

11

Análisis en el dominio de la frecuencia

Para el estudio de la respuesta dinámica de los sistemas ante una excitación externa se ha empleado, hasta ahora, dos métodos. El primero se realizaba en el dominio del tiempo a través de la convolución entre la señal de entrada y la respuesta impulsional del equipo. Mientras el segundo método se basa en las transformadas de Laplace y se trabaja en el dominio complejo. En los tres siguientes capítulos se tratará con una nueva técnica para el análisis dinámico de los sistemas de control: la respuesta en frecuencia.

Cuando a un sistema se le somete a una excitación de tipo senoidal en la entrada y se observa la señal de salida en el régimen permanente, las relaciones que se establecen entre estas dos señales son conocidas como la respuesta en frecuencia de ese equipo. En los métodos de respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada es la variable independiente, haciéndose recorrer la frecuencia en un determinado rango o espectro de la frecuencia.

Esta técnica presenta grandes ventajas. En primer lugar, la descripción del método muestra lo asequible en el terreno experimental. Resulta relativamente fácil someter un sistema ante una entrada de tipo senoidal y registrar su salida con una multitud de instrumentos existentes hoy en día. Así, en general, este procedimiento se aplica para la identificación de la función de transferencia de los sistemas complejos. En segundo lugar y tal cual se va a exponer en el próximo capítulo, con esta teoría es posible cuantificar la estabilidad de una estructura de realimentación negativa. Hasta ahora, sólo es posible indicar si el sistema es estable o no, pero todavía no se ha medido cuánto de estable es. Por

último y con el objeto de destacar sólo las propiedades más significativas, los reguladores de control calculados a partir de criterios en la respuesta en frecuencia tienen un comportamiento robusto. Quizá, el mayor inconveniente, aunque de carácter menor, es la falta de relación *directa* entre la respuesta en frecuencia y el comportamiento transitorio del sistema en el tiempo, excepto para los modelos de segundo orden. No obstante, no resulta difícil correlacionar la respuesta en frecuencia con el comportamiento temporal. De hecho, es un objetivo de esta asignatura que los alumnos maduren en las relaciones existentes entre la respuesta temporal y la frecuencial.

11.1 Respuesta en frecuencia en sistemas LTI

Se conoce por respuesta en frecuencia, a la respuesta de un sistema, en régimen permanente, cuando se utiliza como señal de entrada una excitación senoidal de amplitud constante y de frecuencia variable desde cero hasta infinito. Tal cual se va a demostrar, la respuesta de un sistema LTI ante este tipo de excitación, es otra senoidal de la misma frecuencia que la entrada, pero que difiere en amplitud y fase (ver figura 11.1).

Las dos ventajas principales de este método son: la facilidad experimental y que la FDT en el dominio de la frecuencia se obtiene reemplazando la s del dominio complejo de las transformadas de Laplace por $j\omega$. La nueva función, $G(\omega)$, es una función de variable compleja, cuya representación en módulo y argumento expresará, la amplificación o atenuación del equipo y el desfase de adelanto o retraso introducido a una determinada frecuencia.

Para llegar a estas conclusiones se partirá de un sistema LTI al que se le excita con un armónico y cuya variable independiente es su frecuencia:

$$x(t) = X_{\max} \sin(\omega t) \quad 0 \leq \omega \leq t$$

Aplicando la transformada de Laplace queda:

$$X(s) = X_{\max} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La transformada de Laplace de la señal de salida será la multiplicación entre $X(s)$ y la FDT del sistema. Al considerar que el equipo es lineal, su FDT puede ser expresada por dos polinomios, uno en el numerador $N(s)$ y otro en el denominador $D(s)$:

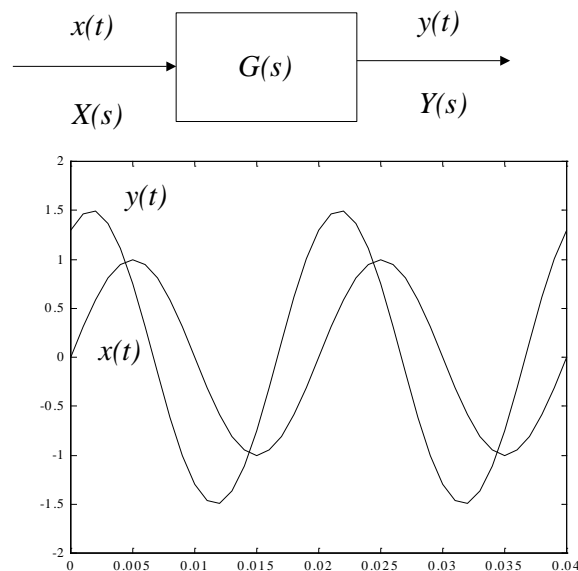


Figura 11. 1. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X_{\max} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (11.1)$$

$$Y(s) = X_{\max} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{N(s)}{D(s)} \quad n \equiv \text{grado}(D(s)) \geq m \equiv \text{grado}(N(s)) \quad (11.2)$$

Para calcular la anti-transformada se hace la descomposición en fracciones simples, separando la componente del régimen permanente (solución particular) de la parte correspondiente del transitorio (solución de la homogénea):

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i} \quad (11.3)$$

siendo p_i las raíces o polos de $D(s)$. Por la propia definición de respuesta en frecuencia, sólo interesa la respuesta del régimen permanente. En las transformadas de Laplace, el transitorio depende de los polos del polinomio característico y el régimen permanente coincide con los polos de la señal de entrada:

$$y_{rp}(t) = L^{-1} \left[\frac{k_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega} \right] = k_1 e^{-j\omega t} + k_2 e^{+j\omega t} \quad (11.4)$$

Resolviendo el cálculo de los residuos simples:

$$k_1 = [(s + j\omega)Y(s)]_{s=-j\omega} = \left[(s + j\omega) X_{\max} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) \right]_{s=-j\omega} = X_{\max} \frac{G(-j\omega)}{-2j} \quad (11.5)$$

$$k_s = [(s - j\omega)Y(s)]_{s=+j\omega} = \left[(s - j\omega) X_{\max} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) \right]_{s=+j\omega} = X_{\max} \frac{G(j\omega)}{2j} \quad (11.6)$$

Introduciendo los residuos en la expresión del régimen permanente de la salida y sacando factor común a $\frac{X_{\max}}{2j}$:

$$y_{rp} = \frac{X_{\max}}{2j} \left[-G(-j\omega) e^{-j\omega t} + G(j\omega) e^{j\omega t} \right] \quad (11.7)$$

Al haber sustituido s por $j\omega$ y ser una expresión en el dominio complejo, se empleará una representación en módulo y argumento:

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{j\varphi(-j\omega)} = |G(j\omega)|e^{-j\varphi(j\omega)} \quad (11.8)$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{+j\varphi(\omega)} \quad (11.9)$$

Insertando estos resultados quedará:

$$y_{rp}(t) = X_{\max} |G(j\omega)| \left[\frac{-e^{j\varphi(j\omega)}e^{-j\omega t} + e^{+j\varphi(j\omega)}e^{j\omega t}}{2j} \right] \quad (11.10)$$

$$y_{rp}(t) = X_{\max} |G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \varphi(j\omega)) \quad (11.11)$$

La señal de salida es otro armónico de igual frecuencia que el de entrada, cuya amplitud es amplificada o atenuada según el valor de $|G(\omega)|$, y desfasada respecto de la entrada dependiendo de $\varphi(\omega)$. Esta conclusión es sólo válida para sistemas lineales. Si el sistema hubiese sido no lineal, la salida sería una combinación de n -armónicos, de frecuencias múltiplos del armónico fundamental, i.e. cuando el sistema es no lineal se generará una distorsión armónica. Resumiendo, si el sistema es lineal, la señal de salida es otro armónico de igual frecuencia que la entrada, en cambio, si el sistema es no lineal, la señal de salida es una combinación de los n -armónicos.

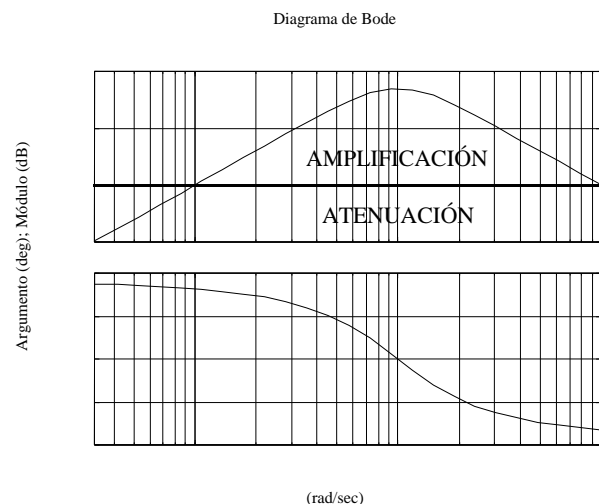
11.2 Diagramas de Bode

Como se acaba de observar, la respuesta en frecuencia transcurre en el dominio complejo. Por esta razón, se puede hacer una presentación visual de la respuesta en dos curvas: módulo y argumento. La primera curva indica la amplificación o atenuación del sistema en el espectro de la frecuencia. La segunda curva, el argumento, refleja cuánto adelanta o retrasa la señal de salida respecto a la entrada. Esta representación gráfica se llama el diagrama de Bode. En la representación del modulo, las escalas serán logarítmicas, de forma que en el eje de ordenadas, la amplitud, se encontrará en decibelios y en abscisas, la frecuencia, estará en décadas:

$$|G(j\omega)|[dB] = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

$$\omega[dec] = \log_{10} \omega$$

Hay que destacar que trazados por encima de los 0dB significará que el sistema a esas frecuencias tiene capacidad de amplificación, mientras por debajo mostrará que en esa parte del espectro de la frecuencia, el sistema atenúa, i.e. la amplitud del armónico de salida es más pequeña que la amplitud del armónico de entrada.



En cuanto al argumento se refleja en el diagrama de fase, donde el eje de abscisa es en décadas y el eje de ordenadas se muestra el argumento en escala natural. Resumiendo, la variable independiente será la frecuencia que será expresada en décadas, $\log_{10}\omega$. En la curva del módulo de la FDT, $|G(\omega)|$, será cuantificada en decibelios, $20 \log_{10} |G(\omega)|$ [dB]. La representación del desfase, el argumento, $\varphi(\omega)$, será la variable dependiente y se medirá en escala natural.

La ventaja de la representación logarítmica reside en que los productos se convierten en suma y las divisiones en resta. Luego para sistemas LTI constituidos como productos de polos y ceros, sus representaciones en el diagrama de Bode se convertirán en la suma y resta de términos de polos y ceros de orden 0, 1 y 2.

Más concretamente, la respuesta en frecuencia de un sistema LTI estará constituida por la sustitución en la FDT de s por $j\omega$. Por tanto, se configurará como la fracción de ceros y polos en el origen y de primer y segundo orden:

$$G(j\omega) = k \frac{\prod_i (1 + j\omega T_{z,i}) \prod_j \left(1 + 2\xi_j \left(\frac{s}{\omega_{n,j}} \right) + \left(\frac{s}{\omega_{n,j}} \right)^2 \right)}{j\omega T_p^d \prod_q (1 + j\omega T_{p,q}) \prod_r \left(1 + 2\xi_r \left(\frac{s}{\omega_{n,r}} \right) + \left(\frac{s}{\omega_{n,r}} \right)^2 \right)} \quad (11.12)$$

Al ser representado en diagrama de Bode se convertirá en un sumatorio de términos básicos:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|[dB] &= 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |k| + \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_{z,i}| + \\ &\sum_j 20 \log \left| 1 + 2\xi_j \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,j}} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,j}} \right)^2 \right| - 20 \cdot d \cdot \log |j\omega T_p| - \\ &- \sum_q 20 \log |1 + j\omega T_{p,q}| - \sum_r 20 \log \left| 1 + 2\xi_r \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,r}} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,r}} \right)^2 \right| \end{aligned} \quad (11.13)$$

Tanto para el módulo como para el argumento:

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(k) + \sum_i \arg(1 + j\omega T_{z,i}) + \sum_j \arg\left(1 + 2\xi_j \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,j}}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,j}}\right)^2\right) - d \cdot \frac{\pi}{2} - \sum_q \arg(1 + j\omega T_{p,q}) - \sum_r \arg\left(1 + 2\xi_r \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,r}}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,r}}\right)^2\right) \quad (11.14)$$

Este trazado permite conseguir una representación de manera sencilla a partir de la descomposición del sistema en sus términos simples (ganancia estática, polos y ceros en el origen y polos y ceros de primer y de segundo orden).

Un procedimiento sistemático de representación se basa en la adición o sustracción de los términos o factores simples que constituye cualquier FDT de tipo LTI.

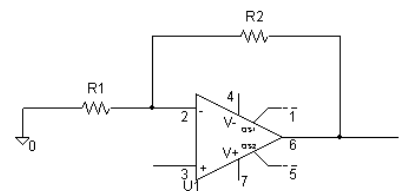
11.2.1 Diagrama de Bode en términos simples.

Los términos o factores básicos de los sistemas LTI son:

1. Ganancia estática o término invariante en frecuencias.
2. Polos y ceros en el origen, $(j\omega T)^{\pm 1}$
3. Polos y ceros de primer orden, $(1+j\omega T)^{\pm 1}$
4. Polos y ceros de segundo orden, $\left(1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}$

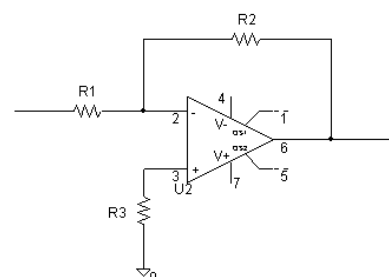
11.2.1.1 Términos invariantes en frecuencia

Corresponde a elementos que amplifican o atenúan la señal de entrada. Por ejemplo, un amplificador operacional ideal con estructura de realimentación negativa. Tanto en su configuración de inversor como de no inversor, la señal de salida es amplificada o atenuada según los valores de las resistencias R1 y R2.



$$A_v(s) = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right); A_v(\omega) = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) = k_1$$

$$A_v(s) = -\frac{R2}{R1}; A_v(\omega) = -\frac{R2}{R1} = -k_2$$

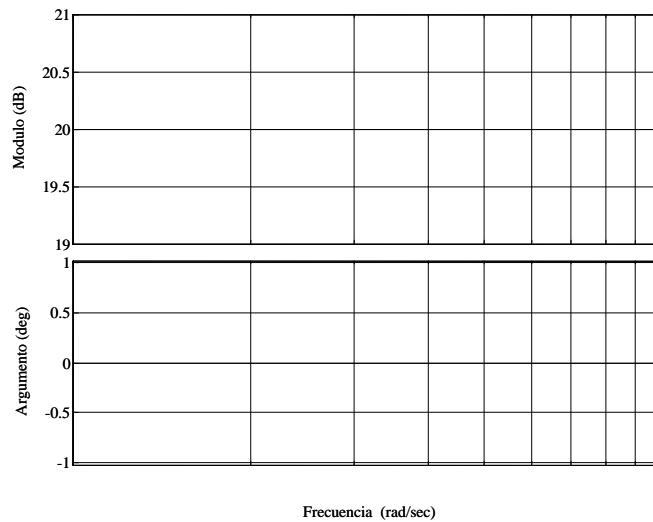


En general, la representación en módulo y argumento de los sistemas invariantes con la frecuencia será del tipo:

$$G(j\omega) = k \rightarrow |G(j\omega)|[dB] = 20\log_{10}|k|$$

$$\arg(G(j\omega)) = \begin{cases} 0 & k \geq 0 \\ \pi & k < 0 \end{cases} \quad (11.15)$$

Indicando una respuesta frecuencial constante en todo el espectro.



11.2.1.2 Polos y ceros en el origen

Los polos en el origen corresponden con las acciones integrales. Sea por ejemplo, el proceso de carga de un condensador. La relación causa-efecto de la carga se expresa como la integración de la cantidad de carga por unidad de tiempo que es reflejado por la variación de tensión entre extremos del condensador:



$$u_c(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_c(\tau) d\tau \quad (11.16)$$

$$\frac{u_c(s)}{i_c(s)} = \frac{1}{C_1 s} \quad (11.17)$$

En el dominio de la frecuencia, este ejemplo, estará relacionado con la reactancia capacitiva:

$$\frac{u_c(\omega)}{i_c(\omega)} = \frac{1}{j\omega C_1} \equiv \text{corresponde con la reactancia capacitiva} \quad (11.18)$$

En general, la respuesta en frecuencia de un polo en el origen, asociado a un constante de tiempo T para el caso de FDT adimensionales, será:

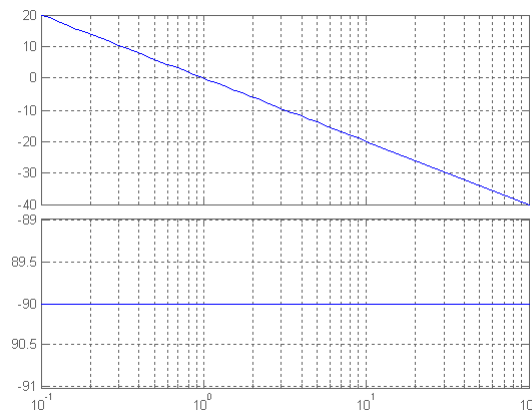
$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega T} \Rightarrow |G(\omega)|[dB] = -20 \log_{10} \omega T$$

$$\arg(G(\omega)) = -\pi / 2 \quad (11.19)$$

El lugar geométrico del módulo es una recta, ya que la variable independiente está en décadas. La pendiente de la recta será de $-20[\text{dB/dec}]$ y cuando el módulo sea la unidad, $|G(\omega)|[\text{dB}]=0$, cortará al eje de las frecuencias en:

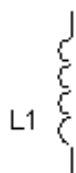
$$\omega_{p,0} = \frac{1}{T}; f_{p,0} = \frac{1}{2\pi T} \quad (11.20)$$

Los polos en el origen tienen el efecto integrador. Se caracteriza por una ganancia infinita a frecuencias nulas y decrece con la frecuencia. El desfase introducido es de -90° en todo el espectro de la frecuencia.



Los ceros en el origen son duales a los polos en el origen. Representan el efecto derivativo. Tienen una ganancia nula a frecuencia cero y crecen con la frecuencia con una pendiente de $+20[\text{dB/dec}]$. Aquí la causa es un proceso derivativo. Un ejemplo de este comportamiento es la relación entre la tensión en la bobina y su corriente:

$$u_L(t) = L_1 \frac{di_L(t)}{dt} \quad (11.21)$$

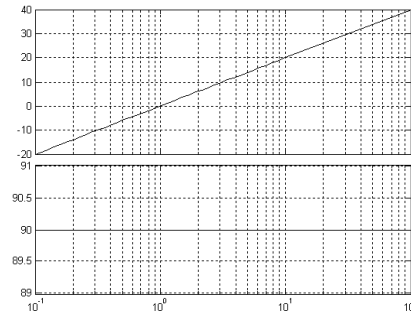


$$\frac{u_L(s)}{i_L(s)} = L_1 s \rightarrow \frac{u_L(\omega)}{i_L(\omega)} = j\omega L \equiv \text{reactancia inductiva} \quad (11.22)$$

Los ceros en el origen adimensionales, i.e. con una constante de tiempo asociada, tienen la siguiente respuesta frecuencial:

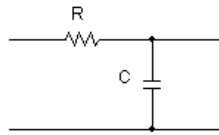
$$G(j\omega) = j\omega T \Rightarrow |G(j\omega)|[dB] = +20 \log \omega T$$

$$\arg(G(j\omega)) = +\pi/2$$



11.2.1.3 Polos y ceros de primer orden.

Las respuesta en frecuencia de los polos de primer orden se comportan como filtros paso bajo. Dejan pasar las componentes de bajas frecuencias y atenúan las altas. Los cuadripolos RC son fiel reflejo de los filtros paso bajos de primer orden.



$$A_v(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (11.23)$$

Nótese la correspondencia entre la respuesta en frecuencia y el concepto de impedancia empleado en el análisis de los circuitos eléctricos.

El modelo matemático de un sistema de primer orden básico está constituido por un polo de primer orden:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad (11.24)$$

Y su respuesta en frecuencia en módulo y argumento para el trazado de Bode quedará como:

$$G(\omega) \Rightarrow |G(j\omega)|[dB] = -20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2}$$

$$\arg(G(\omega)) = -\arctg \omega T \quad (11.25)$$

Tanto el módulo como el argumento son dos curvas continuas con la frecuencia, pero ambas están limitadas por su comportamiento asintótico. Véase qué sucede en la baja y en la alta frecuencia:

Cuando $\omega \rightarrow 0 \rightarrow \omega T \ll 1$, entonces:

$$|G(j\omega)| \approx 0[dB] \quad (11.26)$$

$$\arg(G(\omega)) \approx 0 \text{ radianes} \quad (11.27)$$

Y si $\omega \rightarrow \infty \rightarrow \omega T \gg 1$, luego:

$$|G(j\omega)| \approx -20 \log \omega T \quad (11.28)$$

$$\arg(G(\omega)) \approx -\pi/2 \quad (11.29)$$

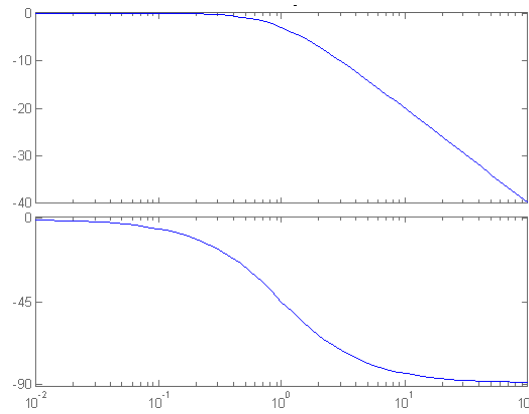
Para valores intermedios de la frecuencia, la amplitud y la fase se obtendrán directamente de las ecuaciones (11. 25). No obstante, suele ser suficiente con una representación asintótica.

La mayor discrepancia que hay entre la respuesta real y la asintótica se da en la frecuencia del polo:

$$\omega_p T = 1 \rightarrow \omega_p = \frac{1}{T} \quad (11.30)$$

$$|G(j\omega)| = -3[dB] \quad (11.31)$$

$$\arg(G(\omega)) = -\pi/4 \quad (11.32)$$



Por otro lado, los ceros de primer orden son términos que dejan pasar la baja frecuencia y amplifica el espectro de alta frecuencia. No existe implementación física de sólo un cero de primer orden, rompe el principio de causalidad:

$$G(\omega) = 1 + j\omega T \quad (11.33)$$

$$\begin{aligned} G(\omega) \Rightarrow |G(j\omega)|[dB] &= 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} \\ \arg(G(\omega)) &= \arctg \omega T \end{aligned} \quad (11.34)$$

Al igual que los polos de primer orden, la representación de los ceros en Bode corresponde a curvas continuas con la frecuencia. Sin embargo, en el trazado manual, generalmente, la respuesta asintótica es suficiente. Las asíntotas a baja frecuencia, $\omega_z T \ll 1$, al igual que los polos de primer orden, valen:

$$|G(j\omega)| \approx 0[dB] \quad (11.35)$$

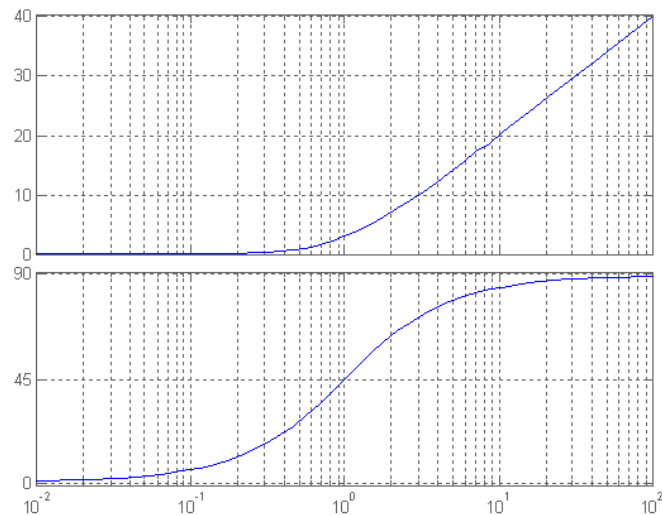
$$\arg(G(\omega)) \approx 0 \text{ radianes} \quad (11.36)$$

La diferencia está en las frecuencias superiores a la del cero, $\omega_z T \gg 1$:

$$|G(j\omega)| \approx 20 \log \omega T \quad (11.37)$$

$$\arg(G(\omega)) \approx \pi/2 \quad (11.38)$$

Obviamente, la mayor discrepancia entre la respuesta asintótica y la real está en la frecuencia del cero. Se deja al lector que obtenga similares conclusiones a lo indicado en los polos de primero orden. En la figura adjunta se muestra el trazado de Bode de un cero de primer orden.



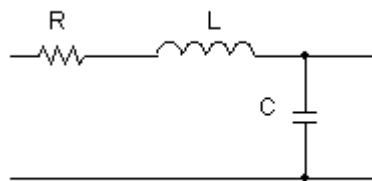
11.2.1.4 Polos y ceros de segundo orden

Un polo de segundo orden tiene una respuesta frecuencial de un filtro paso bajo de segundo orden. Está caracterizado por la frecuencia natural, ω_n , y el factor de amortiguamiento, ξ .

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1} \quad (11.39)$$

Ejemplo 11.1

Obtener la respuesta frecuencial del siguiente cuadripolo:



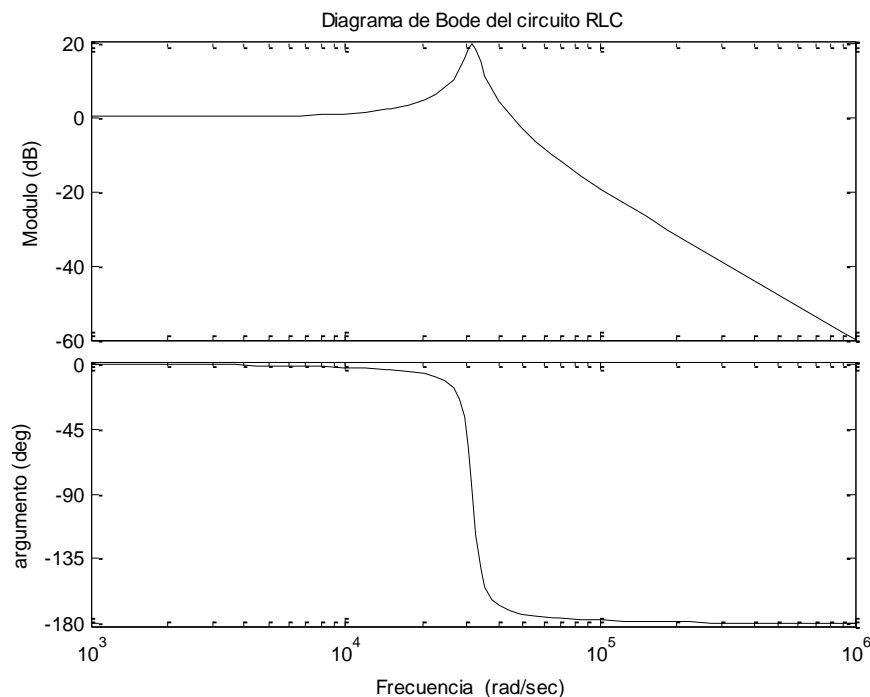
Es un divisor de tensión en el que se puede emplear el concepto de impedancia. Nótese que la impedancia está unida a la respuesta en frecuencias. Así es, la definición de impedancia está en la relación entre la tensión y la corriente ante la excitación de un armónico de frecuencia variable sometida a un elemento eléctrico pasivo.

$$\begin{aligned}\frac{U_s(\omega)}{U_e(\omega)} &= A_v(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \\ &= \frac{1}{(j\omega)^2 LC + RCj\omega + 1}\end{aligned}\quad (11.40)$$

La frecuencia natural, ω_n , y el factor de amortiguamiento, ξ , se conseguirá por asociación de coeficientes de la ec. (11.39).

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left[\frac{rad}{s} \right]; RC = \frac{2\xi}{\omega_n}; \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (11.41)$$

También debe observarse que el sistema tiene una ecuación diferencial del segundo orden debido a los dos elementos de almacenamiento de energía. Si el valor de la resistencia es de 330 ohmios, el condensador de 10 nF y la bobina es de 100 mH, el diagrama de Bode queda como:



$$\omega_n = 31623[rad/s] \quad \xi = 0.05 \quad \omega_r = 31536[rad/s] \quad M_r = 10 <> 20dB$$

El módulo y argumento de la respuesta frecuencial de un polo de segundo orden serán dos curvas continuas dependientes de la frecuencia. Aplicando las definiciones de módulo y argumento sobre la ec.(11.39), las expresiones en decibelios y en escala natural respectivamente quedan como:

$$|G(\omega)[dB] = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (11.42)$$

$$\arg(G(\omega)) = -\arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (11.43)$$

Estas dos funciones continuas de la frecuencia estarán limitadas por dos asíntotas respectivamente. Una a la baja frecuencia, cuando la frecuencia sea mucho más pequeña a la frecuencia natural, $\omega < \omega_n$, y la otra a la alta frecuencia respecto a la natural, $\omega > \omega_n$:

a) Baja frecuencia, $\omega < \omega_n$:

$$|G(\omega)[dB] \approx 0dB \quad (11.44)$$

$$\arctg(G(\omega)) \approx 0 \text{ radianes} \quad (11.45)$$

b) Alta frecuencia, $\omega > \omega_n$

$$|G(\omega)[dB] \approx -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \quad (11.47)$$

$$\arctg(G(\omega)) = -\pi \quad (11.46)$$

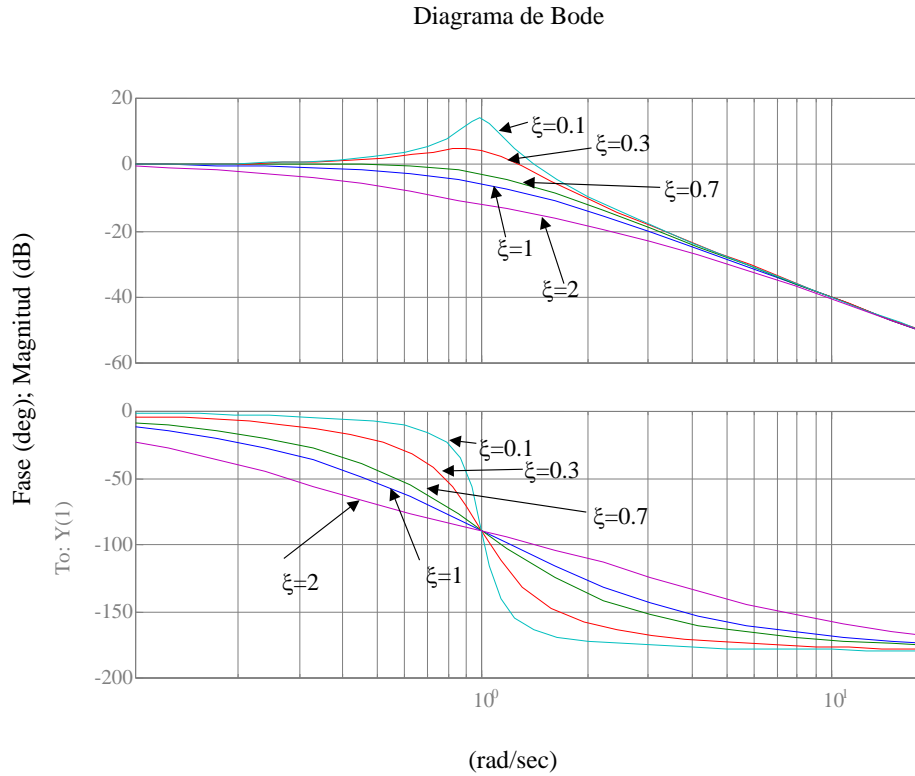
La mayor discrepancia entre la respuesta real y la asíntótica se da para cuando la frecuencia coincide con la frecuencia natural:

c) $\omega = \omega_n$

$$|G(\omega)[dB] = -20 \log 2\xi$$

$$\arctg(G(\omega)) = -\pi/2$$

La respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden estará parametrizada en función de ξ . Un ejemplo ilustrativo se muestra en la figura de abajo, donde se ha utilizado $k = 1$ y $\omega_n = 1$ rad/s.



Las asíntotas son independiente del valor del factor de amortiguamiento, ξ . Para valores de ξ menores a 0.7 aparece un pico de resonancia, cuya amplitud se puede demostrar que vale:

$$|G(\omega)|_{\max} = |G(\omega_r)| = M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad 0 < \xi < 0.707 \quad (11.48)$$

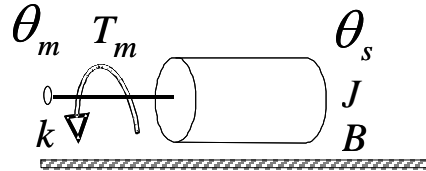
cuyo valor se denomina pico de resonancia, M_r . Este valor máximo se da en la frecuencia de resonancia, definida por:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (11.49)$$

Para valores de ξ mayores de 0.707 no hay pico de resonancia. En la práctica, los picos de resonancia indican una amplificación de la señal de salida que puede provocar su destrucción. Muchas veces se diseñan filtros rechazo de banda alrededor de la frecuencia de resonancia del sistema para evitar su desestabilización.

Ejemplo 11.2

Determinar la respuesta en frecuencia del siguiente sistema mecánico de rotación entre $\frac{\theta_s(j\omega)}{\theta_m(j\omega)}$.



$$T_m = k(\theta_m - \theta_s) = J\ddot{\theta}_s + B\dot{\theta}_s$$

$$k\theta_m(s) = s^2 J\theta_s(s) + sB\theta_s(s) + k\theta_s(s) \quad (11.50)$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta_m(s)} = \frac{k}{Js^2 + Bs + k} = \frac{1}{s^2 \frac{J}{k} + s \frac{B}{k} + 1} \quad (11.51)$$

$$T_m(t) = T_{\max} \sin(\omega t) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (11.52)$$

$$\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{B}{k} = \frac{2\xi}{\sqrt{\frac{k}{J}}} \quad ; \quad \xi = \frac{B}{2\sqrt{J \cdot k}} \quad (11.53)$$

Los ceros de segundo orden estarán caracterizados por la expresión:

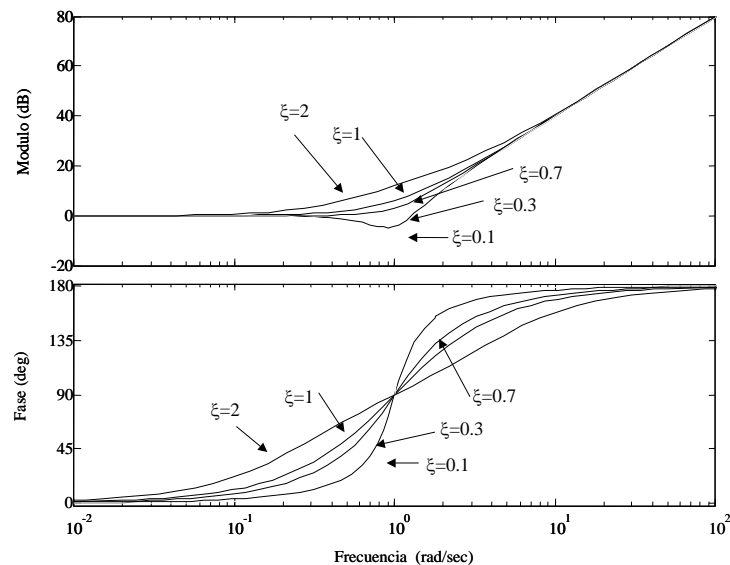
$$G(\omega) = 1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (11.54)$$

En módulo y argumento para su trazado en Bode serán:

$$|G(\omega)|[dB] = 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (11.55)$$

$$\arg(G(\omega)) = \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (11.56)$$

Igualmente, la respuesta en frecuencia de los ceros para una ω_n determinada estará parametrizada en función del factor de amortiguamiento, ξ . Aunque sus asíntotas serán independiente de este valor. La mayor discrepancia entre la respuesta asintótica y la real está en la frecuencia natural, ω_n .



11.2.2 Diagrama de Bode de una FDT tipo LTI-SISO.

Las etapas que llevan al trazado de Bode de una FDT-LTI cualquiera está basado en la suma de la respuesta en frecuencia de los términos simples. Se procederá con los siguientes pasos:

1. Sustituir s por $j\omega$ en la FDT-LTI y disponer la expresión en los términos básicos: términos invariantes en frecuencia, polos y ceros en el origen, polos y ceros de primer y de segundo orden.
2. Determinar las frecuencias de ruptura de las asíntotas de los polos y ceros de la FDT, ordenándolos de menor a mayor.
3. Obtener el trazado asintótico del módulo y del argumento.
4. Ubicar puntos conocidos de las curvas e interpolar.

Ejemplo 11.3

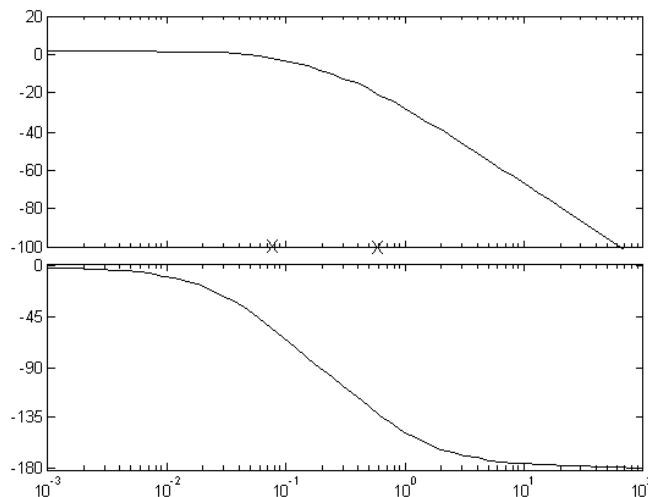
Obtener la respuesta en frecuencia, en diagrama de Bode, del equipo de prácticas de la célula Peltier, sabiendo que su FDT es:

$$G(s) = \frac{0.045}{(s + 0.07)(s + 0.525)}$$

Siguiendo con los pasos marcados, se sustituirá s por $j\omega$ y se procederá a operar hasta obtener la FDT como una combinación de términos básicos:

$$G(\omega) = \frac{0.045}{(j\omega + 0.07)(j\omega + 0.525)} = \frac{\frac{0.045}{0.07 \cdot 0.525}}{\left(1 + j\omega \frac{1}{0.07}\right)\left(1 + j\omega \frac{1}{0.525}\right)} = \frac{1.22}{(1 + j\omega 14.29)(1 + j\omega 1.9)}$$

Al haber dos polos se calcularán las frecuencias de ambos y se situarán sobre el eje de las frecuencias: $\omega_{p1} = 0.07 \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$ y $\omega_{p2} = 0.525 \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$. Hasta la frecuencia del primer polo se tendrá el término invariables en frecuencias, con un valor de 1.72dB y 0° . Entre el primer y segundo polo, el comportamiento asintótico será de una pendiente de $-20[\text{dB/dec}]$ y una transición de 0° a -90° . A partir del segundo polo, la pendiente cambiará a $-40[\text{dB/dec}]$ y de -90° a -180° . La curva real se puede conseguir considerando que los polos están separados una década y a sus frecuencias caen -3dB e introducen un desfase de -45° .

**11.2.3 Término $1-j\omega T$**

El módulo será idéntico a un cero de primer orden. Sin embargo, la fase será distinta:

$$\arg(G(\omega)) = \arctan(-\omega T) \quad (11.57)$$

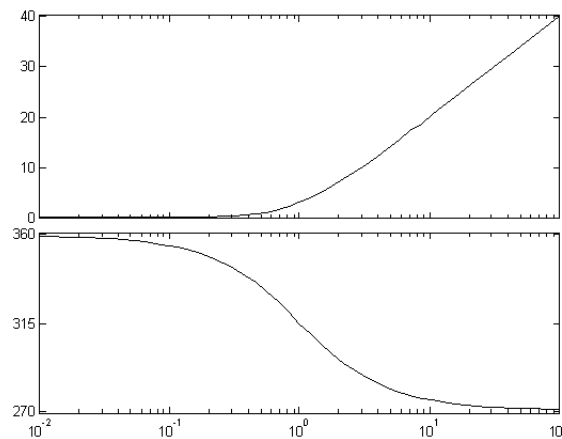
Los valores asintóticos son:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg(G(\omega)) = 0 + 2\pi \cdot i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (11.58)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg(G(\omega)) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (11.59)$$

$$\arg\left(G\left(\omega = \frac{1}{T}\right)\right) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (11.60)$$

El trazado asintótico y de la propia curva será:



En los sistemas de fase mínima existe una relación biunívoca entre la curva de magnitud y fase. Esta característica no ocurre si el sistema es de fase no mínima.

El desfase final para sistemas de fase mínima cuando la frecuencia tiende a infinito es $-\frac{\pi}{2}(n-m)$, siendo n el grado del denominador de la FDT y m el grado del numerador.

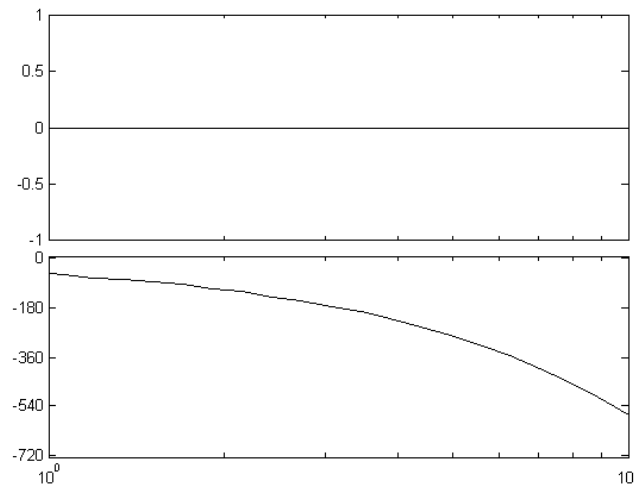
En cambio, esto no sucede en sistemas de fase no mínima. Por el contrario, en cualquier tipo de sistema, de fase mínima o no, la pendiente de la curva del módulo en Bode es $-20(n-m)$ [dB/dec] para el espectro de alta frecuencia. Por tanto es posible determinar experimentalmente, con el diagrama de Bode, si el sistema es de fase mínima o no.

11.2.4 Diagrama de Bode del retardo en la transmisión

$$G(\omega) = e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \operatorname{sen} \omega T = 1 \angle -\omega T \quad (11.61)$$

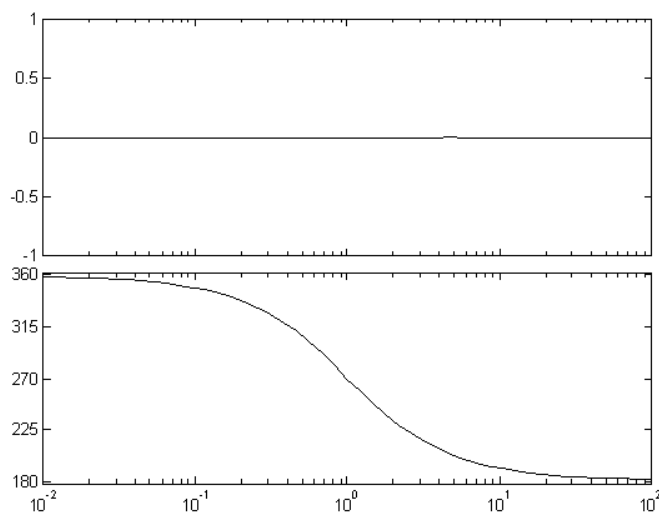
La magnitud del retardo es la unidad para todo valor de la frecuencia. En cuanto a la fase es lineal con la frecuencia. El argumento dará una vuelta de 2π para cada múltiplo

de frecuencia de $2\pi/T$. No hay, consecuentemente, un valor asintótico para las altas frecuencias.



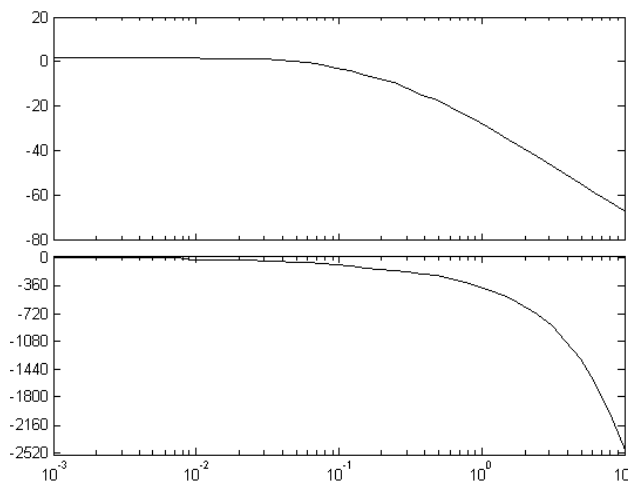
Empleando la aproximación de Pade, efectivamente, el módulo del retardo es la unidad. Sin embargo, la fase debido a la falta de correspondencia biunívoca del término de fase no mínima del cero, estará dando vueltas de 2π .

$$G(\omega) \approx \frac{1 - j\omega T/2}{1 + j\omega T/2} \quad (11.62)$$



Ejemplo 11.4

Obtener el diagrama de Bode del equipo de prácticas de la célula Peltier según el modelo de Ziegler-Nichols.



$$G_p(s) = \frac{e^{-4s}}{1 + s 13.66} \cdot 1.22$$

$$\omega = \frac{1}{13.66} = 0.073 \quad \varphi = -\omega 4$$

$$\omega_1 = 0.073 [\text{rad/s}]$$

$$\varphi_1 = -0.073 \cdot 4 = -0.29 \text{ rad} = -16.7^\circ$$

$$\omega_2 = 0.73 [\text{rad/s}]$$

$$\varphi_2 = -0.073 \cdot 4 = -2.92 \text{ rad} = -167^\circ$$

Véase las discrepancias con la respuesta aproximada del sistema en fase mínima

$$G_p(s) = \frac{0.045}{(s + 0.07)(s + 0.525)}$$

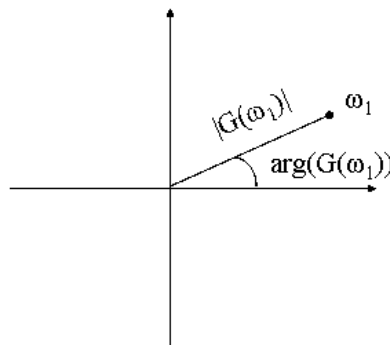
```
>>gp1=tf(1.22,[13.66 1], 'Input Delay', 4);
>>gp2=tf(0.045,poly([-0.525 -0.07]));
```

11.3 Diagrama polar o de Nyquist

En los diagramas polares o de Nyquist, la respuesta en frecuencia de los sistemas se representan a modo de fasor cuando la frecuencia varía desde 0 a infinito (también puede hacerse en el rango negativo de las frecuencias). Se emplea un trazado en el dominio complejo, cuya curva define para cada valor de la frecuencia, el valor del módulo y del argumento.

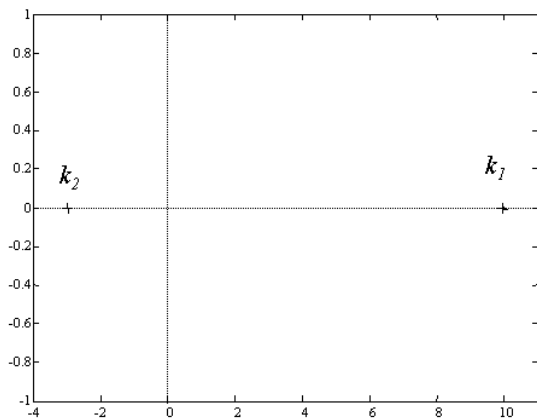
Haciendo uso de un eje de coordenadas, donde en abscisas se coloca la parte real y en ordenadas la componente imaginaria, se representa la curva polar, de forma que la escala empleada es la natural. Su utilidad está en la determinación, con facilidad, de la estabilidad relativa.

La curva polar se consigue a través de la combinación de los términos básicos, muy parecido a cómo se ha visto en el diagrama de Bode. No obstante, una forma fácil de obtener la curva polar es apoyarse previamente en la construcción del diagrama de Bode.



11.3.1 Términos invariantes en frecuencia

Los términos invariantes en frecuencia son puntos fijos en el eje real. Para valores positivos de la ganancia estática, el punto estará en el eje real, en el lado derecho y si es negativo a la izquierda. Por ejemplo, en la figura adjunta se muestra la curva polar para valores de ganancia estática de +10 y de -3.



$$k = \begin{cases} |k| \angle 0 \\ |k| \angle \pi \end{cases}$$

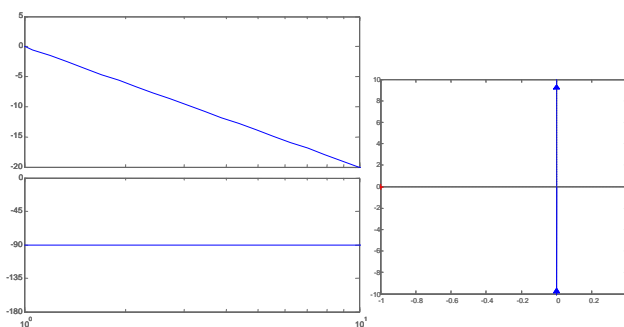
$$k_1 = 10$$

$$k_2 = -3$$

Figura 11. 2. Curva polar de términos invariantes en frecuencia

11.3.2 Polos y ceros en el origen

Los ceros y polos en el origen, al introducir un desfase constante de $\pm \pi/2$, sus curvas corresponden a líneas rectas sobre el eje imaginario. La expresión de un polo en el origen y sus límites a frecuencia nula y tendiendo al infinito son:



$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega T} = \frac{1}{|\omega T|} \angle \pi/2$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = -j\infty$$

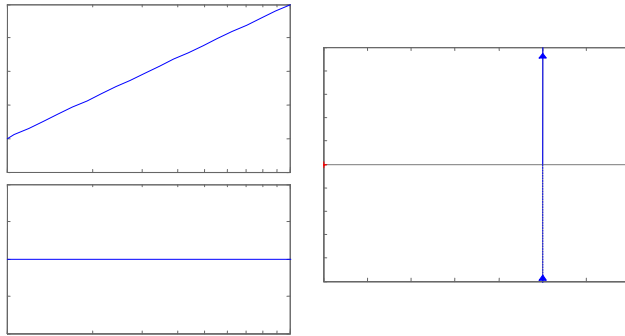
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = -j0$$

El valor del polo en el origen para la frecuencia de $1/T$ será:

$$G\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 1 \angle -\pi/2$$

Por tanto, el lugar geométrico es un semi-segmento ubicado en la parte negativa del eje imaginario, que va en el recorrido de las frecuencias positivas desde $-j\infty$ hasta $-j0$.

Para los ceros en el origen se ubicarán en la parte positiva del eje imaginario. Realizando sus tendencias a la baja y alta frecuencia, se observa que la curva polar se apoya también en el eje imaginario:



$$G(j\omega) = j\omega T = |\omega T| \angle \pi/2$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = j0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = +j\infty$$

Nótese que la información de la curva del argumento del diagrama de Bode indica en qué cuadrante se moverá la curva polar.

11.3.3 Polos y ceros de primer orden

La curva polar de los polos de primer orden corresponde a una semicircunferencia sobre el cuarto cuadrante. En cambio, la curva del cero de primer orden es totalmente diferente. Es un semi-segmento paralelo al eje imaginario. No hay dualidad en la representación.

La expresión en módulo y argumento del polo de primer orden refleja la ecuación:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \angle -\arctg(\omega T) \quad (11.63)$$

Haciendo el límite para la baja y alta frecuencia tenderá a:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 1 \angle 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = 0 \angle -\pi/2 \quad (11.64)$$

El lugar geométrico corresponde a una semicircunferencia, cuyo diámetro es la unidad y su origen es $0.5 + j0$. Para la frecuencia angular del polo, $1/T$, estará en la bisectriz de cuarto cuadrante y su módulo será de $1/\sqrt{2}$.

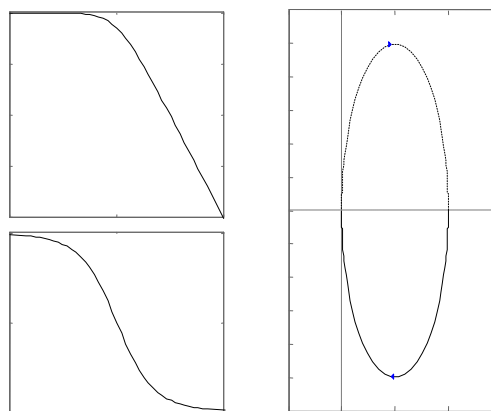
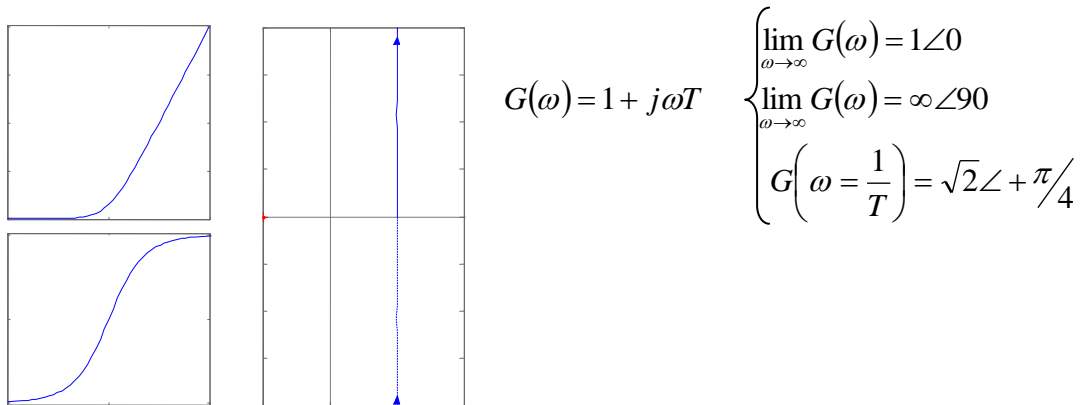


Figura 11. 4. Curva polar de un polo de primer orden

La traza del cero de primer orden es una recta paralela al eje imaginario que pasa por el punto $1+j0$. Del diagrama de Bode se observa que el trazado se dará exclusivamente en el primer cuadrante para las frecuencias positivas:



11.3.4 Polos y ceros de segundo orden

La curva polar de los polos de segundo orden se caracteriza por acabar con un desfase de -180° y un módulo nulo en las altas frecuencias. Las curvas polares de los polos de segundo orden, en las frecuencias positivas, van desde el cuarto al tercer cuadrante en el sentido de las manecillas del reloj, SMR. Sus curvas estarán parametrizadas según el valor del factor de amortiguamiento, ξ :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (11.65)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) &= 1 \angle 0 & G(\omega_n) &= \frac{1}{j2\xi} = \frac{1}{2\xi \angle 90^\circ} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) &= 0 \angle -180 \end{aligned} \quad (11.66)$$

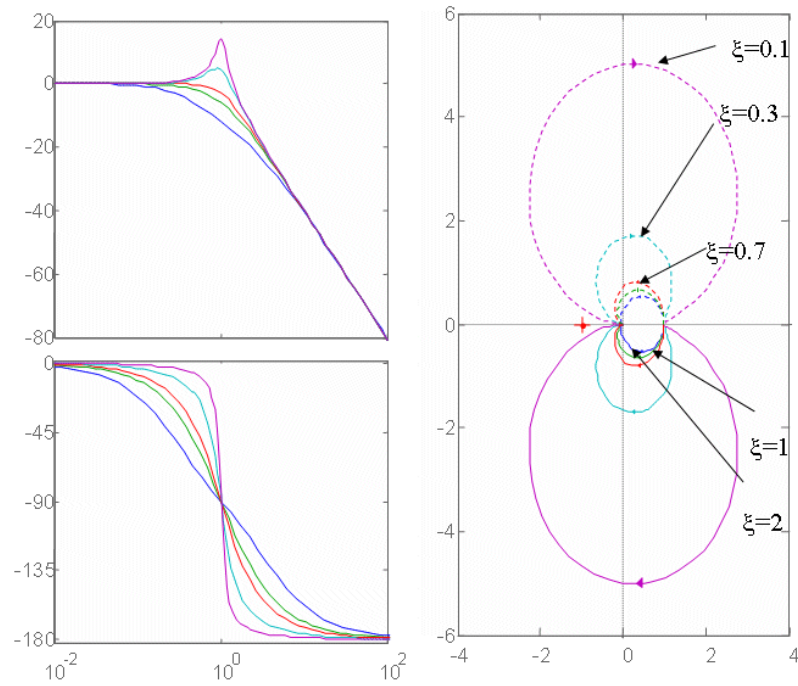


Figura 11. 5. Curva polar de los polos de segundo orden en función de ξ

El radio de curvatura máximo, en los sistemas subamortiguados, se dará en la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad M_r \equiv \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (\text{Valor máximo}) \quad (11.67)$$

Los ceros de segundo orden se caracterizarán por curvas que se acercan al infinito en módulo y con un desfase de 180° . El punto de partida será, a frecuencias nulas, en $1+j0$. La curva, para frecuencias positivas, se moverá desde el primero al segundo cuadrante en SCMR. Obviamente, estas curvas también estarán parametrizadas dependiendo del valor del factor de amortiguamiento, ξ :

$$G(\omega) = 1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (11.68)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 1 \angle 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = \infty \angle \pi$$

$$G(\omega_n = \omega) = 2\xi j \quad (11.69)$$

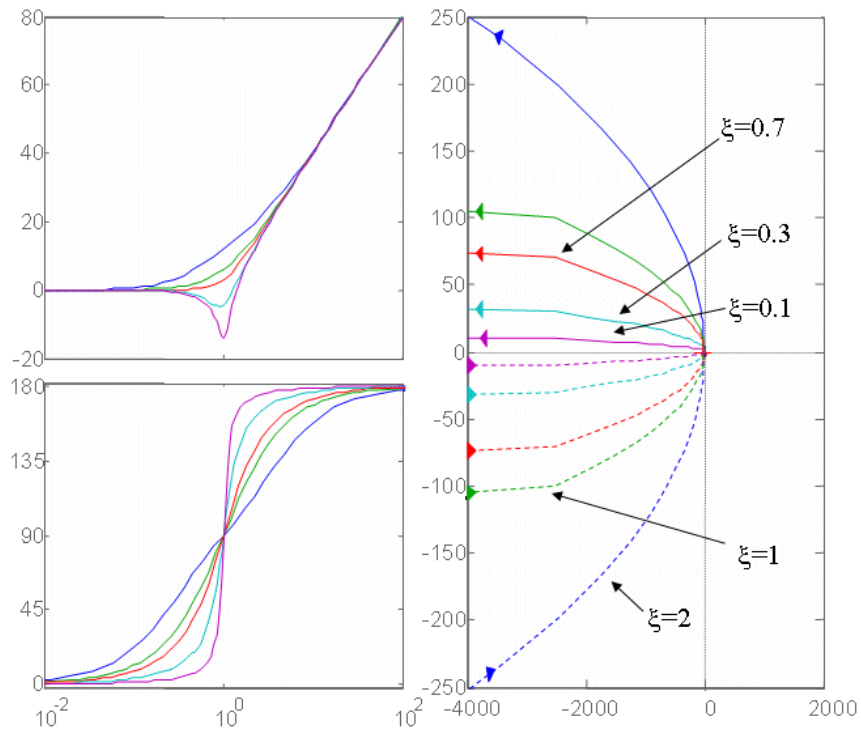


Figura 11. 6. Curvas polares de ceros de segundo orden

11.3.5 Retardo en la transmisión

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} = (\cos \omega T - j \sin \omega T) = 1 \angle -\omega T \quad (11.70)$$

El lugar geométrico es una circunferencia de radio unidad y el ángulo de fase varía linealmente con la frecuencia. El incremento de la frecuencia hace variar la posición de la curva en el sentido de las manecillas del reloj, *SMR*.

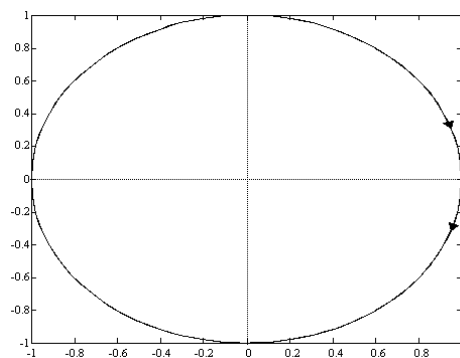
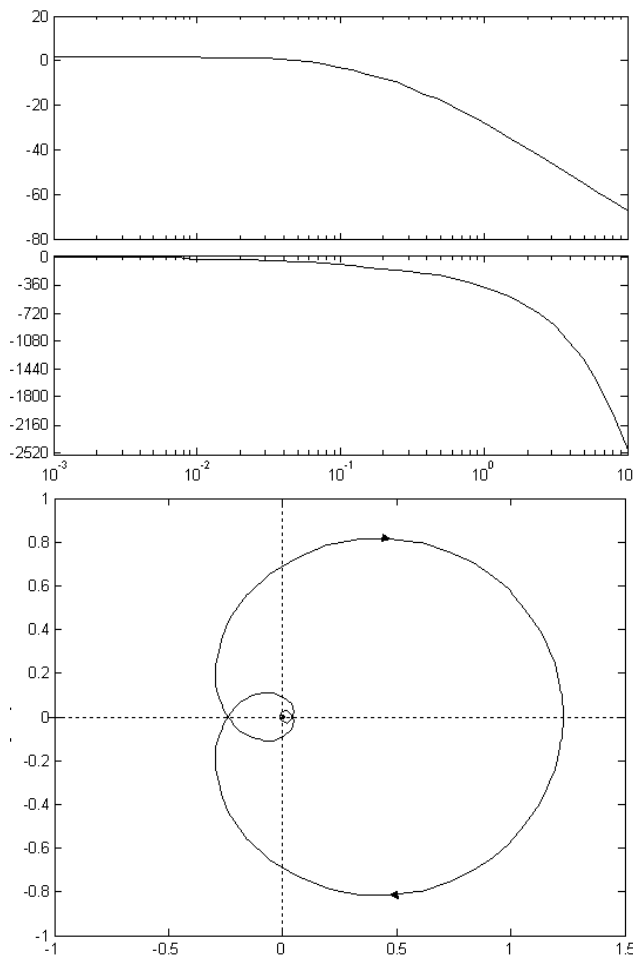


Figura 11. 7. Curva polar del retardo

Ejemplo 11.5

Obtener la curva polar del equipo Peltier.

Apoyándose en el diagrama de Bode y en la FDT del equipo, se consigue la curva polar:

$$G_p(s) = 1.22 \frac{e^{-4s}}{1 + s13.66}$$

$$\varphi_1 = -\omega_1 4 = 0.073 \cdot 4 = 0.29 \text{ rad} = 16.67^\circ$$

$$\varphi_2 = -\omega_2 \cdot 4 = 0.73 \cdot 4 = -166.7^\circ$$

$$-16.67 - 45 = -62$$

$$-16.67 - 90 \approx -257$$

En código MATLAB:

```
>> g1 = tf(1.22, [13.66 1], 'Input Delay', 4)
```

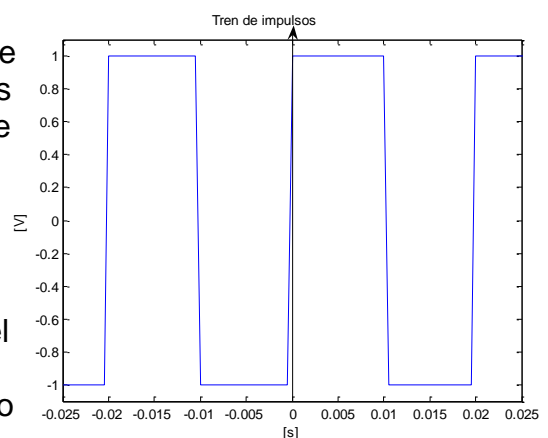
```
>> bode(g1)
```

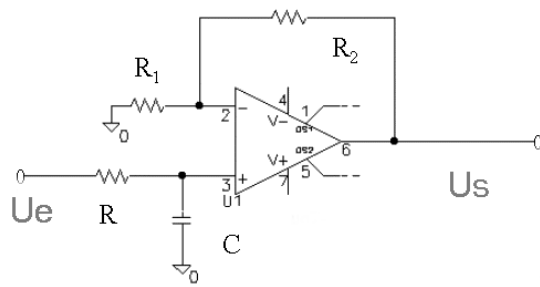
```
>> nyquist(g1)
```

11.4 Problemas**Problema 1**

En el circuito de la figura se considera que el amplificador operacional es ideal. Éste es atacado por el tren de impulsos indicado. Se pide:

1. Serie de Fourier de la señal de entrada.
2. Respuesta en frecuencia de la ganancia de tensión del circuito.
3. Diagrama de Bode y curva polar del apartado anterior.
4. Expresión analítica del armónico fundamental de la señal de salida.





Datos: $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 90\text{k}\Omega$,

$$C = 100\text{ nF}, R = \frac{10^5}{\pi}\Omega$$

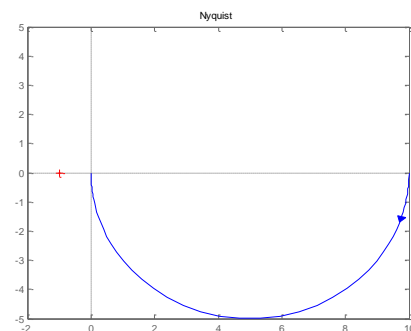
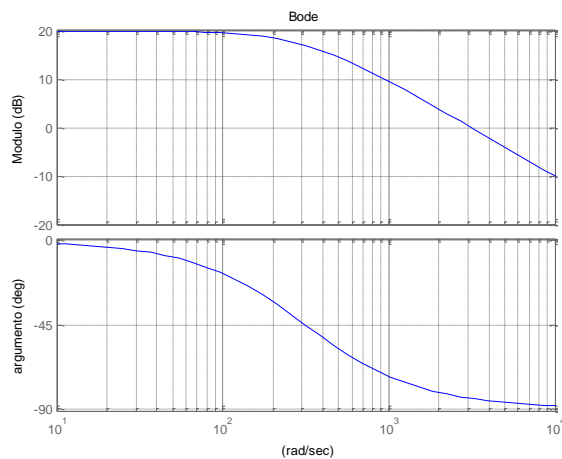
1. La señal de entrada es una función impar y de nivel de continua cero:

$$u_e = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \cdot 100\pi \cdot t) \quad b_n = \frac{2}{\pi \cdot n} [1 - \cos(n\pi)]$$

2.

$$A_v(\omega) = \frac{10}{1 + j\omega \frac{10^{-2}}{\pi}}$$

3.



4. El primer armónico coincide con la frecuencia de corte del filtro paso bajo:

$$u_{s(1erArm)} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \sin\left(100\pi \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Problema 2

Un altavoz es un transductor que transforma la señal eléctrica en una onda sonora. Está constituido por una pieza de tela, con arrugas concéntricas, llamada araña, la cual se encarga de mantener centrado el cono, junto a un sistema de suspensión. El imán crea un circuito magnético. Al hacer circular la corriente por la bobina de voz,

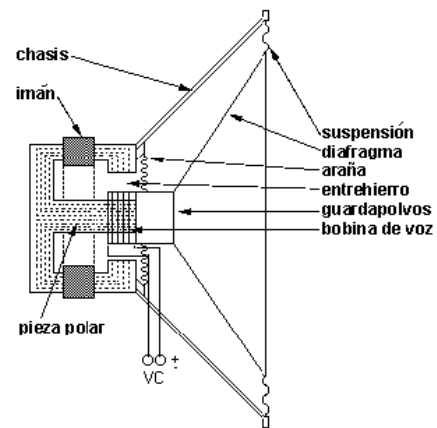


Figura 1 Altavoz de cono convencional

dentro del campo magnético, produce una fuerza que desplaza horizontalmente al cono, x , hacia izquierdas y derechas. Estas fluctuaciones de la presión del aire se transforma en sonidos audibles.

El modelo de la bobina de voz está constituido por una resistencia equivalente, R , una inductancia de dispersión, L , y una fuerza contraelectromotiz, e_b . Ésta última es proporcional a la velocidad de desplazamiento del cono, con una constante k_b . La fuerza que empuja al cono, modelado por su masa, M , y por un rozamiento viscoso, B , es proporcional a la corriente que circula por la bobina, k_p . Por último, la presión del aire es proporcional a la aceleración del desplazamiento, k_s . Se pide:

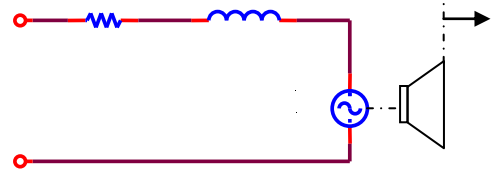


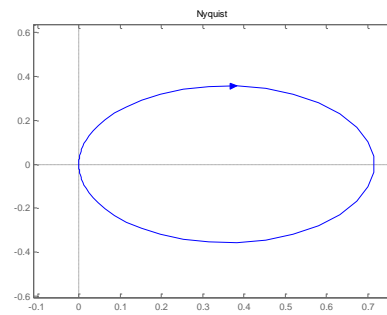
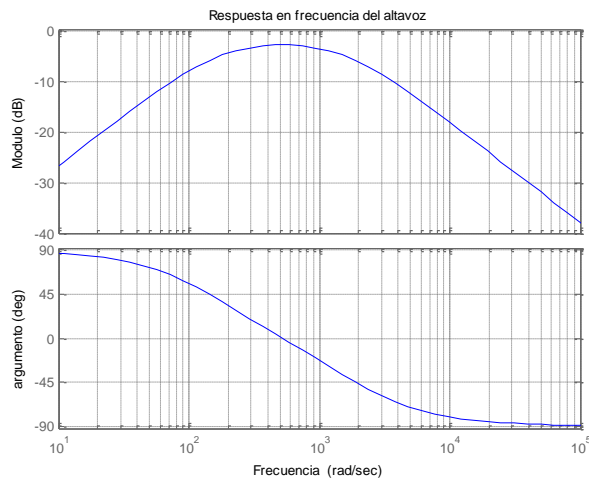
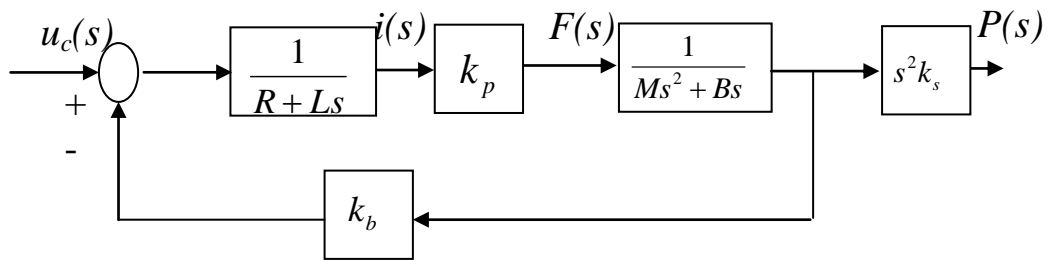
Figura 2 Esquema eléctrico equivalente

1. Diagrama a bloques del altavoz
2. Demostrar que la FDT del altavoz es:

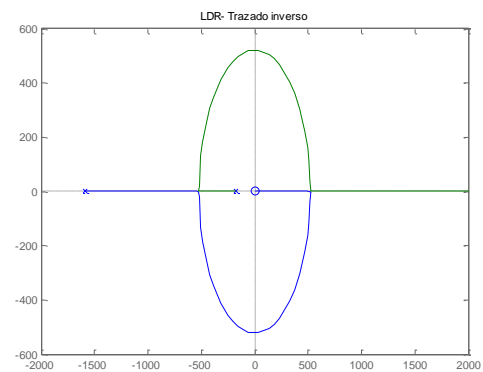
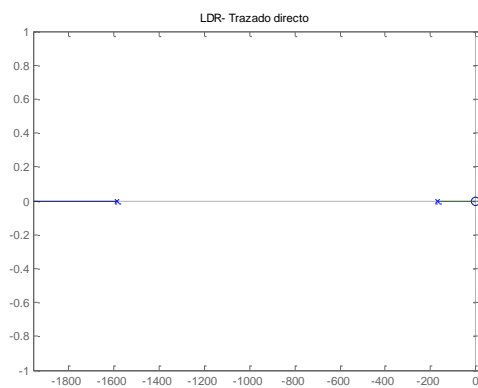
$$\frac{P(s)}{U_c(s)} = \frac{0.0315 \cdot s}{2.5 \cdot 10^{-5} s^2 + 0.044s + 6.797}$$

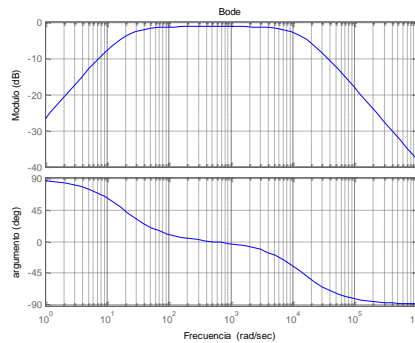
3. Diagrama de Bode y curva polar de la respuesta frecuencial del altavoz.
4. Señal de salida del altavoz al dar en la entrada un armónico de 1kHz y 2 voltios de amplitud.
5. A los altavoces se les incorpora un pequeño micrófono, como sensor para la realimentación, formando una estructura de control de cadena cerrada. Suponiendo que la FDT del micrófono es unitaria, representar el nuevo diagrama de bloques, teniendo en cuenta que la señal de error es amplificada por una ganancia genérica k .
6. Determinar el trazado directo e inverso del lugar de las raíces. ¿Cuándo el sistema es estable?
7. Calcular la nueva FDT total para $k = +10$ y dibujar el nuevo diagrama de Bode.
8. Con los trazados del lugar de las raíces y la nueva respuesta en frecuencia, ¿Cuál es la conclusión con la nueva arquitectura de control del altavoz, para $k > 0$?

Datos: $R = 8 \, \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $M = 5 \text{ gr}$, $B = 0.8 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k_b = k_p = 0.63 \text{ N/A}$, $k_s = 0.05 \text{ P}\cdot\text{s}^2/\text{m}$



$$P_{rp}(t) = 2 \cdot |G(2000\pi)| \cdot \sin(2000\pi t + \arg(G(2000\pi))) = 2 \cdot 0.194 \cdot \sin(2000\pi t - 1.29) [\text{P}]$$





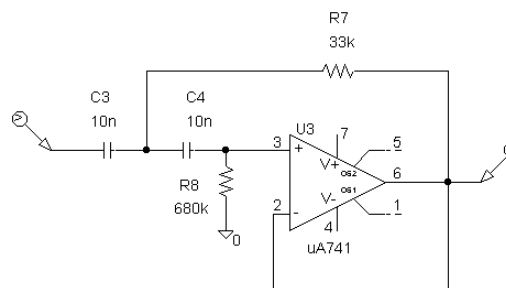
Gracias a la estructura de realimentación con el micro, al aumentar el valor de k hace aumentar el ancho de banda del altavoz.

Problema 3

Sabiendo que la ganancia de tensión del filtro es:

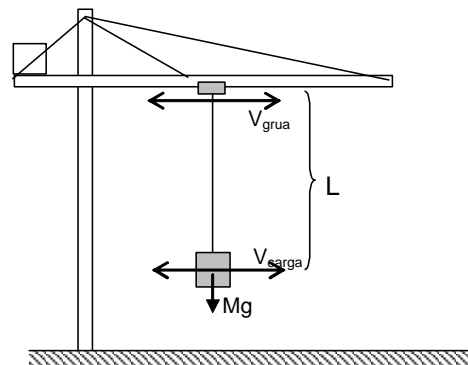
$$A_v(s) = \frac{u_s(s)}{u_e(s)} = \frac{s^2 R7 \cdot R8 \cdot C^2 \cdot k}{s^2 R7 \cdot R8 \cdot C^2 + sC(2R7 + R8 - R8 \cdot k) + 1},$$

donde k es la ganancia de la estructura de amplificador no inversor, con AO ideal, y habiendo definido como C el valor de $C3$ y $C4$. Determinar su respuesta frecuencial en diagrama de Bode y en curva polar.



Problema 4

En una pequeña grúa de construcción se desea mejorar el comportamiento del desplazamiento de la carga de masa M cuando ésta es desplazada radialmente. Para ello se ha introducido un encoder que permite saber en todo momento la longitud del cable del que cuelga la carga (L). Con la ayuda de datos experimentales que relacionan la velocidad de desplazamiento del carrito de la grúa



($V_{\text{grúa}}$) con la velocidad radial de desplazamiento de la carga (V_{carga}) y las ecuaciones físicas que rigen el sistema, se ha llegado al siguiente modelo del sistema:

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_g(s)} = \frac{\frac{g}{L}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{g}{L}}$$

1.- Dibujar el diagrama de bode del sistema obteniendo numéricamente los valores más característicos.

2.- ¿Con que periodo oscilará la carga si es sometida a un escalón en la velocidad de entrada?.

Mediante el método de *Truxal* y el correspondiente diseño de un filtro *Notch* se procede a intentar cancelar en cadena abierta el efecto de las oscilaciones. Se obtiene la función de transferencia de un filtro que en serie con la planta modifica la acción de control sobre la velocidad de la grúa según la siguiente FDT:

$$G_c(s) = \frac{V_g(s)}{V_{\text{deseada}}(s)} = \frac{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{g}{L}}{s^2 + 2\sqrt{\frac{g}{L}}s + \frac{g}{L}}$$

3.- Dibújese aproximadamente el diagrama de bode del filtro.

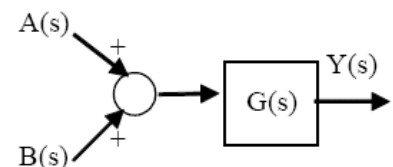
4.- Caracterizar la respuesta temporal del sistema completo ante una entrada en escalón

5.- Justifique desde el punto de vista frecuencial el efecto del filtrado.

Datos: $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ $L = 3.25m$ $M = 400Kg$ $B = 35 \frac{Ns}{m}$

Problema 5

El diagrama de Bode de la figura representa la respuesta en frecuencia del sistema $G(s)$. Se pide:

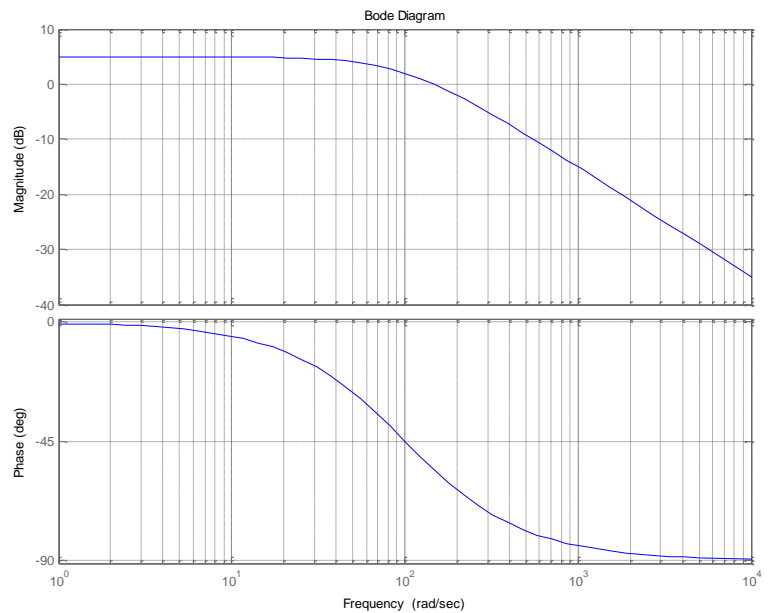


a) Obtener la expresión analítica de $G(s)$ y su curva polar.

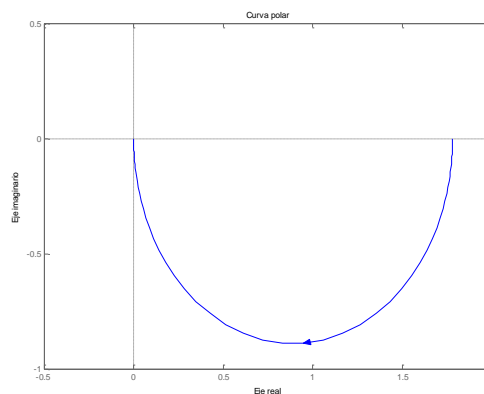
b) Representar la evolución temporal de la salida, $y(t)$, si la entrada A es excitada con una señal en escalón de amplitud 3 unidades y B es nula.

c) Representar la evolución temporal de la salida en el régimen permanente, $y_{rp}(t)$, si la entrada B es excitada con una onda armónica de frecuencia 10^2 [rad/s] y con una amplitud de 3 unidades y A es nula.

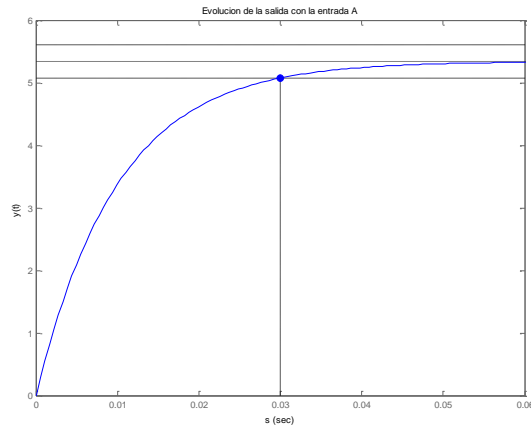
d) Evolución temporal de la salida en el régimen permanente, $y_{rp}(t)$, si las entradas A y B son las definidas en los apartados anteriores, escalón y armónico respectivamente.



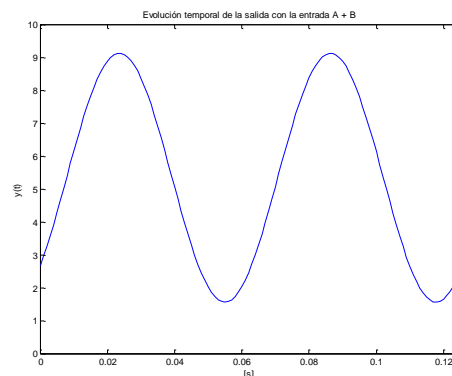
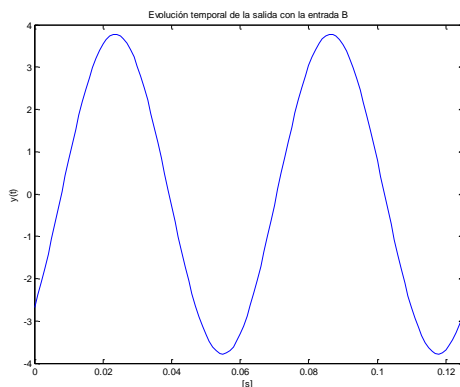
$$a) G(\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \rightarrow G(s) = \frac{1.78}{1 + s10^{-2}}$$



$$b) y(t) = 3 \cdot 1.78 \cdot \left(1 - e^{-t/10^{-2}} \right)$$



$$c) \ y(t) = 3 \cdot \frac{1.78}{\sqrt{2}} \cdot \text{sen}\left(10^2 t - \frac{\pi}{4}\right)$$



Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU". La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](http://www.gnu.org/copyleft/) para [contenidos abiertos](http://www.gnu.org/licenses/). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>