

# 13

## **Análisis dinámico en el dominio de la frecuencia**

---

El objetivo de este capítulo es tratar de determinar el comportamiento dinámico de la cadena cerrada a partir de los datos de la estabilidad relativa. Se trata de inferir la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada y la respuesta temporal del conjunto realimentado al escalón empleando la información de la cadena abierta. Por tanto, la teoría de este capítulo es sólo válida para estructuras de realimentación negativa.

### **13.1 Relación entre la respuesta en frecuencia y la respuesta transitoria**

---

Suele ser muy común en la definición de los sistemas de control que se diseñe a partir de la información de la respuesta frecuencial. En gran parte esto es debido a la facilidad del trabajo experimental con esta técnica. Además esta decisión está reforzada por la relación existente entre la respuesta frecuencial y la respuesta transitoria.

La última afirmación parece un contrasentido, ya que cuando se definió la respuesta en frecuencia se analizaba sólo la relación entre la entrada y la salida en el régimen permanente ante excitaciones de señales armónicas. De otro lado, hay unas cuantas especificaciones que se piden a los sistemas de control que están relacionadas con la respuesta del transitorio ante las señales aperiódicas de test. Sin embargo, se verá que existen relaciones entre los parámetros de la respuesta en frecuencia con la evolución temporal.

Así, para sistemas de segundo orden se pueden demostrar relaciones aproximadas entre los parámetros del dominio frecuencial con el temporal. El punto de partida será, por tanto, suponer que un sistema dinámico de control, en cadena cerrada, puede aproximarse a la dinámica de sus polos dominantes complejos y conjugados de segundo orden.

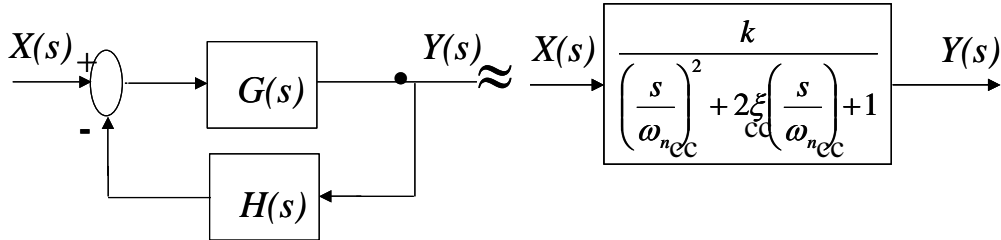


Figura 13. 1. Equivalente reducido a sistema segundo orden. Los subíndices cc indican que son parámetros de la cadena cerrada.

Partiendo de la información de la cadena abierta se determinará, mediante el criterio de Nyquist, el margen de fase y las frecuencias de cruce de ganancia y fase. Pues bien, existe una relación entre la estabilidad relativa,  $\gamma$  (en grados), y el factor de amortiguamiento de la cadena cerrada,  $\xi_{cc}$ , para sistemas subamortiguados:

$$\xi_{cc} \cong \frac{\gamma}{100} \quad 0 \leq \xi_{cc} < 0.707 \quad (13. 1)$$

Valores de margen de fase entre  $45^\circ$  y  $70^\circ$  van a ser un compromiso entre el nivel de estabilidad, la velocidad de respuesta y el amortiguamiento del sistema. Márgenes de fase mayor supondrá valores elevados del factor de amortiguamiento,  $\xi_{cc}$ , volviéndose más lento en la respuesta temporal. Por debajo de los  $45^\circ$ , la estabilidad del sistema se encuentra comprometida.

Para sistemas con factor de amortiguamiento por debajo de 0.7 aparecerá en la cadena cerrada un pico de resonancia,  $M_{r,cc}$ , a la frecuencia de resonancia,  $\omega_{r,cc}$ . La frecuencia de resonancia de la cadena cerrada estará comprendida entre la frecuencia de cruce de ganancia y la de fase:

$$\omega_g \leq \omega_{r,cc} \leq \omega_f \quad 0 \leq \xi_{cc} < 0.707$$

Si la respuesta frecuencial del equipo tiene un valor alto de  $M_{r,cc}$ , el sistema tiene poca estabilidad. Por contra, cuando no hay pico de resonancia el sistema, en su conjunto o cadena cerrada, resulta estable. Esta afirmación se basa en la relación entre el valor de  $M_{r,cc}$  y del factor de amortiguamiento,  $\xi_{cc}$ , para sistemas subamortiguados:

$$M_{r,cc} \cong \frac{1}{2\xi_{cc}} \quad 0 \leq \xi < 0.707 \quad (13. 2)$$

El valor de pico de resonancia de la cadena cerrada es un índice de la estabilidad relativa del sistema. Valores de  $1.1 < M_{r,cc} < 1.4$ , equivalente a  $1\text{dB} < M_{r,cc} < 3\text{dB}$ , que corresponden con factores de amortiguamientos  $0.4 < \xi_{cc} < 0.7$  y que proporcionan una buena respuesta transitoria con sobreoscilaciones del  $12\% < M_{P,cc} < 30\%$ .

Siempre y cuando el sistema tenga un pico de resonancia, la frecuencia de resonancia, la frecuencia de amortiguamiento, la frecuencia natural y la frecuencia de corte prácticamente coinciden:

$$\omega_{r,cc} \cong \omega_{d,cc} \cong \omega_{n,cc} \cong \omega_{c,cc} \quad 0 \leq \xi < 0.707 \quad (13. 3)$$

Por la proximidad entre la frecuencia de resonancia y la frecuencia de corte, si  $\omega_{r,cc}$  es alta significará que el sistema es rápido, ya que el ancho de banda del sistema aumenta.

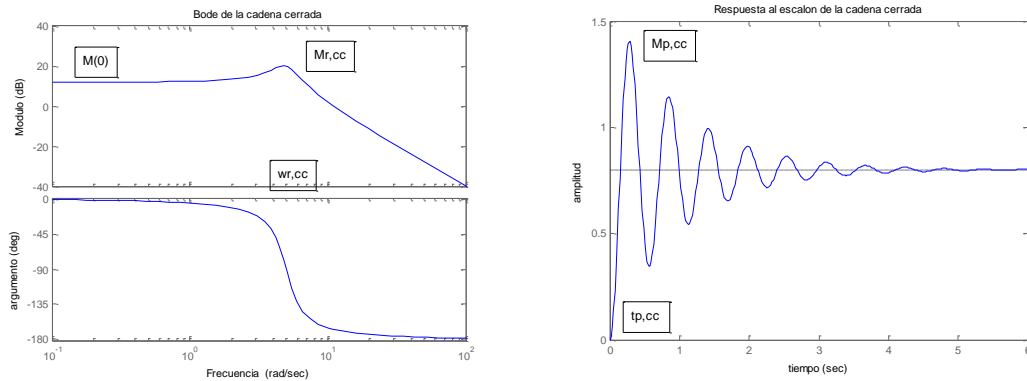
Por último, el ancho de banda del sistema especificará la velocidad de respuesta y la inmunidad al ruido. Se define ancho de banda como el rango de frecuencias de la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada que no cae más de 3dB, respecto a la ganancia central.

El ancho de banda es inversamente proporcional al tiempo de subida para sistemas con sobreoscilaciones comprendidas entre el 10% y el 25%:

$$AB_{cc} \cong \frac{1}{2t_{r,cc}} \quad 10\% < M_{P,cc} < 25\% \quad (13. 4)$$

No obstante, el ancho de banda debe limitarse, ya que el ruido tiene espectro de alta frecuencia. Un exceso en el ancho de banda del sistema hace que el equipo se vuelva sensible ante las perturbaciones o ruido.

Al realizar la simplificación de que el sistema de la cadena cerrada se aproxima a un sistema de segundo orden simple, entonces se hace accesible el tipo de respuesta en frecuencia de la cadena cerrada y su respuesta al escalón unitario.



## 13.2 Respuesta en frecuencia en la cadena cerrada

Tan importante como el margen de fase o de ganancia en el diseño, también lo son el valor de pico de resonancia,  $M_{r,cc}$ , la frecuencia de resonancia,  $\omega_{r,cc}$ , o el ancho de banda del sistema,  $AB_{cc}$ . Los valores de margen de fase o de ganancia han sido obtenidos a partir de la información de la cadena abierta. Sin embargo, ya sea en el trazado de Bode o en el de la curva polar, de momento, no dan cuantificación del resto de los parámetros mencionados.

Estos tres últimos valores,  $M_{r,cc}$ ,  $\omega_{r,cc}$  y  $AB_{cc}$ , deben ser determinados a partir de la respuesta frecuencial de la cadena cerrada. La pregunta que se suscita es si a partir del trazado frecuencial de la cadena abierta es posible conseguir la respuesta frecuencial de la cadena cerrada. La respuesta es sí y se denominan los círculos de  $M$  y  $N$  o la carta de Nichols.

Al igual que en las técnicas del lugar de las raíces, donde la variación de un parámetro intrínseco del sistema hace variar los polos de la cadena cerrada, aquí sucede algo parecido, al modificar alguno de los parámetros de la cadena abierta se observa cómo varían los valores de  $M_{r,cc}$ ,  $\omega_{r,cc}$  y  $AB_{cc}$ . La idea es observar la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada con modificaciones de los parámetros intrínsecos de la cadena abierta. Con esta técnica y a partir de las especificaciones de margen de fase, de pico de resonancia o de ancho de banda, resulta factible la modificación estructural en la cadena abierta para que el equipo en su conjunto cumpla con los requisitos establecidos en la cadena cerrada.

### 13.2.1 Lugar geométrico del módulo y argumento de la cadena cerrada.

Se trata de determinar la respuesta frecuencial de la cadena cerrada a partir de la curva polar de la cadena abierta. Para simplificar el desarrollo se supone que la realimentación es unitaria. A partir de la FDT de la planta,  $G(s)$ , se conseguirá la respuesta en frecuencia del conjunto, haciendo el cambio de  $s$  a  $j\omega$ .

$$M(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 + G(\omega)} \quad (13.5)$$

$G(\omega)$  es un fasor dependiente de la frecuencia y de la característica de la planta que podrá ser descompuesta en una parte real y otra imaginaria:

$$G(\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \quad (13.6)$$

Introduciendo la forma binómica en la respuesta frecuencial del sistema de realimentación unitaria quedará como:

$$M(\omega) = \frac{X(\omega) + jY(\omega)}{1 + X(\omega) + jY(\omega)} \quad (13.7)$$

La amplitud de la cadena cerrada estará dada por el módulo de la anterior expresión:

$$|M(\omega)| = \frac{\sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)}}{\sqrt{(1 + X(\omega))^2 + Y^2(\omega)}} \quad (13.8)$$

Trabajando sobre esta igualdad se llega a conclusión de que el módulo de la cadena cerrada tiene una expresión del tipo cuadrático:

$$\left( X(\omega) + \frac{|M(\omega)|^2}{|M(\omega)|^2 - 1} \right)^2 + Y^2(\omega) = \frac{|M(\omega)|^2}{(|M(\omega)|^2 - 1)^2} \quad (13.9)$$

Simplificando la escritura de la dependencia de la frecuencia y definiendo el módulo de la cadena cerrada por  $M$ , la ecuación indica el lugar geométrico para valores de módulo constante,  $M$ . Sus formas geométricas, sobre el dominio complejo, forman unas familias de círculos:

$$\left( X + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (13.10)$$

De la expresión cuadrática se desprende que el radio es  $M/(M^2 - 1)$  y que el centro está sobre el eje real negativo, ya que  $c_X = -M^2/(M^2 - 1)$  y  $c_Y = 0$ . A medida de que aumente el valor de  $M$ , el radio del círculo disminuye y converge en el punto  $-1 + j0$ . Por contra, cuando  $M$  es menor a 1, el radio aumenta con la disminución del módulo de la cadena cerrada y el centro de radio se desplaza hacia la izquierda del punto  $-1 + j0$ . Si el valor de  $M$  es igual a la unidad se convierte en una recta paralela al eje imaginario, pasando por el punto  $-0.5 + j0$ .

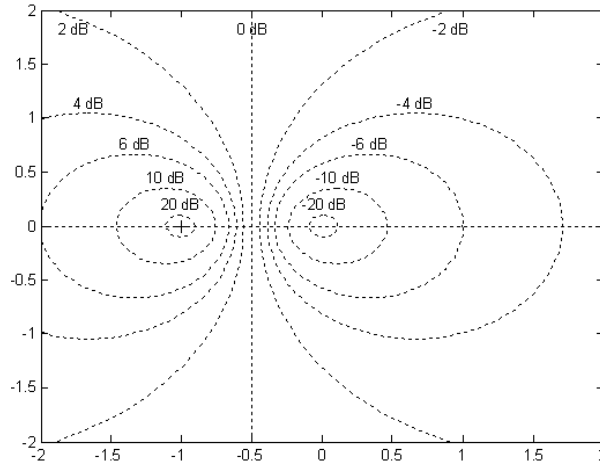


Figura 13. 2. Círculos M

Similar procedimiento se emplea con el argumento de la cadena cerrada. El desfase introducido por la cadena abierta expresada en forma binómica queda como:

$$\arg\left(\frac{G(\omega)}{1+G(\omega)}\right) = \alpha = \arctg\left(\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\right) - \arctg\left[\frac{Y(\omega)}{(X(\omega)+1)}\right] \quad (13. 11)$$

Llamando a N a la tangente del desfase introducida por la cadena cerrada a una determinada frecuencia,  $\alpha$ :

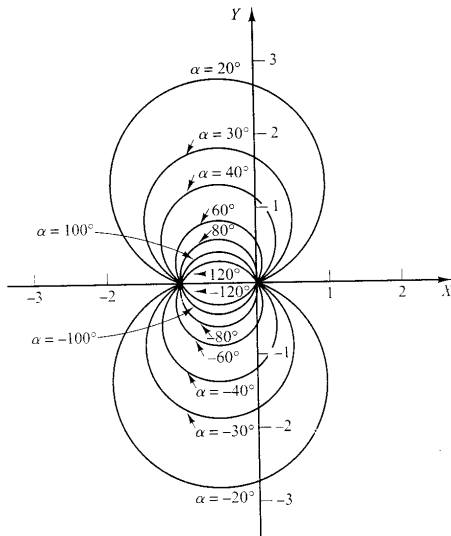
$$N = \tg(\alpha) = \tg(A - B) = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \frac{Y}{1+X}} \quad (13. 12)$$

$$A = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad B = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)+1} \quad (13. 13)$$

Se llega a la expresión cuadrática:

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \quad (13. 14)$$

Los lugares geométricos de argumentos constantes de la cadena cerrada, describen círculos con centro en  $c_x = -\frac{1}{2}$ ,  $c_y = 1/(2N)$  y con radio de  $1/2\sqrt{1+1/N^2}$ .



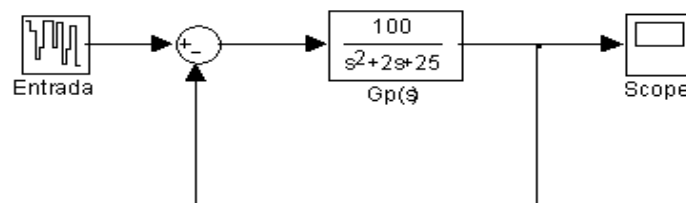
El lugar geométrico de  $N$  no es un círculo completo, sino sólo un arco. Esto es así porque si se le agrega múltiplos de  $\pm 180$  a  $\alpha$ , la tangente del ángulo no cambia. Por tanto, los círculos de  $N$  tienen valores múltiples en el sentido de que para un círculo dado  $N_i$ , también lo será para todos aquellos cuyos argumentos de la cadena abierta sean  $N_i \pm 180i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

La intersección entre la curva polar de la planta en cadena abierta,  $G(\omega)$ , con la familia de círculos de  $M$  y  $N$  proporcionará la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada. El corte de  $G(\omega)$  con la familia de curvas  $M$ , dará la amplitud de la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada. En el caso de que hubiese un pico de resonancia en la cadena cerrada, el círculo  $M$  más pequeño que corte con  $G(\omega)$ , i.e. que sea punto de tangencia, corresponderá al valor de  $M_{r,cc}$  y a la frecuencia que se produce será la frecuencia de resonancia,  $\omega_{r,cc}$ .

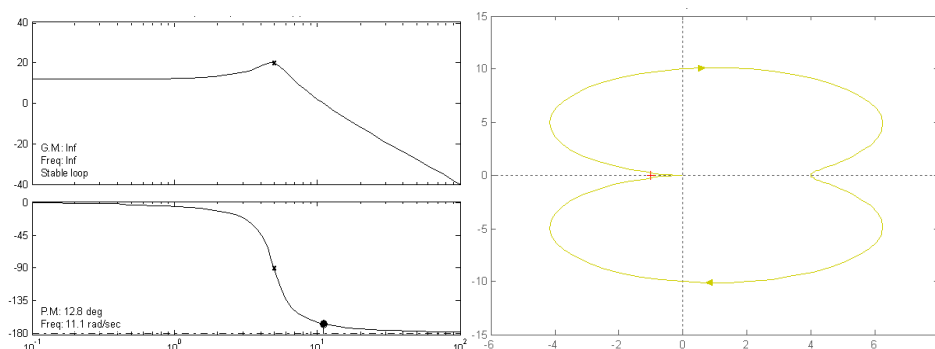
Por su parte, la intersección de la curva polar de la cadena abierta,  $G(\omega)$ , con los círculos de  $N$  resultará el trazado del argumento de la cadena cerrada.

### Ejemplo 13.1

Determinar la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada a partir de la información de la cadena abierta del siguiente sistema de control:



Apoyándose en el diagrama de Bode se consigue la curva polar de la cadena abierta:



Sabiendo que el margen de fase es de  $12.8^\circ$ , el factor de amortiguamiento de la cadena cerrada es aproximadamente de 0.128. Luego debe de aparecer un pico de resonancia y su frecuencia debe de ser próxima a la frecuencia de cruce de ganancia:

$$M_{r,cc} \cong \frac{1}{2\xi_{cc}} = 3.9 <> 11dB \quad \omega_{r,cc} \sim 11,1 \text{ [rad/s]}$$

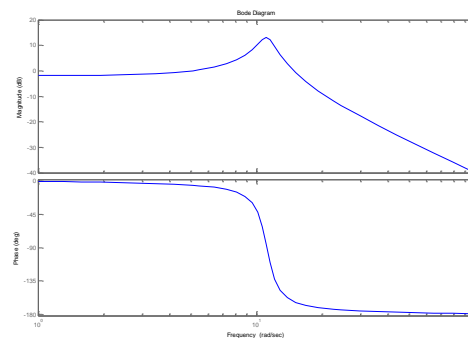
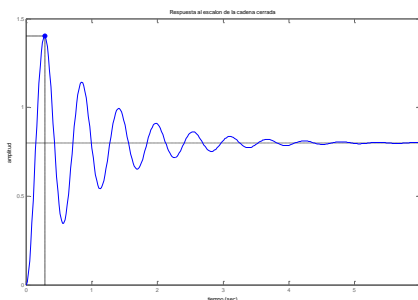
Por el LDR del equipo, el sistema de la cadena cerrada es también otro sistema de segundo orden, el cual se caracteriza por aumentar la sobreoscilación, cuando se aumenta la ganancia. Efectivamente, para ganancia unitaria se observa que se ha pasado de un factor de amortiguamiento en cadena abierta de 0.2 a éste de 0.128.

Al ser un sistema con realimentación unitaria es posible aplicar el concepto de constante estática de error ante una entrada en escalón:

$$e_p = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{5}$$

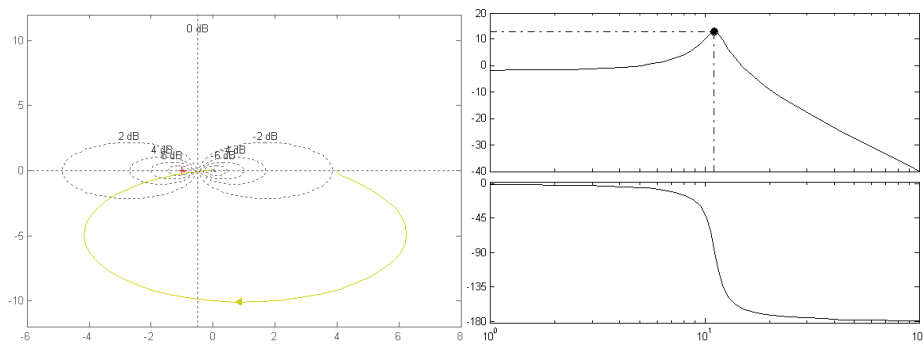
Por tanto, la ganancia estática de la cadena cerrada es de 0.8. Al conocer el factor de amortiguamiento es posible calcular tanto el valor de sobreoscilación como el tiempo de pico ante una entrada en escalón unitario:

$$\xi_{cc} = 0.128 \rightarrow \vartheta_{cc} = 82.64^\circ \rightarrow M_{p,cc} = 66.67\% \quad t_{p,cc} \cong \frac{\pi}{\omega_{r,cc}} = 0.28s$$



La otra técnica es emplear los círculos de M y N. Al interseccionar la curva polar de la cadena abierta,  $G(\omega)$ , con las familias de curvas M y N darán la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada del módulo y el argumento respectivamente:





El valor de pico de resonancia y su frecuencia para la cadena cerrada son:

$$M_r = 12,8 \text{ dB}$$

$$\omega_r = 11,2 \text{ [rad/s]}$$

Los cuales se aproximan bastante a los calculados mediante las aproximaciones entre el dominio frecuencial y temporal.

### 13.3 Carta de Nichols

El diagrama polar tiene el inconveniente de modificarse cuando varía, por ejemplo, la ganancia. Por esta razón se suele emplear el diagrama de Bode. Sin embargo, hay ocasiones en donde es posible otro tipo de trazado. El ábaco de Hall o diagrama módulo-argumento es una representación gráfica de la respuesta frecuencia, tal que en el eje de las ordenadas está el módulo y en abscisas se encuentra la fase. Esta representación tiene la ventaja de no modificarse sustancialmente al variar la ganancia estática del sistema,  $k$ . El trazado sólo se desplaza verticalmente al ajustar  $k$  y cuando se trata sólo de modificar la fase, la curva se mueve horizontalmente. Para obtener esta representación se suele apoyarse en el diagrama de Bode.

Especialmente es empleado el ábaco de Hall para determinar la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada a partir de la información de la cadena abierta. Con este propósito, se traslada el lugar geométrico de las curvas  $M$  y  $N$  al diagrama módulo-argumento. A esta configuración gráfica resultante se le llama la carta de Nichols.

La composición de la curva de la respuesta en frecuencia de la cadena abierta con realimentación unitaria,  $G(j\omega)$ , sobre el diagrama de Nichols podrá determinar el pico de la resonancia,  $M_{r,cc}$ , la frecuencia de resonancia,  $\omega_{r,cc}$ , y el ancho de banda,  $AB_{cc}$ . Todos estos parámetros son calculados sobre la cadena cerrada.

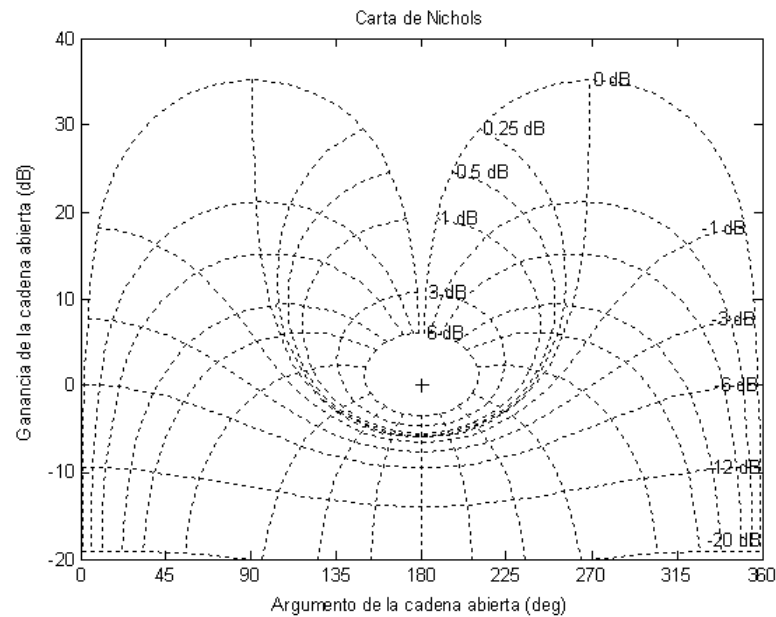
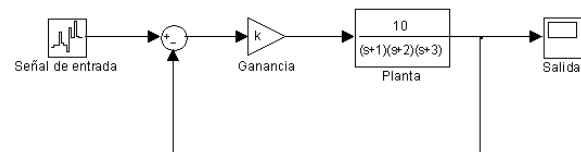


Figura 13. 3. Carta de Nichols

Así, la intersección de la curva  $G(\omega)$  con el lugar geométrico de  $M$  de mayor valor, siempre y cuando sea mayor a la ganancia central, dará el valor del pico de resonancia, en cadena cerrada, obteniendo de esta forma el pico de resonancia,  $M_{r,cc}$ . Ese punto de tangencia informará también de la frecuencia de la resonancia,  $\omega_{r,cc}$ . El ancho de banda estará definido en el punto de corte entre la curva  $G(\omega)$  con un valor de  $M$  igual a -3dB respecto de la ganancia central. El valor de esa frecuencia determinará la frecuencia de corte superior.

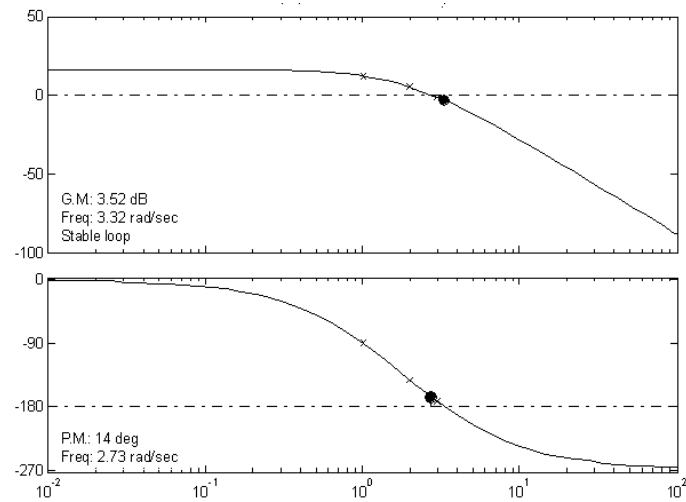
### Ejemplo 13.2

Si el valor de la ganancia es cuatro,  $k=4$ , determinar si hay pico de resonancia en la cadena cerrada y cuánto vale y cuál es la frecuencia de resonancia utilizando la información de la cadena abierta. Averiguar el ancho de banda del sistema. Comparar los resultados con el equivalente reducido de la cadena cerrada y representar su diagrama de Bode.



En primer lugar se obtendría la respuesta en frecuencia de la cadena abierta:

$$G_p(s) = \frac{40}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow G_p(j\omega) = \frac{40/6}{(1+j\omega)(1+0.5j\omega)(1+j\omega 0.33)}$$



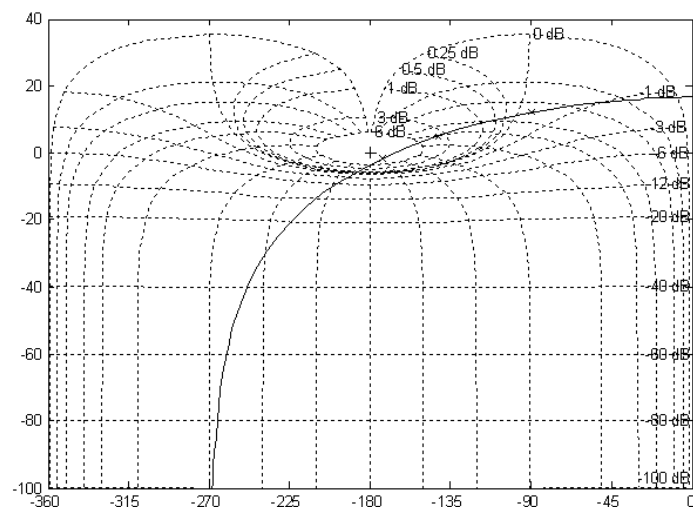
Si el margen de fase es de  $14^\circ$ , el factor de amortiguamiento del sistema equivalente reducido será de 0.14. Entonces, habrá pico de resonancia y frecuencia de resonancia:

$$M_{r,cc} \cong \frac{1}{2\xi_{cc}} = 3.5 > 11dB \quad 2.73 < \omega_{r,cc} < 3.32 \text{ [rad/s]}$$

En cuanto a la respuesta al escalón, considerando que el factor de amortiguamiento del equivalente reducido es de 0.14 y la frecuencia de resonancia es aproximadamente 3[rad/s] se podrá fijar la aproximación temporal:

$$e_p = 14.63\% \quad M_{p,cc} = 64.13\% \quad t_{p,cc} \cong 1s$$

La ganancia central es próxima a 0 dB. Otra manera será trasladar la curva frecuencial de la cadena abierta a la carta de Nichols:



Se observa que hay pico de resonancia, ya que la curva es tangente a un lugar geométrico mayor a 0dB. Debe de estar alrededor de 10 dB y a una frecuencia de

3[rad/s]. La intersección de la línea de  $-3\text{dB}$  de  $M$  con la curva dará el ancho de banda que está en unos 4[rad/s].

Empleando los métodos analíticos se conseguirá la FDT de la cadena cerrada

$$M(s) = \frac{40}{s^3 + 6s^2 + 11s + 46} = \frac{40}{(s + 5.5)(s^2 + 0.48s + 8.33)}$$

Aplicando la teoría de polos dominantes, la FDT de la cadena cerrada se puede aproximar por:

$$M_{eq} = \frac{7.27}{s^2 + 0.48s + 8.33} = \frac{0.87}{\left(\frac{s}{2.89}\right)^2 + 0.16\frac{s}{2.89} + 1}$$

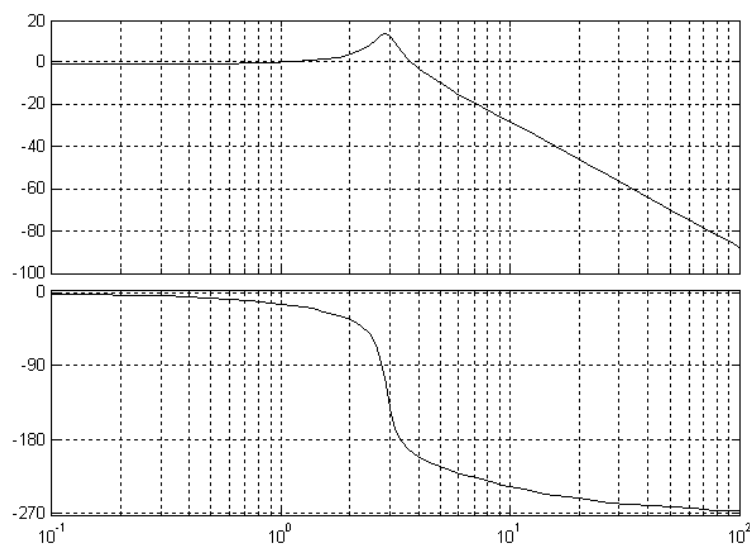
El valor de  $M_r$  será aproximadamente:

$$M_r = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{0.16} = 6 > 15\text{dB}$$

y la frecuencia de resonancia valdrá igual a la frecuencia de amortiguamiento:

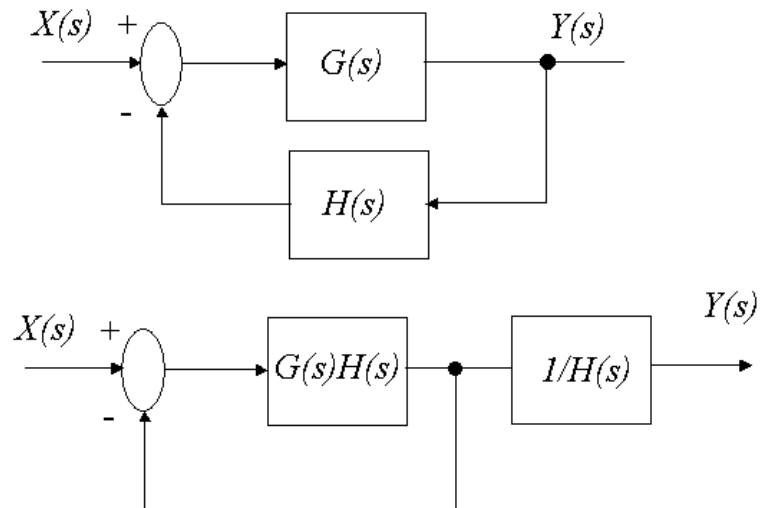
$$\omega_r \approx \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cong 2.89 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

El diagrama de Bode de la cadena cerrada será:



Ciertamente, el ancho de banda es de unos 4[rad/s].

Recuérdese que todo lo anteriormente comentado, curvas  $N$  y  $M$  y las cartas de Nichols, son procedimientos válidos para sistemas con realimentación unitaria. En el caso de no tener realimentación unitaria se procederá a la transformación de un equivalente con realimentación unitaria. Una vez calculado el Bode de la cadena cerrada del equivalente transformado, según se ha explicado, se sumará el trazado frecuencia de  $1/H(s)$ .

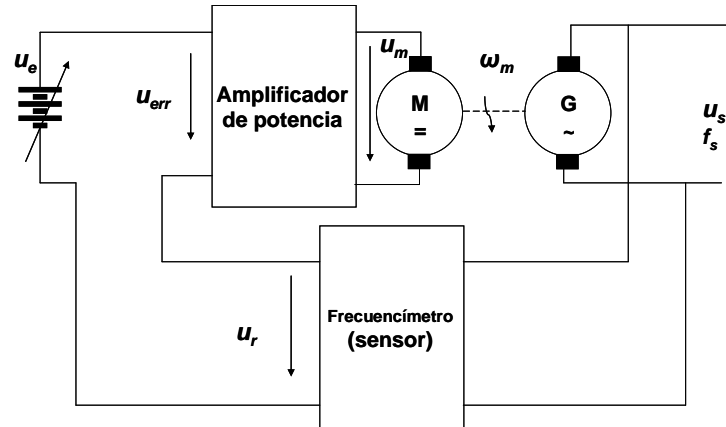


**Figura 13. 4. Transformación para determinar la respuesta en frecuencia en cadena abierta mediante la carta de Nichols**

## 13.4 Problemas

### Problema 13.1

En la figura se presenta el sistema de control de un inversor rotativo (convertidor corriente continua en corriente alterna). El sensor mide la frecuencia de la tensión de salida y da, en su salida y en el régimen permanente, una tensión proporcional de 1[V/Hz]. La dinámica del sensor no es lo suficientemente rápida



como para despreciarla. Se puede modelar como un sistema de primer orden, con una constante de tiempo de  $\tau_s = 0.5$  segundos. En el conjunto del motor de continua y el generador de alterna, las constantes de tiempo de los circuitos eléctricos son insignificantes respecto a las constantes de tiempo de los sistemas mecánicos. Por ello, la inercia de todos los elementos mecánicos que giran con el eje es  $J = 4 \text{ Kg m}^2$  y el rozamiento del eje es  $B = 1 \text{ N m s}$ . La ganancia entre la velocidad del eje y la tensión en extremos del motor es 60 [rpm/V]. Nótese que la frecuencia de la tensión de salida es directamente proporcional a la velocidad angular del eje. El amplificador de potencia se aproxima a la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo de primer orden con un ancho de banda de 1[rad/s]. La ganancia del amplificador es ajustable y es el parámetro a determinar,  $k$ . Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales del inversor rotativo.
2. Función de transferencia de la cadena abierta y de la cadena cerrada.
3. Encontrar el valor de la ganancia  $k$  del amplificador que obtiene un error de seguimiento menor que el 10% ante una referencia de entrada escalón.
4. Diagrama de Bode y curva polar con la ganancia calculada de la cadena abierta. Hallar el margen de fase del sistema.
5. ¿Estamos ante un buen sistema o ante un mal sistema de control? Justificar la razón.

$$u_{err}(t) = u_e(t) - u_r(t)$$

$$u_m(t) + \dot{u}_m(t) = k \cdot u_{err}(t)$$

$$J\dot{\omega}_m(t) + B\omega_m(t) = \frac{60}{60} 2\pi \cdot u_m(t)$$

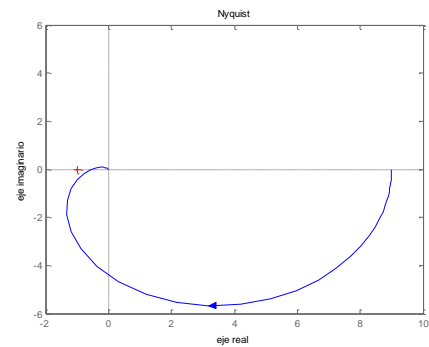
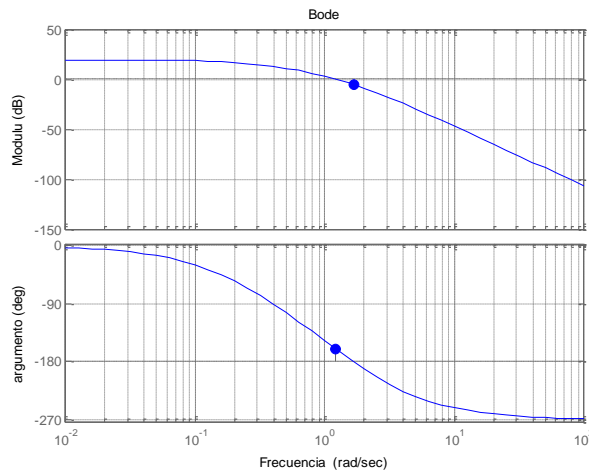
$$f_s(t) = \frac{\omega_m}{2\pi}$$

$$u_r(t) + 0.5 \cdot \dot{u}_r(t) = f_s(t)$$

$$G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s) = \frac{k}{(s+1)(4s+1)(0.5s+1)}$$

$$M(s) = \frac{k(0.5s+1)}{(s+1)(4s+1)(0.5s+1)+k}$$

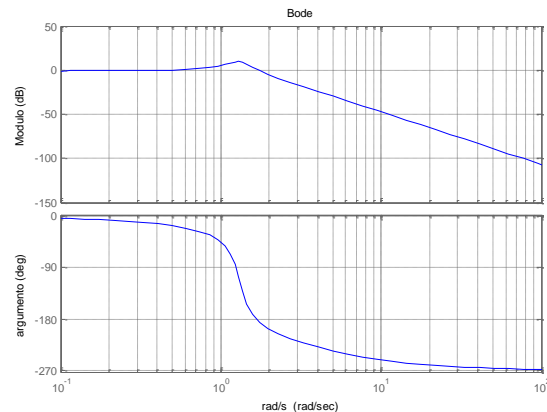
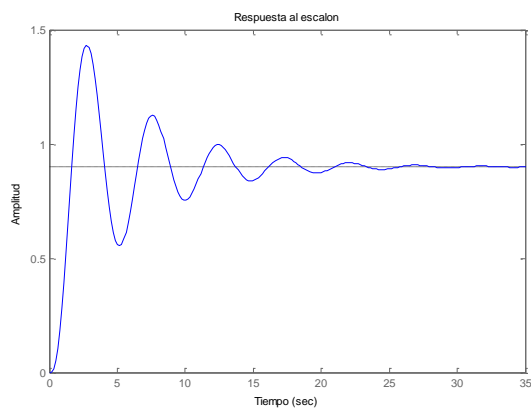
$$e_p = \frac{1}{k_H} \left( 1 - \frac{b_0}{a_0} k_H \right) = \left( 1 - \frac{k}{1+k} \right) = 0.1 \Rightarrow k = 9$$



$$\frac{81}{(1 + \omega_g^2)(1 + 0.25 \cdot \omega_g^2)(1 + 16\omega_g^2)} = 1 \Rightarrow \omega_g = 1.2 \text{ [rad/s]}$$

$$\gamma = 180 - (\arctg(\omega_g) + \arctg(0.5\omega_g) + \arctg(4\omega_g)) = 20^\circ$$

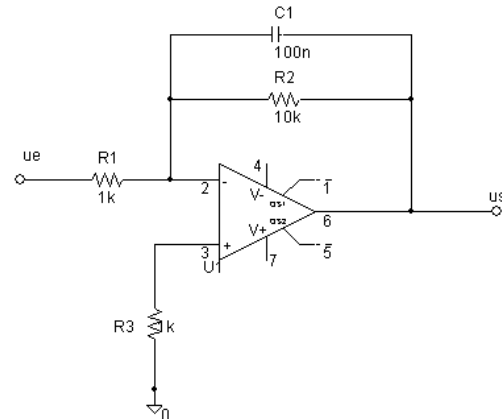
El sistema está mal compensado, ya que el margen de fase es de  $20^\circ$ , por tanto, el factor de amortiguamiento del equivalente reducido es de 0.2. El sistema presentará un elevado pico de resonancia de 8dB a una frecuencia de resonancia de 1.2 [rad/s]. En el dominio temporal, el sistema tendrá una sobreoscilación de 53 % a un tiempo de pico de 2.6 s. Simulando la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada y su respuesta ante la entrada en escalón se observa que las aproximaciones son válidas.



**Problema 13.2**

Para el circuito de la figura se pide:

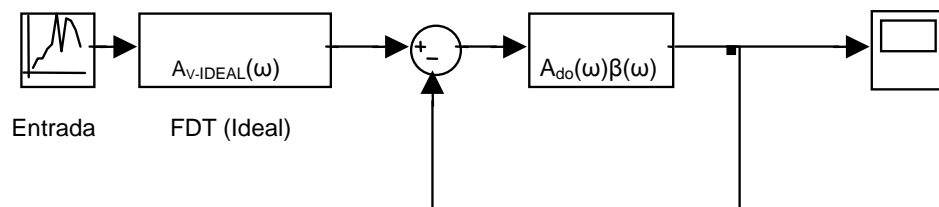
1. FDT de la ganancia de tensión del montaje considerando el amplificador operacional ideal.
2. Diagrama de Bode y curva polar de la respuesta en frecuencia del circuito.



Considerando el amplificador operacional real, el modelo del conjunto queda representado en el diagrama a bloques adjunto. La respuesta del sistema es la ganancia de tensión del circuito, calculada en el apartado 1, en cascada con la estructura de realimentación entre la ganancia de tensión en cadena abierta,  $A_{do}$ , con la red de realimentación,  $\beta$ . El amplificador operacional en cadena abierta tiene una ganancia estática de tensión de  $10^4$  y dos polos uno a 100 [rad/s] y el otro a  $10^6$  [rad/s]. La FDT de la red de realimentación vale:

$$\beta(\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{(1 + j\omega R_2 C_1)}{(1 + j\omega(R_2 // R_1)C_1)}$$

3. Determinar aproximadamente la frecuencia de cruce de ganancia, el margen de fase, la frecuencia de cruce de fase y el margen de tensión del equipo.

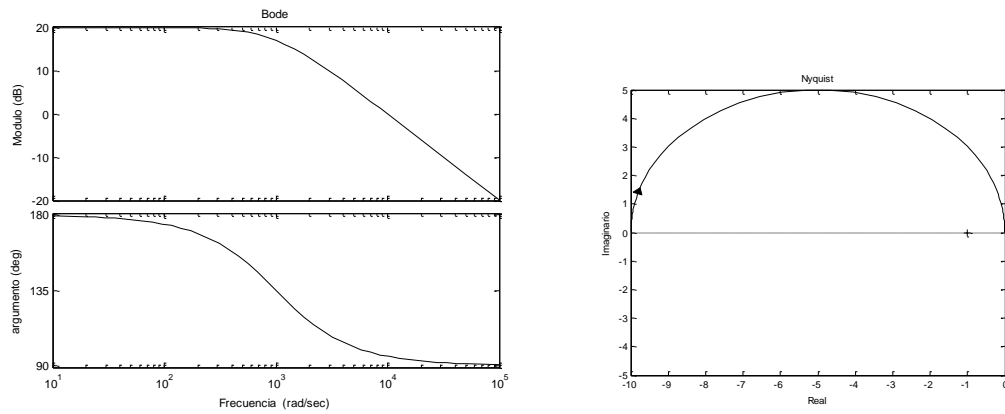


4. Respuesta aproximada en frecuencias del circuito considerando que el amplificador operacional es real.

**Resolución**

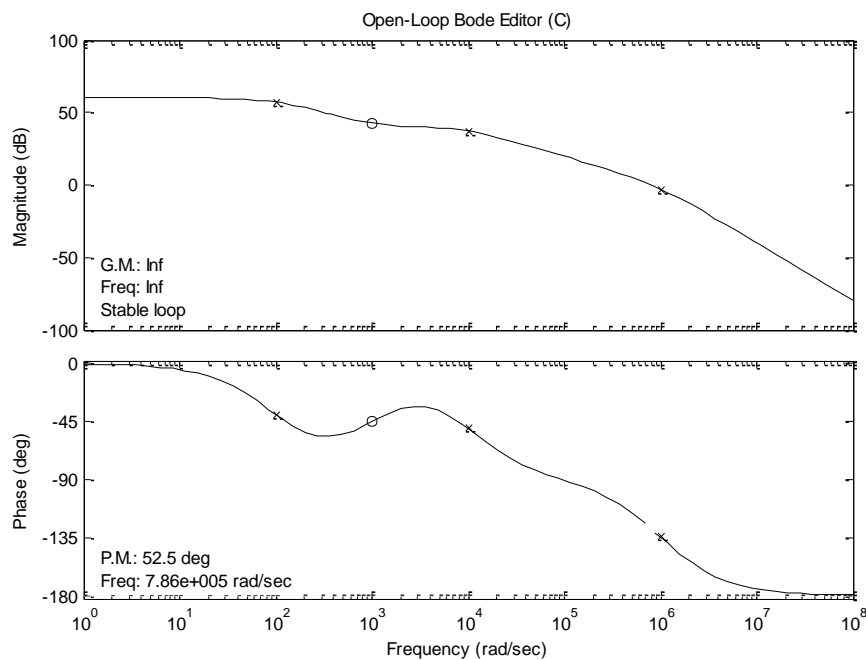
$$A_V(\omega) = \frac{-10}{1 + j\omega 10^{-3}}$$





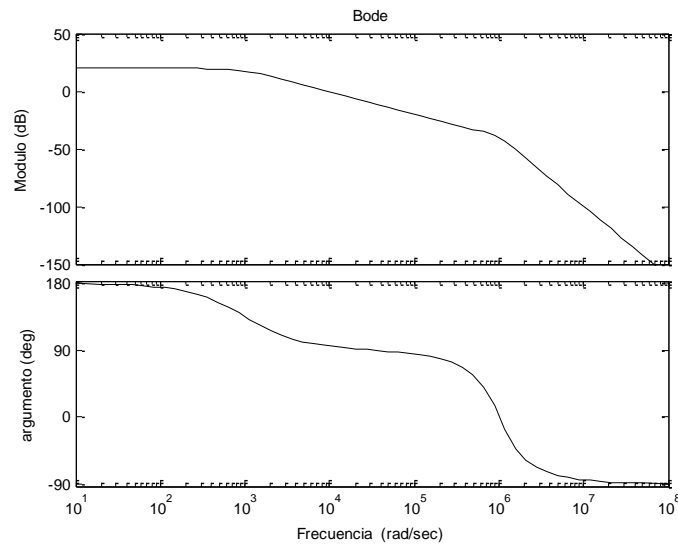
3. La estabilidad dependerá del bucle realimentado, por tanto, se calculará las frecuencias de cruce y los márgenes a partir de la información de la cadena abierta:

$$A_{do}(\omega)\beta(\omega) = \frac{10^3(1 + j\omega 10^{-3})}{(1 + j\omega 10^{-2})(1 + j\omega 10^{-4})(1 + j\omega 10^{-6})}$$



4. Considerando que el bucle cerrado en su conjunto se puede aproximar a un sistema de segundo orden reducido equivalente, entonces:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A_{do}(\omega)\beta(\omega)}{1 + A_{do}(\omega)\beta(\omega)} \cong 1 \quad \omega_{r,cc} \approx \omega_g = 8 \cdot 10^5 \quad \xi_{cc} \cong 0.5$$



Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU". La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](#) para [contenidos abiertos](#). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>