

14 Consideraciones y acciones básicas de Control

Si bien las técnicas de análisis permiten caracterizar la evolución dinámica de los sistemas ante una excitación, las técnicas de diseño tratan de variar la composición de estos sistemas para que sus respuestas se acomoden a unas especificaciones determinadas. Estas condiciones de diseño fijan el tipo de respuesta transitoria, la precisión del equipo así como garantizar la estabilidad de su comportamiento ante estímulos externos. Por tanto, todos los conocimientos desarrollados dentro de las técnicas de análisis serán utilizados para realizar las tareas de diseño capaces de mejorar la dinámica de los sistemas de control.

Hasta estos momentos se ha trabajado en el modelado del comportamiento dinámico de los sistemas. Una vez obtenida las funciones de transferencia de los sistemas, se puede predecir cómo van a responder los sistemas ante las excitaciones externas. Sin duda, la validez entre las respuestas teóricas y las reales dependerán sólo de los modelos empleados. En definitiva, una adecuada función de transferencia, acompañada por las herramientas del análisis dinámico, dará resultados similares al comportamiento físico real.

Sin embargo, al emplear las técnicas de diseño o compensación sobre los sistemas para que cumplan ciertas condiciones (estabilidad, precisión y respuesta transitoria) resulta que no suele existir una única solución, sino varias. La experiencia del ingeniero de control resultará ser fundamental para encontrar soluciones óptimas. Como se verá en los siguientes capítulos, muchas de las reglas a emplear son de carácter empírico, sin ningún fundamento matemático plausible, simplemente utilizadas por tener éxito en muchas de las plantas industriales. Aun más, la búsqueda sistemática de soluciones óptimas de control sigue siendo hoy en día un reto de la investigación de este saber científico.

Las acotaciones de este curso básico de Control hacen centrarse en el empleo de modelos lineales e invariantes en el tiempo (*Linear Invariant Time, LTI*). Además sólo se emplearán las herramientas del lugar de las raíces y aquellas basadas en la respuesta en frecuencias. Concluyendo, el modo de actuar será que dado la función de transferencia de una planta de carácter LTI y con las técnicas mencionadas, las cuales permiten determinar la evolución del sistema, se tratará de mejorar el comportamiento dinámico del equipo mediante la inserción de algún elemento de compensación. Véanse a continuación cuales son los pasos a seguir:

1. Pliego de condiciones, i.e. los datos de partida y los requisitos dinámicos que se van a imponer.
2. La arquitectura física de control.
3. La metodología del diseño de los reguladores de control.

En primer lugar habrá de citar los datos de partida. Por lo anteriormente expuesto, se requerirá del modelo de la planta, normalmente su función de transferencia. Además, se necesitará saber cual va a ser la señal o señales a controlar. Llegado a este punto y teniendo en cuenta el carácter introductorio del curso, este temario sólo se centrará sobre reguladores mono-variables o también llamados SISO (*Single Input Single Output*), por lo que se tratará del control de la única variable de salida. Sobre esta señal a controlar se enumerarán cuales son las condiciones dinámicas que deben de cumplirse. Por tanto, los datos de partida que se disponen para el diseño suelen ser:

- a) El modelo de la planta o proceso a regular,
- b) la variable a controlar,
- c) las perturbaciones posibles,
- d) y las especificaciones dinámicas a las que debe de ajustarse el sistema.

En segundo lugar será necesario fijar la arquitectura de control. La misión del diseñador consiste en definir una estructura adecuada para los sistemas de regulación. Deberá de elegirse un accionador, un dispositivo de medida para captar la señal de salida y un detector de error. Todas ellas vienen definidas por la característica de la planta. Sin embargo, el desarrollo tecnológico actual trata de emplear el procesamiento de las señales eléctricas, llevando a que en la mayoría de las soluciones emplee las técnicas de la Electrónica de Potencia y de la Instrumentación Electrónica, sin menoscabar el uso de otras tecnologías. Por otro lado, es fácil encontrar reguladores de control que emplean microprocesadores o autómatas programables, y en menor medida soluciones basadas en la Electrónica Lineal. Los dos primeros casos corresponden al tratamiento de señales eléctricas digitales y requerirán de la Teoría de los Sistemas Discretos, que se verá en posteriores capítulos. En cambio, el desarrollo de la teoría de Control sobre sistemas continuos se apoya sobre los circuitos electrónicos lineales. Tampoco hay que olvidar las posibilidades de implementación de los sistemas de regulación mediante otras tecnologías como es el caso de los elementos neumáticos, sistemas mecánicos, etc. Pero con independencia del tipo de solución física, al menos se podría indicar tres estructuras distintas de sistemas de regulación automática lineal:

a) **Compensación en serie o en cascada:** Se basa en una estructura de realimentación negativa con un único lazo, donde el elemento compensador, $G_C(s)$, procesa la señal de error y ataca directamente a la planta, $G_P(s)$. Es la estructura más comúnmente empleada, ya que separa las señales de control (baja potencia), de las requeridas para manipular a la planta que en general necesitan ser abastecidas con grandes cantidades de energía (figura 14.14.a).

b) **Compensación en paralelo o por realimentación:** Consiste en realimentar la señal de salida de algún elemento de la planta, de forma que el compensador se ubica en una realimentación interna (figura 14.1b).

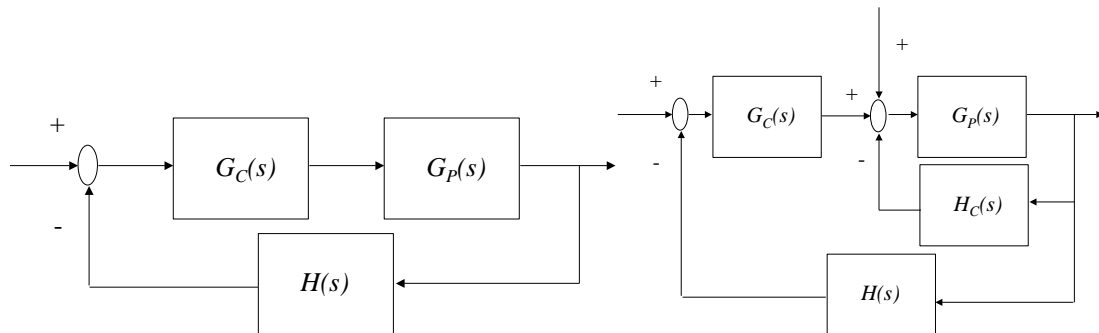


Figura 14. 1. a) Compensación en serie, b) Compensación en paralelo

c) **Compensación predictiva o por prealimentación:** trata de adelantarse en su acción correctora tras la medición de las perturbaciones (figura 14.2). La señal perturbadora (que debe ser medible) es llevada directamente a la entrada a través del compensador de prealimentación $G_{CP}(s)$.

14.1.1 Especificaciones de funcionamiento

Son el conjunto de especificaciones dinámicas que debe exhibir la salida del sistema para cumplir determinados objetivos en cuanto a su funcionamiento. Para un diseño correcto se debe de elegir una serie de requisitos posibles, tratando además, de que las condiciones que se fijen no sean necesariamente severas.

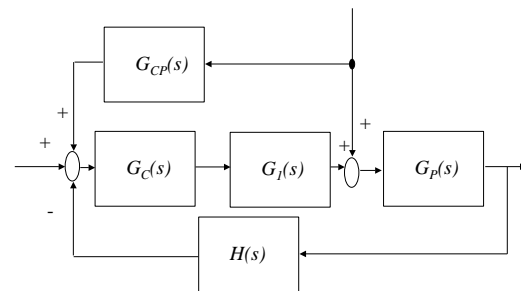
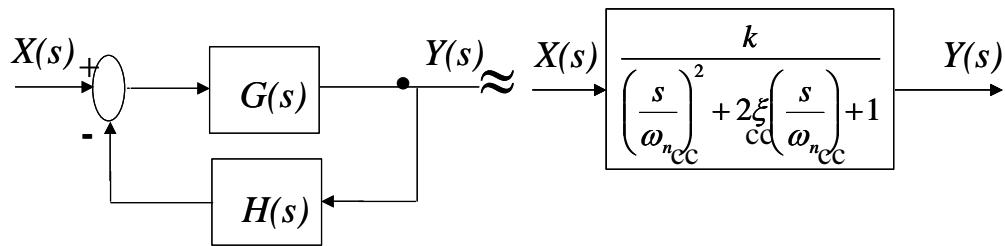


Figura 14. 2. Compensación predictiva

Por otro lado, al tratar con sistemas LTI y al emplear la teoría de polos dominantes, el resultado de la compensación en cadena cerrada se puede aproximar a un sistema de segundo orden equivalente. Por esta razón, se hace extensible dar las especificaciones dinámicas del equipo haciendo referencia a los parámetros típicos de los sistemas de segundo orden.



El grupo de los requisitos puede ser dado en el dominio del tiempo, en la frecuencia o en el dominio complejo. En el caso de emplear las técnicas del lugar de las raíces se emplearán especificaciones del dominio temporal, tales como el tiempo de establecimiento y la amplitud de pico ante una entrada en escalón, junto con las características de precisión. Si el diseño se hace en frecuencias, el margen de fase y la frecuencia de cruce de ganancia junto con las constantes de error serán las especificaciones. Al final, lo que se pretende es conseguir que el conjunto realimentado tenga unos polos complejos conjugados y dominantes (esta elección vendrá justificada posteriormente, pero se puede decir que es un compromiso entre la rapidez de respuesta y la estabilidad del conjunto) en los que pueden definirse en términos del factor de amortiguamiento y de frecuencia natural no amortiguada. En el cuadro adjunto se ponen de manifiesto las especificaciones dependiendo del dominio con el que se trabaje.

Dominio del tiempo	Sobreoscilación	M_p, t_p
	Tiempo de subida	t_r
	Tiempo de establecimiento	t_s
	Error en el régimen permanente	e_p, e_v, e_a
Dominio de la frecuencia	Margen de fase	γ
	Frecuencia de cruce de ganancia	ω_g
	Pico de resonancia y frecuencia de resonancia	M_r, ω_r
	Error en el régimen permanente	e_p, e_v, e_a
Dominio complejo	Coficiente de amortiguamiento	ζ
	Constante de amortiguamiento	σ
	Frecuencia amortiguada	ω_d
	Frecuencia natural no amortiguada	ω_n
	Error en el régimen permanente	e_p, e_v, e_a

Tabla 14. 1 Parámetros de un sistema de segundo orden equivalente. Características dadas de los polos dominantes de la cadena cerrada.

Sin embargo, estas especificaciones no son independientes entre sí, existiendo relaciones entre estos parámetros. Por ejemplo, el tiempo de establecimiento es inversamente proporcional a la constante de amortiguamiento, o bien, el margen de fase es proporcional al coeficiente de amortiguamiento. La tabla 14.2 muestra algunas de estas relaciones matemáticas entre los parámetros de los distintos dominios para los sistemas de segundo orden.

Tabla 14. 2. Relaciones entre los parámetros de sistemas de segundo orden

Sobreoscilación	$M_{P,cc} = 100e^{-\pi/\tan\theta}$ $M_{P,cc} \approx 75 - \gamma_{ca}$ Si : $\gamma > 27^\circ$ y $M_P < 46\%$
Tiempo de subida	$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ Si : $0 < \zeta < 1$
Tiempo de pico	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ Si : $0 < \zeta < 1$
Tiempo de establecimiento	$t_s = \frac{\pi}{\sigma}$ Si : $0 < \zeta < 0.4$
Margen de fase	$\gamma_{ca} \approx 100\zeta_{cc}$ Si : $0 < \zeta < 0.7$
Pico de resonancia	$M_r \approx \frac{1}{2\zeta}$ Si : $0 < \zeta < 0.7$
Frecuencia de resonancia	$\omega_r \approx \omega_d$ Si : $0 < \zeta < 0.7$
Ancho de banda	$AB \approx \frac{1}{2t_r}$ Si : $0 < \zeta < 1$

14.1.2 Condiciones básicas exigibles que debe tener el diseño de un sistema de control

El objetivo fundamental de un sistema de control SISO es conseguir que la señal de salida siga a la entrada, haciendo que las perturbaciones sobre el sistema influyan lo mínimo posible sobre la respuesta del equipo. Por ejemplo, en el diseño de un servosistema de dirección de un auto, el objetivo será que las ruedas del vehículo (señal de salida) persiga la señal del volante (señal de entrada), con independencia del tipo de carretera o de las variables climatológicas (perturbaciones).

Para el propósito marcado, el sistema deberá de cumplir los siguientes cuatro requisitos:

1. El sistema debe ser estable.
2. El sistema debe de tener una determinada precisión.
3. El sistema debe de estar adecuadamente amortiguado y debe ser lo suficientemente rápido en el tiempo.
4. El sistema debe rechazar a las perturbaciones.

Sin embargo, se observará que estos cuatro objetivos entre sí son contradictorios y deberá de buscarse un compromiso cuantitativo de cada una de estas exigencias. La primera de ellas, la de estabilidad, exige que el sistema deba de volver al reposo cuando haya terminado la excitación de entrada y no existan perturbaciones que influyan al sistema. Los procedimientos de Routh en el dominio complejo, de Nyquist en la frecuencia o las técnicas de lugar de las raíces permitirán determinar si el sistema es o no estable.

Para que un sistema sea preciso se requiere que la ganancia estática sea tal que la señal de salida siga a la entrada. Además, la ganancia estática entre la señal de salida y la de perturbación deberá de tender a ser nula. Suponiendo una compensación serie con realimentación unitaria (figura 14.3), las funciones de transferencia entre la salida y la entrada, $M_1(s)$, y la salida respecto a la perturbación, $M_2(s)$, serán calculadas mediante la aplicación del teorema de superposición:

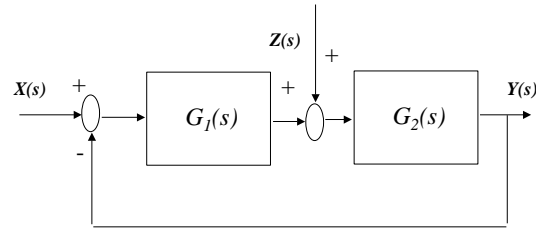


Figura 14. 3. Arquitectura de control típica

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} X(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} Z(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \\ M_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \end{array} \right. \quad (14. 1)$$

Tal cual se ha comentado se deseará que $M_1(s)$ tenga una ganancia estática que tienda a ser uno, mientras que $M_2(s)$ debe de tender a ser nula. Para obtener este doble efecto se necesitará que $G_1(s)$ y la ganancia de la cadena abierta, $G_1(s) G_2(s)$, tengan una alta ganancia estática, ya que si es así:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_1(s) \gg 1 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G_2(s) \gg 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow 0} M_1(s) \rightarrow 1 \\ \lim_{s \rightarrow 0} M_2(s) \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (14. 2)$$

Concluyendo, que si $G_1(s)$, cuya FDT incluye el compensador, tiene el efecto de un integrador, el cual se caracteriza por tener una alta ganancia estática, podrá cumplirse el requisito de precisión. Pero también es conocido que la acción integradora en la cadena abierta hace que el bucle cerrado de control tienda a ser más inestable. Por tanto, se observa que un exceso de precisión puede hacer que el sistema se vuelva inestable. Desde el punto de vista de la respuesta frecuencial, se sabe que a medida de que se aumente la ganancia estática disminuirá el margen de fase y aun más, la inclusión de una acción integral supone la inserción de un desfase de -90° , provocando una disminución del margen de fase. Estas conclusiones indican que habrá de buscar un compromiso entre la estabilidad y la precisión del equipo.

Un compromiso entre rapidez y estabilidad requiere que los polos dominantes de la cadena cerrada sean complejos conjugados. Esta conclusión conlleva a que el sistema sea sub-amortiguado, i.e. presentará oscilaciones alrededor del valor final ante una entrada en escalón. No obstante, una excesiva oscilación acabará volviendo al sistema inestable y lento. Por el contrario, si el sistema resultante es sobre-amortiguado, la respuesta del transitorio será también lenta aunque habrá un aumento de la estabilidad. Un compromiso entre la rapidez del transitorio y la estabilidad se garantiza con valores de sobreoscilación, M_p , entre el 5% y el 35% o con un pico de resonancia, M_r , entre 1dB y 3dB.

La tercera condición, amortiguamiento y rapidez, está relacionado con la naturaleza de la respuesta del régimen transitorio. Se ha demostrado que si un sistema tiene una buena pauta de comportamiento en la respuesta de transitorio ante una entrada en escalón,

cualquier otro tipo de entrada prestará una tendencia óptima de transitorio al seguir la señal de mando. Al considerar el modelo equivalente reducido del sistema de control a uno de segundo orden, implica que el sistema será más rápido a medida que los polos dominantes se alejen del eje imaginario. Desde el punto de vista matemático se observa que si la constante de amortiguamiento aumenta disminuye el tiempo de establecimiento, $t_s = \frac{\pi}{\sigma}$.

Concluyendo, los polos dominantes deben de alejarse todo lo más posible del eje imaginario, hacia la izquierda) y sus ángulos de apertura deberán de estar entre 45° y 70° ($5\% < M_p < 35\%$).

Resultados similares se obtienen con la respuesta en frecuencia. La evolución del transitorio temporal corresponde con la respuesta frecuencial del equipo en alta frecuencia. A medida de que un sistema tenga un mayor ancho de banda más rápido responderá, pero también se hará más sensible al ruido, ya que los espectros de las perturbaciones suelen tener componentes de alta frecuencia. De hecho, la respuesta del régimen transitorio depende del margen de fase y de la frecuencia de cruce de ganancia. Así, un sistema con bajo nivel de margen de fase resulta tendente a ser sobreoscilatorio y a la inestabilidad ($\gamma_{ca} \approx 100\%$), en cambio, un alto valor de margen de fase hace al sistema sobreamortiguado y lento. Por otro lado, la rapidez del sistema está relacionada con la frecuencia de cruce de ganancia. A medida de que aumente este valor disminuye el tiempo de establecimiento. Sin embargo, vuelve aparecer una nueva contradicción, al hacer que la frecuencia de cruce de ganancia tienda a la alta frecuencia supone que disminuye el margen de fase. De vuelta al mismo compromiso anterior entre el amortiguamiento, la estabilidad y la rapidez; un buen diseño exige márgenes de fase entre 50° y 70° . Por ejemplo, en los amplificadores electrónicos realimentados se piden que tengan un margen de fase por encima de los 45° y menor a 80° .

En el siguiente ejemplo se va a tratar de asentar las contradicciones comentadas y los compromisos necesarios entre los parámetros para hacer cumplir las exigencias de un buen diseño de control. En primer lugar, se emplearán las técnicas del lugar de las raíces y posteriormente, sobre el mismo ejemplo, se aplicará la respuesta en frecuencias.

Ejemplo 14.1

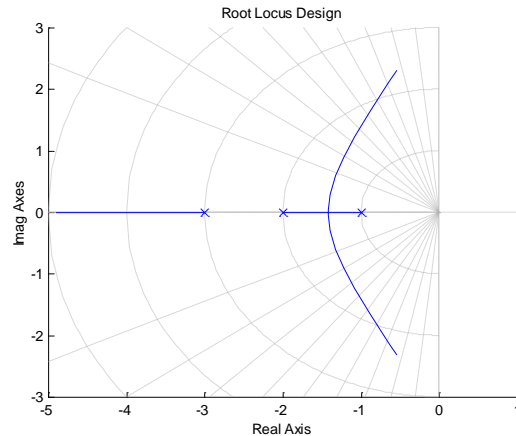
Se tiene una planta del tipo $G_p(s) = \frac{10}{(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}$ al que se le coloca un compensador en serie de tipo proporcional (P), con una ganancia que vale 1 y 5. La realimentación es unitaria. Se pide:

1. Obtener la respuesta del conjunto ante la entrada en escalón y calcular los parámetros más significativos.
2. Si el regulador es remplazado por un integrador ideal con una constante de tiempo de 2 s (I), caracterizar su respuesta temporal.

3. Determinar para los tres anteriores casos las frecuencias de cruce de ganancia y los márgenes de fase.

Resolución

1. La descomposición polinómica del denominador de la planta se observa que tiene tres polos reales a los valores de -1 , -2 y -3 . De otro, al emplear el criterio de Routh, el valor de ganancia crítica del compensador proporcional será de $k_{cr} = 6$. La figura adjunta muestra el trazado directo del lugar de las raíces. La primera observación constata el compromiso entre la estabilidad y la precisión. Un aumento de la ganancia estática del regulador hará que el sistema sea más preciso, pero también tenderá a ser más inestable, hasta alcanzar el valor de k_{cr} . Desde el punto de vista analítico habrá de calcular la constante estática de error al escalón y el error en el régimen permanente:



$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} kG_p(s) = k \frac{10}{6} \begin{cases} k = 1 \rightarrow e_p = 37.5\% \\ k = 5 \rightarrow e_p = 10.7\% \end{cases} \quad (14.3)$$

Se observa que con una aceptable precisión ($k = 5$), el sistema de control produce una excesiva oscilación y además se vuelve más lento. Con el objeto de calcular los parámetros del régimen transitorio será necesario determinar cuales son los polos dominantes de la cadena cerrada en función de la ganancia del regulador proporcional:

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + 10k) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow s = \begin{cases} -4.3 \\ -0.845 \pm j1.73 \end{cases} \\ k = 5 \rightarrow s = \begin{cases} -5.77 \\ -0.11 \pm j3.11 \end{cases} \end{cases} \quad (14.4)$$

Aplicando la teoría de polos dominantes, las respuestas transitorias para estos dos valores corresponden a las de equivalentes sub-amortiguados, cuyos valores serán:

$$k = 1 \rightarrow t_r = 1.17s \quad t_p = 1.8s \quad M_p = 21.56\% \quad t_s = 3.71s$$

$$k = 5 \rightarrow t_r = 0.51s \quad t_p = 1s \quad M_p = 89.48\% \quad t_s = 27.8s$$

En el ejemplo se contempla cómo la precisión del equipo está en contraposición con la propia estabilidad y una sobrada oscilación, llevando consigo a un comportamiento excesivamente lento. También se puede destacar cómo una sobreoscilación de un 20%

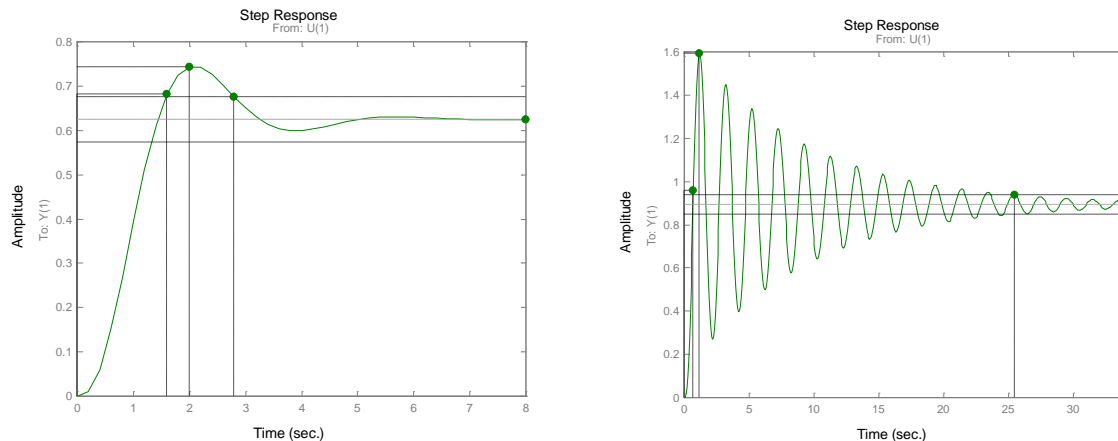


Figura 14. 4. Respuesta de salida ante una entrada en escalón a) $k=1$, b) $k=5$

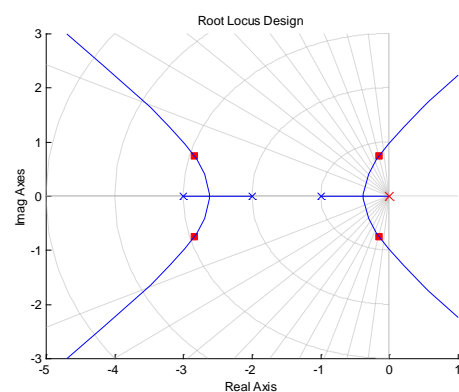
permite obtener una aceptable respuesta transitoria y de estabilidad. Sin embargo, el error del régimen permanente es muy grande. Por eso, en el siguiente apartado se propone utilizar un integrador ideal.

2. Obviamente al poner un polo sobre el origen en la cadena abierta hace que el sistema se convierta a uno de tipo uno y por lo tanto no habrá error ante una entrada en escalón:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} G_p(s) = \infty \rightarrow e_p = 0\%$$

El nuevo trazado del LDR pone de manifiesto que las ramas dominantes tienden al semiplano positivo por adición del integrador. A su vez, los nuevos polos dominantes se aproximan al eje imaginario, lo que conlleva una disminución de la constante de amortiguamiento y por lo tanto un aumento del tiempo de establecimiento. Ahora los nuevos polos dominantes de la cadena cerrada serán:

$$D(s) = 2s^4 + 12s^3 + 22s^2 + 12s + 10 = 0 \rightarrow s = \begin{cases} -0.16 \pm j0.74 \\ -2.84 \pm j0.74 \end{cases}$$

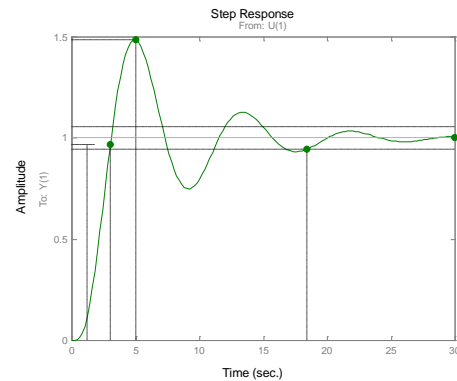


Aplicando teoría de polos dominantes, los recientes parámetros del régimen transitorio ante una entrada en escalón serán:

$$t_r = 2.41s \quad t_p = 4.24s$$

$$M_p = 50.7\% \quad t_s = 19.63s$$

Mostrándose que tienen una mejor precisión respecto del aparatado anterior, pero con el inconveniente de un mayor tiempo de establecimiento y mayor sobreoscilación respecto cuando el compensador era de tipo P con una ganancia igual a la unidad.



3. En cuanto a la respuesta en frecuencia se pasará en primer lugar a normalizar la expresión de la cadena abierta para su representación en diagrama de Bode. Para el caso de del regulador proporcional:

$$kG_p(\omega) = \frac{\frac{10}{6}k}{(1+j\omega)(1+j\omega 0.5)(1+j\omega 0.33)} \quad (14.6)$$

Con esta expresión resulta sencillo tanto dibujar la respuesta en frecuencias como obtener el margen de fase:

$$\left(\frac{10}{6}k\right)^2 = 0.0272\omega_g^6 + 0.3861\omega_g^4 + 1.3578\omega_g^2 + 1$$

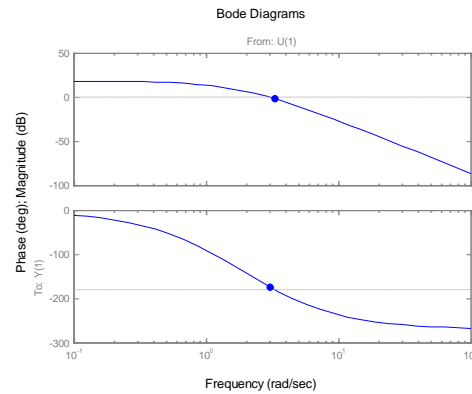
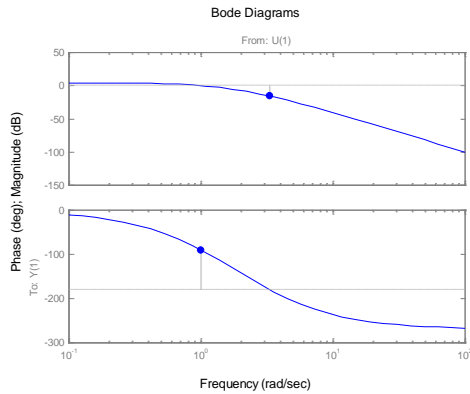
$$\gamma = 180 - \arctg(\omega_g) - \arctg(0.5\omega_g) - \arctg(0.33\omega_g) \quad (14.7)$$

Los valores de frecuencia de cruce y de margen de fase están dependientes del valor de k , para los casos aquí tratados serán:

$$k = 1 \rightarrow \omega_g = 1 \text{ rad/s} \quad \gamma = 90^\circ$$

$$k = 5 \rightarrow \omega_g = 3 \text{ rad/s} \quad \gamma = 6^\circ \quad (14.8)$$

Si además se analiza los diagramas de Bode se confirma las anteriores conclusiones. Un aumento de la ganancia estática en la cadena abierta lleva consigo una disminución del margen de fase, lo que implica una pérdida de la estabilidad.



Para el caso del compensador tipo integrador ideal, la FDT normalizada corresponderá a:

$$kG_p(\omega) = \frac{\frac{10}{6}}{j\omega 2(1+j\omega)(1+j\omega 0.5)(1+j\omega 0.33)} \quad (14.9)$$

De nuevo se procederá al cálculo de la frecuencia de cruce y del margen de fase, obteniendo:

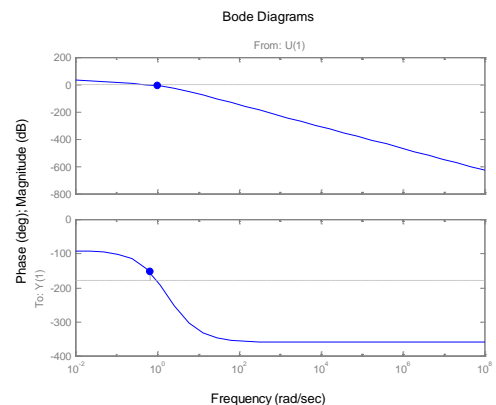
$$\left(\frac{10}{12}\right)^2 = 0.0272\omega_g^8 + 0.3861\omega_g^6 + 1.3578\omega_g^4 + \omega_g^2$$

$$\gamma = 90 - \arctg(\omega_g) - \arctg(0.5\omega_g) - \arctg(0.33\omega_g)$$

Resultando que:

$$\omega_g = 0.65 \text{ rad/s} \quad \gamma = 26.8^\circ$$

Tanto los resultados numéricos obtenidos, como el diagrama de Bode con el integrador son reveladores. La introducción del polo en el origen, ciertamente, llevará a que la ganancia estática tienda al infinito, por tanto, el error ante una entrada en escalón será nulo. Pero también introduce un desfase de -90° haciendo disminuir tanto la frecuencia de cruce de ganancia como el margen de fase.



RESOLUCIÓN MATLAB

```
%Definición de la planta, Gp(s)
g1=tf(10,[1 6 11 6])
%Polos de Gp(s)
roots([1 6 11 6])
%FDT del conjunto con un regulador P igual a 1
g2=feedback(series(1,g1),1)
%Respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario
step(g2)
%LDR
rlocus(g1)
%raíces de la cadena cerrada con un regulador P igual a 1
p1=rlocus(g1,1)
%FDT del conjunto con un regulador P igual a 5
g3=feedback(series(5,g1),1)
%Respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario
step(g3)
%LDR
rlocus(g1)
%raíces de la cadena cerrada con un regulador P igual a 5
p2=rlocus(g1,5)
%FDT del conjunto con un regulador I con una constante de tiempo de 2s
g4=tf(1,[2 0])
g5=feedback(series(g4,g1),1)
%Respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario
step(g5,g3,g2)
%LDR
rlocus(series(g4,g1))
%raíces de la cadena cerrada con un regulador P igual a 1
p3=rlocus(series(g4,g1),1)
%Respuesta en frecuencia con compensador proporcional igual a 1
bode(g1)
[mag1,fase1]=bode(g1,1)
%Respuesta en frecuencia con compensador proporcional igual a 5
bode(series(5,g1))
[mag2,fase2]=bode(series(5,g1),3)
%Respuesta en frecuencia con compensador integral con constante de
tiempo igual a 2s
bode(series(g4,g1))
[mag3,fase3]=bode(series(g4,g1),0.65)
```

14.1.3 Metodología para el diseño de los compensadores

Se podrían destacar dos estrategias para la determinación de la función de transferencia de los compensadores: métodos experimentales y métodos analíticos. Los primeros no requieren conocer el modelo de FDT de la planta, $G_p(s)$; emplean herramientas del laboratorio y excitan a la entrada para poder sintonizar los parámetros de los reguladores. Hay una gran variedad de técnicas de sintonía, aunque en este temario se verán sólo los métodos de Ziegler-Nichols. Respecto a los segundos, los métodos analíticos, exigen de una etapa de identificación de la planta, obteniendo el modelo matemático del comportamiento dinámico del sistema. A su vez los métodos analíticos se dividen en:

- a) Métodos de análisis
- b) Métodos de síntesis

En el primer grupo tratan de compensar la planta en la cadena abierta, de forma que la respuesta en el bucle cerrado cumpla con las especificaciones fijadas. Salvo en el diseño de sistemas muy críticos y de alto grado de precisión, se utilizarán reguladores normalizados (P, PD, PI o PID), con configuraciones sobradamente experimentadas que mediante el ajuste de sus parámetros, permiten ser utilizados en una amplia gama de sistemas.

En el método de síntesis se parte directamente de las especificaciones deseadas, determinando en forma analítica el tipo de compensación necesaria y sus parámetros. No obstante, la experiencia ha demostrado que son excesivamente complejos y muy sensibles a las variaciones de sus parámetros.

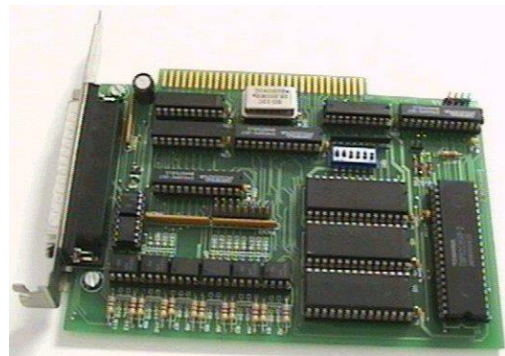


Figura 14. 5. Tarjeta PID en bus ISA basado en el controlador LM628. Equipo empleado en las prácticas de la asignatura

14.2 Reguladores y redes de compensación

Durante este curso se emplearán solamente los reguladores normalizados. La experiencia ha demostrado que los cuatro tipos de reguladores, correspondiente a las acciones simples de control, constituyen la base fundamental para el tratamiento de la mayor parte de las aplicaciones prácticas.

Los siguientes párrafos analizarán las influencias de las acciones proporcionales, derivativas e integradoras, así como sus combinaciones y las formas de implementación mediante el procesamiento analógico de las señales eléctricas.

14.2.1 Reguladores de tipo proporcional (P)

Estos compensadores se caracterizan por variar la ganancia estática de la FDT de la cadena abierta. Son los más simples y su FDT es del tipo:

$$G_c(s) = k \quad (14.10)$$

El efecto dinámico que produce se manifiesta en la evolución de los polos según el LDR. Habitualmente, al aumentar el valor de k , hacen que el sistema sea más rápido, más oscilatorio y disminuya el error. Sin embargo, un incremento desmedido de este parámetro hará excesivo las oscilaciones y convertirá al equipo en un sistema más lento. Por tanto, habrá de buscar un compromiso entre la respuesta dinámica y la precisión. Efecto que dependerá de la variación de las raíces de la planta en el LDR. De hecho, hay que tener en cuenta que el LDR con este compensador no queda modificado, a diferencia del resto de reguladores.

Un ejemplo del efecto proporcional se ha observado en el anterior ejemplo. La variación de k de 1 a 5 mostró cómo varía tanto la evolución del régimen transitorio como del permanente. Con k igual a 1 el sistema era subamortiguado con una sobreoscilación de alrededor del 20% y un tiempo de establecimiento de menos de 4s. En cambio, con k igual a 5, la sobreoscilación superaba el 80% y el tiempo en alcanzar el régimen permanente era superior a 25 s. Por el contrario, el error ante la entrada en escalón evolucionó desde casi el 40% hasta el 10%. Concluyendo, estos reguladores resultan ser un débil compromiso entre la respuesta transitoria y la precisión. Será necesario introducir nuevas estructuras y más complejas para mejorar las eficacias de los diseños sobre las estructuras del control automático.

En cuanto a su implementación electrónica, se suele emplear esquemas de amplificadores diferenciales. Esta elección viene dada por la posibilidad de cumplir con el doble objetivo de realizar físicamente el amplificador de error y el regulador tipo P. Considerando el circuito de la figura y garantizada la suficiente estabilidad del montaje, la señal de salida, u_s , es proporcional a la diferencia entre las dos entradas:

$$\frac{u_s}{u_{e1} - u_{e2}} = -\frac{R2}{R1} \quad (14.11)$$

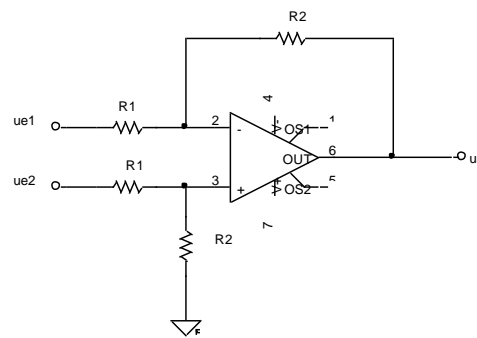


Figura 14. 6. El amplificador diferencial implementa al amplificador de error y al regulador P

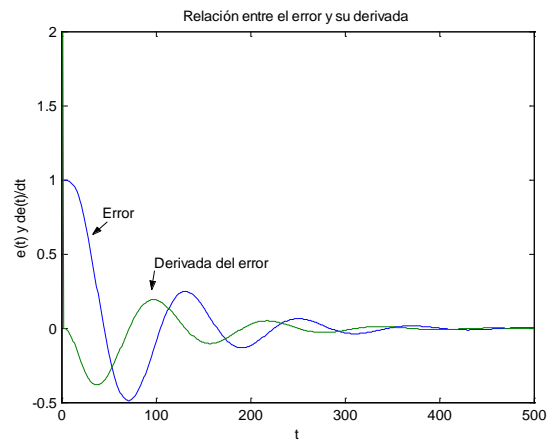
Nótese que el amplificador diferencial puede producir, por un lado, la resta de las dos señales eléctricas de entrada, y de otro, esta señal de mezcla puede ser amplificada. Con estas funcionalidades cumplen las exigencias de generar la señal de error y de amplificar esta señal, produciendo el efecto de compensación proporcional.

14.2.2 Reguladores proporcionales derivativos, (PD)

Estos compensadores son una combinación lineal entre la señal de error y su derivada, lo que le va a dar un carácter anticipador. Desde el punto de vista analítico se tendrá que la salida del regulador es del tipo:

$$y(t) = k \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

donde k es la ganancia estática del regulador y T_d es la constante de tiempo del derivador. Ambos valores son los parámetros de este compensador. Véase en la figura el efecto de la derivada. Dada una señal de error determinada, por ejemplo, la obtenida en el ejercicio anterior con un integrador puro, es fácil notar cómo su derivada es una anticipación de la propia señal de error. Los máximos y mínimos de la señal corresponderán a pasos por cero en la derivada. Más aun, la señal derivada se encuentra desfasada $+90^\circ$ respecto a la señal de error. Otro detalle a resaltar es la discontinuidad de la derivada en el instante inicial, nótese que al aplicar una entrada en escalón se produce un error que prácticamente genera un cambio brusco y por ende una derivada que tiende a un valor muy elevado. Este efecto producirá la saturación en las etapas siguientes del esquema de control.



Desde el punto de vista del dominio complejo y del LDR, esta red supone la adición de un cero en la cadena abierta. Para analizarlo, se aplica la transformada de Laplace sobre la expresión del regulador PD, el resultado permitirá conocer su FDT:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k(1 + sT_d) \quad (14.12)$$

Obsérvese que la expresión del compensador es no causal. De la relación de este compensador se desprende que un regulador PD, ciertamente, introduce un cero en la cadena abierta, por tanto, modificará el LDR del conjunto planta-compensador. La adición de un cero en el lazo abierto suele lograr que el sistema realimentado sea más estable y más rápido, consecuentemente mejora el comportamiento dinámico de conjunto. Sin embargo, no tiene la capacidad de modificar, de forma independiente, el régimen permanente, puesto que los parámetros de regulador PD, k y T_d , son empleados para ajustar la respuesta temporal del régimen transitorio.

La figura pone de manifiesto sobre la planta del ejemplo 14.1 que la adición del cero modifica el LDR. Para este caso concreto las ramas de los polos dominantes están siendo alejadas del eje imaginario, provocando que el sistema sea más estable, más rápido y algo más oscilatorio.

La FDT del regulador muestra que también es no causal, i.e. no se puede implementar físicamente. De hecho, se está tratando con el regulador PD ideal.

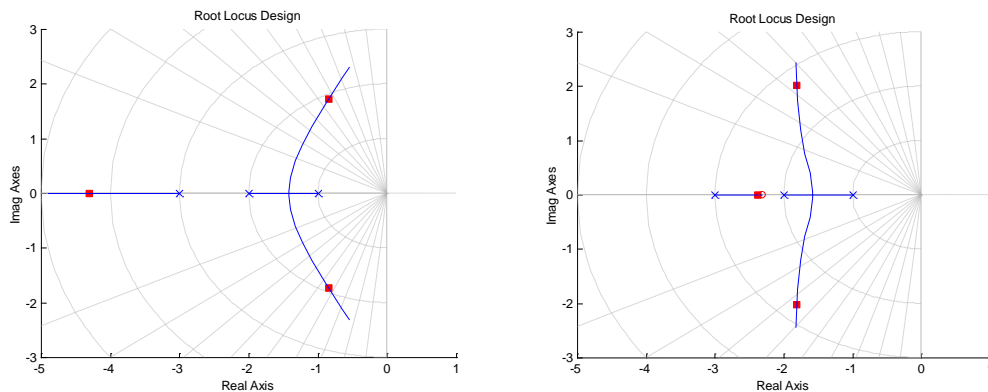


Figura 14. 7. Modificación del LDR con la adición de un cero

Desde el punto de vista del análisis frecuencial, el regulador PD presenta un aumento de la ganancia en las componentes de mayor frecuencia a $\frac{1}{T_d}$ y la inserción de un desfase de $+90$ grados en la cadena abierta (ver figura 14.8). Las consecuencias sobre el conjunto será que la frecuencia de cruce y el margen de fase aumenten. Por tanto, el sistema será, en general, más estable y más rápido. La primera conclusión viene dada por el aumento del margen de fase, la segunda se deriva de que el espectro de alta frecuencia de la señal de error está siendo amplificado por la red de compensación. Sin embargo, los espectros frecuenciales de las perturbaciones también tienen componente de alta frecuencia, lo que significa que los ruidos también serán amplificados, i.e. los reguladores PD hacen que el conjunto sea más sensible a las perturbaciones externas, que por supuesto representa una gran desventaja.

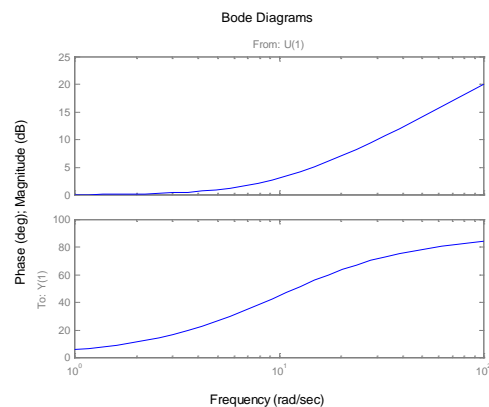


Figura 14. 8. Respuesta en frecuencia de un regulador PD ideal

La respuesta en frecuencia también corrobora la falta de influencia sobre el régimen permanente. Téngase en cuenta que esta red muestra una ganancia fija en la baja frecuencia. Por tanto, al procesar las componentes de baja frecuencia se mantienen, no incrementándose la ganancia del espectro de la baja frecuencia, efecto necesario para reducir el error.

Tanto desde el teorema de valor inicial como de la propia respuesta frecuencial se obtiene la misma conclusión, la ganancia a altas frecuencias tiende a ser infinito. Sin duda, no es posible su implementación desde el punto de vista físico (ya se había indicado anteriormente el carácter no causal del regulador). No es posible hacer amplificadores que tengan una ganancia infinita, pues necesitarían infinita energía.

En resumen, esta acción diferenciadora resulta ser bastante problemática en dos aspectos distintos. En primer lugar, al reforzar las componentes de alta frecuencia también hace que el conjunto sea más sensible a las perturbaciones. De otro, la salida del regulador ataca al accionador y normalmente, este último tiene elementos limitadores, i.e. no linealidades en las que no se debe de entrar. Por ejemplo, las curvas de magnetización en las máquinas eléctricas. Como se ha comentado anteriormente, la salida del diferenciador será un impulso de gran amplitud ante una entrada en escalón. Sin embargo, la salida del accionador estará acotada a unos valores de Y_{\max} e Y_{\min} . Al transmitir la propagación del error a través de la red PD originará un gran impulso inicial que será limitado por el accionador, lo que hará inadecuado el regulador, ya que su efecto no será transmitido íntegramente por los accionadores.

En la figura de abajo y a la izquierda se observa la curva típica de transferencia donde existen elementos de saturación. La alta respuesta inicial generada por el compensador PD no es transmitida directamente por los accionadores al entrar en zonas de saturaciones y por lo tanto, no se cumple con las condiciones establecidas de diseño.

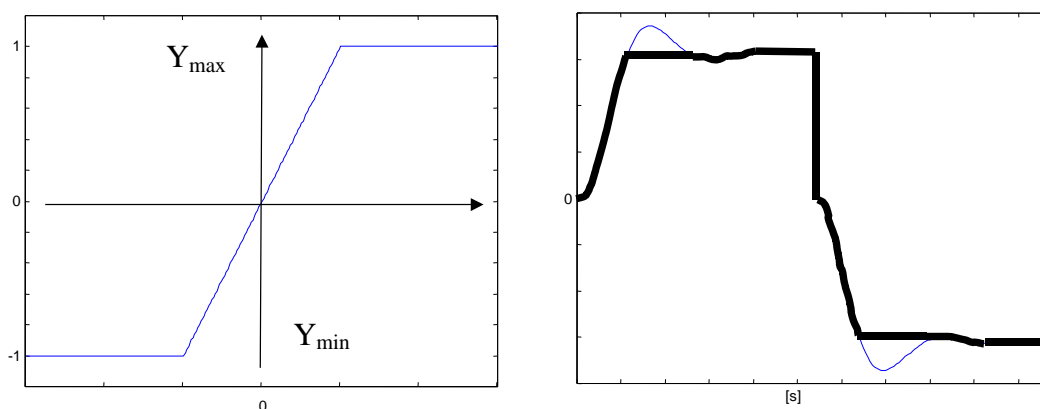


Figura 14. 9. Saturaciones y no linealidades: a) Curva de transferencia, b) Propagación de la señal

En consecuencia, el regulador real de tipo PD necesitará de una diferenciación atenuada, i.e. se limitará el efecto derivativo en los instantes iniciales. La forma de actuar será suavizando la respuesta frecuencial mediante la inserción de un polo a mayor frecuencia que la del cero. De esta forma, se hace que la ganancia a la alta frecuencia se estabilice. Desde el punto de vista del dominio complejo significa colocar un polo adicional más alejado del eje imaginario respecto del cero. En este caso, se dice que en la red el efecto del cero domina sobre el polo. A este tipo de compensador se le llama red de adelanto de fase. La ecuación diferencial de esta red será:

$$T_n \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

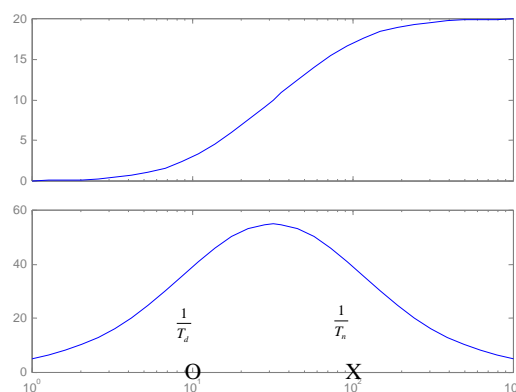
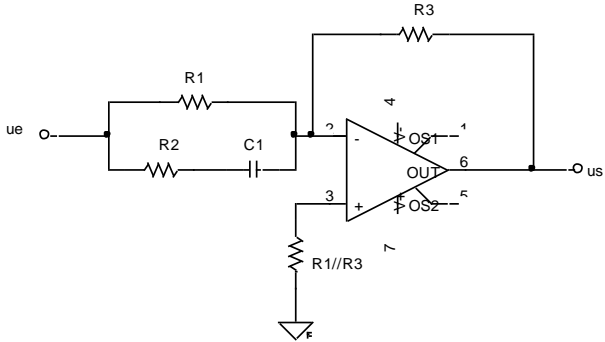
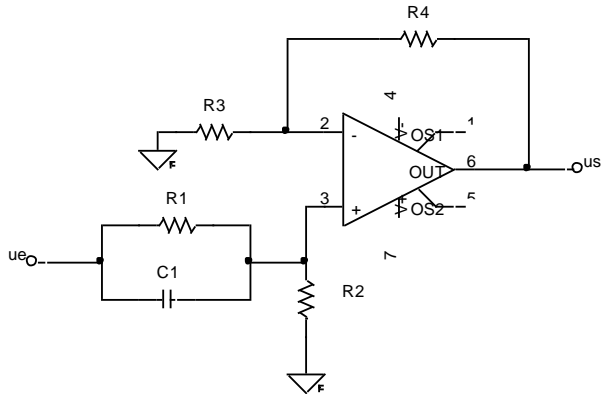


Figura 14. 10. Red de adelanto de fase

cumpliendo con la condición de que la constante de tiempo T_n es más pequeña que el tiempo del efecto derivador, T_d . Aplicando la transformada de Laplace se conseguirá la FDT de este compensador:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{(1 + sT_d)}{(1 + sT_n)} \quad T_d > T_n$$

Respecto a la implementación con sistemas electrónicos, se puede diseñar bien con estructuras de amplificación no inversora o de amplificación inversora. En el cuadro adjunto se muestran los esquemas electrónicos y las FDT, considerando que los amplificadores operaciones son ideales.

Estructura inversora	$A_V(s) = -\frac{R_3}{R_1} \frac{1 + (R_1 + R_2)C_1s}{1 + R_2C_1s}$	
Estructura no inversora	$A_V(s) = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1 + R_1C_1s}{1 + R_2 // R_1C_1s}$	

14.2.3 Reguladores proporcionales integradores, (PI)

La acción proporcional puede conseguir rapidez, pero no precisión; en cambio, la componente integradora obtiene bajo error en el régimen permanente pero la evolución de transitorio se hace más lenta. Parece lógico utilizar las ventajas de ambas acciones en un único regulador. A este tipo de regulador se le conoce con el acrónimo PI (proporcional-integrador). Desde el punto de vista matemático, la ecuación diferencial que caracteriza la dinámica de este compensador será:

$$y(t) = k \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right) \quad (14.13)$$

La componente integradora de esta red funcionará mientras exista error en el régimen permanente. Para analizar su comportamiento desde el dominio complejo será necesario calcular su FDT. Aplicando transformadas a ambos lados de la igualdad y agrupando, la nueva $G_c(s)$ será:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{(1 + sT_i)}{sT_i} \quad (14.14)$$

De la expresión destaca la introducción de un polo en el origen en la cadena abierta, lo que conlleva el aumento en una unidad del orden del sistema, disminuyendo por esta razón en un orden el nivel de error. Si el sistema es de tipo cero, por ejemplo, se habrá convertido en uno de tipo uno y así sucesivamente.

No obstante, y al igual que en los reguladores PD, no es posible su implementación física. Según la expresión (14.14), este compensador tiene una ganancia estática que tiende a ser infinita, consiguientemente imposible de realizar físicamente. Para el diseño real de este compensador se puede aproximar mediante redes de retraso de fase. Esta estructura está constituida por un sistema de primer orden con un polo y un cero, donde la condición es que la constante de tiempo de polo es mayor que la del cero. El modelo de una red de retraso de fase es de la forma:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{(1 + sT_i)}{(1 + sT_r)} \quad T_r > T_i \quad (14.15)$$

Tomando factor común en el denominador con T_r e imponiendo la condición de diseño sobre el signo de desigualdad entre las constantes de tiempo, se verá la aproximación entre la expresión del PI ideal y la de la red de retraso de fase:

$$G_c(s) = \frac{k}{T_r} \frac{(1 + sT_i)}{\left(\frac{1}{T_r} + s\right)} \stackrel{T_r \gg 1}{\cong} k' \frac{(1 + sT_i)}{s} \quad (14.16)$$

Sin embargo, esta implementación lleva consigo el no tener un polo en el origen sino próximo a él. El efecto de este resultado será que el error no será exactamente nulo sino próximo a cero. No habrá incremento neto en el tipo.

Como esta red sólo tiene el objetivo de mejorar la respuesta del régimen permanente sin perturbar el transitorio, las técnicas de diseño basadas en el LDR ubican la red de retraso de fase casi sin modificar el original trazado. Por ejemplo, en la planta utilizada en el ejemplo 14.1 se ha empleado varias redes de retraso de fase con distintos valores (ver figura 14.11). La ubicación de polo-cero del compensador no hace variar sustancialmente las ramas del LDR, con el objeto de preservar los polos dominantes de la planta. A su vez el incremento de una unidad en el orden del denominador de la cadena cerrada, supone que existe un polo próximo al origen, haciendo las funciones de

integrador. Pero tiene la desventaja de introducir, en la evolución temporal, una exponencial monótonamente decreciente con una constante de tiempo elevada. La consecuencia es una respuesta más lenta, en donde la salida ya no es dominada por los polos complejos conjugados. Véase la evolución de los sistemas compensados con reguladores PI en la figura de abajo.

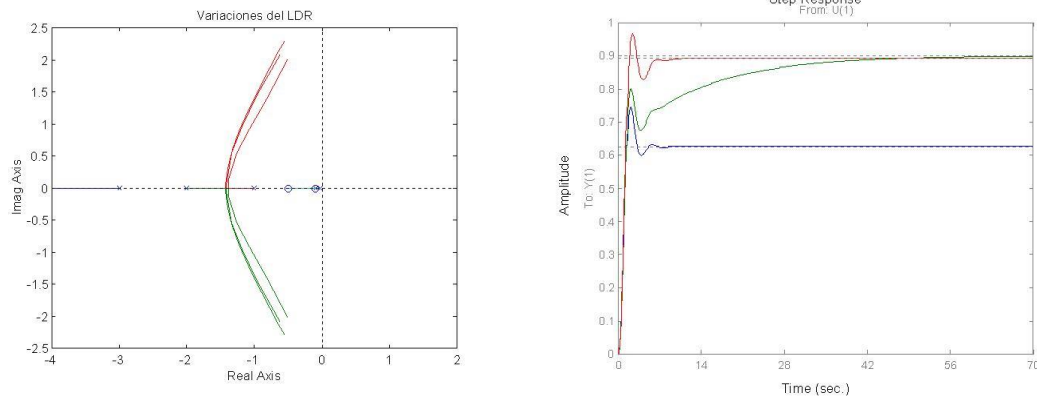


Figura 14. 11. Técnicas de diseño sobre redes de retraso de fase: a) LDR casi sin modificar b) Evolución temporal del conjunto

Este regulador tendrá una respuesta frecuencial como la indicada en la figura 14.12. Hay que observar el desfase negativo que introduce en la cadena abierta, lo que provocaría un efecto desestabilizador. Por eso, en el diseño de las redes de retraso de fase mediante técnicas frecuenciales, no se emplean para variar el argumento de la cadena abierta (recuérdese que esto es lo que se hacía con las redes de adelanto de fase con el propósito de incrementar el margen de fase). De hecho las redes de retraso de fase se ubican para aportar atenuación en las medias y altas frecuencias, disminuyendo la frecuencia de cruce y mejorando con ello el margen de fase. Estos aspectos serán desarrollados en los temas de diseño de reguladores.

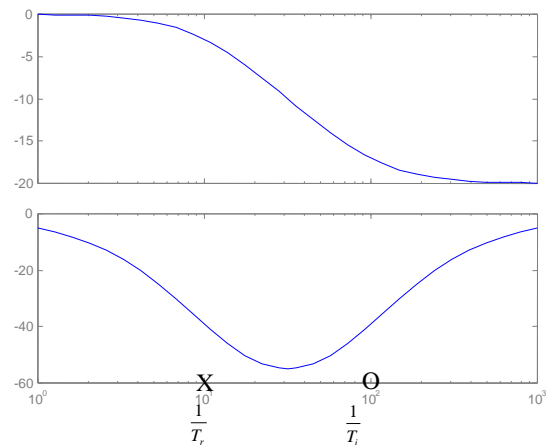
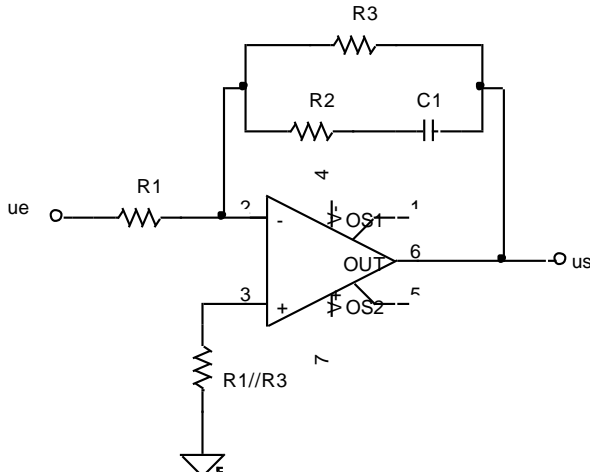
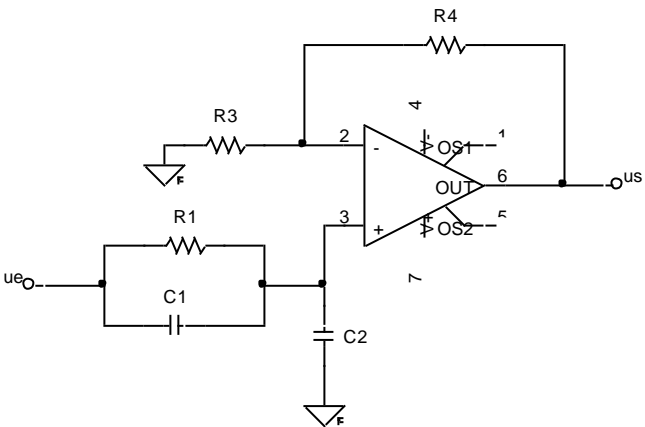


Figura 14. 12. Respuesta en frecuencia de una red de retraso de fase

En cuanto a las técnicas de implementación electrónica de estas redes de compensación puede hacerse igualmente con estructuras inversora o no inversora. En el cuadro adjunto se muestra las FDTs y los circuitos a emplear:

Estructura inversora	$A_V(s) = -\frac{R_3}{R_1} \frac{1 + R_2 C_1 s}{1 + (R_2 + R_3) C_1 s}$	
Estructura no inversora	$A_V(s) = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + (C_1 + C_2) R_1 s}$	

14.2.4 Reguladores proporcionales, derivativos e integrales (PID)

La mayoría de los compensadores industriales son de tipo PID. Según algunos autores, los PID representan el 95% de los reguladores implementados. Éstos se presentan comercialmente como tarjetas acoplables a los buses estándar o dentro de los autómatas programables. Se caracterizan por tener un procesamiento que combinan linealmente la señal de error, su derivada y su integral, esto es,

$$y(t) = k \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (14.17)$$

pero este comportamiento es simplemente ideal, no es posible su realización física. Analizando su FDT se observa que hay más ceros que polos:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{sT_i} \quad (14.18)$$

Esta relación muestra que este compensador no cumple el requisito de causalidad. Por lo tanto, se necesita hacer aproximaciones. La primera simplificación es descomponer el numerador en sus dos ceros de primer orden y eliminar el término $-sT_d$; razón que se valida al ser la constante de tiempo del integrador mayor que del derivador, $T_i \gg T_d$:

$$G_c(s) = k \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{sT_i} = k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d) - sT_d}{sT_i} \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i} \quad (14.19)$$

Las dificultades de la acción diferencial se evitan con una acción diferencial atenuada, tal cual se contempló con los reguladores PD:

$$G_c(s) \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i} \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i(1 + sT_n)} \quad (14.20)$$

Realizando análoga modificación sobre la zona PI se llega a la definitiva FDT:

$$G_c(s) \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i(1 + sT_n)} \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{(1 + sT_r)(1 + sT_n)} \quad T_r > T_i \gg T_d > T_n \quad (14.21)$$

En definitiva, un buen acercamiento al regulador PID ideal puede hacerse con la combinación de una red de retraso de fase con otra de adelanto de fase. La primera trabajará en mejorar el régimen permanente y la red de adelanto tratará de hacer que el conjunto sea más rápido. Tal cuál se estudiará más adelante, tanto en las técnicas del LDR como de respuesta en frecuencia presentan técnicas de ubicación de las dos redes casi de forma independiente, i.e. el diseño de los PID será una combinación de las técnicas de posicionamiento de las redes de adelanto y de retraso de fase.

La respuesta en frecuencia de la expresión (14.21) avala la anterior afirmación. En la gama de las bajas frecuencias se encontrará la red de retraso de fase, mientras en el espectro de alta frecuencia está la red de adelanto de fase (figura 14.13).

Por último, la implementación física de los PID mediante estructuras electrónicas se confeccionarán a partir del encadenamiento de una red de atraso de fase más una de adelanto de fase. Esta posibilidad se fundamenta en la utilización de amplificadores operacionales, resolviéndose así el problema de adaptación de impedancias entre etapas y por tanto de independencia de ajuste entre los parámetros del regulador. Obviamente, existen cuadripolos pasivos que constituyen redes de adelanto y retraso de fase, pero son incapaces de tener ganancia mayor a la unidad en las bandas pasante y no es posible el ajuste independiente de los parámetros del PID, ya que no se resuelve el problema mencionado anteriormente de adaptación de impedancias.

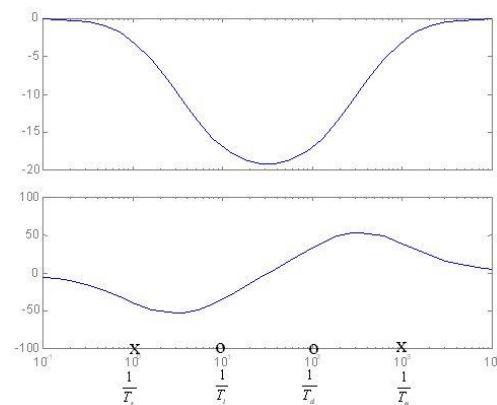


Figura 14.13. Respuesta en frecuencias de un regulador PID real

14.3 Técnicas de compensación basadas

Ya se ha visto como el ajuste de un regulador se realiza en la práctica de modos muy diversos, dependiendo fundamentalmente de los datos de partida, y de las posibilidades de actuación experimental sobre la planta a regular. Podemos distinguir básicamente dos formas de abordar el problema: el ajuste experimental y el ajuste analítico.

El ajuste de reguladores de forma experimental, responde a la capacidad del personal especializado para identificar el efecto que los distintos parámetros del regulador van a tener sobre el sistema. De esta forma, y siguiendo un método de ensayo y error, se ajusta el regulador de forma eficiente. Empíricamente se ha desarrollado una serie de métodos que intentan resumir este bagaje experimental de los operadores de planta. Basándose en parámetros obtenidos de la respuesta del sistema, se pueden establecer una serie de reglas empíricas para la obtención de un punto de partida en el ajuste de los distintos reguladores. Es muy normal comenzar ajustando un regulador comercial mediante uno de estos métodos empíricos, que suelen dar un buen punto de funcionamiento del regulador. A partir de esta primera sintonización, se irá ajustando hacia especificaciones más concretas.

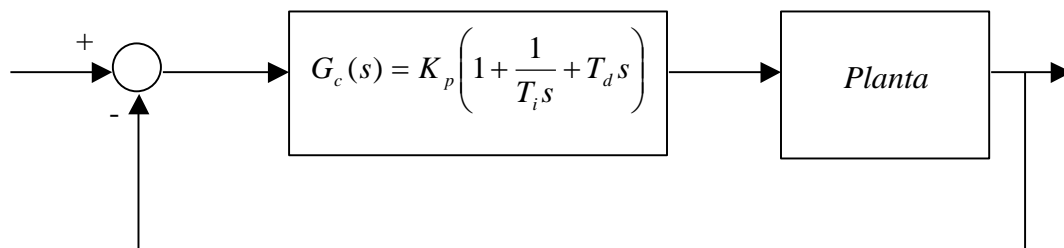
El ajuste del regulador basándose en los métodos de análisis parte del inconveniente de la necesidad de disponer de un modelo, lo cual no siempre es posible. Si se dispusiese de un buen modelo del sistema, el método basado en el análisis puede ser muy efectivo, necesitando de un posterior ajuste menor que el necesario para el ajuste del caso experimental.

A modo de ejemplo, se analiza uno de los métodos experimentales más extendidos: el ajuste de compensadores de Ziegler-Nichols. Se deja para cursos siguientes un estudio más exhaustivo del diseño de reguladores.

14.4 Métodos experimentales

14.4.1 Ziegler-Nichols.

Ziegler y Nichols, en 1950, experimentaron sobre un gran número de sistemas los valores más adecuados para las acciones de un regulador PID tratando de esta forma de encontrar unas reglas que permitiesen su ajuste a partir de la observación del comportamiento del sistema.



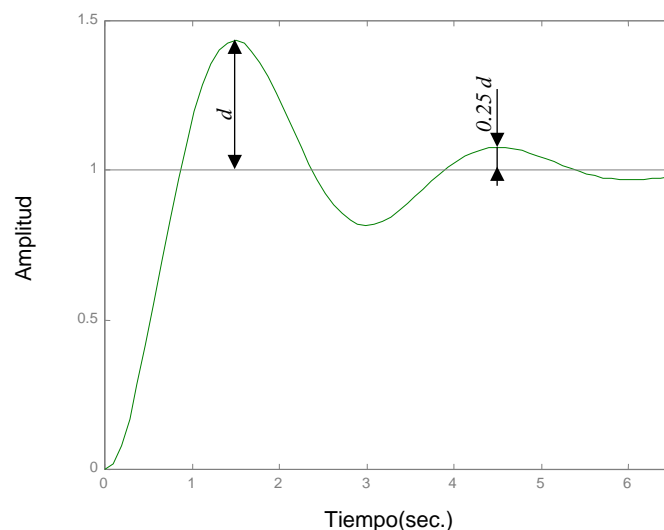
Estas reglas permiten determinar los valores de la ganancia proporcional K_p , del tiempo integral T_i , y del tiempo derivativo T_d basándose en las características de la

respuesta transitoria de una planta dada. Esto permite la determinación de los parámetros del PID por parte de los ingenieros en la misma planta, basándose únicamente en las respuestas experimentales obtenidas al efectuar experimentos en el sistema a controlar.

Las reglas de *Ziegler-Nichols* que se verán a continuación, son de especial utilidad para realizar un primer ajuste del controlador de un sistema –afinación del controlador– cuando no se conoce el modelo matemático del mismo. Evidentemente, estas reglas pueden aplicarse también cuando se conoce este modelo matemático, aunque pierdan en cierta medida su sentido frente a otros métodos de ajuste basados en el análisis.

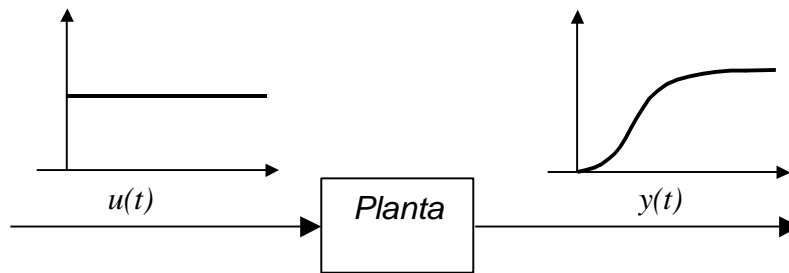
Si el sistema cumple los requisitos impuestos para cada uno de los dos métodos propuestos por *Ziegler-Nichols*, el ajuste del PID mediante estas reglas intenta conseguir un *buen* regulador, es decir, suficientemente rápido, con poca sobreoscilación y con error de posición nulo.

La métrica utilizada por este método para evaluar la bondad de un determinado ajuste es denominada como QDR (*Quarter Decay Ratio*), que puede interpretarse como la proporción de un cuarto entre la primera oscilación y la segunda.



Primer método. Ajuste en Cadena Abierta o Curva de Reacción de Proceso.

Este método se ha desarrollado para sistemas que en cadena abierta no son oscilatorios, y que responden ante el escalón con una curva en forma de sistema sobre-amortiguado. En caso de que la respuesta no presente esta forma, este primer método no es aplicable.



Este método de *Ziegler-Nichols*, lo que pretende es modelizar esta respuesta mediante un sistema de primer orden con un retardo puro. Sobre este sistema se han desarrollado las reglas que permiten obtener la acción de control requerida para lograr una respuesta satisfactoria. La expresión matemática de este modelo de primer orden aproximado del sistema, es de la forma siguiente:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{Ts + 1}$$

Obtenido el modelo (L, T, K) , este método de Ziegler-Nichols da los parámetros para distintos reguladores, de forma que se cumpla el criterio *QDR*. Estos valores quedan reflejados en la siguiente tabla:

TIPO DE CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{K \cdot L}$	∞	0
PI	$\frac{0.9T}{K \cdot L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$\frac{1.2T}{K \cdot L}$	$2L$	$0.5 L$

Estos parámetros corresponden con la siguiente expresión del PID:

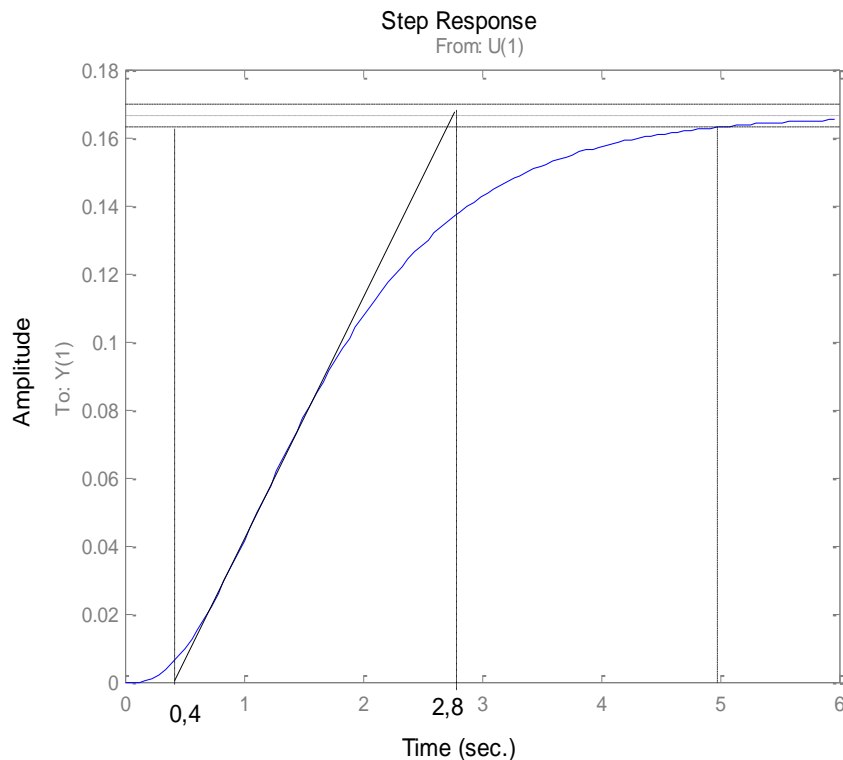
$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = 0.6 \frac{T}{K} \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s} \quad (14.1)$$

Se observa que se implementa un regulador con un polo en el origen y un cero doble en $-1/L$.

Ejemplo: Diseñar un regulador PID para el sistema cuya función de transferencia es la siguiente $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ según el método de ajuste en cadena abierta de Ziegler-Nichols. Nota: comprobar la validez del método para dicho sistema.

En primer lugar resolveremos el problema de una forma más práctica mediante el uso de MatLab.

```
gs=tf(1,poly([-1,-2,-3])
step(gs)
```



De esta forma comprobamos que el sistema responde ante un escalón con una curva en forma de S, sin sobreoscilación. Por tanto el método de Z-N propuesto por el enunciado es aplicable.

Se procede a medir sobre la figura los parámetros necesarios para realizar el modelo del sistema. Obtenemos gráficamente los valores:

$$\begin{aligned} K &= 0,165 \\ L &= 0,4 \text{ sec.} \\ T &= 2,8 - 0,4 = 2,2 \text{ sec.} \end{aligned}$$

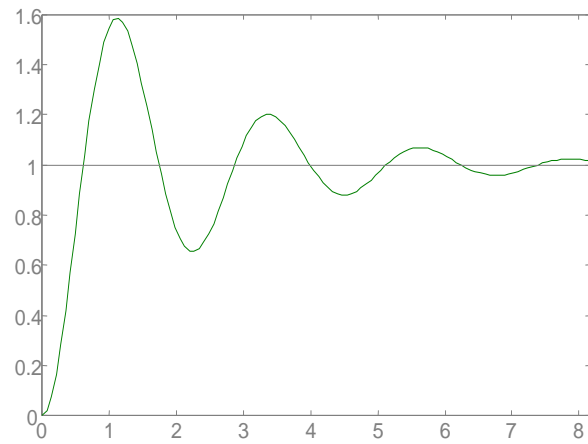
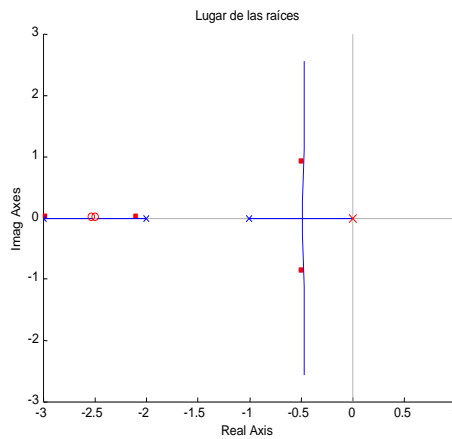
Introduciéndolos en la tabla obtenemos el regulador PID siguiente:

$$G_c = 41,25 \left(1 + \frac{1}{0,8 \cdot s} + 0,2 \cdot s \right) = 8,25 \frac{(s + 2,5)^2}{s}$$

Simulamos ahora el comportamiento del sistema regulado mediante Matlab. Para ello utilizaremos la herramienta *rltool*. Especificaremos mediante el diálogo del regulador la definición del PID.

```
rltool(gs)
```

Obtenemos entonces el siguiente lugar de las raíces con la siguiente respuesta ante el escalón en cadena cerrada:



De esta forma la experiencia obtenida por Ziegler-Nichols, puede ser también aplicada para el caso en que tengamos un modelo de la planta, como es el del ejemplo. Veamos ahora como resolveríamos este ejercicio en caso de carecer de una herramienta de simulación:

1.- Obtenemos la respuesta ante el escalón del sistema en cadena abierta de forma analítica mediante la antitransformada de $\frac{1}{s} G(s)$:

$$y_s(t) = 0,166 - 0,5e^{-t} + 0,5e^{-2t} - 0,166e^{-3t}$$

2.- Obtenemos el punto de inflexión de dicha curva igualando a cero la segunda derivada:

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = y_{\delta}(t) = 0,5e^{-t} - e^{-2t} + 0,5e^{-3t}$$

$$\frac{d^2 y_s(t)}{dt^2} = -0,5e^{-t} + 2e^{-2t} - 1,5e^{-3t} = 0 \Rightarrow t = 1,1s.$$

$$\frac{dy_s(1,1)}{dt} = 0,074 \quad y(1,1) = 0,049$$

3.- Aplicamos el Teorema del valor final para calcular K:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot G(s) = 0,166$$

4.- Obtenemos el resto de valores del modelo por relaciones geométricas:

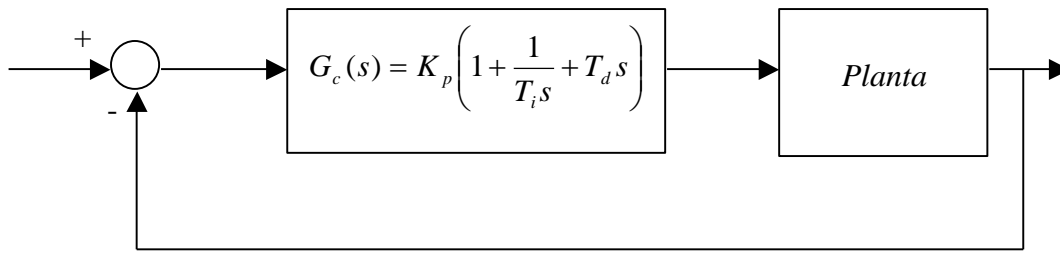
$$T = \frac{0,166}{0,074} = 2,25 \quad L = 1,1 - \frac{0,05}{0,074} = 0,43$$

5.- Finalmente utilizando la Tabla obtenemos el PID que es muy parecido al calculado anteriormente por observación gráfica:

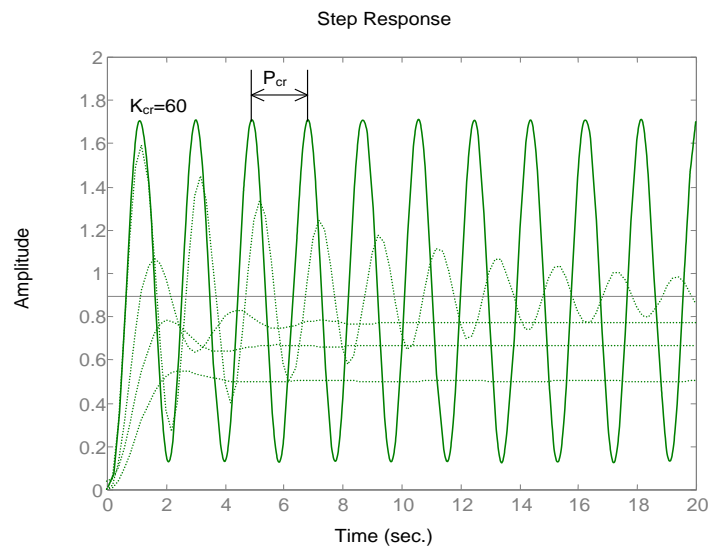
$$G_c(s) = 8,13 \frac{(s + 2,32)^2}{s}$$

Segundo método. Ajuste en Cadena Cerrada o de Respuesta Crítica.

Al contrario que el anterior método, en este caso se realizan los ensayos o experimentos sobre la planta con el regulador PID ajustable ya montado. De ahí que se denomine *ajuste en cadena cerrada* puesto que el montaje del regulador se realizará como se indica en la figura:



Inicialmente anulamos las acciones derivativa e integradora, haciendo que $T_i = \infty$ s y $T_d = 0$ s siguiendo la notación del regulador utilizada en el primer método. De esta forma sólo regulamos la acción proporcional dada por la constante K_p . Usando solamente esta acción de control, partiendo de cero la vamos incrementando hasta alcanzar un valor crítico K_{cr} en el cual la salida exhiba por vez primera oscilaciones sostenidas. Si estas oscilaciones no se producen para algún valor de K_p , es decir, que el sistema no se vuelve inestable nunca, entonces este método no se puede aplicar. Obtenida esta respuesta, anotamos los valores de ganancia crítica y el correspondiente periodo crítico obtenido.



Estos dos valores, de forma análoga a como procedíamos en el caso del primer método, nos sirven para obtener los valores que definen las distintas acciones del regulador, a través de la siguiente tabla:

TIPO DE CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{P_{cr}}{1.2}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

$$G_c(s) = 0,075 K_{cr} P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}$$

Ejemplo: Diseñar un regulador PID para el sistema cuya función de transferencia es la siguiente $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ **según el método de ajuste en cadena cerrada de Ziegler-Nichols.**

En primer lugar se realiza el cálculo de la K_{cr} que hace al sistema inestable. Este valor coincide con el valor de la acción proporcional que hace al sistema críticamente estable, y que por tanto sitúa dos polos en el eje imaginario. Desde el punto de vista del lugar de las raíces, es el punto del LDR en el que dos ramas conjugadas cortan el eje imaginario. Aplicamos el método de Routh para calcular el valor de K:

$$D(s) = (s+1)(s+2)(s+3) + K_p = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K_p$$

1	11
6	$6+K_p$
m	0

$$m = \frac{66 - 6 - K_p}{6} > 0 \Rightarrow K_{cr} = 60$$

Obtenida la ganancia crítica, debo calcular el valor del periodo. Para ello debo obtener las raíces imaginarias puras que se generan en cadena cerrada por esta acción proporcional sobre la planta. Sustituyo en la ecuación auxiliar y las obtengo, así como la frecuencia de la oscilación crítica que generan:

$$6s^2 + 6 + K_{cr} = 6s^2 + 66 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{11}j = \pm 3,31j$$

$$\omega_n = \omega_d = \omega_{cr} = 3,31$$

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = 1,9$$

Finalmente utilizando la Tabla obtenemos el PID

$$G_c(s) = 8,55 \frac{(s+2)^2}{s}$$

Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas y Miguel Hernando Gutiérrez.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU". La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](#) para [contenidos abiertos](#). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>