

3

Descripción y representación de los sistemas continuos

Tanto para el análisis dinámico de un sistema como para su mejora, empleando las técnicas de diseño, se necesita de una descripción analítica del sistema. Ésta se efectúa con una descripción exacta de sus componentes, la subdivisión del sistema total en bloques funcionales y finalmente la caracterización de cada bloque por expresiones matemáticas.

Cada subsistema o bloque debe tener un comportamiento autónomo, de manera que la salida de cada bloque debe depender exclusivamente de la entrada al mismo, sin verse influenciado por la acción de otros bloques adyacentes.

Una vez obtenido el diagrama estructural del sistema, hay que caracterizarlo a través de un modelo matemático. Dado que la mayor parte son sistemas dinámicos, definidos por variables que son funciones del tiempo, su comportamiento vendrá dado por un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales.

El estudio del conjunto deberá de obtener la ecuación diferencial que relacione la variable de mando con la variable de salida. Aunque éste es el camino más directo, suele ser muy complicado, por lo que se establece relaciones parciales, obteniendo un grupo de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, los sistemas físicos que se utilizan en la práctica son normalmente no lineales. Con el propósito de compatibilizarlo con la Teoría Clásica de Control se va a linealizar el modelo alrededor de un punto de trabajo.

En este capítulo se analizará los procesos de linealización. Seguidamente, se pasará a la determinación de la función de transferencia, ya sea de un sistema LTI o de otro al que se le ha linealizado a través de un punto de reposo. El tercer punto abordará la división del sistema en subsistemas y su representación y modelado a través de los diagramas de bloques. Y para acabar, se tratará las propiedades de los sistemas de control con realimentación negativa.

3.1 Aproximación lineal de sistemas no lineales

Como se ha visto en el capítulo anterior, el estudio de aquellos sistemas físicos que responden a ecuaciones diferenciales lineales son abordables por técnicas que, como la transformada de Laplace, simplifican notablemente el proceso.

Sin embargo, la mayor parte de los sistemas físicos no responden a ecuaciones diferenciales lineales, presentándose numerosos tipos de no linealidades e incluso discontinuidades.

Aun a costa de perder exactitud, la complejidad de los modelos no lineales exigen su simplificación a modelos lineales, aunque no sean del todo correcto, pero facilitan la aplicación de las técnicas clásicas de Control.

Para que un sistema se considere lineal, en cuanto a su relación causa - efecto (excitación/respuesta), es necesario que cumpla con el principio de superposición. Un sistema cumple con el principio de superposición si ante una entrada $x_1(t)$ responde con $y_1(t)$ y para una excitación $x_2(t)$ su salida es $y_2(t)$, entonces para una entrada de combinación lineal de las excitaciones, su respuesta responde en una combinación lineal:

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \Rightarrow y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (3.1)$$

El método de linealización que a continuación se expone es válido para aquellos sistemas no lineales que trabajan normalmente alrededor de un punto de funcionamiento estable (punto de equilibrio), siendo pequeñas las alteraciones a las que puede verse sometido.

Supóngase un sistema monovariable, cuya ecuación diferencial sea no lineal. Si se pretende estudiar el comportamiento del sistema cuando estando en un punto de reposo, se ve sometido a una excitación de pequeña amplitud; el modelo no lineal puede ser reemplazado por su tangente en el punto de reposo. Esta idea intuitiva puede ser justificada formalmente mediante el empleo del desarrollo en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio.

$$f(x) = [f(x)]_0 + \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]_0 (x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_0 (x - x_0)^n + \dots \quad (3.2)$$

Si los incrementos de la variable independiente alrededor del punto de reposo son pequeños, $\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0$, podrán despreciarse las potencias de orden superior al primer orden, $(x - x_0)$, simplificando la función por su aproximación lineal:

$$f(x) \cong [f(x)]_0 + \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_0 (x - x_0) \quad (3.3)$$

o bien, si se designa $y=f(x)$, la expresión anterior en incrementos quedará como:

$$\Delta y = \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_0 \Delta x \quad (3.4)$$

Reflejando un modelo lineal incremental alrededor del punto de equilibrio. Éste explicará las variaciones de la variable dependiente a partir de las variaciones de la variable independiente.

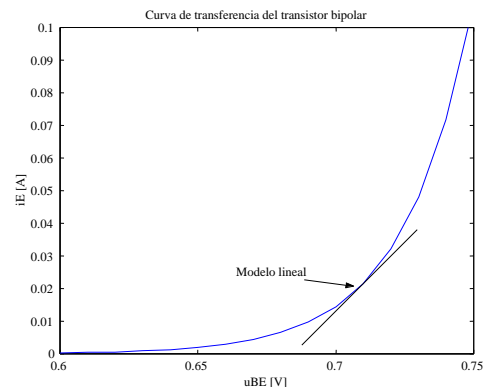
Ejemplo 3.1

Linealizar la ecuación de Ebers-Moll sobre la corriente de emisor, cuando el transistor bipolar trabaja en zona activa. Suponer constante la temperatura del transistor.

En este caso, la corriente de emisor depende sólo de la tensión base emisor:

$$i_E = i_E(u_{BE}) \Rightarrow i_E = I_S e^{\frac{u_{BE}}{V_T}}$$

En la figura adjunta, se he representado la curva de transferencia, teniendo una corriente de saturación, I_S , de 10^{-14} A y una tensión térmica, V_T , de 25 mV.



Si se linealiza alrededor del punto de polarización del transistor con la ec.(3.3), quedará como:

$$i_E = \left[I_S e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} \right]_{u_{BE}=V_{BE}} + \left[\frac{I_S e^{\frac{u_{BE}}{V_T}}}{V_T} \right]_{u_{BE}=V_{BE}} (u_{BE} - V_{BE}); \quad i_E = I_E + \frac{I_E}{V_T} (u_{BE} - V_{BE})$$

donde I_E es la corriente de emisor de polarización. Además, al cociente I_E/V_T se le conoce como la transconductancia del transistor, g_m . Se observa que en la linealización aparece el principio de superposición. La corriente de emisor es explicada por una componente de polarización continua de frecuencia cero y otra de naturaleza variable en el tiempo alrededor del punto de reposo. En concreto, la primera respuesta es debido al circuito de polarización del transistor, mientras la segunda es el efecto de amplificación del transistor bipolar, cuyo modelo será:

$$\Delta i_E = g_m \Delta u_{BE}$$

Cómo se observa en la gráfica, cuando los incrementos de la variable independiente, Δu_{BE} , empiezan a ser significativos aparecen discrepancias entre el modelo lineal y el no lineal.

En términos generales, sea un comportamiento dinámico modelado por una ecuación diferencial no lineal, cuya función $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ sea linealizada en torno a un punto de equilibrio:

$$F(y, \dot{y}, y, \dots, x_1, \dot{x}_1, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_n, x_n, \dots) = 0$$

El modelo lineal basado en incrementos de primer orden será de la forma:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0 \Delta y + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right]_0 \Delta \dot{y} + \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0 \Delta y + \dots + \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} \right]_0 \Delta x_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right]_0 \Delta \dot{x}_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} \right]_0 \Delta x_1 + \dots + \\ & + \left[\frac{\partial F}{\partial x_n} \right]_0 \Delta x_n + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} \right]_0 \Delta \dot{x}_n + \left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_n} \right]_0 \Delta \ddot{x}_n + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Véase primero un ejemplo matemático y luego un ejercicio sobre un sistema físico.

Ejemplo 3.2

Linealizar la expresión, $y = 3x^2 + 4x\dot{x} + \sin(x) + 2$, entorno al punto de reposo $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

La función es del tipo $F(y, x, \dot{x}) = 0$. Por tanto, la linealización quedará:

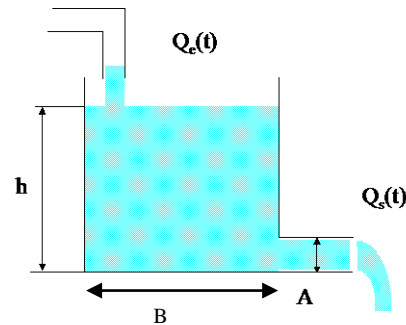
$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0 \Delta y + \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_0 \Delta x + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right]_0 \Delta \dot{x} = 0 \\ & - \Delta y + [6x + 4\dot{x} + \cos(x)]_0 \Delta x + [4x]_0 \Delta \dot{x} = 0 \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes del modelo incremental se calculará con la ecuación $F(y, x, \dot{x}) = 0$ y en el punto de reposo $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Obsérvese que en el punto de equilibrio, todas las derivadas parciales respecto al tiempo son nulas, por la propia definición de punto de equilibrio. El modelo incremental para el punto de reposo citado valdrá:

$$-\Delta y + 3\pi \cdot \Delta x + 2\pi \cdot \Delta \dot{x} = 0$$

Ejercicio 3.3

Obtener el modelo dinámico del nivel del agua y linealizarlo en torno a un punto de reposo. Considere que el caudal de entrada, Q_e , en equilibrio es de $1 \text{ m}^3/\text{s}$ y la sección de salida, A , es de 1 m^2 , mientras la base de depósito, B , es de 1 m^2 . Analizar las discrepancias entre el modelo no lineal y lineal en el régimen permanente, si el caudal de entrada, en primer lugar, evoluciona a $1.1 \text{ m}^3/\text{s}$ y luego pasa a $2 \text{ m}^3/\text{s}$.



Las ecuaciones del comportamiento dinámico del depósito están relacionadas con la incompresibilidad de los fluidos y su balance caudalímetro, junto con el principio de Torricelli:

$$\left. \begin{aligned} Q_e(t) - Q_s(t) &= B \frac{dh}{dt} \\ Q_s(t) &= c \cdot v_s \cdot A = c \cdot \sqrt{2gh} \cdot A \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_e(t) - c \cdot \sqrt{2gh} \cdot A - B\dot{h} = 0$$

donde c es el coeficiente de contracción debido a las características del fluido (para el caso del agua es igual a 1) y v_s es la velocidad de salida del agua.

El comportamiento dinámico es no lineal y el modelo depende de $F(Q_e, h, \dot{h}) = 0$. Linealizando en un punto de equilibrio, según la ec. (3. 5), se obtendrá el modelo lineal incremental:

$$\Delta Q_e(t) - \left[c \cdot \sqrt{2g} \frac{1}{2\sqrt{h}} \cdot A \right]_0 \Delta h - B\Delta \dot{h} = 0$$

Si el punto de reposo es cuando el caudal es $1 \text{ m}^3/\text{s}$. El modelo lineal queda definido por:

$$h_0 = \frac{Q_{e,0}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.05 \text{ m} \quad \Delta Q_e(t) - 10\Delta h - B\Delta \dot{h} = 0$$

El modelo incremental quedará como: $\frac{\Delta h(s)}{\Delta Q_e(s)} = \frac{1}{s+10}$. Para analizar la validez de la aproximación se considera primero un incremento de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ en el caudal de entrada. Según el modelo no lineal, el reposo se alcanzará cuando el nivel de altura sea:

$$h_1 = \frac{Q_{e,1}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.0605 \text{ m}$$

En cambio, atendiendo al modelo incremental será por aplicación del teorema

$$\left. \begin{array}{l} \Delta h_1 = \frac{\Delta Q_{e,1}}{10} = 0.01 \Rightarrow h_1 \cong h_0 + \Delta h_1 \\ h_0 = \frac{Q_{e,0}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.05 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow h_1 \cong 0.06 \text{ m}$$

del valor final:

Si el incremento es de $1 \text{ m}^3/\text{s}$, los resultados son:

Modelo no lineal :	$h_2 = 0.2 \text{ m}$
Modelo lineal :	$h_2 \approx 0.15 \text{ m}$

Verificándose que cuando más se aleja el sistema del punto de reposo, mayor discrepancia va a existir entre el modelo lineal y no lineal.

3.2 Función de transferencia

La representación dinámica de un sistema monovariable, SISO, mediante la relación entre su entrada y salida, conduce a una ecuación diferencial que o bien es lineal de inicio, o bien es susceptible, como se acaba de ver, de ser linealizada. Los modelos dependiendo de cada caso serán:

$$\begin{aligned} \text{Modelo lineal : } \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) &= \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t) \\ \text{Modelo incremental : } \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} \Delta y(t) &= \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} \Delta x(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Expresiones que pueden ser transformadas por Laplace. Aplicando el operador a ambos lados de las igualdades quedarán:

$$\begin{aligned}\text{Modelo lineal : } \sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) &= \sum_{j=0}^m b_j s^j X(s) \\ \text{Modelo incremental : } \sum_{i=0}^n a_i s^i \Delta Y(s) &= \sum_{j=0}^m b_j s^j \Delta X(s)\end{aligned}\quad (3.7)$$

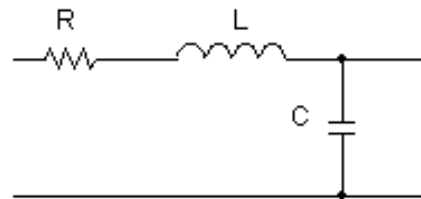
Para el primer caso, se ha considerado que las condiciones iniciales son nulas; mientras en el segundo, se ha inicializado a partir de un punto de reposo, por tanto, sus derivadas iniciales y las variaciones alrededor del punto de reposo son nulas. Reagrupando se tendrá:

$$\begin{aligned}\text{Modelo lineal : } \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \\ \text{Modelo incremental : } \frac{\Delta Y(s)}{\Delta X(s)} &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}\end{aligned}\quad (3.8)$$

A estos cocientes entre las transformadas de Laplace de salida y entrada se le denomina función de transferencia, FDT. Su valor depende únicamente de los coeficientes a_i y b_i , fijados únicamente por las características del sistema. El conocimiento de la FDT de un sistema permite conocer el valor de salida ante cualquier tipo de entrada.

Ejemplo 3.4

Determinar la FDT del cuadripolo de la figura, i.e. la ganancia de tensión. Supóngase que el condensador está cargado con una tensión entre extremos de 5V y la corriente inicial que circula es nula. Determinar la señal de salida, si recibe una entrada en escalón unitario.



Por aplicación del método de mallas, la ecuación diferencial que relaciona la señal de entrada respecto a la corriente que circula por los elementos pasivos es:

$$u_e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + 5$$

Aunque la ecuación diferencial es lineal, la aplicación de la transformada de Laplace resultará dada por:

$$u_e(s) = Ri(s) + Li(s) + \frac{1}{sC}i(s) + 5\frac{1}{s}$$

Evidenciando la imposibilidad de obtener la FDT como consecuencia del valor inicial del condensador. Para conseguirlo se requerirá un proceso de linealización entorno al valor inicial de 5V en el condensador. Este cambio implica que las variables de la ecuación diferencial se conviertan en incrementos alrededor del punto inicial, desapareciendo el término de los 5V.

$$\Delta u_e(s) = R\Delta i(s) + L\Delta i(s) + \frac{1}{sC}\Delta i(s) \Rightarrow \frac{\Delta i(s)}{\Delta u_e(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

La ganancia de tensión del cuadripolo también requerirá de una linealización, ya que:

$$u_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt + u_s(0) \Rightarrow \Delta u_s(t) = \frac{1}{sC} \Delta i(t) \Rightarrow \frac{\Delta u_s(t)}{\Delta u_e(t)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Igual resultado se habría obtenido si se emplea la ecuación diferencial entre la tensión de entrada y la de salida:

$$u_e(t) = RC\dot{u}_s(t) + LC\ddot{u}_s(t) + u_s(t)$$

Al tomar transformadas de Laplace en ambos lados de la igualdad quedará:

$$u_e(s) = RC(su_s(s) - u_s(0)) + LC(s^2u_s(s) - su_s(0)) + u_s(s)$$

No pudiendo obtener la FDT, lo que conduce a un proceso de linealización. Para conocer la tensión de salida, $u_s(t)$, sabiendo el tipo de entrada, se aplicará el teorema de la convolución entre el modelo de la señal de entrada y la FDT en incrementos, pasándose luego a su antitransformada. La respuesta final será sumada al valor inicial de la tensión en el condensador.

3.3 Diagramas de bloques

Un sistema de control puede consistir, en general, por un cierto número de componentes. Con el fin de mostrar las interacciones existentes de forma cómoda, se acostumbra a usar una representación gráfica denominado diagrama a bloques.

En un diagrama de bloques, todas las variables quedan interrelacionadas a través de los bloques funcionales. Para los sistemas SISO, caracterizados por una entrada y una salida, se representa en su interior la relación entre ambas señales mediante la

correspondiente función de transferencia. Los bloques quedan conectados por flechas que indican las direcciones de los procesamiento de las señales.

Además de los bloques funcionales, otros elementos constitutivos de los diagramas de bloque son los sumadores. En estos, hay varias señales de entrada y una única salida, siendo su valor la suma de las entradas.

Puesto que los diagramas de bloques responden a una representación de una ecuación o, mayoritariamente, de un conjunto de ecuaciones en transformadas de Laplace, es posible su manipulación, tal y como se haría con las propias transformadas. Así, supóngase que las transformadas de Laplace de tres señales, X, Y y Z están conectadas por el procesamiento en serie de éstas por dos sistemas, cuyas FDT se denominan $G_1(s)$ y $G_2(s)$. Por aplicación del teorema de la convolución se puede reducir la representación mediante la asociación de las dos FDT. En el sistema de ecuaciones quedaría como:

$$Y(s) = G_1(s)X(s) \quad Z(s) = G_2(s)Y(s) \Rightarrow Z(s) = G_1(s)G_2(s)X(s)$$

El diagrama de bloques correspondiente sería:

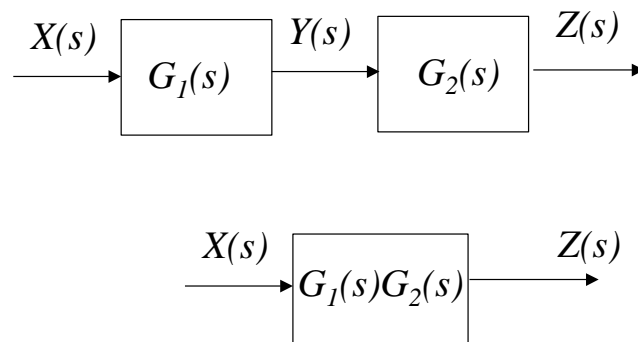


Figura 3. 1. Asociación de bloques en cascada o serie

Pudiéndose establecer, en general, que varios bloques en cascada pueden ser sustituidos por un único bloque, cuyo contenido es el producto de las FDT de cada uno de ellos. Otra posible situación sería la correspondiente a un procesamiento en paralelo de la señal por varios sistemas a la vez. El diagrama a bloques quedaría reducido a la suma de las FDT. La demostración está en el álgebra de bloques:

$$Y(s) = G_1(s)X(s) + G_2(s)X(s)$$

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))X(s)$$

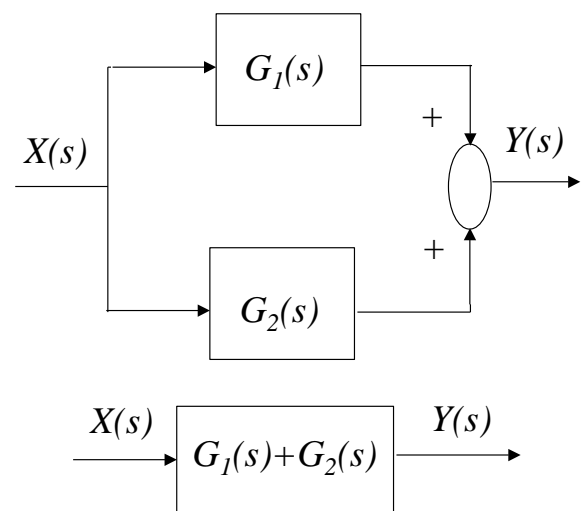


Figura 3. 2. Asociación en paralelo

Por tanto, si los bloques están en paralelo es igual a la suma de sus FDT.

Un diagrama a bloques complejo, con varios bucles de realimentación y combinaciones series y paralelas, puede ser reducido teóricamente a la configuración básica de un sistema de realimentación. El diagrama a bloque queda mostrado en la figura 3.3.

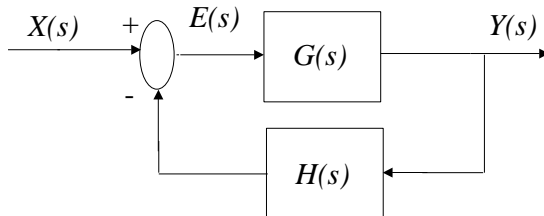


Figura 3. 3. Estructura de realimentación negativa

La señal de mando, $X(s)$, es comparada con la realimentada, la cual es la señal de salida, $Y(s)$, procesada por $H(s)$. La salida del comparador se la llama señal de error, $E(s)$. Ésta a su vez ataca a la planta, $G(s)$, dando origen a la señal de salida, $Y(s)$. Las expresiones que modelan este procesamiento de la señal son las derivadas de la señal de error y de la propia salida:

$$\left. \begin{array}{l} Y(s) = E(s)G(s) \\ E(s) = X(s) - H(s)Y(s) \end{array} \right\} \Rightarrow M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.9)$$

Si el signo de la comparación entre la señal de mando y la realimentada es negativo, se dice que es una estructura de realimentación negativa. Y si en vez de una comparación, entre las dos señales, es una adicción, se dice que es una realimentación positiva. La FDT total para el caso de realimentación positiva es similar, pero cambiado el signo + del denominador:

$$M'(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \quad (3.10)$$

3.4 Sistemas realimentados

Todas las plantas de control sufren de perturbaciones que inciden negativamente en la gobernabilidad del sistema. Para hacer que el sistema de control se vuelva insensible al ruido, se diseña, mayoritariamente, estructuras de control en cadena cerrada. Véase a continuación, cómo esta arquitectura permitirá mejorar el comportamiento dinámico de los sistemas de control.

Un diagrama a bloques donde se tiene en cuenta la perturbación queda reflejado en la figura 3.4. Normalmente, el ruido influye decisivamente en las señales de potencia. Por supuesto, también existe ruido en la pequeña señal, i.e. en los bloques de

procesamiento de las señales de error. Sin embargo, la relación señal ruido, SNR (*Signal Noise Ratio*), en estas etapas son más elevadas que en las de gran señal¹.

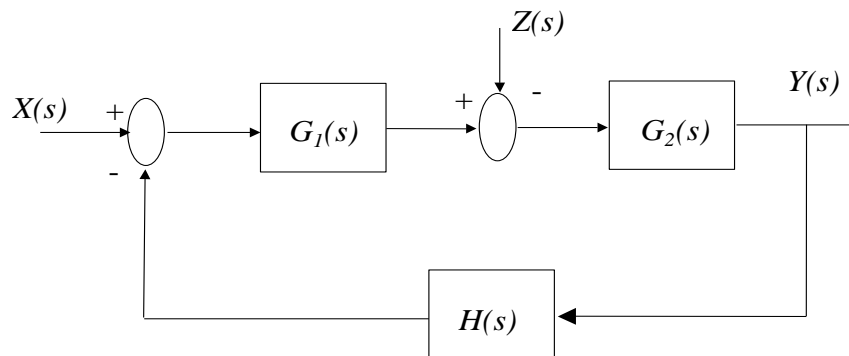


Figura 3. 4. Estructura de control en cadena cerrada con perturbación

La señal de salida depende de la señal de mando, de las perturbaciones y de la FDT del sistema. Al ser un modelo de tipo lineal, es posible aplicar el principio de superposición, quedando la transformada de Laplace de la señal de salida como:

$$Y(s) = M_1(s)X(s) + M_2(s)Z(s) \quad (3. 11)$$

siendo $M_1(s)$ la FDT entre la señal de salida y la de mando, cuando la señal de ruido es nula y $M_2(s)$ la correspondiente entre la salida y la de perturbación, para señal de mando cero. Estas funciones valdrán según el álgebra de bloques:

$$M_1(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)} \quad M_2(s) = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)} \quad (3. 12)$$

Como se verá en el módulo de diseño de los sistemas de control, un buen planteamiento de la gobernabilidad del sistema depende del tipo de realimentación. Esta condición se puede expresar haciendo que el módulo de la ganancia de la cadena abierta sea mucho mayor que uno². Para el esquema aquí tratado, la condición de fuerte realimentación se expresaría en la forma:

$$|G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)| \gg 1 \quad (3. 13)$$

¹ Recuérdese que una de las razones de peso de utilizar la tecnología digital es justamente por el alto valor de SNR, tanto en el procesamiento como en la transmisión de la información.

² Por ejemplo, se podría citar a los amplificadores operacionales, los cuáles ofrecen una alta ganancia de tensión diferencial en cadena abierta, con valores típicos de 10^6 a bajas frecuencias. Al aplicarles lazos de realimentación, para construir aplicaciones lineales, se consiguen que los amplificadores operacionales reales y los ideales sean casi idénticos.

Al aplicar esta condición de diseño sobre las FDT obtenidas, $M_1(s)$ y $M_2(s)$, resultarán:

$$M_1(s) \cong \frac{1}{H(s)} \quad M_2(s) \cong \frac{-1}{G_1(s) \cdot H(s)} \quad (3.14)$$

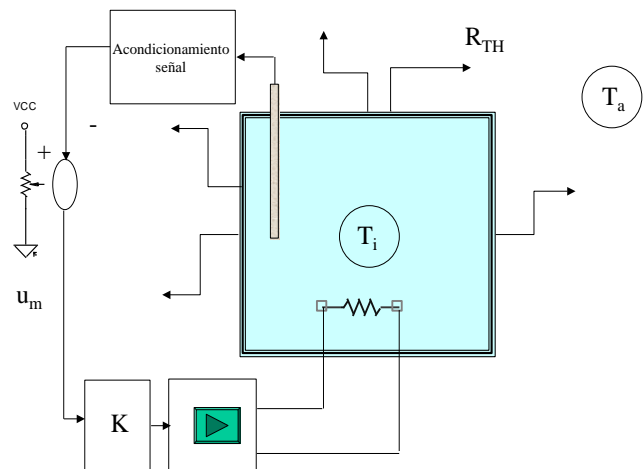
Indicando estas ecuaciones, las estrategias de control. Obviamente, para tener inmunidad a la perturbación en la señal de salida, se necesita que $M_2(s)$ tienda a ser nula. Por tanto, esto supone que o bien se tiene alta ganancia en $G_1(s)$ o en $H(s)$. En el primer caso, corresponde con la estrategia típica del control clásico, pues es la inserción de un compensador de tipo PID (proporcional, integral, derivativo). Estos reguladores, que se estiman en un 90% de las aplicaciones de control industrial, son colocados en el procesamiento de la señal de error, i.e. en $G_1(s)$. La segunda posibilidad se basa en las modificaciones de los lazos de realimentación, $H(s)$, y está estrechamente unido al control por realimentación de variables de estado, correspondiente a la Teoría Moderna de Control. No obstante, se observa que un incremento positivo en la realimentación, $H(s)$, supone una pérdida de ganancia en $M_1(s)$. Por eso, es habitual poner altas ganancias en la cadena abierta, para luego alcanzar el valor deseado de ganancia en la cadena cerrada.

Ejemplo 3.5

Para calentar el agua de un termo eléctrico se emplea el efecto Joule. Un amplificador de tensión cede energía eléctrica a una resistencia eléctrica, R , que lo transfiere en forma de calor. Para su regulación se emplea una estructura de realimentación negativa. La temperatura interior del termo, T_i , es adquirida por un transductor de tipo termopar. La salida del sensor es acondicionada y es convertida en una señal de tensión analógica, u_{Ti} , cuya dinámica sigue la expresión:

$$T_i = \frac{1}{A} (\dot{u}_{Ti} + au_{Ti})$$

donde A y a son constantes. La temperatura deseada en el termo o señal de mando, dada por el usuario, es convertida a través de un potenciómetro en una señal de referencia, u_m . Ésta es comparada con la salida de la tarjeta de acondicionamiento y amplificada por un valor K . Esta señal, u_{FT} , ataca a la etapa de potencia. Por otro lado, hay que añadir las pérdidas de calor por transmisión de calor, desde el tanque al exterior. La causa dominante es por mecanismo de conducción, caracterizada por una resistencia térmica

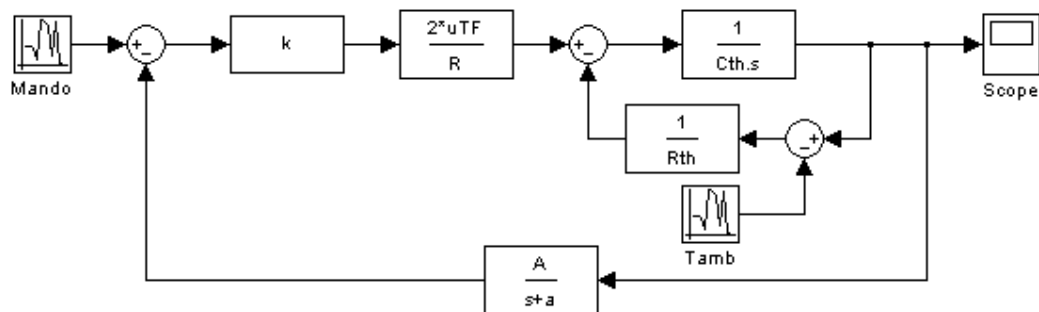


equivalente, R_{TH} . Obtener el diagrama a bloques del sistema de control del termo eléctrico.

El conjunto de ecuaciones álgebra-diferenciales que caracterizan el sistema sería:

- | | |
|---|---|
| (1) $u_m - u_{Ti} = u_{err}$ | (Comparador) |
| (2) $u_{FT} = K u_{err}$ | (Amplificación señal error) |
| (3) $p = u_{FT}^2 / R$ | (Etap de potencia) |
| (4) $q_{Ti} = mc \dot{T}_i$ | (Almacenamiento de energía calorífica) |
| (5) $T_i - T_a = q_p R_{TH}$ | (Pérdidas por transmisión del calor) |
| (6) $p = q_{Ti} + q_p$ | (Balance energético) |
| (7) $T_i = 1/A(\dot{u}_{Ti} + au_{Ti})$ | (Etap de acondicionamiento transductor) |

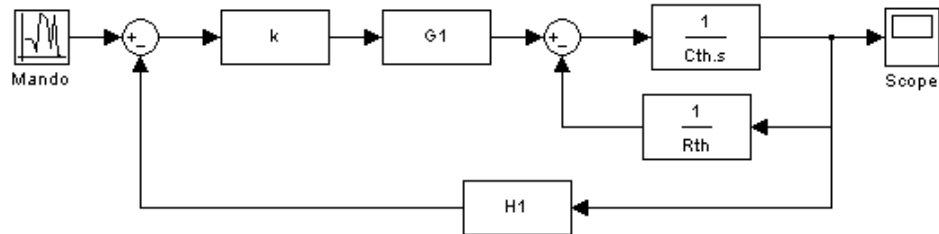
q_{Ti} y q_p son los flujos caloríficos de almacenamiento y de pérdidas en el depósito respectivamente. El valor de m será la masa que hay dentro del tanque y c el calor específico del agua. Al producto de mc se le llama capacitancia térmica o inercia térmica y se le designa por C_{TH} . La no linealidad del efecto Joule obligará a buscar un modelo incremental alrededor de un punto de reposo. Aplicando las transformadas de Laplace en las ecuaciones diferenciales linealizadas, éstas quedarán reflejadas en el siguiente diagrama de bloques:



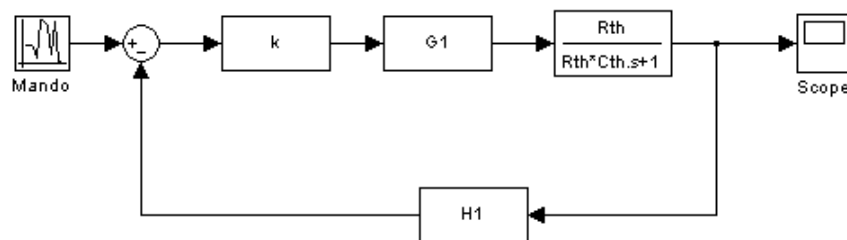
Como se desprende del diagrama de bloques, las variaciones de la temperatura del depósito dependen de la señal de mando y de la temperatura ambiente. Luego, en este caso, la temperatura exterior representa una perturbación en el control del termo. Al tener un modelo incremental lineal y por aplicación del principio de superposición, las variaciones de la temperatura en el interior del depósito se pueden explicar a través de la FDT que hay respecto a la señal de referencia (anulando la temperatura exterior), y la relación causa-efecto entre la temperatura ambiente y la del tanque (eliminando la señal del usuario):

$$\Delta T_i(s) = M_1(s) \Delta u_m(s) + M_2(s) \Delta T_a(s)$$

siendo $M_1(s)$ y $M_2(s)$ las FDT entre las variaciones de temperatura del termo y la señal de mando y la perturbación, respectivamente. El diagrama de bloques de $M_1(s)$ se obtiene eliminando la señal de perturbación, quedando como:

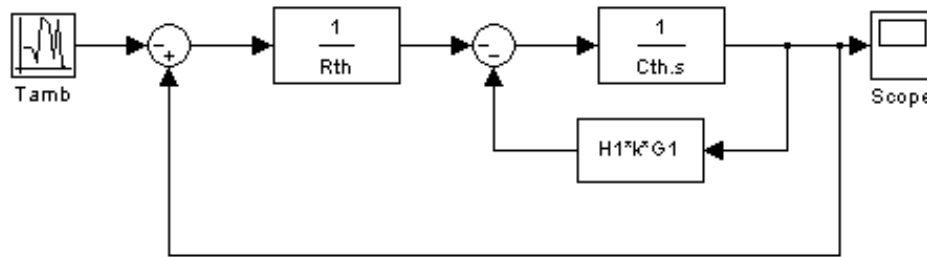


Para simplificar, se ha denotado por G_1 la FDT de la etapa de potencia y H_1 la FDT de la etapa de instrumentación. Empleando la expresión de estructura realimentada sobre la relación entre la temperatura interna y la potencia eléctrica, quedará un diagrama más simplificado:

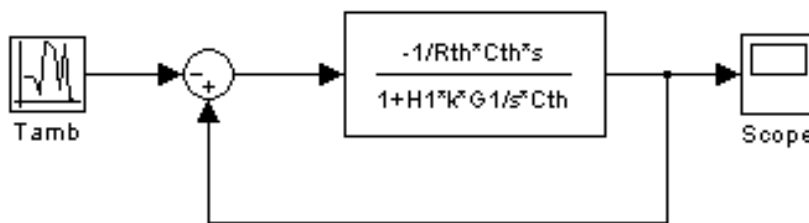


$$M_1(s) = \frac{\Delta T_i(s)}{\Delta u_m(s)} = \frac{KG_1 R_{TH}}{1 + H_1 KG_1 R_{TH} + s R_{TH} C_{TH}}$$

En cuanto a la relación causa-efecto debido a la perturbación, el diagrama a bloques quedará de la forma:



Aplicando reducción de bloques y eliminando el primer lazo de realimentación:



La FDT entre las variaciones de temperatura del termo y de la temperatura ambiente quedará reducida a través de la expresión de realimentación unitaria:

$$M_2(s) = \frac{\Delta T_i(s)}{\Delta T_a(s)} = \frac{1}{1 + H_1 K G_1 R_{TH} + s R_{TH} C_{TH}}$$

Por aplicación del teorema del valor final sobre M_2 se conseguirá la ganancia ofrecida en el régimen permanente. Considerando un diseño de fuerte realimentación, tal cual se ha comentado, quedará:

$$M_2(t \rightarrow \infty) \cong \frac{1}{H_1 K G_1 R_{TH}}$$

Si se desea que el termo sea insensible a las variaciones de la temperatura ambiente, esta idea se traduce en hacer que la ganancia de M_2 tienda a ser nula. De la última expresión, se concluye que a medida de que se aumente la resistencia térmica, menos influencia se tendrá del ruido. O bien que un control basado en altos valores de H_1 , K o G_1 supondrá una disminución de la perturbación.

3.5 Reducción de bloques

En el proceso de reducción de los bloques a veces interesa transponer un sumador o un punto de bifurcación de una determinada señal. Esta operación puede darse tanto un cambio hacia la derecha o hacia la izquierda. El fundamento de estos movimientos se basa en el álgebra de bloques. En las figuras 3.5 y 3.6 se indican las transposiciones de los comparadores y de los puntos de bifurcación, primero hacia la derecha, luego a la izquierda. Nótese la equivalencia de las expresiones de las salidas en relación a sus entradas.

Las expresiones de transposición del sumador hacia la derecha y luego hacia la izquierda quedan reflejadas en las siguientes ecuaciones y en sus respectivas representaciones:

$$\begin{aligned} Z(s) &= G(s)(X(s) - Y(s)) \Rightarrow Z(s) = G(s)X(s) - G(s)Y(s) \\ Z(s) &= G(s)X(s) - Y(s) \Rightarrow Z(s) = G(s)(X(s) - (Y(s)1/G(s))) \end{aligned}$$

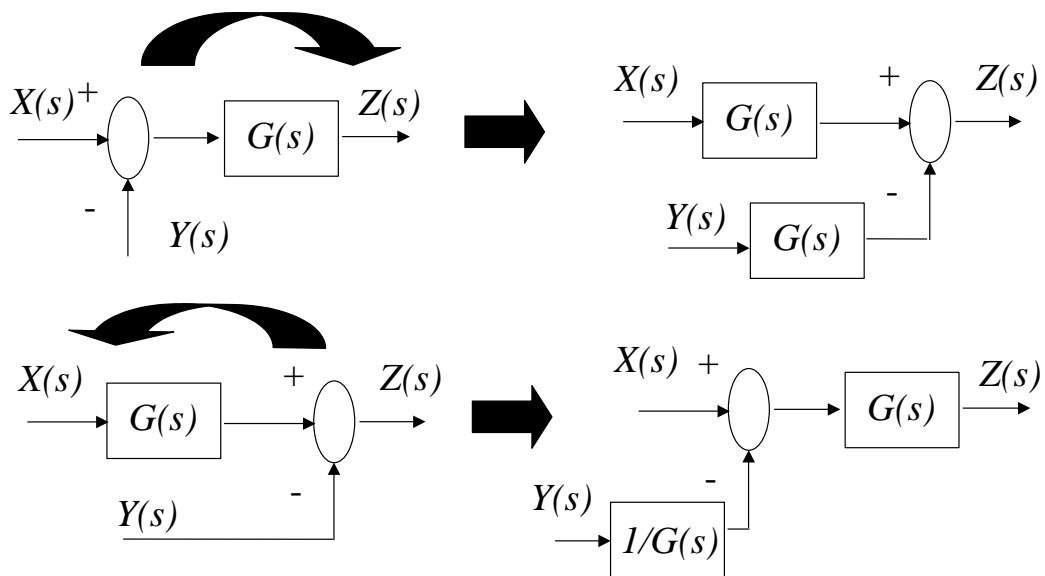


Figura 3.5. Transposición de sumadores

En cuanto al movimiento de los puntos de bifurcación de las señales, resultarán las transposiciones hacia la derecha y la izquierda respectivamente:

$$Z(s) = G(s)X(s); \quad Y(s) = X(s) \Rightarrow Z(s) = G(s)X(s); \quad Y(s) = X(s)G(s) \frac{1}{G(s)}$$

$$Z(s) = G(s)X(s) = Y(s) \Rightarrow Z(s) = G(s)X(s); \quad Y(s) = X(s)G(s)$$

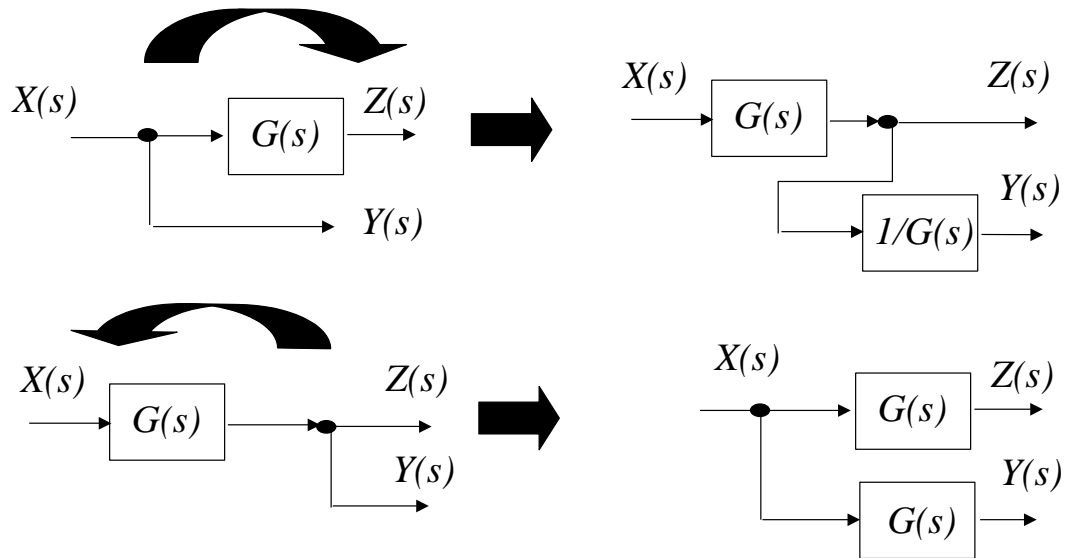
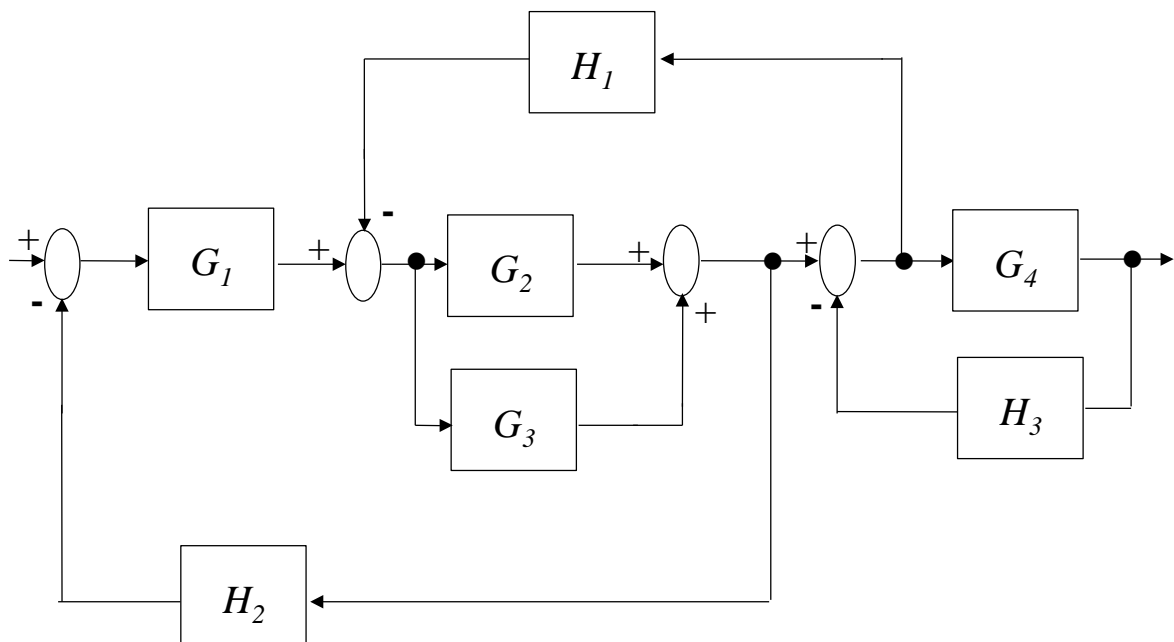


Figura 3. 6. Transposición de puntos de bifurcación

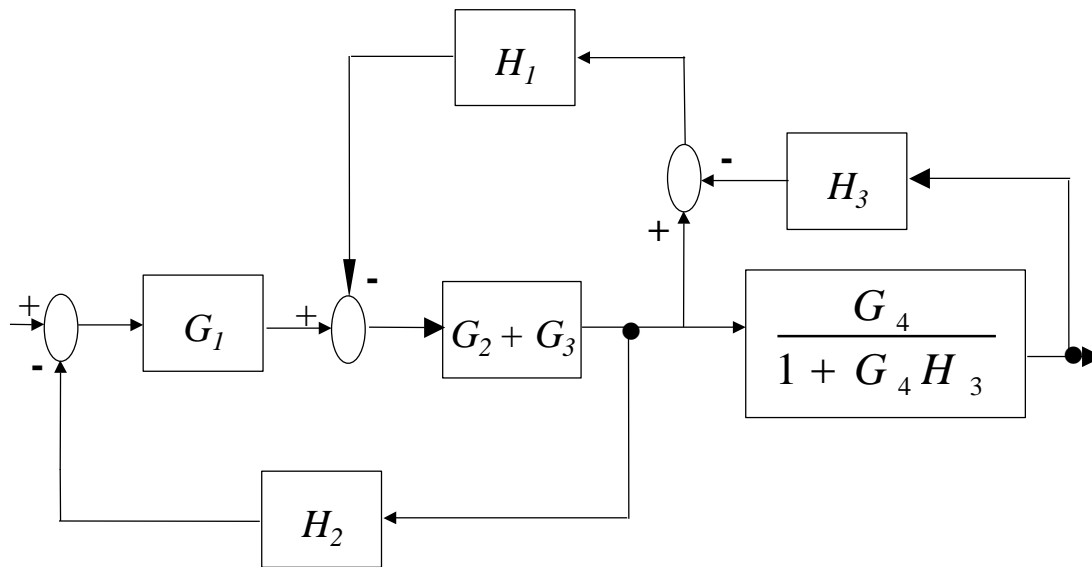
Ejemplo 3.6

Obtener el diagrama a bloques reducido equivalente del mostrado en la figura adjunta:

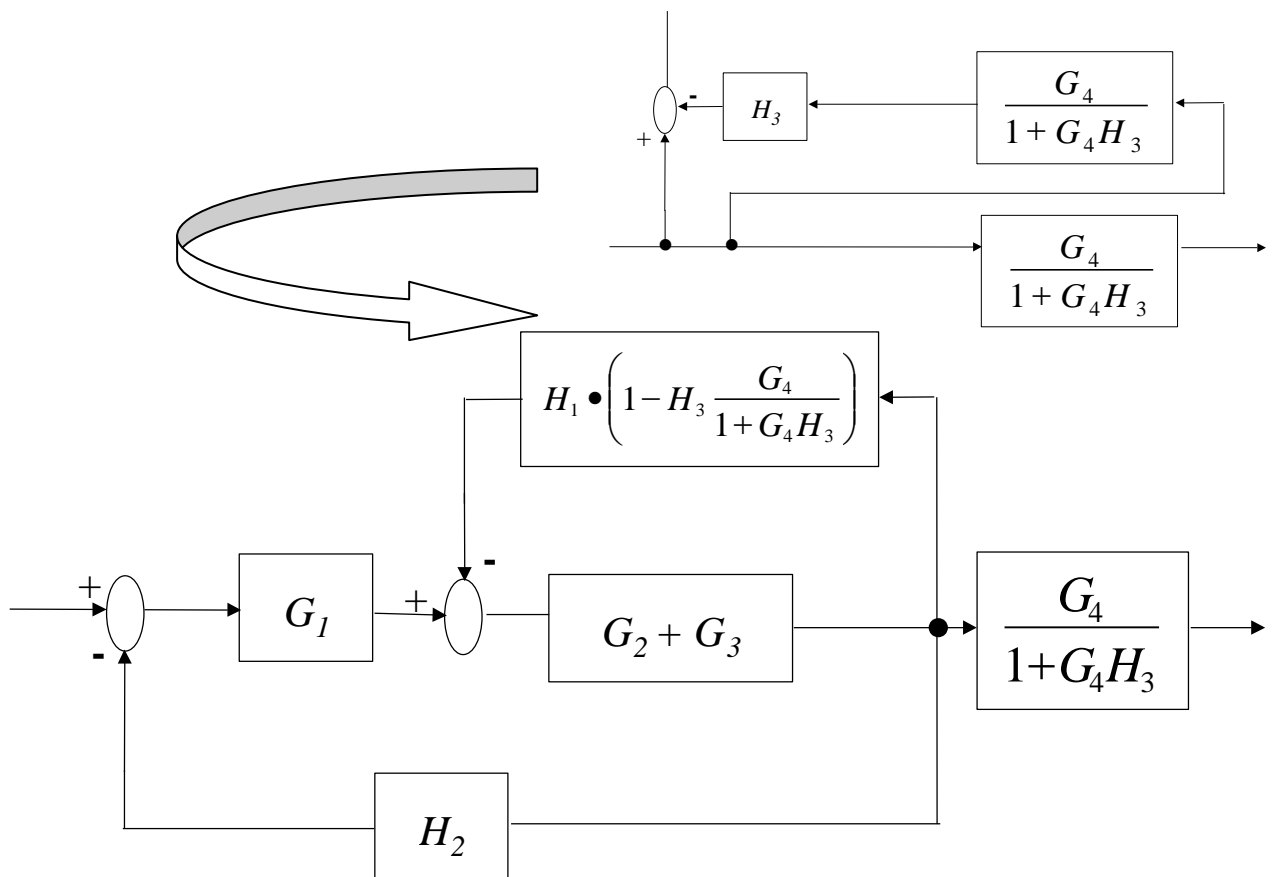


Del diagrama se observa que G_2 y G_3 están procesando en paralelo la señal que los ataca. Por otro, una primera simplificación podría conseguirse a través del

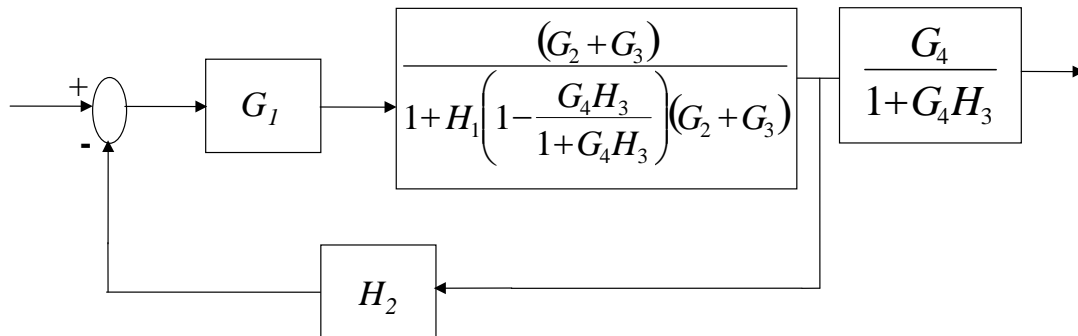
desplazamiento hacia la izquierda de la señal de entrada de H_1 . Con este desplazamiento aparecería fácilmente la estructura de realimentación entre G_4 y H_3 :



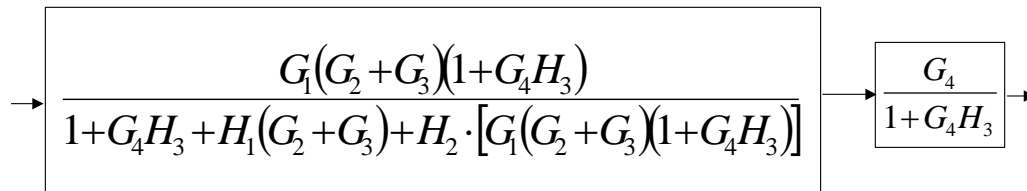
El desplazamiento hacia la izquierda de la bifurcación de la señal de salida que es entrada en H_3 mostrará un procesamiento paralelo de la señal que ataca al bloque de la realimentación de G_4 y H_3 :



La cascada de G_2 y G_3 muestra con el último equivalente una estructura de realimentación:



Finalmente, queda una estructura con un lazo de realimentación a través de H_2 que esta en serie con el último bloque de procesamiento equivalente:



La FDT equivalente del conjunto será:

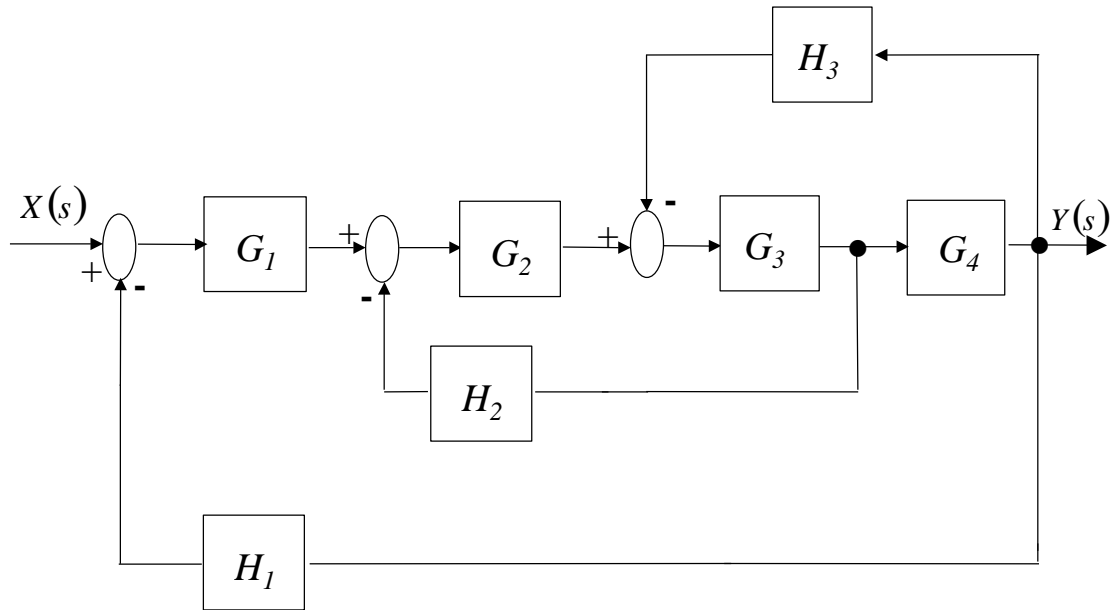
$$M(s) = \frac{G_1(G_2 + G_3)G_4}{1 + G_4H_3 + H_1(G_2 + G_3) + H_2 \cdot [G_1(G_2 + G_3)(1 + G_4H_3)]}$$

3.6 Ejercicios propuestos

Problema 1

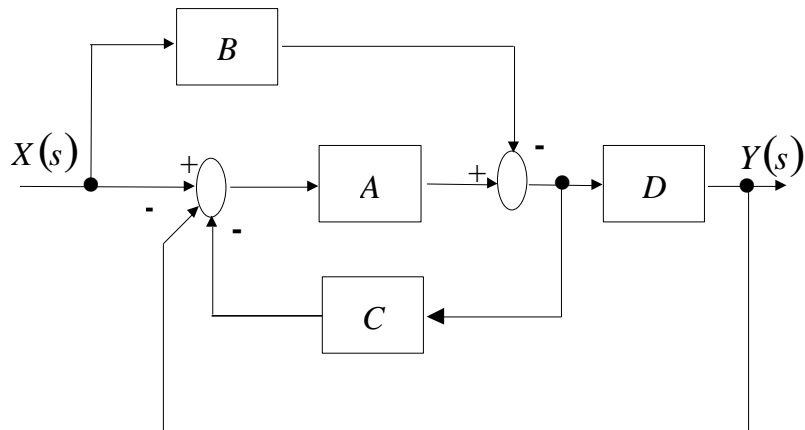
Determinar el diagrama de bloques reducido y demostrar que la FDT total es la dada:

a)



$$M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3}$$

b)

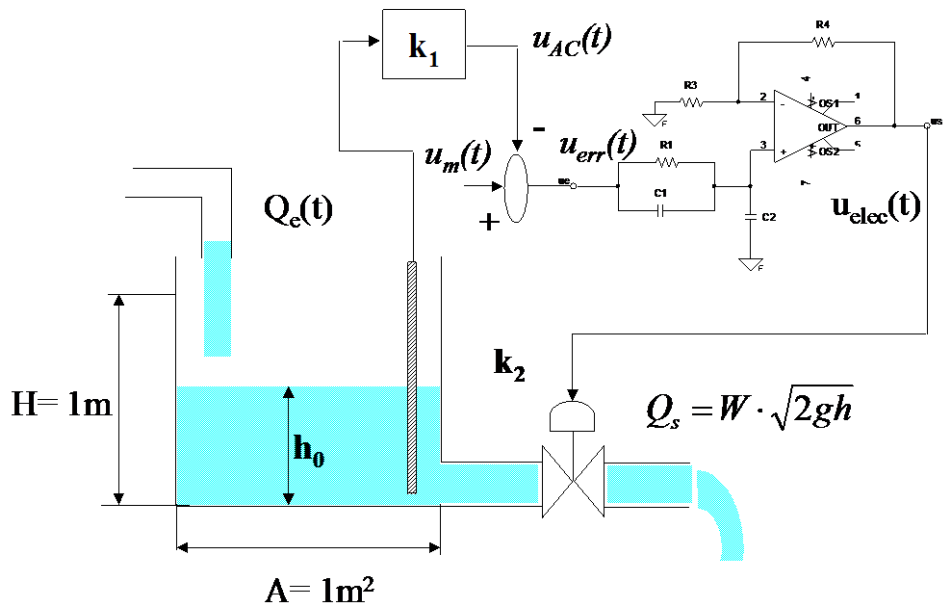


$$M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{D(A - B)}{1 + (A(D + C))}$$

Problema 2

El esquema de la figura representa un sistema de control continuo sobre un depósito de agua. La altura es medida por un transductor resistivo, de forma que la tarjeta de acondicionamiento de la señal, da una tensión proporcional a la altura:

$$u_{AC}(t) = k_1 h(t)$$



siendo k_1 la ganancia, de valor 10 [V/m]. Esta señal es comparada con la señal de mando, $u_m(t)$, generando la señal de error, la cual ataca al regulador PI analógico, cuya ganancia de tensión está dada por la siguiente ecuación

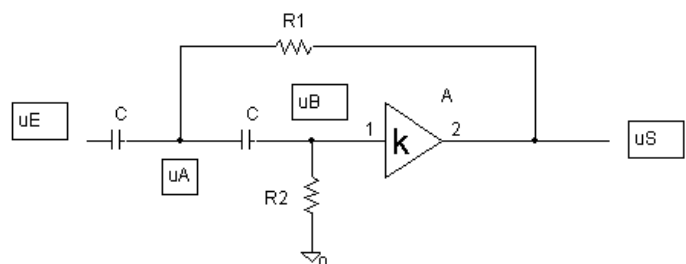
$$\text{diferencial: } u_{elec}(t) + 3 \frac{du_{elec}(t)}{dt} = 2 \left(u_{err}(t) + \frac{du_{err}(t)}{dt} \right)$$

El compensador ataca a la electroválvula de sección variable. La sección de paso, W , es proporcional a la tensión de salida del regulador con una ganancia k_2 , de valor 0.01 [m²/V]. Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que determinen la dinámica del sistema.
2. Linealizar el modelo respecto al punto de equilibrio, $u_{m0} = 6V$ y $h_0 = 0.5m$.
¿ Cuánto vale el caudal de salida ?, ¿ y el de entrada ?.
3. Diagrama de bloques entre los incrementos de la señal de mando y de la altura del depósito.

Problema 3

El circuito de la figura representa una célula de Sallen-Key. El triángulo con el valor de ganancia k es una simplificación del amplificador de estructura no inversora con amplificador



operacional ideal. Por tanto, la tensión de salida del amplificador es la de su entrada multiplicada por k y la impedancia de entrada de éste es infinita. Se pide:

1. El diagrama de bloques en el que aparecerán explícitamente las variables $u_e(s)$, $u_A(s)$, $u_B(s)$ y $u_s(s)$.
2. FDT entre $u_s(s)$ y $u_e(s)$.

Resolución

El conjunto de ecuaciones algebro diferenciales son:

$$C(\dot{u}_e - \dot{u}_A) = C(\dot{u}_A - \dot{u}_B) + \frac{u_A - u_B}{R1}$$

$$C(\dot{u}_A - \dot{u}_B) = \frac{u_B}{R2}$$

$$u_s = k u_B$$

Aplicando transformadas de Laplace, se conseguirá el diagrama a bloques. Empleando álgebra de bloques la FDT entre la tensión de salida y de entrada es:

$$A_v(s) = \frac{u_s(s)}{u_e(s)} = \frac{s^2 R1 \cdot R2 \cdot C^2 \cdot k}{s^2 R1 \cdot R2 \cdot C^2 + sC(2R1 + R2 - R2 \cdot k) + 1}$$

Problema 4

La figura representa el esquema simplificado de la calefacción de una habitación por medio de un radiador eléctrico. El radiador consiste en una resistencia R alimentada a V voltios, situada en un baño de aceite de masa calorífica M_c y temperatura T_c . Posee una superficie S_c de coeficiente global de transmisión U_c hacia el aire.

El aire de la habitación se encuentra a una temperatura T_h y tiene una masa calorífica M_h . La temperatura exterior es T_e . Las paredes tienen una superficie S_p y un coeficiente global de transmisión U_p .

La temperatura de la habitación se mide con un termómetro situado cerca del radiador, por lo que su indicación T_m viene afectada ligeramente por él. Dicha medida se compara con una referencia T_r y la diferencia, amplificada con una ganancia K se lleva a la resistencia del radiador.

Las ecuaciones del sistema son:

$$1) T_m = 0.95T_h + 0.05T_c \quad 2) V = k(T_r - T_m) \quad 3) q = 0.24V^2 / R$$

$$4) M_c \frac{dT_c}{dt} = q - U_c S_c (T_c - T_h) \quad 5) M_h \frac{dT_h}{dt} = U_c S_c (T_c - T_h) - U_p S_p (T_h - T_e)$$

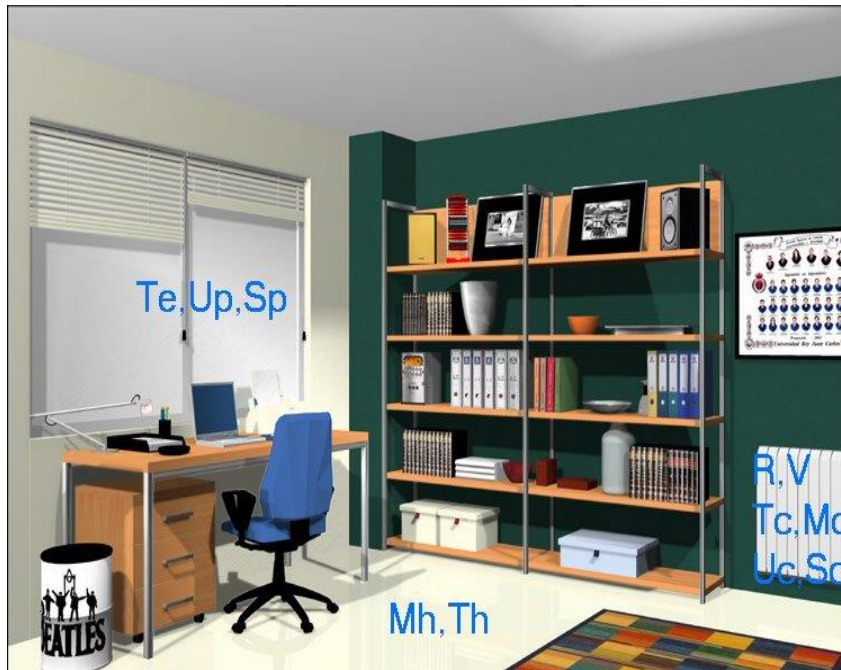
Datos

$$R = 20\Omega \quad k = 50V / ^\circ C \quad U_c S_c = 12.5cal / s^\circ C \quad U_p S_p = 33cal / s^\circ C$$

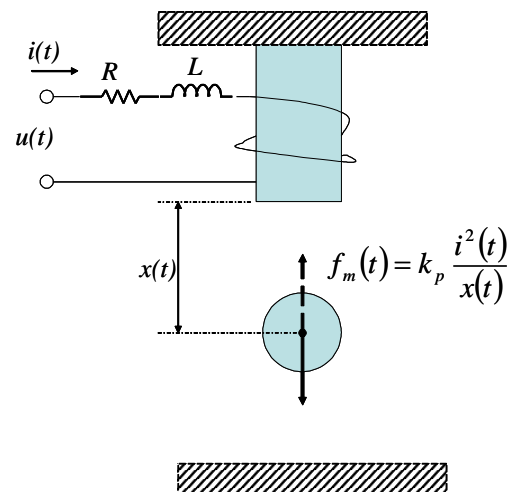
$$M_c = 1000cal / ^\circ C \quad M_h = 3000cal / ^\circ C$$

Se pide:

1. Determinar el punto de equilibrio ($T_{c,0}$ y $T_{h,0}$) en torno a $T_{e,0} = 5^\circ C$, $T_{r,0} = 25^\circ C$.
2. Linealizar las ecuaciones en torno al punto de equilibrio.
3. Dibujar el diagrama a bloques del sistema de control.
4. Determinar la FDT entre las variaciones de la temperatura de la habitación respecto a la de mando y a la temperatura externa.

**Problema 5**

El diagrama de la figura representa un esquema simplificado de levitación magnética. La fuerza magnética producida por el electroimán intenta compensar la fuerza de gravitación sobre el cuerpo que levita. Sabiendo que la fuerza magnética es proporcional al cuadrado de la



corriente de la bobina e inversamente a la posición del cuerpo, $f_m(t) = k_p \frac{i^2(t)}{x(t)}$,
determinar:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del levitador.
2. Linealización de la planta alrededor del punto de reposo.
3. Diagrama de bloques del sistema.
4. ¿Es estable?

Datos:

$$M = 0.1 \text{ kg} \quad k_p = 25 \cdot 10^{-3} [\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}^2] \quad R = 0.1 \, \Omega \quad L = 5.4 \text{ mH}$$

Punto de reposo: $x_0 = 25 \text{ mm}$

1. El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales son:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$M \cdot \ddot{x} = M \cdot g - k_p \frac{i^2(t)}{x(t)}$$

2. Para la linealización habrá que calcular la corriente en el punto de reposo:

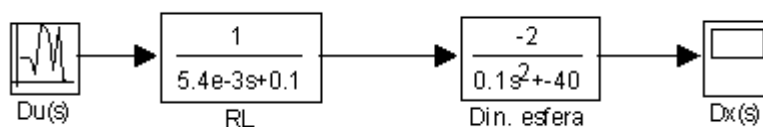
$$i_0^2 = \frac{M \cdot g \cdot x_0}{k_p} \rightarrow i_0 \cong 1 \text{ A}$$

Las ecuaciones linealizadas sobre este punto de reposo quedan establecidas como:

$$\Delta u(t) = R \cdot \Delta i(t) + L \Delta \dot{i}(t)$$

$$M \cdot \Delta \ddot{x} = \left[-k_p \frac{2 \cdot i_0}{x_0} \right] \cdot \Delta i(t) + \left[k_p \frac{i_0^2}{x_0^2} \right] \cdot \Delta x(t)$$

- 3.



4. La FDT contiene un polo en el semiplano positivo, por tanto, el sistema es inestable:

$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta u(s)} = \frac{-3703.7}{(s+20)(s-20)(s+18.52)}$$

Problema 6

Una masa se desliza por un plano inclinado a una determinada velocidad, se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modele la dinámica y velocidad del régimen permanente de la masa cuando la pendiente es $\pi/6$.
2. Determinar el modelo incremental entre el ángulo del plano inclinado y su velocidad, $G(s) = \frac{\Delta v(s)}{\Delta \alpha(s)}$, con las condiciones iniciales dadas.
3. Variación temporal de la velocidad del objeto si hay un cambio de pendiente de $\pi/6$ a $\pi/3$. Utilícese el modelo lineal del apartado anterior.
4. Determinar la velocidad en el régimen permanente, cuando la masa se desliza sobre el plano de $\pi/3$. ¿Existe discrepancia con el resultado del apartado anterior? ¿Por qué?

Datos: $M = 10 \text{ kg}$, $B = 5 \text{ Ns/m}$, $g \sim 10 \text{ m/s}^2$.

1. Las ecuaciones que modela el descenso del bloque rígido son:

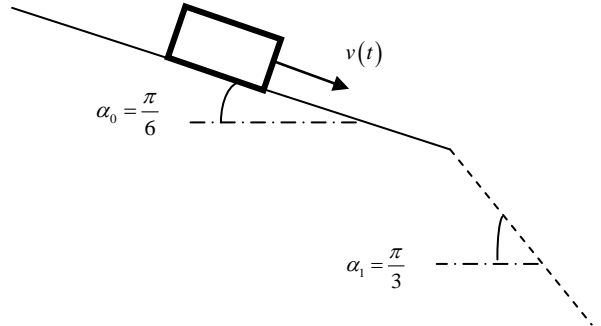
$$M\ddot{x}(t) = Mg \sin \alpha - f_r(t) \quad f_r(t) = B\dot{x}(t)$$

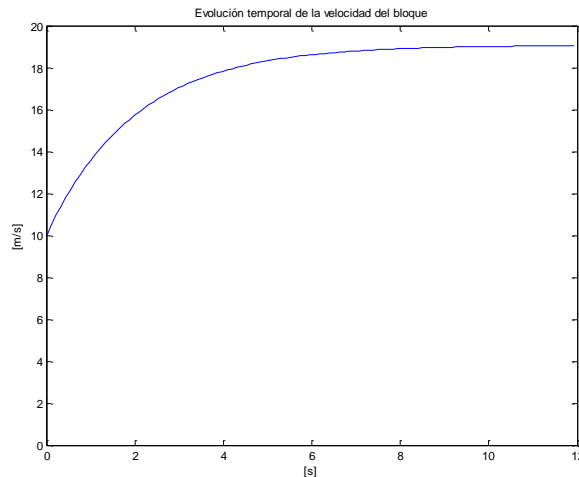
En el régimen permanente la velocidad será constante, por tanto para un ángulo de 30° , la velocidad será:

$$v_{rp} = \frac{Mg \cdot \sin(\alpha)}{B} = 10 \text{ m/s}$$

$$2. G(s) = \frac{\Delta v(s)}{\Delta \alpha(s)} = \frac{[Mg \cos \alpha]_0}{Ms + B} = \frac{10\sqrt{3}}{1 + 2s}$$

3. El sistema es de primer orden y se produce un incremento de 30° en forma de entrada en escalón: $\Delta v(s) = \frac{\pi}{6} \frac{1}{s} \frac{10\sqrt{3}}{1 + 2s}$





4. $v_{rp} = \frac{Mg \sin \alpha}{B} = 10\sqrt{3} \text{ m/s}$. Existe discrepancia por la aproximación del sistema no lineal a través de la pendiente. En el modelo linealizado da 19 m/s y en el modelo no lineal es de 17.32 m/s.

Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU".

La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](http://www.gnu.org/copyleft/) para [contenidos abiertos](http://www.gnu.org/copyleft/). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>