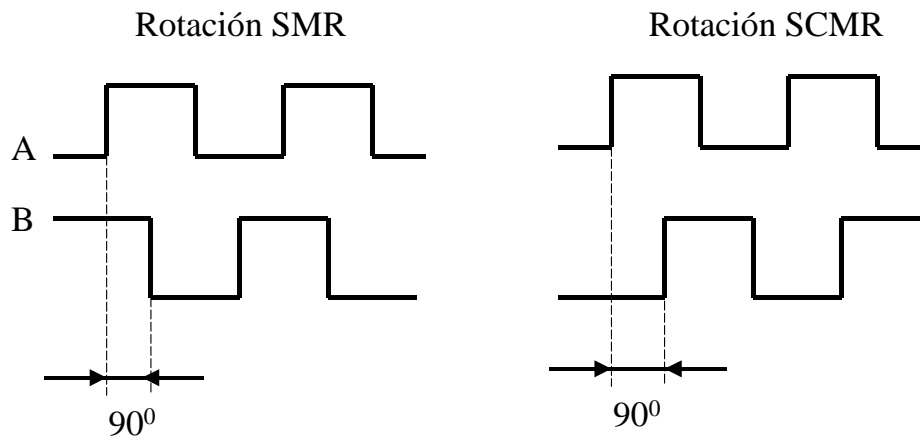
Figura 4. 10. Dínamo tacométrica

Los *encoders* o codificadores incrementales son transductores que convierten el desplazamiento lineal o rotatorio en un código digital. Un encoder rotatorio está constituido típicamente por: una fuente de luz (normalmente un led), un disco giratorio y una máscara estacionaria, junto con un detector de luz.

Este transductor se encuentra conectado al rotor del motor. Al desplazarse, empezará a girar el disco, cuya serigrafía dejará pasar o no la fuente de luz, generando pulsos eléctricos. Un mayor número de pulsos indicará un mayor desplazamiento. Pero, además, el encoder también podrá estimar la velocidad angular, como consecuencia de la frecuencia de los pulsos de la salida. Cuando se dice que es un codificador incremental, indica que la posición que está dando es relativa a cuando empezó a contar los pulsos. Este transductor da una posición relativa y no absoluta, como hacen otros transductores, como por ejemplo, un potenciómetro rotativo, cuya tensión de salida es proporcional a una posición de referencia.



El *encoder* puede tener una única señal de salida, llamada normalmente canal A, o dos señales, canal A y B. Si se tiene un sólo canal medirá el desplazamiento incremental, sin tener en cuenta si es en el sentido de las manecillas del reloj (SMR), o en el sentido contrario (SCMR). Para la determinación del sentido giratorio se empleará el canal B que dependiendo del desfase entre A y B indicará el sentido del movimiento circular.



### **Motores de corriente continua**

Estos sistemas electromecánicos son ampliamente utilizados en la industria. La mayoría de las aplicaciones basadas en el posicionamiento emplean accionamientos basados en motores de corriente continua (*cc*). No se suelen emplear los motores de corriente alterna para estas tareas. Los motores de corriente alterna son más robustos y con menor volumen con relación al par desarrollado, pero son más difíciles de gobernar, especialmente en posición. Por otro, el desarrollo tecnológico de los motores de imanes permanentes basados en tierras-raras, ha alcanzado una alta relación par-volumen.

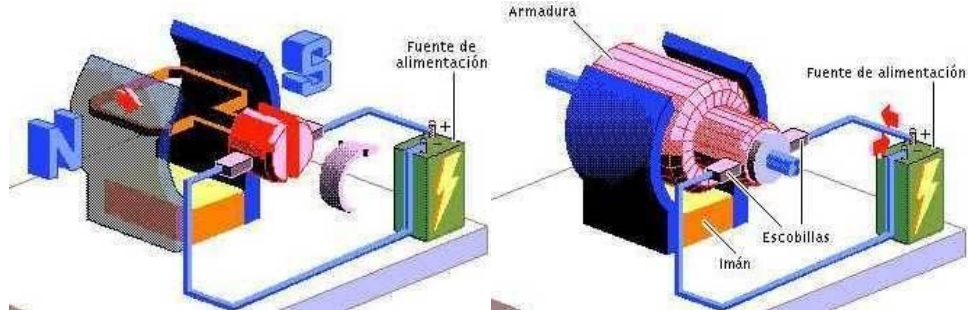
Además, en la evolución de los motores eléctricos de *cc* se han construido los rotores sin hierro, cuya prestación supone tener un momento de inercia equivalente muy bajo, mejorando su comportamiento dinámico. Esta característica supone tiempos muy cortos en alcanzar el régimen permanente. Este beneficio lo ha hecho ideal en aplicaciones de control de unidades de cinta, discos, máquinas herramientas o robótica, por citar alguno de los muchos ejemplos que se podrían decir.

#### **4.3.1.1 Principio básico de los motores de *cc***

Los motores eléctricos convierten la energía eléctrica en energía mecánica. Esta transformación se fundamenta en ‘bañar’ con un flujo magnético una corriente eléctrica que circula sobre un cuerpo móvil (rotor).

Según la ley de Ampere, se produce una fuerza como consecuencia del producto vectorial entre el flujo magnético,  $B$ , y la corriente que circula por el rotor,  $i_r$ . Esa fuerza al realizarse sobre la superficie exterior del rotor producirá un par mecánico. El par total desarrollado será el sumatorio de las fuerzas parciales producidas por cada circulación de corriente de los conductores alojados en el rotor por su radio. Al ser el radio un parámetro

constructivo, el par dado en el rotor,  $T_m$ , será proporcional al flujo magnético y a la corriente que circule por el rotor:



$$T_m = \sum F_i r = k_1 \Phi \cdot i_a \quad (4.19)$$

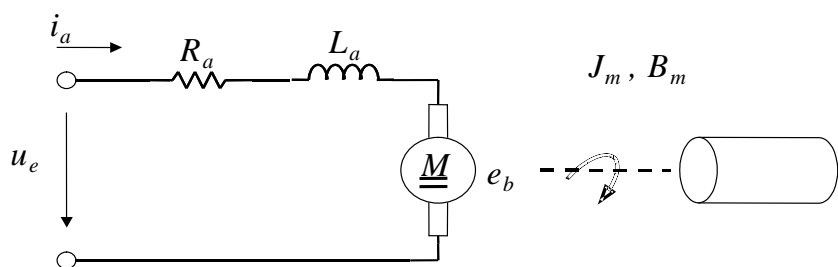
$$F_i = B \times i_a \quad (4.20)$$

Las espiras del rotor al estar sometidas a un flujo magnético generan una fuerza contraelectromotriz,  $e_b$ , que se opone al desplazamiento angular del eje del motor. Efecto éste que luego se mostrará como positivo al hacer estable su dinámica, pues evita que el motor se embale y se pierda su control:

$$e_b = N \frac{d\Phi}{dt} = k_2 \Phi \cdot \omega_m \quad (4.21)$$

#### 4.3.1.2 Modelo de motor de continua de imán permanente

De los motores de corriente continua, por los que más interés muestra la teoría de control, son por los de imanes permanentes. No necesitan de una fuente exterior para generar el flujo magnético, facilitan el diseño del sistema de control y actualmente ofrecen una buena relación par-volumen. Además, estos motores tienen un modelo dinámico que es lineal. La tensión en la entrada será igual a la caída de tensión en la resistencia de armadura, al efecto del flujo magnético disperso y a la fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m). Tanto la fuerza contraelectromotriz como el par mecánico, por los principios básicos de los motores eléctricos, son proporcionales a la velocidad angular y a la corriente en el rotor, respectivamente. El par de motor será igualado a los dispositivos de almacenamiento y de disipación de energía mecánica equivalente, vista desde el rotor del motor.



$$u_e(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t) \quad (4.22)$$

$$e_b(t) = k_b \omega_m(t) \quad (4.23)$$

$$T_m(t) = k_p i_a(t) \quad (4.24)$$

$$T_m = J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} \quad (4.25)$$

donde  $k_i$  es la constante de par, [Nm/A], y  $k_b$  es la constante de la fuerza contraelectromotriz, [V s/rad]. Tomando transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad y considerando condiciones iniciales nulas, el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales quedará definido por las siguientes FDTs:

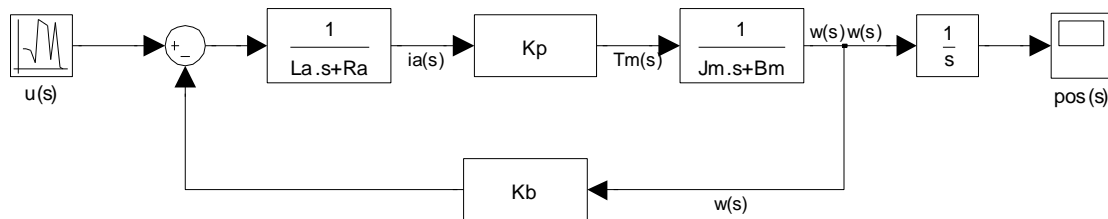
$$u_e(s) = (R_a + sL_a)i_a(s) + e_b(s) \quad (4.26)$$

$$e_b(s) = k_B \omega_m(s) \quad (4.27)$$

$$T_m(s) = k_p i_a(s) \quad (4.28)$$

$$T_m(s) = (J_m s + B_m)\omega_m(s) \quad (4.29)$$

El diagrama a bloques del motor quedará como:



Del esquema se desprende una realimentación interna en el motor que tiende a garantizar la estabilidad de su funcionamiento. La causa es la f.c.e.m. que se opone con mayor fuerza a medida de que aumente la velocidad angular del rotor.

#### 4.3.1.2.1 Relación entre $k_i$ y $k_b$

La mayor parte de la potencia eléctrica dada al motor es convertida en potencia mecánica. La potencia útil será la corriente de la armadura por la f.c.e.m.. Ésta será convertida en par mecánico por velocidad angular. Empleando las expresiones (4.23) y (4.24) se demuestra que las constantes del motor son idénticas, aunque a veces, los fabricantes suelen dar el valor de  $k_b$  invertido y en rpm por voltio:

$$P_m = i_a \cdot e_b = T_m \cdot \omega_m \quad (4.30)$$

$$i_a \cdot e_b = k_p \cdot i_a \cdot \omega_m \rightarrow i_a \cdot k_b \cdot \omega_m = k_p \cdot i_a \cdot \omega_m \quad (4.31)$$

$$k_p = k_b \quad [N.m / A] \equiv [V.s / rad] \quad (4.32)$$

#### 4.3.1.2.2 Curvas del par-motor

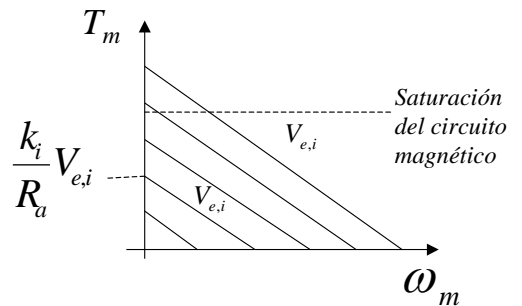
Una de las curvas típicas de los motores, con independencia de la tecnología, es la relación entre la velocidad angular y el par motor. Estas gráficas muestran curvas de comportamiento en el régimen permanente. Para el caso de los motores de *cc* de imanes permanente, según la ecuación (4. 22), la corriente continua de frecuencia nula por la armadura es:

$$I_a = \frac{V_E - k_b \omega_{m,0}}{R_a} \quad (4.33)$$

Mientras el par mecánico en el régimen estacionario será a partir de la ec. (4. 24):

$$T_m = k_i I_a = k_i \left( \frac{V_E - k_b \omega_{m,0}}{R} \right) \quad (4.34)$$

La familia de curvas estará parametrizada a partir de la tensión dada al motor. Para un nivel de tensión determinada, la curva será una recta de pendiente negativa. A medida de que aumente la velocidad del motor disminuirá el par mecánico. La tangente de cada curva es idéntica, mostrando una familia de rectas paralelas:



$$\frac{dT_m}{d\omega_m} = -\frac{k_p k_b}{R} \quad (4.35) \quad V_{e,n} > V_{e,n-1} > \dots > V_{e,i} > \dots > V_{e,1} > V_{e,2}$$

Un exceso de par mecánico dará al traste con la linealidad del comportamiento como consecuencia de una saturación en el circuito magnético.

### **Ejemplo 4.3**

La maqueta de motor de corriente continua de las prácticas de Regulación Automática está constituida por un motor MAXON de baja inercia. Al eje del motor se le ha acoplado un tren de engranajes con una relación 1:197, al que se considera de comportamiento ideal. El fabricante da los siguientes datos:

Resistencia de armadura =  $7.94 \, \Omega$ .

Inductancia equivalente del flujo disperso =  $1.54 \, \text{mH}$

Constante del par motor =  $39.3 \, \text{mNm/A}$ .

Constante de la fuerza contraelectromotriz  $\Rightarrow 243 \, \text{rpm/V}$ .

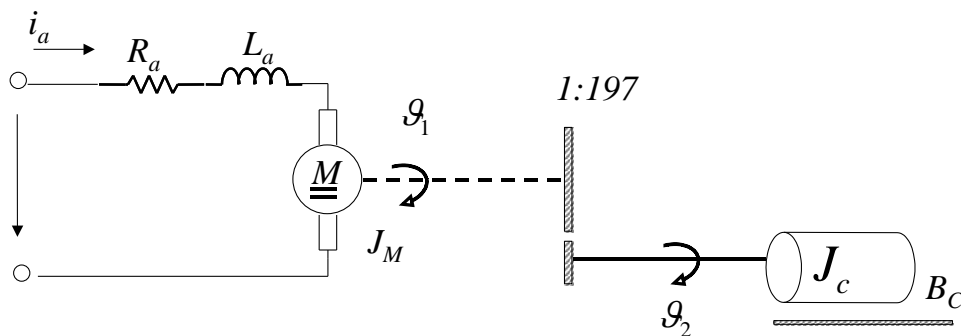
Momento de inercia del rotor =  $26.6 \, \text{gr cm}^2$

Experimentalmente se ha obtenido el equivalente de la carga, vista desde la salida del tren de engranajes:

Momento de inercia de la carga =  $48.5 \cdot 10^{-3} \, \text{kg m}^2$ .

Rozamiento viscoso =  $660 \cdot 10^{-3} \, \text{N.m.s/rad}$ .

Considérese ideal el tren de engranajes. Obtener su FDT total, entre la velocidad del motor y su nivel de tensión aplicada.

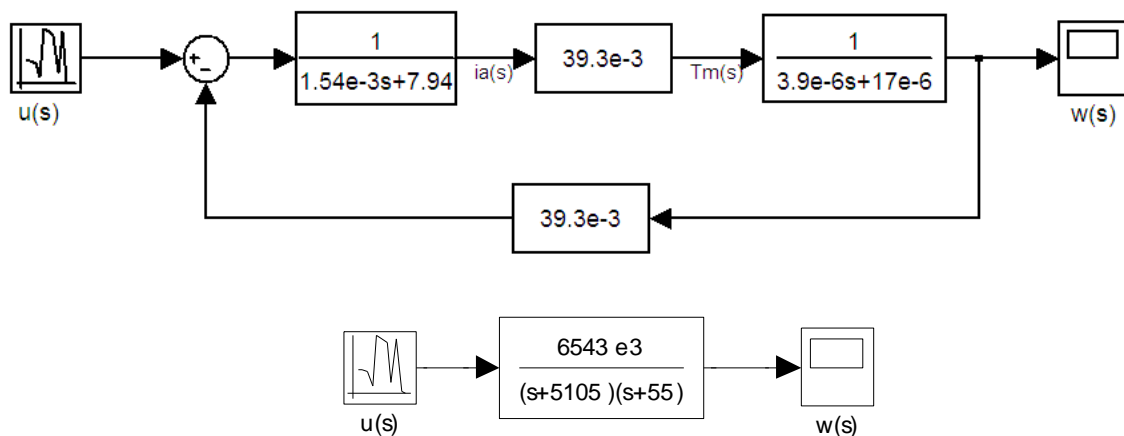


Los valores equivalentes de momento de inercia y de fricción que se caracterizan desde el eje del motor será igual a:

$$J_T = 26.6 \cdot 10^{-7} + \left(\frac{1}{197}\right)^2 48.5 \cdot 10^{-3} = 3.9 \cdot 10^{-6}$$

$$B_T = \left(\frac{1}{197}\right)^2 660 \cdot 10^{-3} = 17 \cdot 10^{-6}$$

El diagrama a bloques de la maqueta y su equivalente será:



## 4.4 Sistemas térmicos

---

Muchas de las aplicaciones de control necesitan del modelado de los mecanismos de transferencias de calor. Los sistemas térmicos son aquellos que involucran el intercambio de calor de una sustancia a otra.

Sus expresiones siguen a la ley de conservación de la energía: la energía calorífica introducida debe ser igual a la energía almacenada más las pérdidas por transmisión. Dos elementos se emplearán para describir los procesos de transmisión y de acumulación de la energía calorífica: la resistencia térmica y la inercia o capacitancia térmica.

### **Resistencia térmica**

En la transmisión del calor hay tres maneras de producirse: conducción, convección y radiación. Dentro del ámbito del modelado sencillo de los sistemas térmicos, las transferencias de calor sólo se van a dar por conducción y en menor medida por convección. Ambos mecanismos pueden ser expresados a través de la resistencia térmica. Ésta se define como:

$$R_{TH} = \frac{\text{cambio en la diferencia de temperatura}}{\text{cambio en el flujo de calor}} = \frac{dT}{dq} \quad (4.36)$$

El flujo calorífico transmitido de un cuerpo a otro será igualado a la diferencia de temperatura entre ambos cuerpos partido por la resistencia térmica. La dirección del flujo será en la dirección del foco caliente al frío:

$$q(t) = \frac{\Delta T(t)}{R_{TH}} \quad (4.37)$$

### **Capacitancia térmica**

La inercia térmica muestra el nivel de capacidad que tiene una sustancia en almacenar la energía térmica. Así, por ejemplo, al calentar un depósito lleno de agua, la temperatura del agua indicará el nivel de energía almacenado en ese momento y la inercia térmica señalará la cantidad de energía que hay que ceder desde el exterior al depósito, para que se produzca un incremento en la temperatura del tanque. La capacitancia se define como la relación entre el calor entregado a una sustancia y la variación de temperatura producida:

$$C_{TH} = \frac{\text{cambio en el calor almacenado}}{\text{cambio en la temperatura}} \quad (4.38)$$

La potencia calorífica estará definida por la inercia térmica y por la variación de la temperatura con el tiempo, según se desprende de la ecuación (4. 38):

$$q(t) = C_{TH} \dot{T}(t) \quad (4. 39)$$

La capacitancia térmica estará relacionado con la masa de la sustancia que almacena la energía térmica,  $m$ , y con su calor específico,  $c$ :

$$C_{TH} = mc \quad (4. 40)$$

### **Magnitudes físicas**

El flujo calorífico no deja de ser un concepto de potencia, de energía transferida o almacenada por unidad de tiempo. Sin embargo, suele emplearse unidades distintas al vatio. En los sistemas térmicos se cuantifica la potencia calorífica o el flujo calorífico en kilocalorías por segundo. Aunque la adaptación al sistema internacional está en la equivalencia entre el trabajo mecánico y el trabajo calorífico. Una caloría es igual a 4.18 julios.

Las magnitudes físicas del resto de las variable de los sistemas térmicos son extraídas del análisis dimensional de las expresiones (4. 36)(4. 38) y (4. 40). Fíjese sobre todo en la inercia térmica y en el calor específico. Las conclusiones son mostradas en la tabla adjunta:

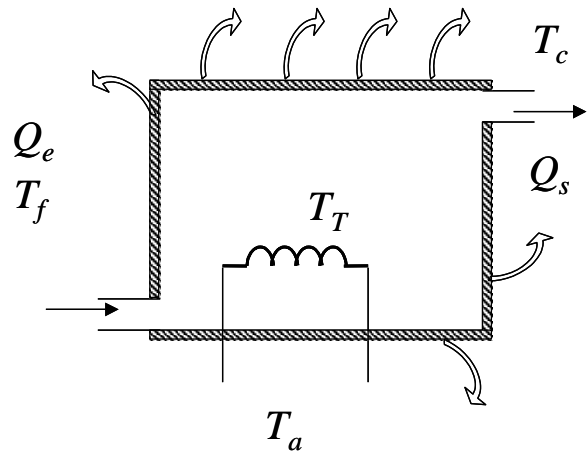
Magnitudes físicas	Sistema Internacional
$q$	$\frac{kcal}{s}$ o $\left( \frac{kJulio}{s} = kW \right)$
$T$	K
$c$	kcal/kg K
$R_{TH}$	K/W o K/kcal
$C_{TH}$	$\left[ Ws / K = \frac{Julio}{K} \right]$ o $\frac{kcal}{K}$



**Ejemplo 4.4**

Modelar el comportamiento dinámico de un calentador de agua caliente. Obtener la FDT entre la potencia entregada al calentador y la diferencia de temperatura entre el agua caliente y la fría.

Al entrar el agua en la caldera, ésta es calentada debido a la cesión de calor de la resistencia eléctrica. Hay que observar que los caudales de entrada y salida son idénticos:



$$Q_e = Q_s \text{ (Igualdad de caudales)}$$

El flujo calorífico cedido por la resistencia eléctrica es igual al almacenamiento de energía transferida a la masa del agua del depósito, más al cambio de temperatura entre el agua caliente y el agua fría por el caudal y junto a las pérdidas de calor por conducción entre las del depósito y el ambiente:

$$q_{\text{entragada}}(t) = m_T c \dot{T}_T(t) + \left( \frac{T_T(t) - T_a(t)}{R_{TH}} \right) + \rho V c \left( \frac{T_c(t) - T_f(t)}{t} \right) \quad (4.41)$$

$$q_{\text{entragada}}(t) = m_T c \dot{T}_T(t) + \left( \frac{T_T(t) - T_a(t)}{R_{TH}} \right) + \rho Q_e(t) c (T_c(t) - T_f(t)), \quad (4.42)$$

donde  $m_T$  es la masa de agua que tiene el tanque,  $R_{TH}$  es la resistencia térmica equivalente de las pérdidas por conducción y  $\rho$  es la densidad del agua. Considerando que la temperatura del agua fría y la del ambiente son prácticamente idénticas,  $T_f = T_a$ , y que se puede aproximar la temperatura del depósito con la del agua caliente que sale,  $T_T = T_c$ , el balance energético es igual a:

$$q_{\text{entragado}}(t) = m_T c \dot{T}_c(t) + \frac{T_c(t) - T_f(t)}{R_{TH}} + \rho Q_e(t) c (T_c(t) - T_f(t))$$

$$q_{\text{entragado}}(t) = C_{TH} \dot{T}_c(t) + (T_c(t) - T_f(t)) \left( \frac{1}{R_{TH}} + \rho Q_e(t) c \right) \quad (4.43)$$

siendo  $C_{TH}$  la inercia térmica del depósito. Si la temperatura del agua fría es prácticamente la misma, se puede definir un modelo incremental que exprese la relación entre la potencia entregada y la diferencia de temperatura en el tanque a caudal constante:

$$\Delta q_{entregado}(t) - (\rho \Delta T_c)_0 \Delta Q_e(t) = C_{TH} \Delta \dot{T}_c(t) + \left( \frac{1}{R_{TH}} + \rho Q_e c \right)_0 \Delta T_c \quad (4.44)$$

La FDT entre la variación de temperatura respecto al flujo calorífico, a caudal constante, depende sólo de los parámetros constructivos del calentador:

$$\frac{\Delta T_c(s)}{\Delta q_{entregado}(s)} = \frac{1}{C_{TH}s + \left( \frac{1}{R_{TH}} + \rho Q_e c \right)_0} \quad (4.45)$$

### **Analogías térmico-eléctricas**

Para obtener las FDT de los sistemas térmicos pueden ser conseguidas a través de un estudio de un circuito eléctrico análogo. En el cuadro adjunto se indican las analogías térmico-eléctricas.

Sistema térmico	Sistema eléctrico
Flujo de calor	Corriente
Temperaturas	Potencial
Resistencia térmica	Resistencia eléctrica
Inercia térmica	Capacidad eléctrica

### **Las células Peltier**

Las células Peltier son unos dispositivos termoelectrónicos que se caracterizan por la aparición de una diferencia de temperatura entre las dos caras de un semiconductor cuando por él circula una corriente eléctrica. Estos sistemas son capaces de transformar la energía eléctrica en energía térmica.

Las células Peltier son una alternativa a la clásica refrigeración mediante compresión de vapores con cambio de fase. En el modelo tradicional se establece un determinado ciclo para que un gas, el cual es comprimido y luego es expandido, se haga la correspondiente absorción de calor. Como consecuencia en todo circuito frigorífico se requiere de un condensador, un evaporador, un circuito de expansión y de elementos refrigerantes. En cambio, estos semiconductores son capaces de extraer calor de la cara fría y bombearlo a la cara caliente mediante una batería eléctrica. La refrigeración termoelectrónica supone una alternativa a los sistemas utilizados tradicionalmente.

#### 4.4.1.1 El comportamiento de las células Peltier

Si bien el efecto Peltier es conocido desde 1834, su aplicación práctica necesitó del desarrollo de los semiconductores, pues éstos resultan ser buenos conductores de la electricidad pero pobres guías del calor. La circulación de una corriente eléctrica a través de dos materiales semiconductores con diferente densidad de electrones libres, produce que se libere o se absorba energía. La transferencia de energía tiene lugar en forma de flujo calorífico entre las dos caras de los semiconductores.

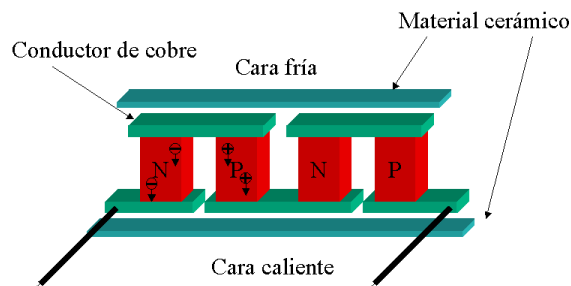


Figura 4. 11 Elementos de una célula Peltier

El enfriamiento termoeléctrico empezó a ser factible a partir de los estudios de Telkes en los años 30 y de Lofee en 1956. Los nuevos materiales semiconductores irrumpían en la escena produciendo rendimientos mucho más altos. Telkes utilizó pares o soldaduras de PbS y ZnSb y Loffee descubrió el uso de PbTe y PbSe. Actualmente, se emplea fundamentalmente el bismuto-teluro como material semiconductor, fuertemente dopado para crear un exceso (tipo-n) o una deficiencia (tipo-p) de electrones.

#### 4.4.1.2 Modelado de la célula Peltier

Son varios los fenómenos que se producen dentro de una célula Peltier, pudiéndose enunciar los efectos Peltier, Thomson y Joule, además de las propias características de la transmisión de calor. Sin embargo, dichos procesos no son todos de igual magnitud e importancia. De hecho, en el rango de temperaturas de funcionamiento nominal, se puede despreciar el flujo calorífico producido por la circulación de la corriente eléctrica con variación de temperatura, i.e. el denominado efecto Thomson. Así que, teniendo en cuenta esta simplificación, al aplicar una diferencia de potencial sobre la célula, se producirá una disminución de la energía almacenada en la cara fría como consecuencia de la reducción de temperatura:

$$q_{cf}(t) = C_f \dot{T}_f(t)$$

donde  $T_f$  es la temperatura de la cara fría y  $C_f$  es la inercia térmica de esta cara. Por el mismo efecto, la cara caliente almacenará calor por unidad de tiempo al incrementarse la temperatura:

$$q_{cc}(t) = C_c \dot{T}_c(t)$$

siendo  $T_c$  la temperatura de la cara caliente y  $C_c$  es la inercia térmica la cara caliente. De otro lado, la diferencia de temperaturas entre ambas caras producirá un efecto de conducción térmica entre la cara caliente y la cara fría, cuantificable como:

$$q_{CT}(t) = \frac{T_c(t) - T_f(t)}{R_{TH}}$$

donde  $R_{TH}$  representa la resistencia térmica entre la cara caliente y la fría. Aplicando el primer principio de la Termodinámica, resultará que la potencia eléctrica suministrada será la diferencia entre los flujos caloríficos de disipación y de absorción, concluyendo que:

$$p_e = C_c \dot{T}_c - C_f \dot{T}_f + \left( \frac{T_c - T_f}{R_{TH}} \right) = C_f (\dot{T}_c - \dot{T}_f) + (C_c - C_f) \dot{T}_c + \left( \frac{T_c - T_f}{R_{TH}} \right) \quad (4.46)$$

La figura 4.12 esquematiza esta ecuación, reflejando el efecto Peltier, modelada por una bomba de calor que extrae calor de la cara fría a la caliente, junto con los elementos de la transmisión de calor y las inercias térmicas. Los almacenamientos de energía, de disminución por la cara fría e incrementándose por la cara caliente, son configurados como capacidades caloríficas, las cuales reflejarán las inercias térmicas de ambas caras. Sin duda alguna, la inserción de un disipador adosado a la cara caliente de la célula, con alta conductividad térmica, y al que se le ha añadido, además, un circuito de convección forzada, garantizará que la temperatura de la cara caliente,  $T_c$ , se mantenga prácticamente constante y próxima a la temperatura ambiente. En la analogía, la capacitancia térmica de la cara caliente tiende a ser muy elevada. En estas condiciones, la derivada de la temperatura de la cara caliente respecto al tiempo es prácticamente nula, obteniendo una FDT LTI que refleja la relación causa efecto, entre la potencia eléctrica entregada y la diferencia de temperaturas entre caras. Si  $\dot{T}_c$  es prácticamente nula y la diferencia de temperaturas entre caras coincide con la variación de la temperatura fría,  $\Delta T = T_c - T_f$ , entonces con la ec. (4.46) quedará simplificada a:

$$p_e(t) \cong C_f \frac{d\Delta T(t)}{dt} + \frac{\Delta T(t)}{R_{TH}} \Rightarrow \frac{\Delta T(s)}{p_e(s)} = \frac{R_{TH}}{1 + C_f R_{TH} s}$$

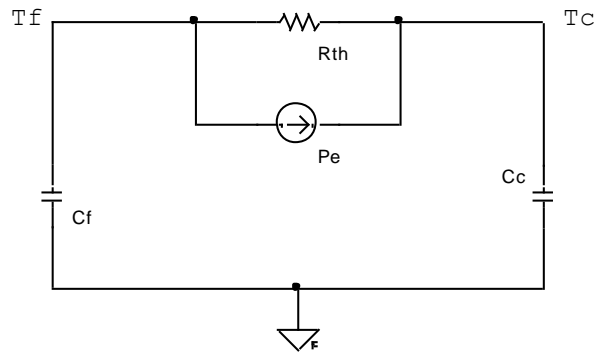


Figura 4. 12. Circuito eléctrico análogo

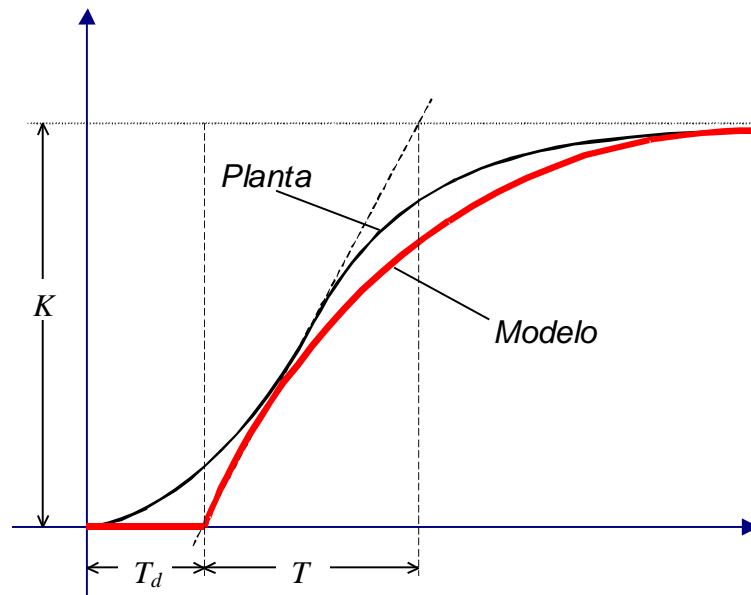
## 4.5 Modelado del retardo puro

En la transmisión de la señal de la entrada hacia la salida, a veces, aparece un retardo de tiempo. Por ejemplo, al iniciar la excitación de un equipo, la señal de salida permanece nula durante un cierto tiempo. Su causa está en la inercia de los elementos de almacenamiento de energía del equipo que no pueden variar su nivel bruscamente en el tiempo, necesitando un tiempo para la transferencia.

En la práctica, el modelo aproximado de muchas plantas está constituido por un retardo puro más un sistema de primer orden. Así es el modelo de Ziegler-Nichols para las plantas que ante una entrada en escalón se aproxima a un comportamiento sobre-amortiguado. Su FDT es:

$$G_p(s) \approx e^{-sT_d} \frac{k}{1 + sT} \quad (4. 47)$$

El término  $e^{-sT_d}$ , por el teorema de traslación temporal de las transformadas de Laplace, corresponde con un retardo puro de tiempo, siendo  $T_d$  el tiempo de ese retraso. Este término es no lineal y hace que la relación causa efecto no se pueda formalizar en una FDT de polinomios de coeficientes constantes tanto en el numerador como en el denominador.



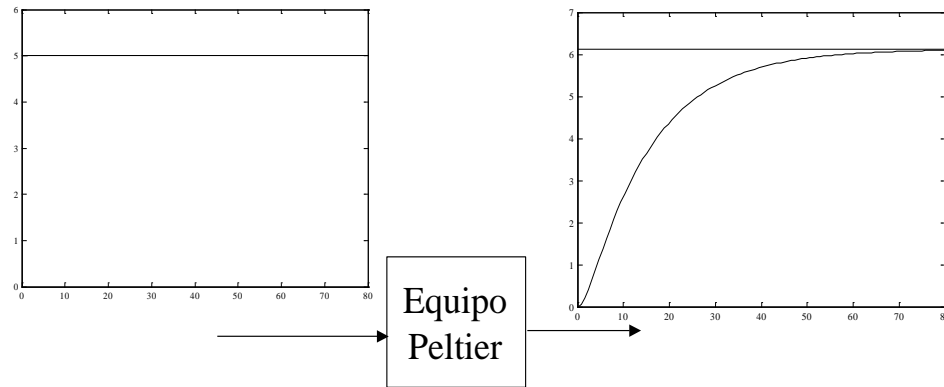
Existen varias aproximaciones de la función exponencial en términos LTI, en estas lecciones se empleará la propuesta de Padé:

$$e^{-sT_d} \cong \frac{1 - s\frac{T_d}{2}}{1 + s\frac{T_d}{2}} \quad (4.48)$$

Nótese que las plantas que tiene el retardo puro son sistemas de fase no mínima, al tener un cero en el semiplano positivo.

**Ejemplo 4.5**

El equipo de prácticas Peltier ante una entrada de 5V en escalón, su salida es:



Modelar la planta según el criterio de Ziegler-Nichols.

La FDT LTI aproximada mediante Padé será:

$$G_p(s) = e^{-sT_d} \frac{k}{1+sT} \approx \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{1 + \frac{T_d}{2}s} \frac{k}{1+sT} \quad (4.49)$$

De la respuesta experimental se obtienen los tres parámetros del equipo:

$$k = \frac{6.12V}{5V} = 1.22, \quad T_d = 4 \text{ s} \quad \text{y} \quad T = \frac{45 - 4}{3} = 13.66 \text{ s}$$

Introduciendo estos valores en la ec. (4.49) se conseguirá la FDT linealizada de la Peltier:

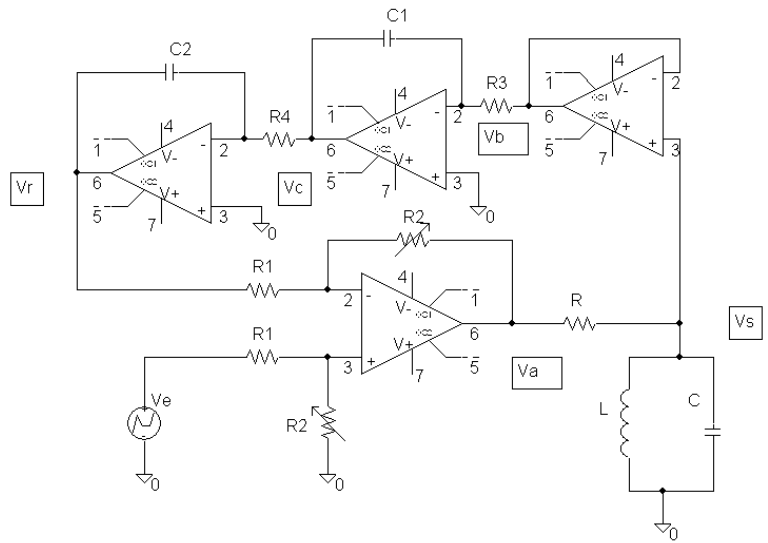
$$G_p(s) = e^{-s4} \frac{1.22}{1+s13.66} \approx \frac{1-2s}{1+2s} \frac{1.22}{1+s13.66}$$

## 4.6 Problemas

### Problema 1

Para el circuito de la figura, considerando que los amplificadores operacionales son ideales y los elementos de energía se encuentran descargados inicialmente, se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modelen el sistema electrónico.
2. Dibujar el diagrama a bloques.
3. Calcular la FDT entre la entrada y la salida,  $\frac{u_s(s)}{u_e(s)}$ .



#### Datos:

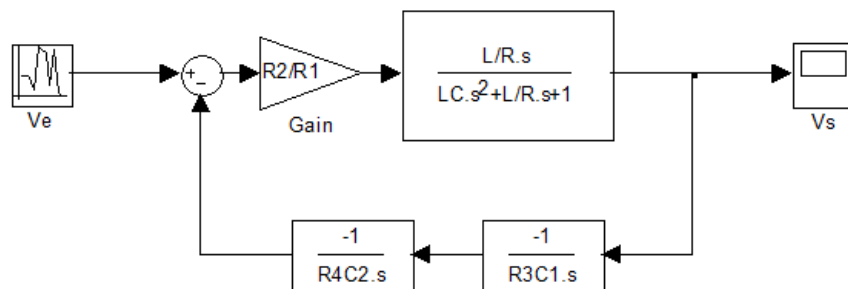
$$R = 10k\Omega \quad R1 = 1k\Omega \quad R3 = 100k\Omega \quad R4 = 10k\Omega \quad C = 100nF \quad C1 = C2 = 1nF \quad L = 100mH$$

1. Las ecuaciones que describen la dinámica del circuito son:

$$1) u_a(t) = \frac{R_2}{R_1} (u_e(t) - u_r(t)) \quad 2) LC\ddot{u}_s(t) + \frac{L}{R}\dot{u}_s(t) + u_s(t) = \frac{L}{R}\dot{u}_a(t)$$

$$3) u_b(t) = u_s(t) \quad 4) R_3C_1\dot{u}_c(t) = -u_b(t) \quad 5) R_4C_2\dot{u}_r(t) = -u_c(t)$$

- 2.



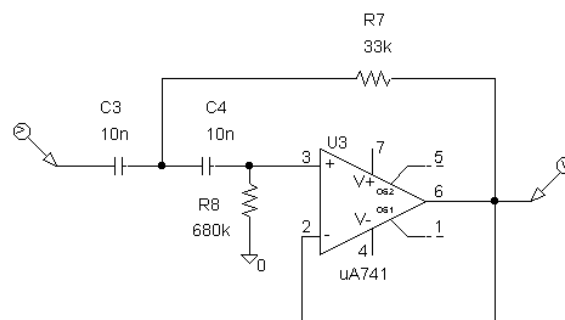


3. La ganancia de tensión será:

$$\frac{u_s(s)}{u_e(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1} \frac{L}{R} R_4 R_3 C_1 C_2 s^2}{R_4 R_3 C_1 C_2 L C s^3 + \frac{L}{R} R_4 R_3 C_1 C_2 s^2 + R_4 R_3 C_1 C_2 s + \frac{R_2}{R_1} \frac{L}{R}} = \frac{R_2 s^2}{s^3 + 10^3 s^2 + 10^8 s + 10^9 R_2}$$

### **Problema 2: Filtro paso alto de segundo orden de Sallen-Key**

Determinar la ganancia de tensión del filtro con AO ideal, y habiendo definido como C el valor de C3 y C4.

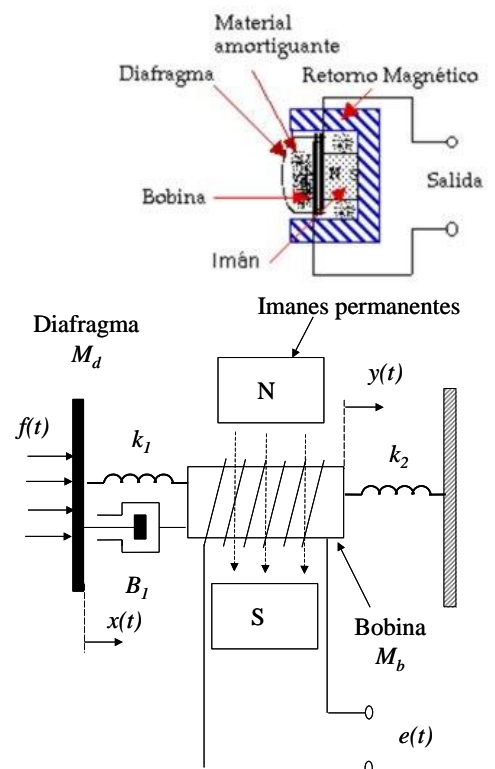


### **Problema 3: Dinámica de un micrófono**

El funcionamiento de un micrófono dinámico se basa en el desplazamiento espacial producido por una bobina dentro de un campo magnético. Hay un diafragma que se desplaza con la fuerza mecánica provocada por las ondas sonoras. Este desplazamiento se transmite a la ferrita de la bobina. La fuerza electromotriz generada en la bobina es proporcional a la inducción de campo,  $B$ , al número de espiras,  $n$ , a la longitud de espiras,  $l$ , y al desplazamiento relativo de la bobina:

$$e(t) = 2 \cdot B \cdot n \cdot l \cdot \frac{d(y(t))}{dt}$$

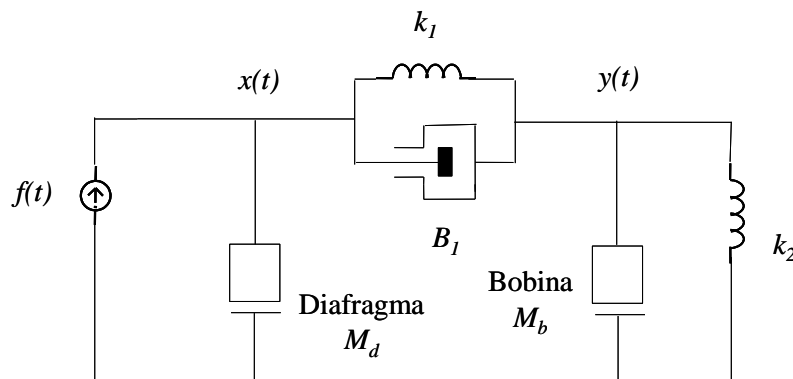
Se considera el modelo simplificado unidimensional de fuerzas adjuntado, donde  $M_d$  es la masa del diafragma y  $M_b$  la masa de la bobina. En el desplazamiento horizontal del diafragma hacia la bobina, se conjetura un rozamiento viscoso,  $B_1$  y un amortiguamiento,  $k_1$ . La bobina



está separada de la estructura a través de un amortiguador,  $k_2$ . Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que definan la dinámica del sistema.
2. Diagrama de bloques.
3. Función de transferencia entre la fuerza sonora y la tensión de salida.

1. El circuito análogo mecánico-eléctrico queda como:



La mecánica de traslación del sistema está definido por:

$$f(t) = M_d \ddot{x}(t) + k_1(x(t) - y(t)) + B_1(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

$$k_1(x(t) - y(t)) + B_1(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = M_b \ddot{y}(t) + k_2 y(t)$$

El desplazamiento de la bobina provocará una variación del flujo magnético sobre ésta y generará una fuerza electromotriz:

$$e(t) = 2Bnl \dot{y}(t) = k^* \dot{y}(t)$$

2. Las ecuaciones diferenciales son lineales, aplicando transformada de Laplace:

$$f(s) = (M_d s^2 + B_1 s + k_1)x(s) - (B_1 s + k_1)y(s)$$

$$(B_1 s + k_1)x(s) = (M_b s^2 + B_1 s + k_1 + k_2)y(s)$$

$$e(s) = k^* s y(s)$$

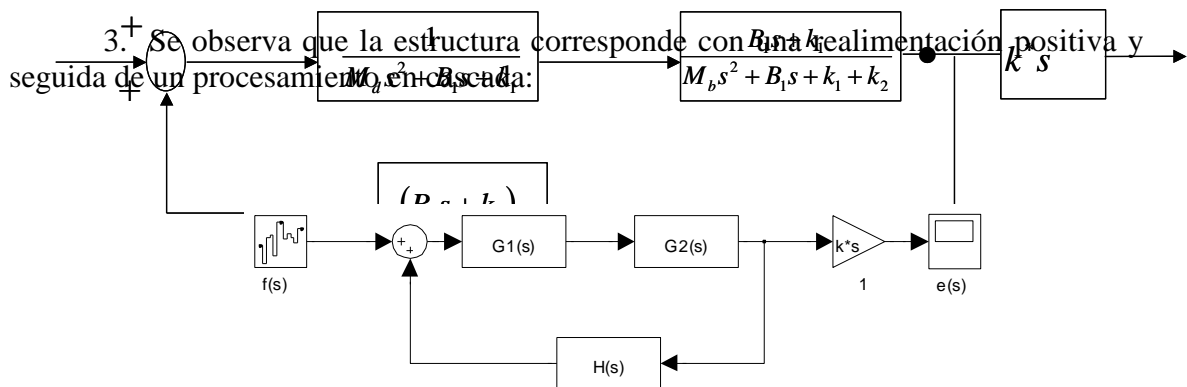
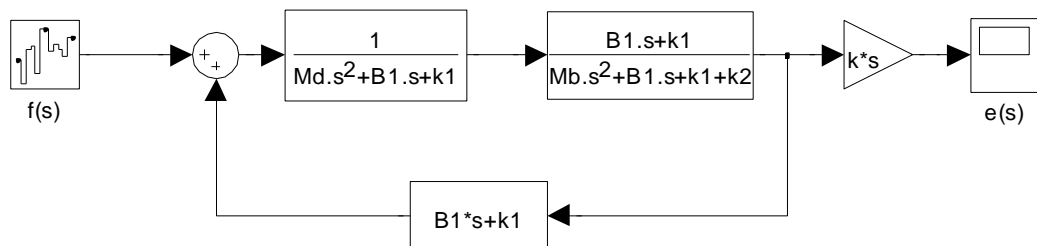
Las FDT resultantes son:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{B_1 s + k_1}{M_b s^2 + B_1 s + k_1 + k_2}$$

$$\frac{e(s)}{y(s)} = k^* s$$

$$x(s) = \frac{f(s) + (B_1 s + k_1)y(s)}{M_d s^2 + B_1 s + k_1}$$

El diagrama de bloques resultante queda:

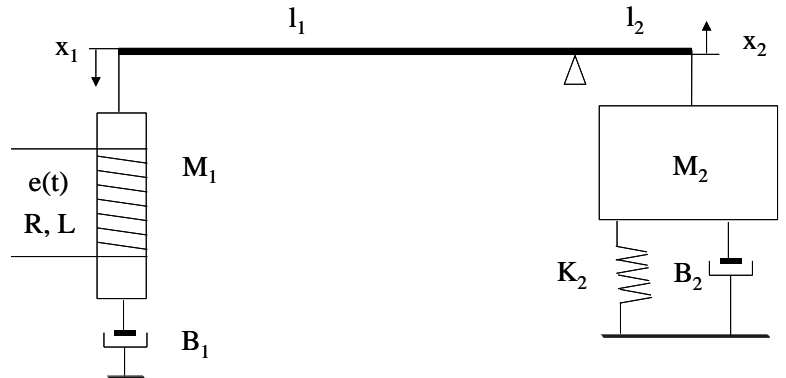


$$\frac{e(s)}{f(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 H} k^* s = \frac{k^* s (B_1 s + k_1)}{(M_d s^2 + B_1 s + k_1 + k_2)(M_d s^2 + B_1 s + k_1 + k_2) - (B_1 s + k_1)}$$

$$\frac{e(s)}{f(s)} = \frac{k^* s (B_1 s + k_1)}{M_d M_b s^4 + B_1 (M_d + M_b) s^3 + [k_1 (M_d + M_b) + k_2 M_d] s^2 + B_1 k_2 s + k_1 k_2}$$

**Problema 4: Dinámica de un telégrafo**

La figura muestra el modelo simplificado de un telégrafo. Ante la recepción de un pulso eléctrico se produce una fuerza magnética proporcional a la corriente de su bobina, originando un desplazamiento en la palanca que provoca el movimiento de la masa del martillo, el cual choca contra una campana, produciendo una onda sonora. Se pide:



1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modele la dinámica del telégrafo.
2. Diagrama a bloques y función de transferencia entre el efecto,  $x_2(s)$ , y la causa,  $e(s)$ .

Datos:

Bobina:  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $k_p = 0.4 \text{ N/A}$ ,  $M_1 = 1 \text{ g}$ ,  $B_1 = 0.01 \text{ Ns/m}$ .

Palanca:  $l_1 = 8 \text{ cm}$ ,  $l_2 = 2 \text{ cm}$ .

Martillo:  $M_2 = 10 \text{ g}$ ,  $B_2 = 0.8 \text{ Ns/m}$ ,  $K_2 = 16 \text{ N/m}$ .

1. El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales son:

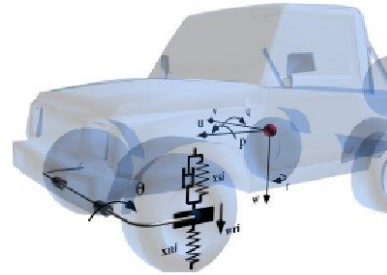
$$\begin{aligned}
 e(t) &= Ri(t) + Li(t); & f(t) &= k_p i(t) \\
 f(t) + M_1 g &= M_1 \ddot{x}_1(t) + B_1 \dot{x}_1(t) + f_{r1}(t); & f_{r2}(t) &= M_2 g + M_2 \ddot{x}_2(t) + B_2 \dot{x}_2(t) + k_2 x_2(t) \\
 f_{r1}(t) l_1 &= f_{r2}(t) l_2; & \frac{x_1(t)}{l_1} &\cong \frac{x_2(t)}{l_2}
 \end{aligned}$$

2. La FDT resultante es:

$$\frac{\Delta x_2(s)}{\Delta e(s)} = \frac{k_p}{(R + sL) \left( \left( M_1 \frac{l_1}{l_2} + M_2 \frac{l_2}{l_1} \right) s^2 + \left( B_1 \frac{l_1}{l_2} + B_2 \frac{l_2}{l_1} \right) s + k_2 \frac{l_2}{l_1} \right)}$$

### Problema 5: Sistema de suspensión

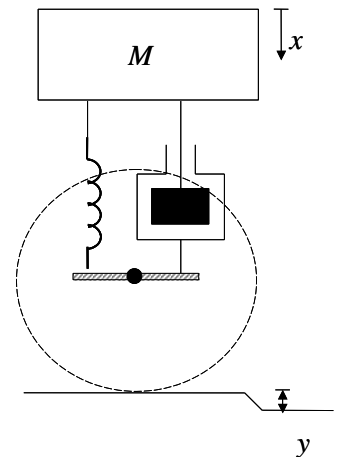
En la figura derecha se muestra un modelo de suspensión de vehículos de tracción. Haciendo suposiciones de simplificación y de reparto del peso del coche sobre las cuatro ruedas, se ha obtenido un segundo modelo. Se pide:



1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del modelo simplificado.
2. Función de transferencia entre el desnivel del pavimento (causa),  $Y(s)$ , con el desplazamiento del chasis (efecto),  $X(s)$ .

#### Datos

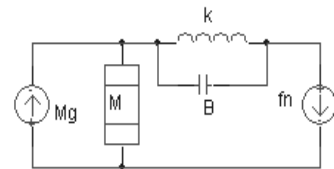
El peso del vehículo es de una tonelada y las características del amortiguador están dadas por  $B = 500$  Ns/m y  $K = 1000$  N/m.



1. El modelo simplificado de suspensión del coche es:

$$Mg = M\ddot{x}(t) + K(x(t) - y(t)) + B(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

$$f_n(t) = K(x(t) - y(t)) + B(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$



2. El conjunto de ecuaciones requiere variaciones alrededor del punto de reposo. Su FDT es:

$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta y(s)} = \frac{K + Bs}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1 + 0.5s}{1 + 0.5s + 0.25s^2}$$

### Problema 6: Control sobre un péndulo

La siguiente figura representa un péndulo controlado por medio de un electroimán. Un complejo sistema electromecánico permite ejercer una fuerza horizontal sobre la barra del péndulo en el punto P proporcional a la intensidad que recorre la bobina:

$$F(t) = 2 \left[ \frac{N}{A} \right] \cdot i_L(t)$$

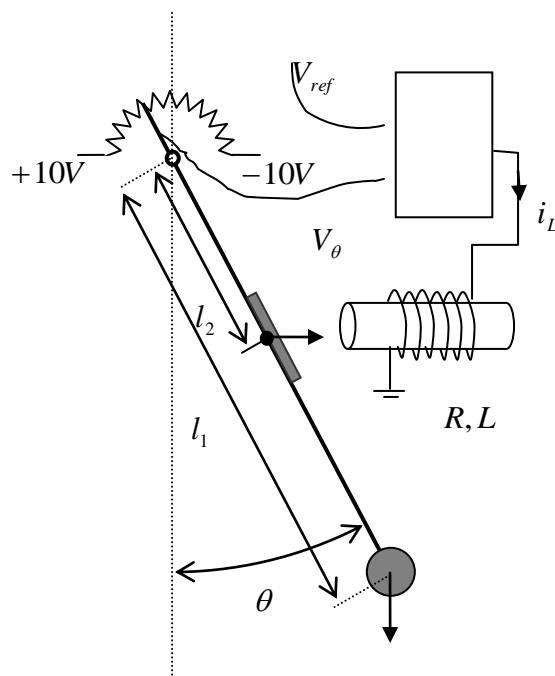
El ángulo girado por el péndulo respecto de la vertical es medido por medio del potenciómetro lineal mostrado en la figura, de tal forma que cuando el ángulo es de  $90^\circ$  la medida es de 10 V. y cuando es de  $-90^\circ$  la medida es de -10 v. El montaje del potenciómetro introduce un rozamiento de constante  $B = 3 \left[ \frac{N \cdot m \cdot s}{radian} \right]$ . El sistema electrónico contiene el amplificador de error y un driver de potencia, de forma que la tensión de salida es amplificada  $k$  veces de la tensión de error. Teniendo en cuenta los datos suministrados en la figura, se pide:

1. Ecuaciones físicas del sistema.
2. Linealizar el sistema respecto del punto  $\theta_0 = 30^\circ$ . Justificar que:

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta F(s)} = \frac{0.173}{s^2 + 3s + 11.547}$$

Considérese para este apartado y los dos siguientes que el valor de  $K$  es 10.

3. Diagrama a bloques y función de transferencia que relaciona  $\Delta\theta$  y  $\Delta V_{ref}$ .
4. ¿Cómo evoluciona el ángulo si se introduce una tensión de referencia de +4 Voltios como valor absoluto? Caracterizar la respuesta temporal del sistema reducido equivalente, sabiendo que hay un polo real en la cadena cerrada que vale -2.3,



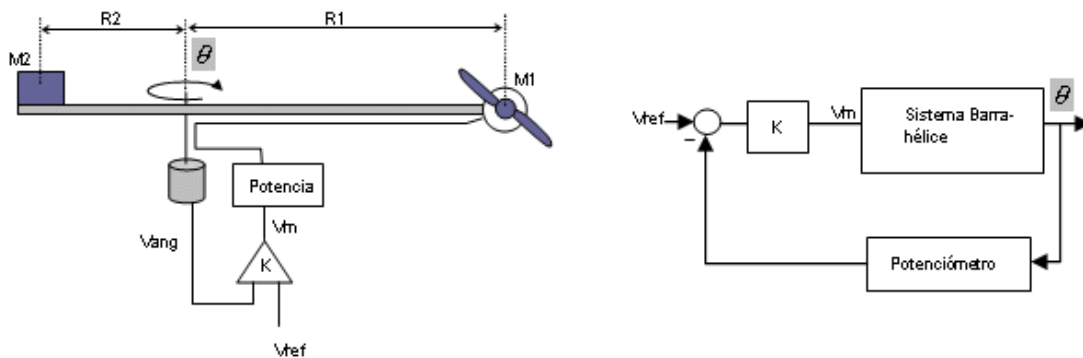
**Datos:**

$$\begin{aligned} l_1 &= 1m. \\ l_2 &= 0,2m. \\ L &= 1H \\ R &= 0,1\Omega \\ M &= 1Kg. \\ g &= 10 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Considérese que el momento de inercia del péndulo es  $J_C = M \cdot l_1^2$

**Problema 7: Modelo del control del rotor de un helicóptero**

Una maqueta de laboratorio pretende modelar el comportamiento del rotor de cola de un helicóptero. Para ello se dispone de los elementos mostrados en la figura.



El sistema consiste de una barra de inercia despreciable sobre la que se sitúa un motor con una hélice de masa  $M1$  en un extremo y un contrapeso de masa  $M2$  en el otro a una distancia  $R1$  y  $R2$  al eje de giro respectivamente. ( $M1=0.1$  kg.,  $M2=0.2$  Kg.,  $R1=0.3$ m.,  $R2=0.15$ m.). El giro realizado por la barra es medido por medio de un potenciómetro axial de forma que establece la siguiente relación entre el ángulo girado  $\theta$  y la tensión de salida:

$$V_{ang}(t) = \frac{10}{2\pi} \theta(t)$$

El motor lleva su propio control de velocidad, de forma que la relación entre la señal de entrada y la velocidad del eje de giro independientemente de la carga viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$V_m(t) = 80 \left( \frac{d\omega_m(t)}{dt} + 0.125\omega_m(t) \right)$$

La hélice al girar genera una fuerza de empuje axial proporcional a su velocidad de giro según la siguiente relación:

$$F_t(t) = 0.01 \cdot \omega_m(t)$$

Además, la hélice provoca una fuerza resistente al avance proporcional a la velocidad lineal de avance de la misma, según la expresión:

$$F_r(t) = 0.05 \cdot R_1 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

El eje de giro de la barra tiene un coeficiente de rozamiento angular de  $B = 0.01 \frac{Nms}{rad}$ .

Como se muestra en la figura se ha realizado un lazo de realimentación para controlar la orientación de la maqueta, llegando al diagrama de bloques en la parte derecha.

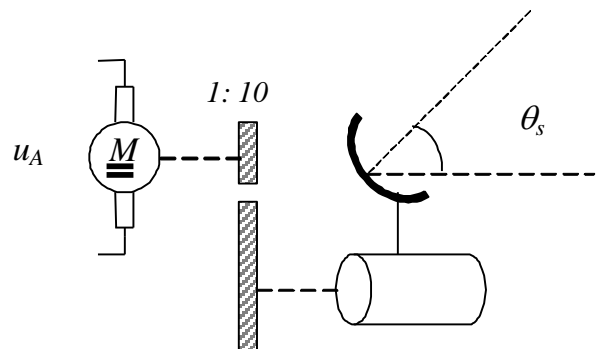
1.- Dibujar el diagrama de bloques correspondiente al bloque barra-hélice, indicando las funciones de transferencia y el significado de las señales en cada enlace.

2.- Obtener la función de transferencia del conjunto barra-hélice.

**Nota:** las ecuaciones están expresadas en unidades del S.I. y los ángulos en radianes.

### Problema 8: Modelado del control de una antena

El sistema de la figura corresponde con el sistema de posicionamiento angular de una antena. El desplazamiento se consigue a través de un motor de corriente continua acoplado a la antena mediante un tren de engranajes. La inclinación del plato de la antena,  $\theta_s$ , depende de la tensión aplicada al motor. Se pide:



1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describan la dinámica del sistema.
2. Obtener el diagrama de bloques, indicando las señales que aparecen y verificar que la función de transferencia del sistema es:
 
$$\frac{\theta_s(s)}{u_A(s)} = \frac{250}{s(s^2 + 50.5s + 1725)}$$
3. Para realizar un control realimentado, se emplea un sensor de posición angular con FDT unitaria. El viento sobre el plato provoca una perturbación al sistema, introduciendo un par ruidoso,  $T_v$ . Representar el nuevo diagrama de bloques del sistema de control realimentado
4. Determinar la FDT  $\frac{\theta_s(s)}{T_v(s)}$ , con el valor de  $k$  igual a 200.

### Datos



Motor: Resistencia de armadura =  $5 \Omega$ , Inductancia equivalente del flujo disperso =  $0.1 \text{ mH}$ ,  
Constante del par motor =  $0.68 \text{ Nm/A}$ , Momento de inercia del rotor =  $0.00136 \text{ kg m}^2$

Tren de engranajes: relación de transmisión =  $1:10$

Antena: Momento de inercia de la carga =  $0.136 \text{ kg m}^2$ , Rozamiento viscoso equivalente =  $0.136 \text{ N.m.s/rad}$ .

1. El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales son:

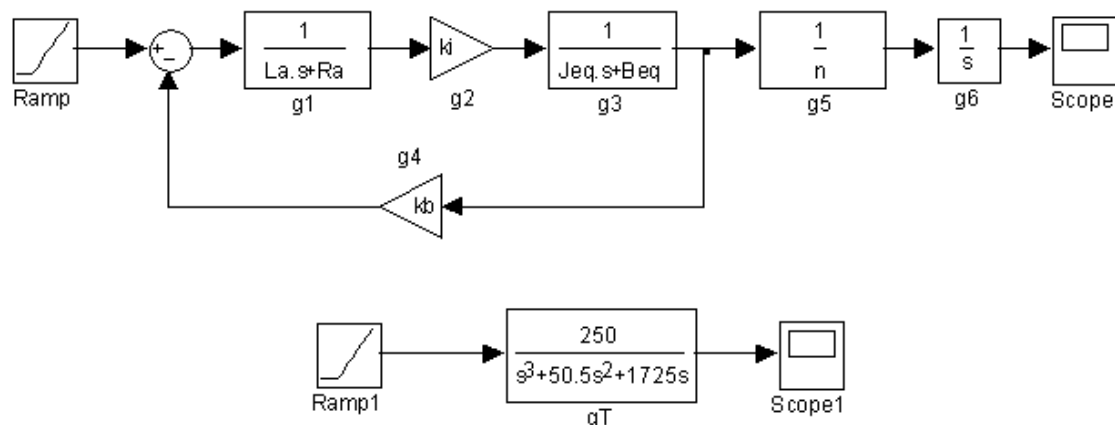
$$u_A(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k_B \cdot \omega_M(t)$$

$$T_m(t) = k_i \cdot i_a(t)$$

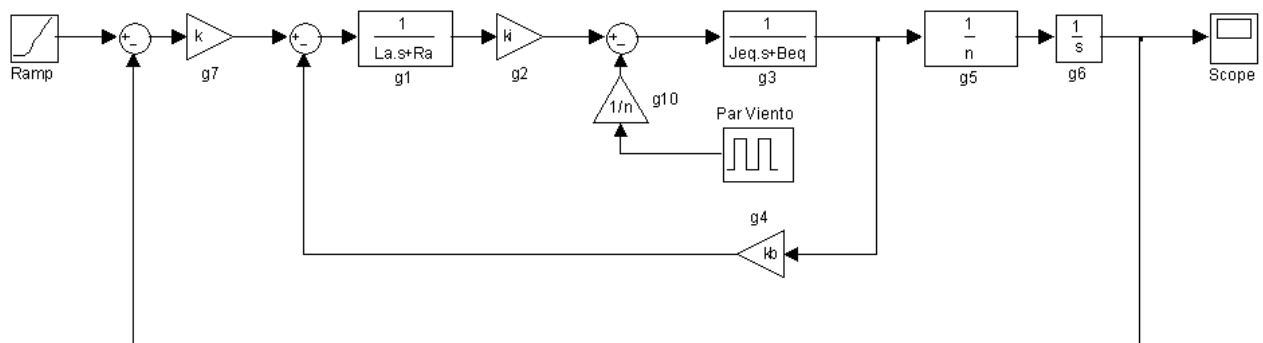
$$T_m(t) = J_r \cdot \dot{\omega}_M(t) + \frac{J_A}{n^2} \cdot \dot{\omega}_M(t) + \frac{B_A}{n^2} \cdot \omega_M(t)$$

$$\theta_s(t) = \frac{1}{n} \int_0^t \omega_M(\tau) d\tau$$

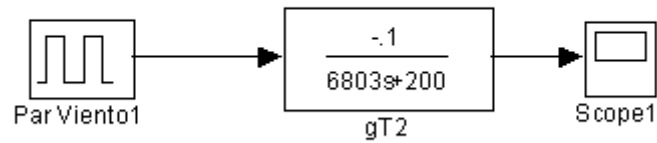
2. El diagrama a bloque estará formado por:



3. Incluyendo el par del viento:



## 4. La FDT entre la salida y el par del viento:

**Problema 9: Modelado de una cinta transportadora**

Para la traslación horizontal de una cámara de vídeo pan-tilt se ha utilizado una cinta transportadora. En el control se ha utilizado un motor de continua y una reductora. Se pide:

- 1) Diagrama de bloques del sistema
- 2) FDT entre la velocidad de desplazamiento del carro y la tensión en el motor.

**Datos:**

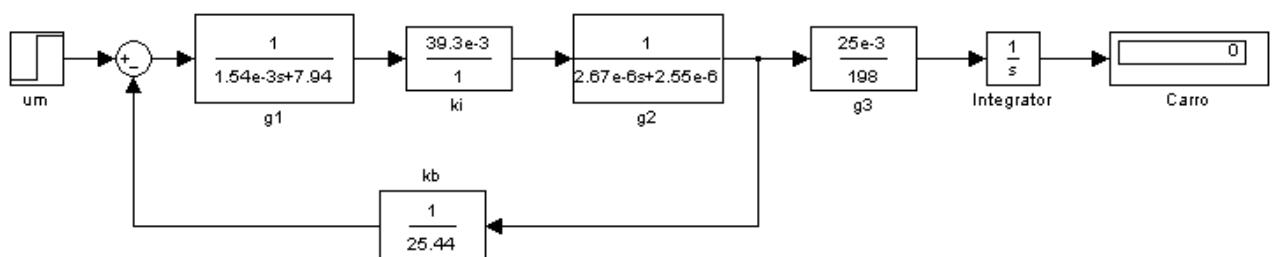
Motor: Resistencia de armadura =  $7.94 \Omega$ , Inductancia equivalente del flujo disperso =  $1.54 \text{ mH}$ ,

Constante del par motor =  $39.3 \text{ mNm/A.}$ , Constante de la fuerza contraelectromotriz  $\Rightarrow 243 \text{ rpm/V}$ , Momento de inercia del rotor =  $26.6 \text{ gr cm}^2$

Tren de engranajes: relación de transmisión =  $1:198$

Cinta transportadora: Radio de las poleas =  $25 \text{ mm}$ , Peso de la cámara =  $1200 \text{ gr}$ . Rozamiento viscoso equivalente de las poleas =  $10^{-1} \text{ N.m.s/rad}$ .

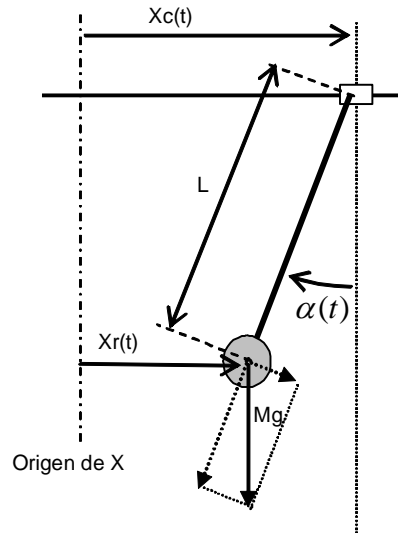
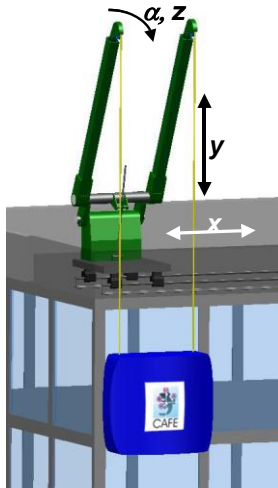
1. El diagrama a bloques corresponderá con:



2. La FDT entre la velocidad de desplazamiento del carro con la tensión del motor es:

$$\frac{\dot{x}(s)}{u_m(s)} = \frac{4.96 \cdot 10^{-6}}{4.96 \cdot 10^{-9} \cdot s^2 + 2.11 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1.56 \cdot 10^{-3}} = \frac{1211.33}{(s + 5082)(s + 75.17)}$$

### Problema 10: Robot limpiador



El robot limpiador de fachadas mostrado en la figura, se compone de dos grandes elementos: por un lado un *carrier* comercial en lo alto de la fachada, y por otro el sistema de limpieza robótico, propiamente dicho, que sustituye a la canasta en la que habitualmente se sitúan los limpiadores. Se desea disminuir las oscilaciones que en el robot provocan los desplazamientos a lo largo del eje X del *carrier*. Para ello se ha supuesto el conocimiento de la longitud del cable  $L$  y de la masa del robot  $M$ , ambos datos fácilmente obtenibles por medio de sensores. Analizando la dinámica del sistema y siguiendo el sistema de referencias mostrado en el esquema de la figura, se ha llegado a la siguiente relación:

$$Mg \sin \alpha(t) = M \frac{d^2}{dt^2} X_R(t) + B \frac{d}{dt} X_R(t)$$

En donde  $B$  es un coeficiente de rozamiento con el aire dependiente exclusivamente de la geometría de la carcasa del robot y  $g$  es la aceleración terrestre.

**Datos:**  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$   $L = 3.25m$   $M = 400Kg$   $B = 35 \frac{Ns}{m}$

Demostrar que la función de transferencia que relaciona el movimiento en abscisas del robot con el movimiento en abscisas del *carrier* es:

$$G(s) = \frac{\Delta X_R(s)}{\Delta X_C(s)} = \frac{3.01}{s^2 + 0.0875s + 3.01}$$

para el punto de funcionamiento dado por:  $X_{R0} = \dot{X}_{R0} = X_{C0} = \dot{X}_{C0} = 0$

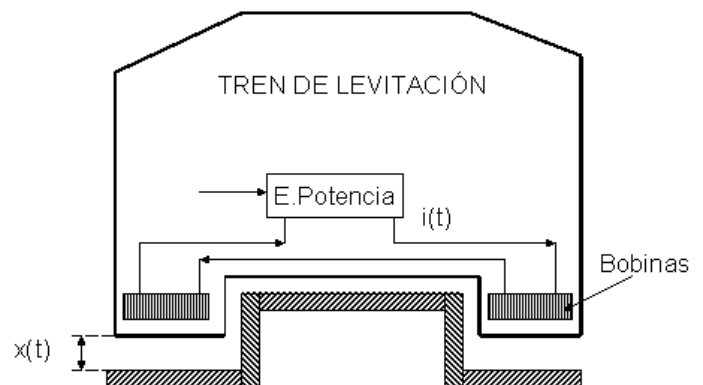
### **Problema 11: Tren de levitación**

Los trenes de levitación magnética circulan suspendidos en el aire, sin contacto físico con el suelo. El objetivo es alcanzar grandes velocidades con un consumo bajo, ya que el único rozamiento es el aerodinámico. La levitación magnética se consigue gracias a unas bobinas que producen una fuerza de levitación que se puede aproximar según la ecuación  $f_l(t) = k_p \frac{i^2(t)}{x^2(t)}$ . El



peso del tren se opone a esta fuerza. El conjunto total de estas fuerzas determinan el movimiento vertical del tren. Para poder ajustar el nivel de levitación a un valor de referencia,  $x_{ref}$ , se diseña un sistema de control que consta de los siguientes elementos:

- Un sensor que mide el nivel de levitación, se supone instantáneo y de ganancia unidad.
  - Un comparador que calcula el error entre el valor de referencia y la medida del sensor.
  - Un compensador que a partir de la señal de error, genera una señal que ataca a la unidad de potencia.
  - Una etapa de potencia que dado un valor a su entrada, aplica una corriente a las bobinas de forma instantánea y con ganancia unidad.
1. Determinar el punto de reposo de levitación,  $x_0$ , si el valor de la corriente por las bobinas es de 50A.
  2. Obtener la función de transferencia  $\frac{\Delta x(s)}{\Delta i(s)}$ , linealizada en el punto de reposo del apartado anterior.
  3. Representar el diagrama a bloques del sistema de control de levitación.



1. En el punto de reposo, la fuerza de levitación se iguala a la de gravitación, por tanto:

$$x_0 = \sqrt{\frac{k_p i_0^2}{Mg}} = 0.1m$$

2. La dinámica es no lineal debido a la fuerza de levitación. Linealizando alrededor del punto de reposo definido, el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales, en incrementos, quedará:

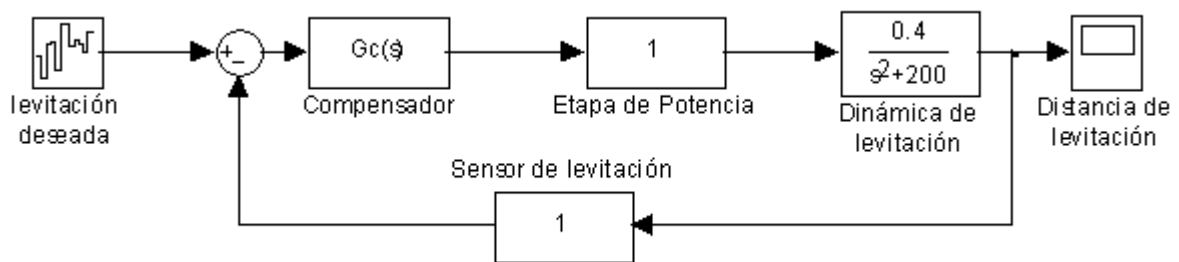
$$\Delta f_l(t) = M\Delta\ddot{x}(t)$$

$$\Delta f_l(t) = k_p \left[ \frac{2i}{x^2} \right]_0 \Delta i(t) + k_p \left[ \frac{-2i^2}{x^3} \right]_0 \Delta x(t)$$

Dando valores y aplicando transformadas de Laplace, la FDT estará definida por:

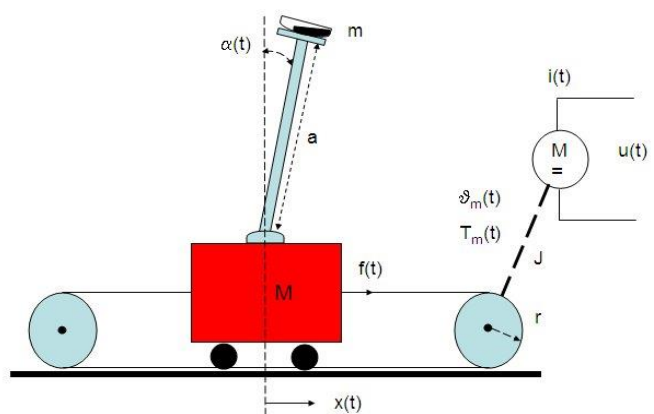
$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta i(s)} = \frac{0.4}{s^2 + 200}$$

3.



### Problema 11: Control de péndulo invertido

El sistema de la figura representa el control de un péndulo invertido. Con el fin de mantener en posición una varilla de longitud  $a$ , situado sobre un carro móvil de masa  $M$  y en cuyo extremo lleva adosado un recipiente con líquido, de masa  $m$ , se dispone de un motor cuya tensión de entrada  $u(t)$  se puede manipular. La varilla forma en cada momento un ángulo  $\alpha(t)$  respecto a la vertical y gira sobre un eje situado en su extremo en su parte inferior. El carro es arrastrado por una fuerza  $f(t)$  mediante un cable rígido, suponiendo despreciable el rozamiento correspondiente a su movimiento en el eje  $x(t)$ . Las ecuaciones carro-varilla que relacionan la fuerza aplicada con el ángulo girado son:

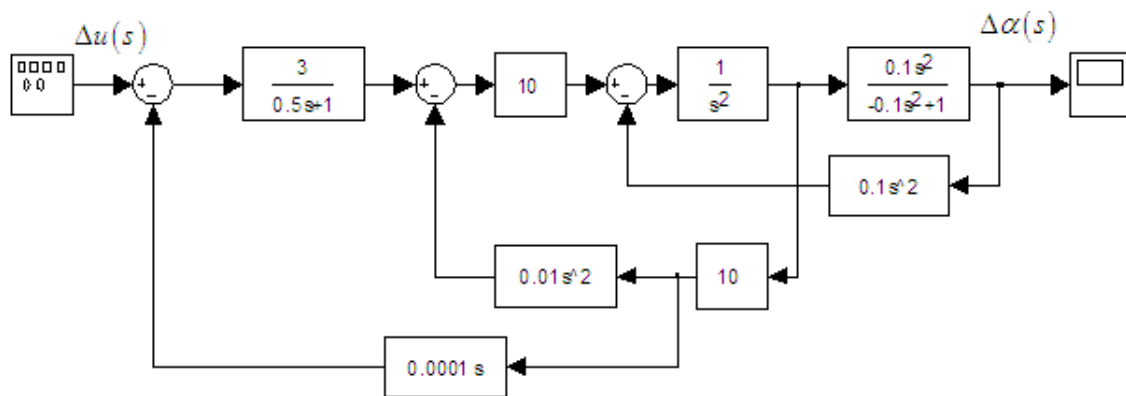


$$(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} - ma(\sin(\alpha(t)))\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + ma(\cos(\alpha(t)))\frac{d^2\alpha}{dt^2} = f(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\cos(\alpha(t)) + ma\frac{d^2\alpha}{dt^2} = mg\sin(\alpha(t))$$

Se pide:

1. Sabiendo que el par generado por el motor,  $T_m(t)$ , aplicado a través de un eje y una polea de radio  $r$  es la que origina la fuerza  $f(t)$ , una vez vencida la inercia  $J$  del conjunto eje-polea, determinar el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modele la dinámica del motor-eje-polea.
2. Punto de equilibrio del sistema dado por el reposo del carro,  $x_0=0$ .
3. Linealización alrededor del punto anterior de reposo de las ecuaciones carro-varilla.
4. Demostrar que el diagrama a bloques del sistema corresponde al de la figura:



5. Considerando que  $k_B$  tiende a ser nula, demostrar que
 
$$\frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta u(s)} = \frac{-31.5}{(s+2)(s+3.24)(s-3.24)}$$

Datos:

Motor-polea :  $R = 1\Omega$   $L = 0.5H$   $k_p = 3Nm/A$   $k_B = 10^{-4}Vs/rad$   $J = 0.01kgm^2$   $r = 0.1m$   
 carro-varilla :  $m = 0.1kg$   $M = 0.9kg$   $a = 1m$   $g \cong 10m/s^2$

1.

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + k_B\frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

$$T_m(t) = k_p i(t) = J\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + r f(t)$$

$$x(t) = r\vartheta(t)$$

2.

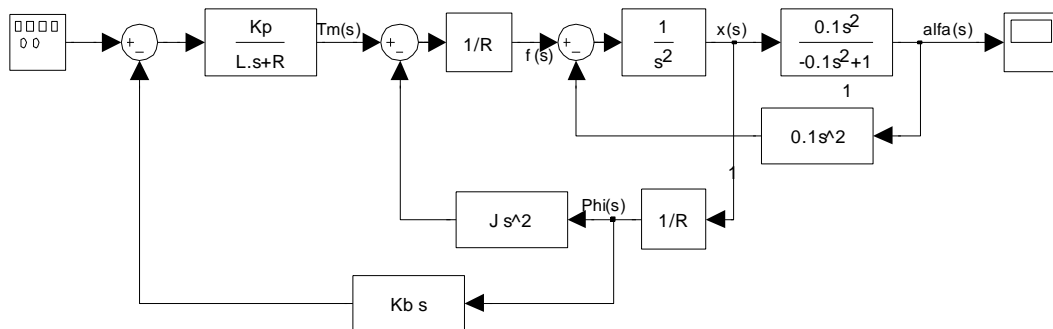
$$x_0 = 0m \quad f_0 = 0N \quad T_{m_0} = 0Nm \quad i_0 = 0A \quad u_0 = 0V \quad \alpha_0 = 0rad$$

3.

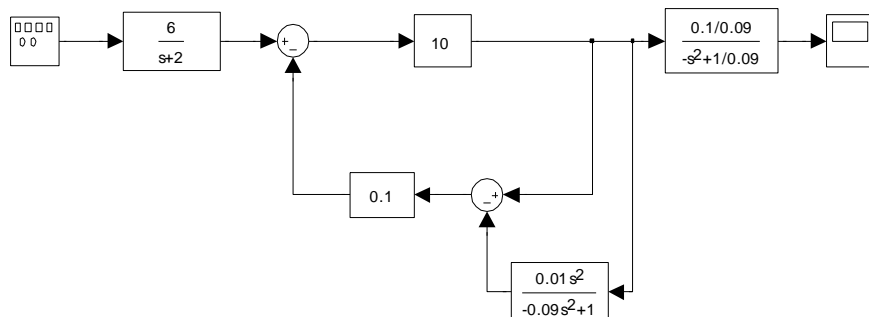
$$1 \cdot \Delta \ddot{x}(t) + 0.1 \cdot \Delta \ddot{\alpha}(t) = \Delta f(t)$$

$$0.1 \cdot \Delta \ddot{x}(t) + 0.1 \cdot \Delta \ddot{\alpha}(t) = \Delta \alpha(t)$$

4.



5.



Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU".

La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) para [contenidos abiertos](http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>