

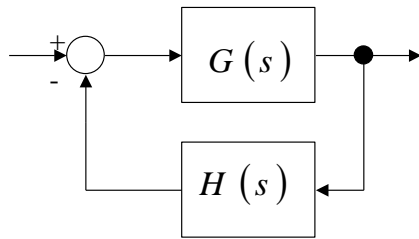
# 12 Estabilidad en el dominio de la frecuencia

---

Hasta ahora, las herramientas para el cálculo de la estabilidad se apoyaban bien en las tablas de Routh bien a través del LDR. En el primer caso, a partir del polinomio característico del sistema era posible determinar su estabilidad absoluta. Respecto al LDR, la proximidad de las ramas dominantes ante la variación de la ganancia, daba una medida intuitiva del nivel de estabilidad. En ambos casos, la información de partida era el conocimiento explícito de la FDT. Para la tabla de Routh se requiere la FDT total del equipo; en el LDR es aplicable sólo para estructuras de realimentación negativa y se debe saber la FDT de la cadena abierta.

En este capítulo se presenta otra técnica basada en la respuesta frecuencial de la cadena abierta. Por tanto, sólo válida para estructuras de realimentación negativa. Se medirá la estabilidad de la cadena cerrada a partir de la respuesta en frecuencia del lazo abierto,  $G(s)H(s)$ . Las ventajas de este proceder son varias. En primer lugar, con este método no sólo se determina la estabilidad absoluta sino también se cuantifica, dando lugar al concepto de estabilidad relativa. Segundo, el utillaje experimental de la respuesta en frecuencia permite fácilmente cuantificar la estabilidad a partir de los datos extraídos en el laboratorio, i.e. no se exige de un modelo matemático o FDT del equipo a priori; caso si requerido en el LDR o en la tabla de Routh. Por último, los criterios que se van a exponer facilitan el tratamiento de las problemáticas con retardos en la transmisión de la señal. Recuérdese que para los dos métodos que utilizan las transformadas de Laplace, tabla de Routh y LDR, se necesita de una aproximación polinómica del término exponencial del retardo (teorema de la traslación temporal).

## 12.1 Criterio de Nyquist



El criterio de Nyquist indica el número de polos de la cadena cerrada en el dominio complejo positivo de una estructura de realimentación negativa. Emplea como dato de partida la respuesta en frecuencia de la cadena abierta. Su fundamento está basado en el principio del argumento de la teoría de la variable compleja.

**Figura 12. 1. Estructura aplicable el criterio de Nyquist**

Haciendo uso del polinomio característico de una estructura de realimentación negativa, se define una función  $F(s)$  de variable compleja:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad (12. 1)$$

donde  $D_1(s)$  y  $D_2(s)$  son los polinomios del denominador de la planta,  $G(s)$ , y de la realimentación,  $H(s)$ , respectivamente. Respecto,  $N_1(s)$  y  $N_2(s)$  son los polinomios del numerador de  $G(s)$  y de  $H(s)$ . Reorganizado  $F(s)$  en los términos anteriores:

$$F(s) = \frac{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} \quad (12. 2)$$

Los polos de  $F(s)$  coincidirán con los polos de la cadena abierta. Los ceros de  $F(s)$ , sin determinar, serán las raíces del polinomio característico o también denominados los polos de la cadena cerrada. Estos últimos son los que definen la estabilidad del sistema.

Tómese una curva cerrada  $\Gamma(s)$  sobre el dominio complejo, con la única condición de que la curva, en su recorrido, no pase por ningún polo de  $F(s)$ , i.e. polos de  $G(s)H(s)$ , y que abarque a todo el dominio complejo positivo.

El principio del argumento establece que el número de ceros de  $F(s)$ , polos del sistema realimentado, contenidos dentro de la curva cerrada  $\Gamma(s)$  vendrá dado por:

$$Z = N + P$$

donde  $Z$  es el número de ceros de  $F(s)$  en el dominio complejo positivo,  $N$  es el número de vueltas que recorre la imagen de la curva,  $\Gamma^*(s) = F(\Gamma(s))$ , al desplazar  $F(s)$  por la curva  $\Gamma(s)$  y  $P$  es el número de polos de  $F(s)$  encerrados por la curva  $\Gamma(s)$ . Obviamente, para que el sistema sea estable  $Z$  debe ser cero.

Se denomina camino de Nyquist,  $\Gamma(s)$ , la curva que cumple la condición de no pasar por encima de los polos de  $F(s)$ , polos de la cadena abierta  $G(s)H(s)$ , y abarcar

todo el dominio complejo positivo. En las siguientes figuras se recogen algunos ejemplos del camino de Nyquist.

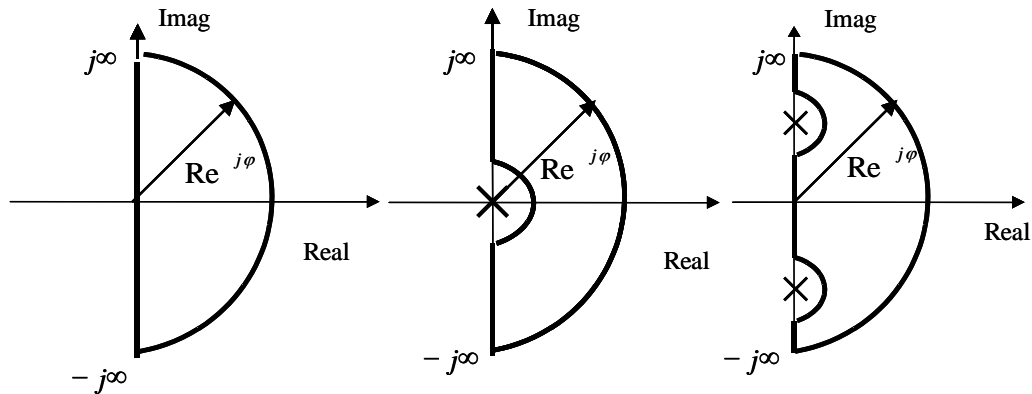


Figura 12. 2. Camino de Nyquist a) Sin polos en el eje imaginario de la cadena abierta, b) Con un polo en el origen c) Con polos complejos en el eje imaginario

Los pasos a seguir para aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist serán:

1. Determinar el camino de Nyquist  $\Gamma(s)$  a partir de la información de la cadena abierta.
2. Obtener la imagen de la curva,  $\Gamma^*(s)=F(\Gamma(s))$ , al desplazar  $F(s)$  por el camino de Nyquist,  $\Gamma(s)$ , en un cierto sentido. Por ejemplo, en sentido de las manecillas del reloj, SMR. Pero podría haberse elegido en sentido contrario, SCMR.
3. Contabilizar el número de vueltas,  $N$ , que la imagen  $\Gamma^*(s)$  da alrededor del origen, siguiendo el SMR, si éste fue el criterio empleado en 2. En caso contrario, contar las vueltas según el SCMR.
4. El número de polos inestables de la cadena cerrada será  $Z=N+P$ . Siendo  $P$  el número de polos en cadena abierta encerrados por el camino de Nyquist, esto es, polos de  $G(s)H(s)$  en el dominio complejo positivo.

### 12.1.1 La imagen de la curva $\Gamma$ y la curva polar

En el procedimiento de Nyquist se requiere conseguir la imagen del camino,  $\Gamma^*(s)$ . Elijiendo algunos puntos de la curva de  $\Gamma(s)$ , se calcularía, mediante  $F(s)$ , algunos puntos de la imagen y luego se interpolaría. Sin embargo, se verá que este proceder no es necesario.

Para conseguir fácilmente la curva imagen en vez de emplear la función  $1+G(s)H(s)$ , se utilizará  $G(s)H(s)$ . Obviamente, la imagen será diferente; la nueva curva imagen quedará desplazada en una unidad horizontal hacia la izquierda.

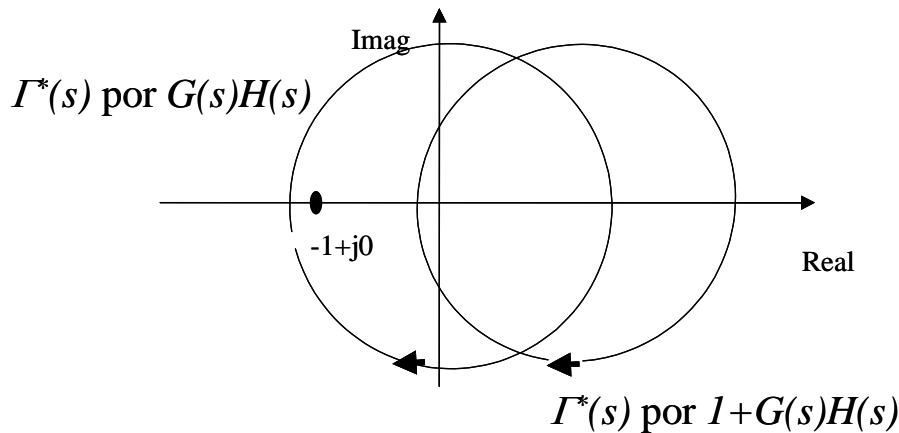
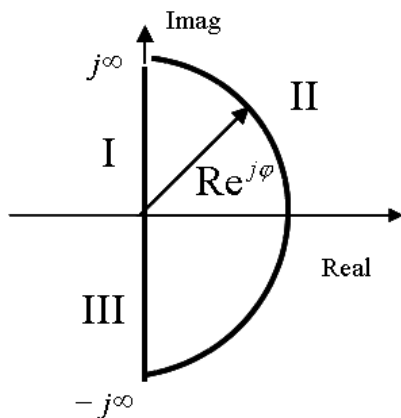


Figura 12. 3. Desplazamiento de la curva imagen

Ahora, por este desplazamiento, la contabilidad del número de vueltas de la curva imagen no será en el origen,  $0+j0$ , se habrá desplazado hacia  $-1+j0$ . Con este paso se facilita enormemente la obtención de  $\Gamma^*(s)$ , ya que su trazado coincide con la curva polar.

Considerando que no hay polos de  $G(s)H(s)$  sobre el eje imaginario se descompone el camino de Nyquist en los tres tramos indicados en la figura, *I*, *II* y *III*.

Sobre la curva  $\Gamma(s)$  se toma, por ejemplo, el sentido de las manecillas del reloj, SMR.



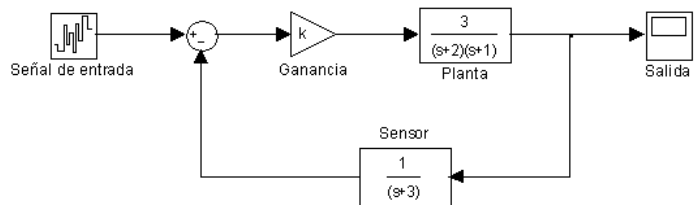
En el tramo *I*, la imagen  $\Gamma^*(s)$  se obtendrán al sustituir  $s$  por  $j\omega$  en  $G(s)H(s)$ , haciendo variar la frecuencia desde 0 hasta  $\infty$ . En este recorrido del camino de Nyquist, la imagen coincide con la curva polar de Nyquist.

En el segundo tramo hay que sustituir  $s$  por  $Re^{j\varphi}$  con el radio,  $R$ , tendiendo a infinito y variando el ángulo desde  $\pi/2$  a  $-\pi/2$ , al seguir SMR. Ahora bien, suponiendo que la FDT en bucle abierto responda a un sistema físicamente realizable, el grado del denominador será siempre mayor o igual al numerador; por tanto, al hacer el límite en  $G(Re^{j\varphi})H(Re^{j\varphi})$  del radio tendiendo al infinito,  $R \rightarrow \infty$ , o bien es cero en el caso de que sea mayor el número de polos que de ceros de  $G(s)H(s)$ , o bien es una constante, si son iguales el número de polos y ceros de la cadena abierta. En cualquier caso, la imagen del tramo *II* es un punto fijo.

La imagen en el tramo *III* responde a la curva  $G(-j\omega)H(-j\omega)$  haciendo variar la frecuencia desde  $-\infty$  hasta 0, siguiendo SMR. El trazado de esta curva en el diagrama polar es simétrico respecto al eje real de la respuesta en frecuencia de la cadena abierta. Obsérvese que el módulo coincide con  $G(j\omega)H(j\omega)$  pero con argumento de signo contrario.

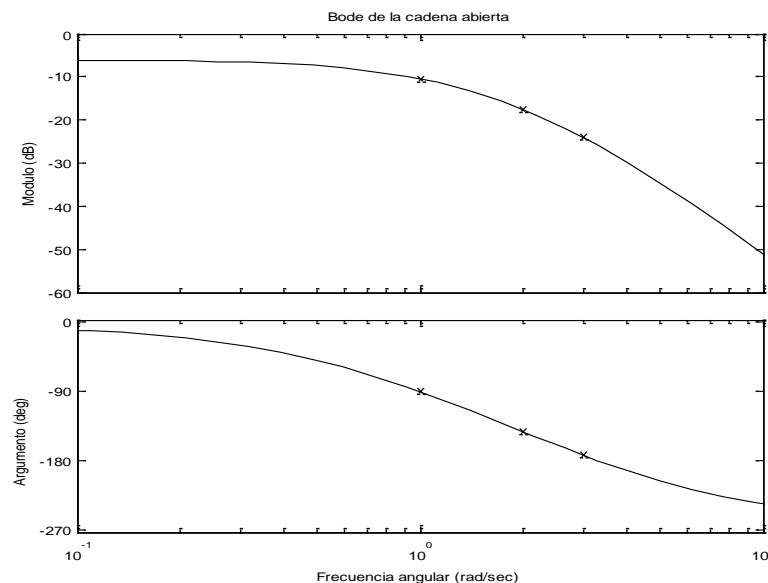
### Ejemplo 12.1

Dado el equipo modelado por la figura adjunta, (ver ejemplo 10.3), se pide para  $k=1$ , si el sistema es estable o no mediante el criterio de Nyquist. En segundo lugar, se desea saber qué valor de  $k$  hace que el sistema sea críticamente estable. Empléese la tabla de Routh, el LDR y la curva polar.



a) Para el primer caso habrá que representar la curva polar, con este propósito se dibuja primero el diagrama de Bode de la cadena abierta y seguidamente se plantea la curva polar. Haciendo el cambio en  $s$  por  $j\omega$  se tendrá la respuesta en frecuencia del sistema LTI-SISO:

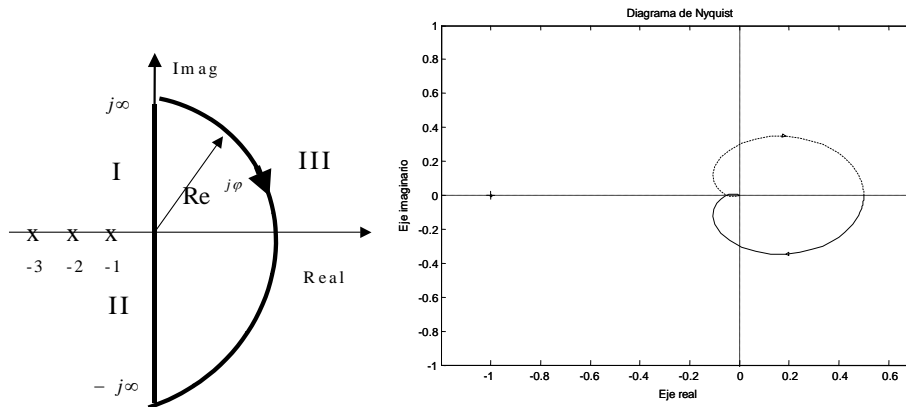
$$G(\omega)H(\omega) = \frac{3}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{0.5}{(1+j\omega)\left(1+j\omega\frac{1}{2}\right)\left(1+j\omega\frac{1}{3}\right)}$$



Los valores para la baja y alta frecuencia serán:

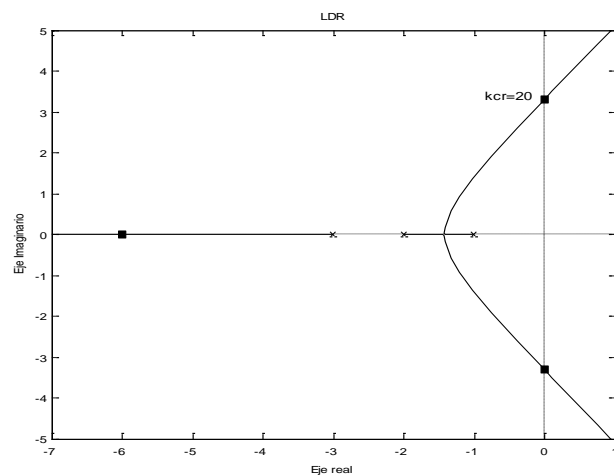
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (G(\omega)H(\omega)) = 0.5 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} (G(\omega)H(\omega)) = j0$$

El camino de Nyquist encierra todo el dominio complejo positivo y no debe de esquivar ningún polo de la cadena abierta sobre el eje imaginario. Habrá tres tramos, el primero (I) corresponde con la curva polar. En el segundo tramo (II), la curva es el trazado polar para frecuencias negativas. Para obtenerla sólo hay que trazar la curva polar con simetría  $r$  respecto al eje real, ya que coincide en módulo con la curva polar y es de signo contrario en el argumento. En cuanto al tercer tramo, al ser el número de polos mayor que el de ceros en la cadena abierta, corresponderá el módulo de  $G(Re^{j\varphi})H(Re^{j\varphi})$  a cero. El trazado de Nyquist y la curva polar quedan reflejados en las figuras adjuntas:



La curva está muy alejada del punto  $-1+j0$ , de hecho, el número de vueltas alrededor de este punto es nulo,  $N=0$ ; como tampoco hay polos de la cadena abierta en el dominio complejo positivo,  $P=0$ , se concluye que no hay polos en la cadena cerrada en el dominio complejo positivo,  $Z=0$ . El sistema realimentado es estable.

b) Empleando las reglas del trazado directo del LDR se observa que las dos ramas dominantes tienden al dominio complejo positivo cuando se incrementa el valor de  $k$ . Para localizar el valor de  $k_{cr}$  se necesita determinar la tabla de Routh:



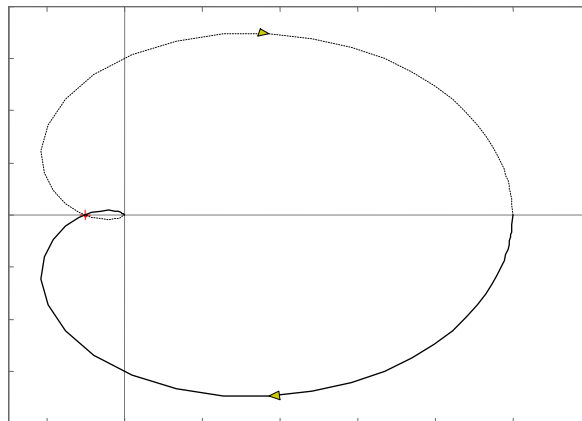
$$M(s) = \frac{\frac{3k}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{3k}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

$$M(s) = \frac{3k(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)+3k} = \frac{3k(s+3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 3k}$$

La tabla queda confeccionada por las siguientes filas:

$s^3$	1	11	$k_{cr} = \frac{60}{3} = 20$
$s^2$	6	$6+3k$	
$s^1$	$\frac{66 - (6 + 3k)}{6}$		
$s^0$	$6+3k$		

La forma de localizar la ganancia crítica,  $k_{cr}$ , mediante el criterio de Nyquist requiere determinar a qué frecuencia el desfase introducido por la cadena abierta es de  $180^\circ$  y variar la ganancia para que su módulo sea la unidad. Con estos requisitos se hace pasar la curva polar por  $-1+j0$ :



Según Nyquist, para el valor de la ganancia crítica,  $k_{cr}$ , sucederá a una frecuencia tal que el desfase introducido sea de  $180^\circ$ .

$$\begin{aligned} G(\omega)H(\omega) &= \frac{3K}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{3K}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11j\omega + 6} = \\ &= \frac{3k}{-j\omega^3 - 6\omega^2 + 11j\omega + 6} = \frac{3k}{6(1-\omega^2) + 11j\omega - j\omega^3} \end{aligned}$$

$$\omega = 0$$

$$11\omega - \omega^3 = 0 \rightarrow \omega(11 - \omega^2) = 0$$

$$\omega_f = \sqrt{11} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Y que el fasor de la cadena abierta debe ser igual a -1 o que el módulo de  $G(\omega)H(\omega)$  sea la unidad y el argumento de  $-180^\circ$ :

$$G(\omega_f)H(\omega_f) = \frac{3k_{cr}}{6(1 - \omega^2)} = -1$$

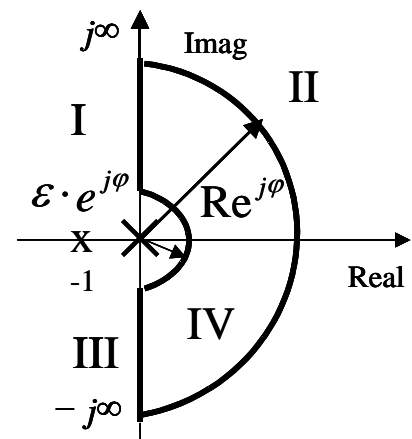
$$k_{cr} = \frac{-6(1 - 11)}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

El resultado es el mismo que con la tabla de Routh.

### 12.1.2 Caso de sistemas que tengan polos sobre el eje imaginario en la cadena abierta.

La aplicación del principio del argumento exige que la curva  $\Gamma(s)$  no pase por los polos de la cadena abierta. Luego si existen polos de  $G(s)H(s)$  en el eje imaginario se requiere que el camino de Nyquist los eviten. En estos casos aparecen nuevos tramos.

El camino de Nyquist para los polos en el origen quedará definido por cuatro tramos. Los tres primeros serán idénticos a lo visto en el anterior ejemplo y para el nuevo tramo se definirá por una semicircunferencia, de radio infinitesimal y de centro en el origen de coordenadas.

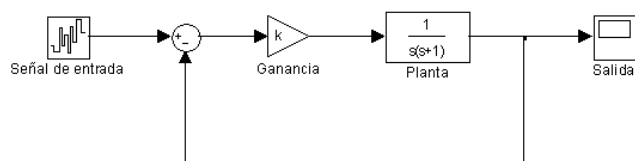


$$s = \epsilon \cdot e^{j\varphi} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \varphi \in \left( -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right) \quad (12.3)$$

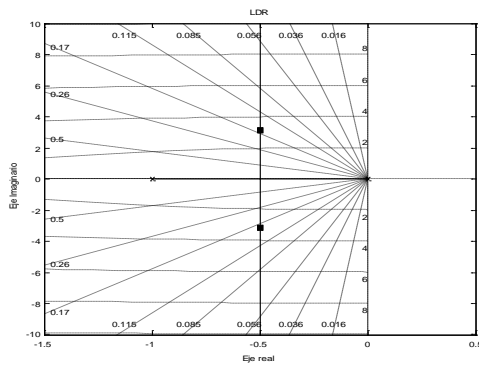
La imagen por  $G(s)H(s)$  dará lugar a un nuevo tramo que habrá de estudiar en cada caso.

### Ejemplo 12.2

¿ Hay algún valor de  $k > 0$  que haga al amplificador realimentado de la figura que se vuelva inestable ? . Utilice las técnicas del LDR y el criterio de Nyquist.







El trazado directo del LDR muestra que no hay ningún valor de  $k > 0$  que haga al sistema inestable; pero también se desprende que cuanto mayor sea el valor de  $k$ , más pequeño será el factor de amortiguamiento de la cadena cerrada,  $\xi_{cc}$ , y mayor será la sobreoscilación de la cadena cerrada,  $M_{p,cc}$ . En definitiva, el sistema pierde estabilidad. Obsérvese que la sobreoscilación se relaciona con la estabilidad. También se desprende que para cualquier valor de  $k$  negativo, el sistema

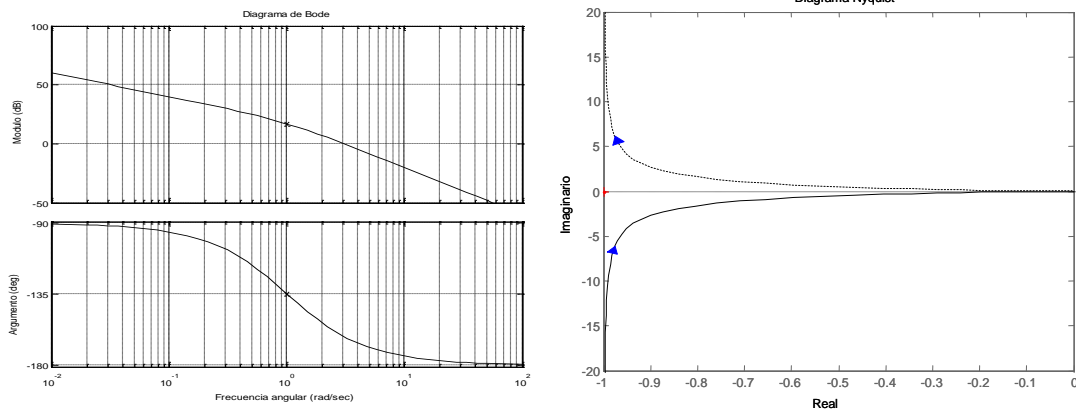
realimentado será inestable. Sólo es necesario realizar el trazado inverso del LDR del equipo para verificarlo.

El camino de Nyquist necesita evitar el polo en el origen, por lo que habrá que definir cuatro tramos. Los tres primeros son similares al ejemplo anterior. El tramo I corresponde con la curva polar, el segundo es igual a cero en el módulo, debido al mayor orden de los polos respecto a los ceros de  $G(s)H(s)$ , mientras el III tramo será simétrica a la curva polar respecto al eje real.

El cuarto tramo será recorrido por un semicírculo de radio infinitesimal que evite el polo en el origen:

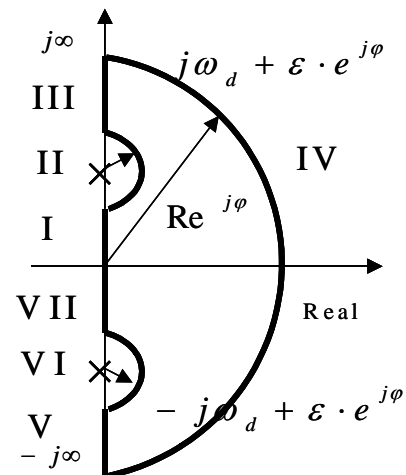
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( G(\varepsilon \cdot e^{j\varphi}) H(\varepsilon \cdot e^{j\varphi}) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot e^{j\varphi} (\varepsilon \cdot e^{j\varphi} + 1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot e^{j\varphi}}$$

expresión que representa el cierre de la curva por todo el dominio complejo positivo a través de un semicírculo de radio infinito. Para conseguir el diagrama de Nyquist se apoyará en el trazado de Bode. La figura de abajo muestra el diagrama de Bode y al lado la curva imagen. En el trazado de la curva imagen no se puede representar el tramo IV. No obstante, se observa que para ningún valor de  $k > 0$  se encierra el punto  $-1 + j0$ , por lo que el sistema es estable.



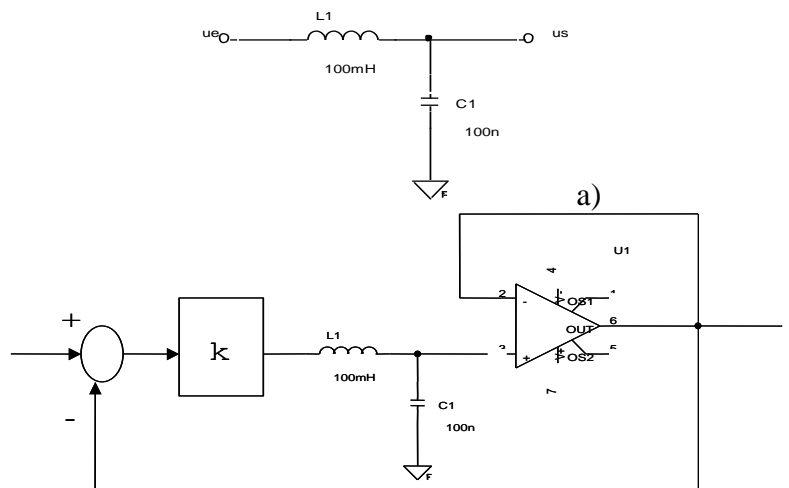
Si la cadena abierta tuviera polos complejos conjugados en el eje imaginario, el camino de Nyquist los evitará mediante semicircunferencias de radio infinitesimal y con centro en la ubicación de los polos. El camino de Nyquist estaría definido por siete tramos:

- I:  $S=j\omega$   $\omega \in (0, \omega_d)$
- II:  $S=j\omega_d + \varepsilon e^{j\varphi}$   $\varepsilon \rightarrow 0$   $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- III:  $S=j\omega$   $\omega \in (\omega_d, +\infty)$
- IV:  $S=Re^{j\varphi}$   $R \rightarrow \infty$   $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- V:  $S=-j\omega$   $\omega \in (-\infty, -\omega_d)$
- VI:  $S=-j\omega_d + \varepsilon e^{j\varphi}$   $\varepsilon \rightarrow 0$   $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- VII:  $S=j\omega$   $\omega \in (-\omega_d, 0)$



### Ejemplo 12.3

1. Determinar la respuesta en frecuencia de la ganancia de tensión del cuadripolo LC.
2. Dibujar el diagrama de Bode y la curva



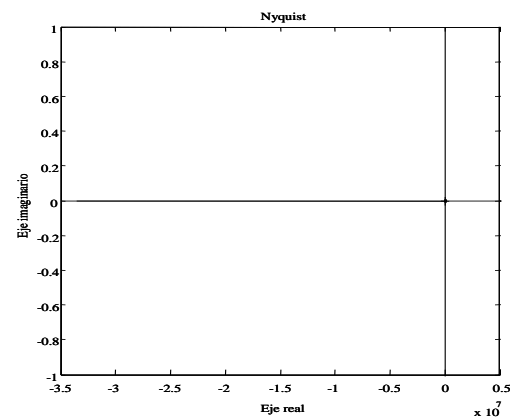
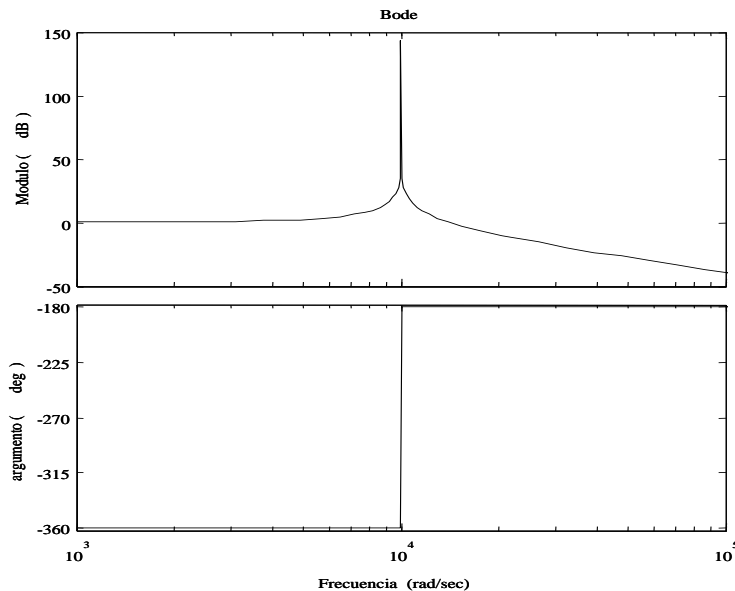
polar del apartado anterior.

- Si se realimenta unitariamente el cuadripolo LC según la figura. Dibujar el lugar de raíces.
- Para  $k = 3$ , analizar la estabilidad según el criterio de Nyquist. ¿Cuál sería la respuesta ante una entrada en escalón? ¿Cuanto vale  $\omega_d$ ?

La respuesta en frecuencia del cuadripolo LC es:

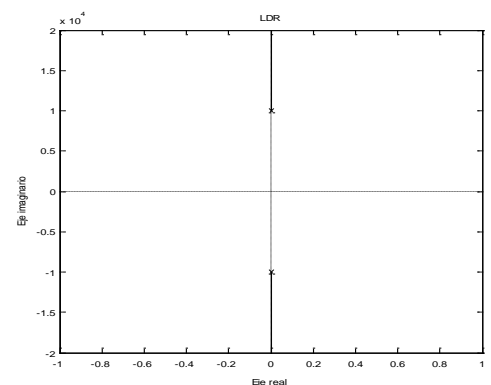
$$A_v(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + 1}$$

El sistema es críticamente estable y por tanto el factor de amortiguamiento es 0. En frecuencia, el valor del pico de resonancia tiende a infinito. La curva polar se cierra a través de una semicircunferencia de radio infinito desde el cuarto cuadrante al tercero.



La ganancia en cadena abierta de la estructura de realimentación negativa es  $G(s)H(s) = \frac{k}{LCs^2 + 1}$ , luego el LDR está sobre el eje imaginario a partir de la frecuencia de oscilación de 10.000 rad/s. El sistema oscila para cualquier valor de  $k > 0$ .

En el camino de Nyquist hay que evitar los polos imaginarios de la cadena abierta y su recorrido estará definido por siete tramos. La diferencia, respecto a los anteriores ejercicios, se encuentra en los tramos de semicircunferencia de radio infinitesimal para evitar estos polos de la cadena abierta del eje imaginario. Así



por ejemplo, cuando la frecuencia está alrededor de los 10.000 rad/s, la curva imagen quedará dada por el siguiente recorrido:

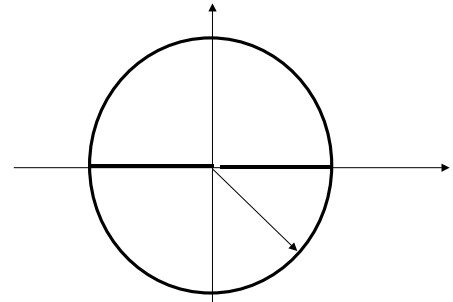
$$G(j\omega_d + \varepsilon e^{j\varphi})H(j\omega_d + \varepsilon e^{j\varphi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{(j\omega_d + \varepsilon e^{j\varphi})^2 LC + 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{\varepsilon e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}} = \infty e^{-j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

La curva imagen será dada según indica la figura adjunta.

El sistema es críticamente estable y ante una entrada en escalón el sistema oscilará. Su valor estará dado por la FDT de la cadena cerrada:

$$M(s) = \frac{k}{s^2 LC + 1 + k} \Rightarrow$$

$$k = 3 \rightarrow \omega_d = 20.000 \text{ [rad / s]}$$



### 12.1.3 Criterio de Nyquist en sistemas de fase mínima

Cuando la FDT de la cadena abierta,  $G(s)H(s)$ , carece de polos en el dominio complejo positivo,  $P = 0$ , el número de polos de la cadena cerrada coincide con el número de vueltas de la curva imagen:

$$Z = N$$

Por tanto, para sistemas de fase mínima, donde tampoco hay ceros en el dominio complejo positivo, la condición de estabilidad se traduce en que el diagrama polar de  $G(s)H(s)$  no encierre al punto  $-1+j0$ . No es preciso construir la imagen de  $G(s)H(s)$  por todo el camino de Nyquist, sólo bastará con seguir la curva polar y observar si el punto  $-1+j0$  queda al lado izquierdo o no. En el caso de que quedase el punto  $-1+j0$  a la izquierda de la curva, el sistema realimentado es estable. La figura 12.4 a) muestra un sistema estable y en b) uno inestable.

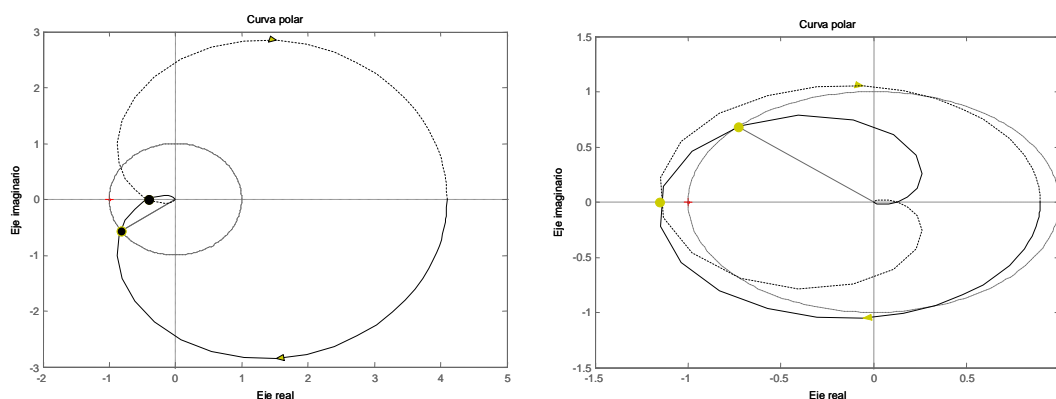


Figura 12. 4. a) Sistema estable b)Inestable

## 12.2 Estabilidad relativa de sistemas de fase mínima

En el dominio temporal se ha observado, en algunos ejemplos, que si se varía la ganancia  $k$  de la cadena abierta, las ramas del LDR de la región dominante se aproximaban al eje imaginario y el sistema tendía a ser más inestable. Suele suceder que ante una entrada en escalón, la sobreoscilación de la salida del sistema aumentaba.

Por contra, en el dominio frecuencial, se observa, según el criterio de Nyquist, que las curvas polares de las cadenas abiertas de los sistemas de fase mínima pierden estabilidad a medida de que se aproximan al punto  $-1+j0$ . En la figura se muestra la curva polar de la cadena abierta de un sistema con tres valores distintos de ganancia.

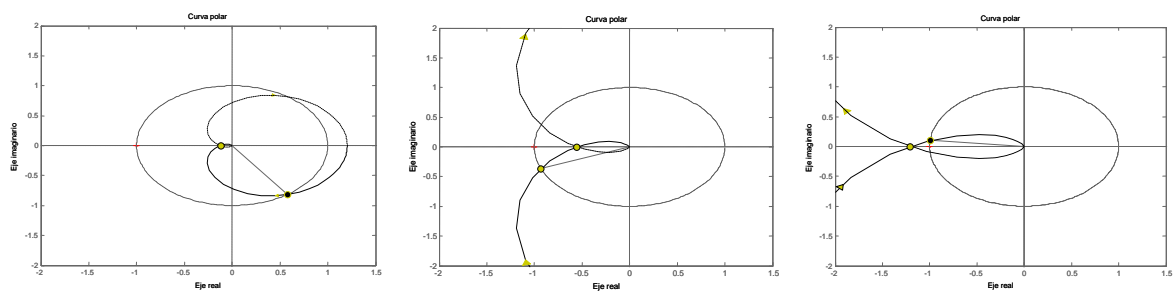


Figura 12. 5. a)  $k=8$  b)  $k=30$ , c)  $k=70$

La forma de cuantificar la estabilidad está en las medidas de distancia o de separación entre la curva de Nyquist y el punto  $-1+j0$ . Se emplean dos medidas: margen de fase y margen de ganancia. La primera cuantifica la separación en grados entre el desfase de la cadena abierta y los  $180^\circ$ , cuando el módulo de  $G(s)H(s)$  es la unidad. La segunda mide la distancia entre el módulo de la cadena abierta y el punto  $-1+j0$ , cuando el desfase es de  $180^\circ$ .

Las expresiones analíticas de estas dos medidas necesitan determinar las frecuencias de cruce de ganancia y de fase. Se define la frecuencia de cruce de ganancia como aquella frecuencia que hace que la ganancia de la cadena abierta sea la unidad:

$$\left| G(\omega_g) H(\omega_g) \right| = 1 \quad > 0 \text{ [dB]} \quad (12.4)$$

La suma entre el desfase introducido por la cadena abierta a la frecuencia de cruce de ganancia más  $180^\circ$  se define como el margen de fase:

$$\gamma = 180^\circ + \arg \left( G(\omega_g) H(\omega_g) \right) \quad (12.5)$$

Para obtener el margen de ganancia se requiere definir la frecuencia que introduce un desfase de  $-180^\circ$  el argumento de la cadena abierta. A esta frecuencia se le llama frecuencia de cruce de fase:

$$\arg \left( G(\omega_f) H(\omega_f) \right) = -180^\circ \quad (12.6)$$

El margen de ganancia es el inverso de la amplitud de la cadena abierta a esta frecuencia

$$k_g = \frac{1}{\left| G(\omega_f) H(\omega_f) \right|} \quad (12.7)$$

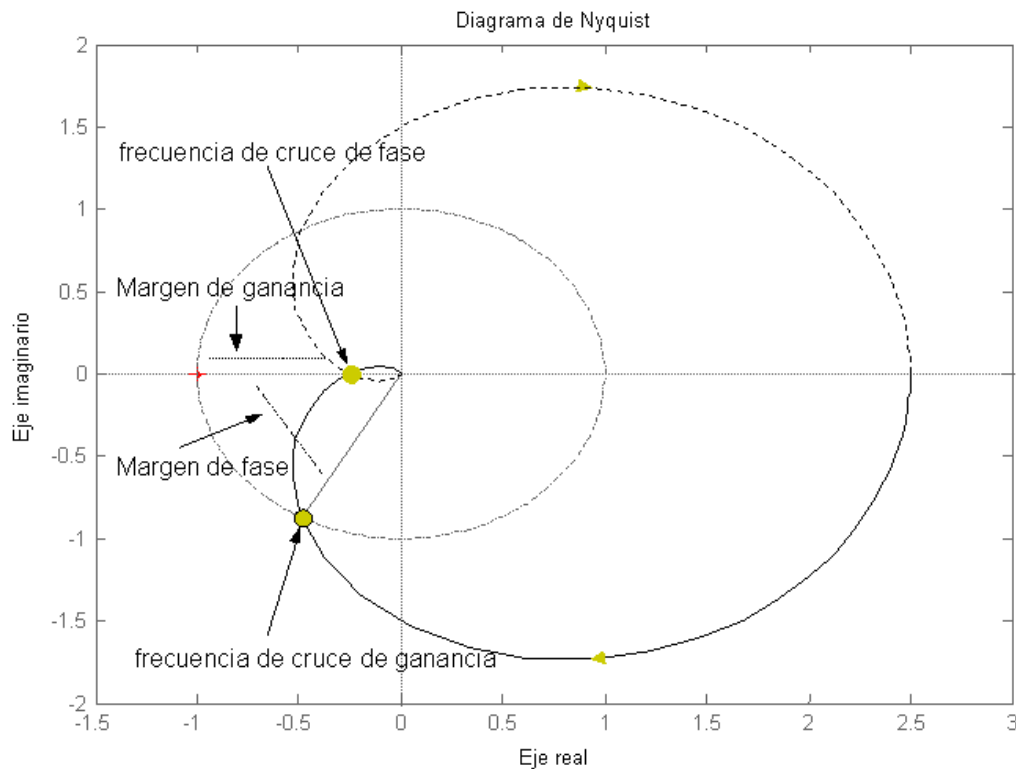


Figura 12. 6. Curva de Nyquist para el equipo del ejemplo 12.1 con ganancia,  $k=5$ .

El sistema realimentado será estable cuando el margen de fase sea mayor a cero grados y el margen de ganancia sea mayor a uno. De forma general, el margen de fase suele ser más restrictivo que el de ganancia.

Los diagramas de Bode son ideales para obtener el margen de fase y de ganancia de los sistemas de fase mínima por su correspondencia biunívoca entre el módulo y el argumento. El margen de fase se consigue midiendo la distancia entre el argumento de la cadena abierta a la frecuencia de cruce de ganancia y los  $-180$  grados. El margen de ganancia está definido entre los 0dB y la ganancia de la cadena abierta a la frecuencia de cruce de fase.

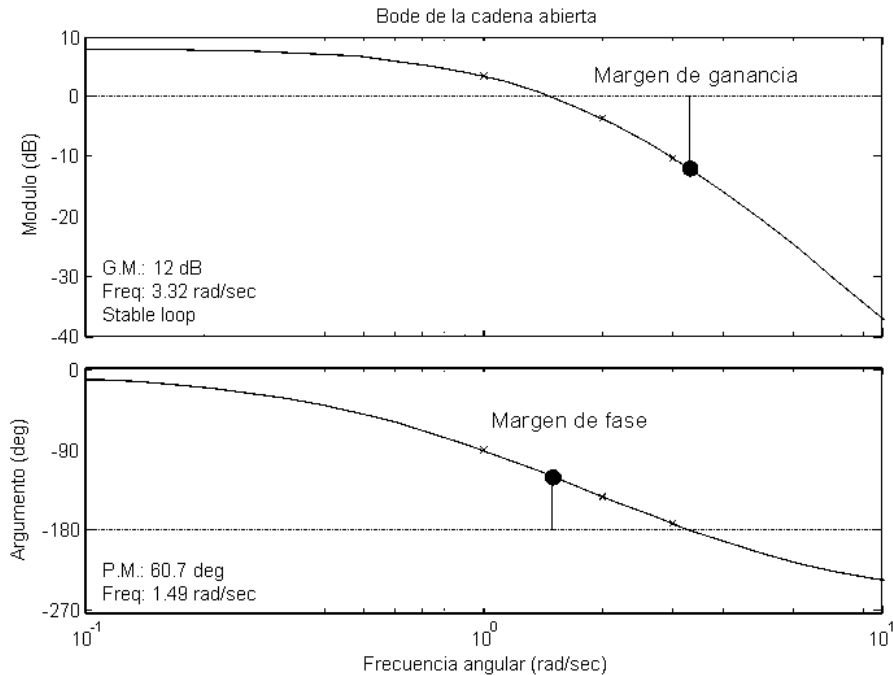
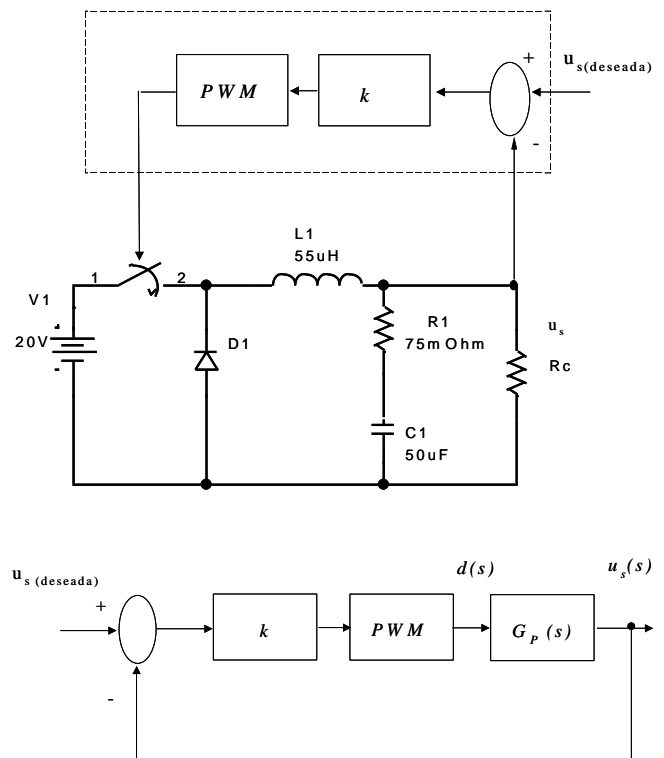


Figura 12. 7. Diagrama de Bode para el equipo del ejemplo 12.1 con ganancia,  $k=5$ .

### Ejemplo 12.4

Las fuentes conmutadas son equipos de la Electrónica de Potencia que se alimentan de corriente continua a un determinado nivel de tensión y entregan a la carga también corriente continua con otro nivel de tensión (cc/cc). El esquema que se presenta en la figura muestra un reductor, por que la tensión de entrada,  $V_1$ , es mayor que la salida. En este caso la entrada es a 20V y la salida es a 5V. El control sobre este sistema depende del ciclo de trabajo del interruptor, al que se le denomina  $d$  (*duty cycle*). Este valor es la relación entre el tiempo de encendido del interruptor y el periodo de trabajo de la fuente conmutada. La regulación del sistema se hace a través de la modulación por ancho del pulso (*Pulse Width Modulation*, PWM), que ataca al interruptor, garantizando que la tensión en la carga sea siempre constante. Aunque el



sistema es altamente no lineal, se ha linealizado y se ha determinado su FDT a partir de la potencia nominal que se entrega a la carga, en este caso 50W:

$$G_p(s) = \frac{u_s(s)}{d(s)} = V1 \frac{(1 + R1 \cdot C1 \cdot s)}{\left(1 + \left(R1 \cdot C1 + \frac{L1}{R_c}\right)s + \left(1 + \frac{R1}{R_c}\right)L1 \cdot C1 \cdot s^2\right)} = 20 \frac{(1 + 3.75 \cdot 10^{-6} s)}{(1 + 113.8 \cdot 10^{-6} s + 3.16 \cdot 10^{-9} s^2)}$$

Se pide:

1. Obtener la ganancia estática,  $k$ , de manera que se cumpla la especificación del  $5V \pm 1\%$  de variación en la tensión de salida.
2. Representar el diagrama de Bode de la cadena abierta con la ganancia estática del compensador,  $kG_p(j\omega)$ .
3. Calcular la frecuencia de cruce y el margen de fase.

Una variación del 1% en la salida del valor nominal de la fuente corresponde con el error al escalón definido en la asignatura. De esta especificación se obtendrá la ganancia  $k$ :

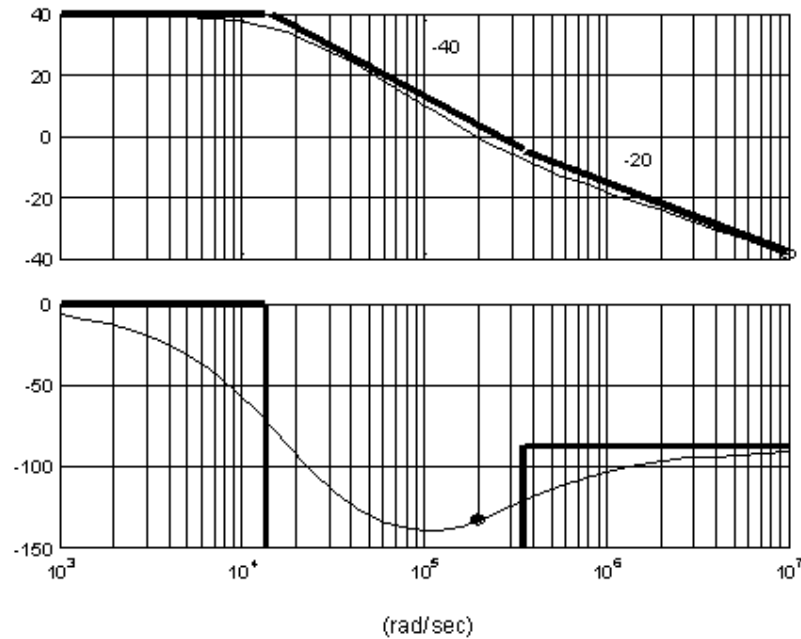
$$e_p = \frac{1}{1 + k_p} = 0.01 \rightarrow k_p \cong 100 \quad k_p = \lim_{s \rightarrow 0} (k \cdot G_p(s)) = k \cdot V1 \rightarrow k \cong 5$$

Obsérvese de la FDT de la fuente que la ganancia estática depende sólo del nivel de tensión de la entrada,  $V1$ .

La FDT de la fuente está constituida por un cero a la frecuencia de 266.666 [rad/s] y por un polo de segundo orden, cuya frecuencia natural,  $\omega_{n,p}$ , es de 17.789 [rad/s] y un factor de amortiguamiento,  $\xi_p$ , de alrededor de 1. Por tanto, el polo dominante es sobreamortiguado. De otro lado, la ganancia estática, teniendo en cuenta el valor de  $k$ , será de 100.

De estos valores se observa que el polo domina sobre el cero. La asíntota en el espectro de la baja frecuencia empieza a 40dB hasta la frecuencia natural del polo, 17.789[rad/s], luego bajará con una pendiente de  $-40$  [dB/década] hasta alcanzar los 266.666 [rad/s], pasando a una pendiente de  $-20$  [dB/década].





Para determinar la frecuencia de cruce de ganancia habrá de igualar el módulo de  $kG_P(j\omega_g)$  a la unidad:

$$1 = \frac{5 \cdot 20 \sqrt{1 + (3.75 \cdot 10^{-6} \omega_g)^2}}{\sqrt{(1 - 3.16 \cdot 10^{-9} \omega_g^2)^2 + (113.8 \cdot 10^{-6} \omega_g)^2}} \rightarrow 9.985 \cdot 10^{-18} \omega_g^4 - 1.4695 \cdot 10^{-7} \omega_g^2 - 9999 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de cuarto grado mediante un cambio de variables, la frecuencia de cruce es de 199.620[rad/s]. En cuanto al margen de fase corresponderá a:

$$\gamma = 180 + \arg(kG_P(j\omega_g)) = 180 + \arctg(3.75 \cdot 10^{-6} \omega_g) - \arctg\left(\frac{113.8 \cdot 10^{-6} \omega_g}{1 - 3.16 \cdot 10^{-9} \omega_g^2}\right) = 47.12^\circ$$

### 12.3 Margen de fase y ganancia para sistemas de fase no mínima

Cuando la FDT de la cadena abierta corresponda a un sistema de fase no mínima, la frecuencia de cruce de ganancia se puede dar en cualquier cuadrante del plano y la definición del margen de fase dada ya no es válida. En cuanto al margen de ganancia, la frecuencia de cruce de fase tampoco resulta única. El sistema de la cadena cerrada puede ser inestable aun cuando la curva de Nyquist no encierre el punto  $-1+j0$ . De todas formas, la cercanía del cruce de fase al punto  $-1+j0$ , todavía da indicación de la estabilidad relativa. Para sistemas de fase no mínima habrá de recurrir a la bibliografía recomendada.

## 12.4 Problemas

### Problema 1

1. Considerando el amplificador operacional ideal, determinar la ecuación diferencial y la función de transferencia entre la tensión de salida y la tensión de entrada,  $A_V(s) = u_s(s) / u_e(s)$ .
2. Representar el diagrama de Bode y la curva polar del circuito, suponiendo el AO ideal.
3. Si el amplificador operacional es real, el diagrama a bloque del esquema corresponde con la figura adjunta. Determinar gráfica y analíticamente el margen de fase.

#### Datos:

Ganancia diferencial en cadena abierta del operacional:

$$A_{do}(s) = \frac{10^5}{(1 + 0.05 \cdot s)(1 + 0.2 \cdot 10^{-6} \cdot s)}$$

1. La ecuación diferencial que determina la dinámica del circuito es:

$$u_s(t) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) u_1(t)$$

$$u_e(t) = u_{c1}(t) + RC_1 \frac{du_{c1}(t)}{dt} \quad u_1(t) = u_e(t) - u_{c1}(t)$$

Aplicando transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad y asociando se conseguirá la ganancia de tensión del circuito:

$$A_V(s) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{sRC_1}{1 + sRC_1}$$

2. El circuito corresponde con un filtro paso alto de primer orden. El trazado de Bode será:

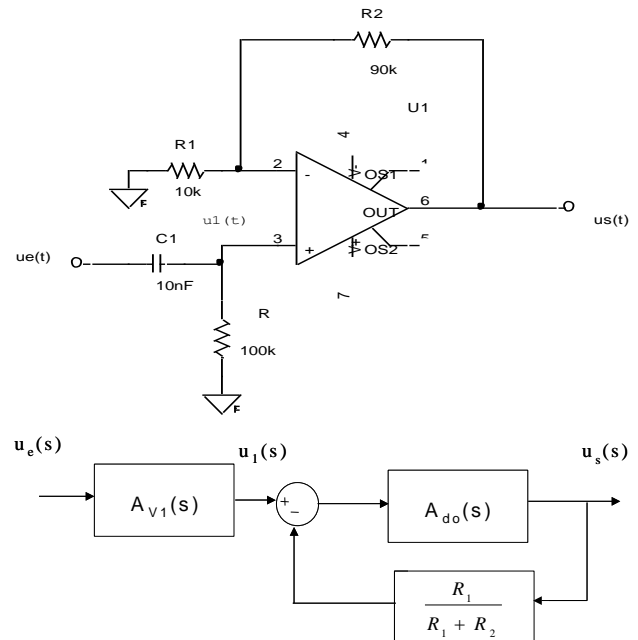
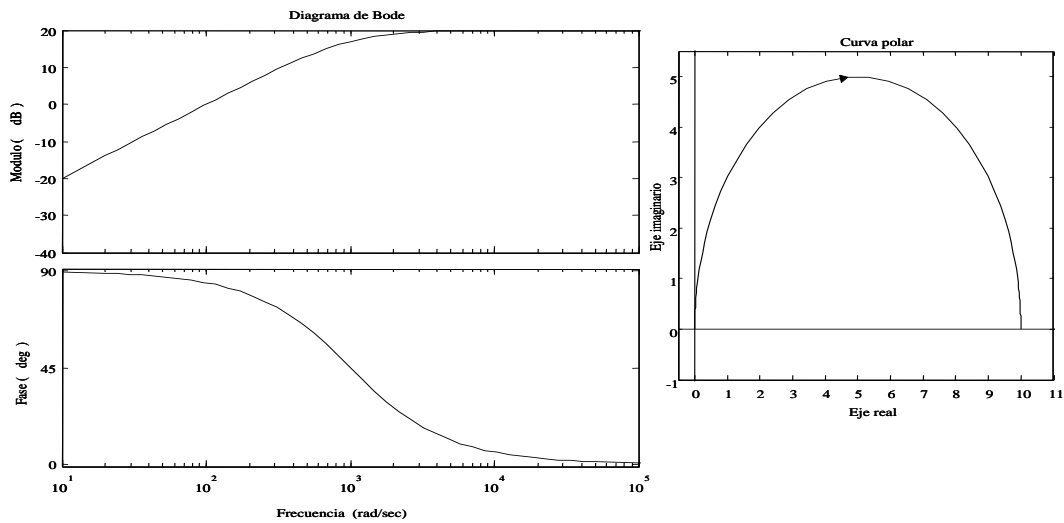
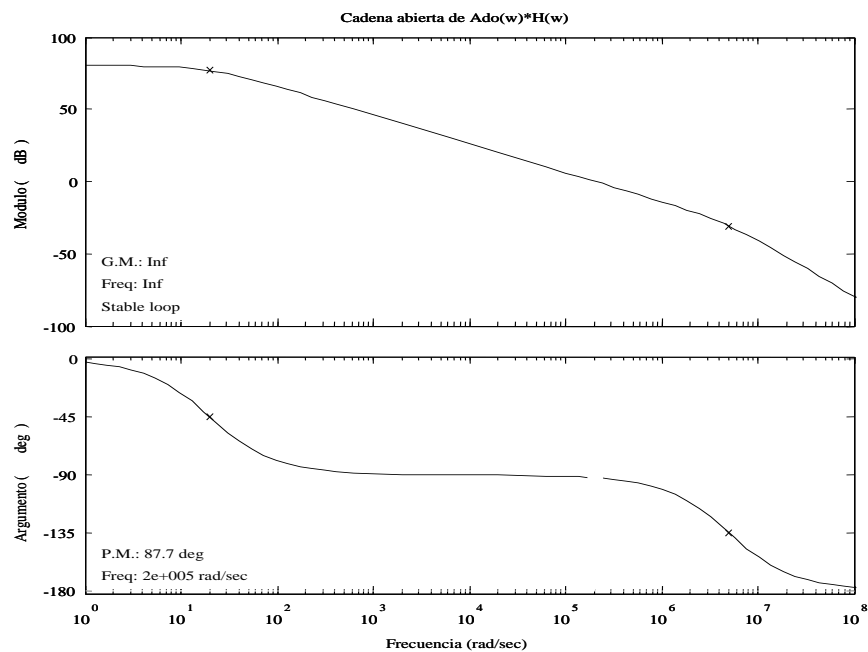


Figura a) Circuito con AO ideal b) Diagrama a bloques del circuito considerando el AO real



3. El margen de fase depende sólo de la estructura de realimentación negativa,  $A_{do}(\omega)H(\omega)$ :

\*Gráficamente:



\*Analíticamente: Cálculo de la frecuencia de cruce de ganancia, cuyo valor debe de estar alrededor de los 200.000 rad/s, según se observa del trazado de Bode:

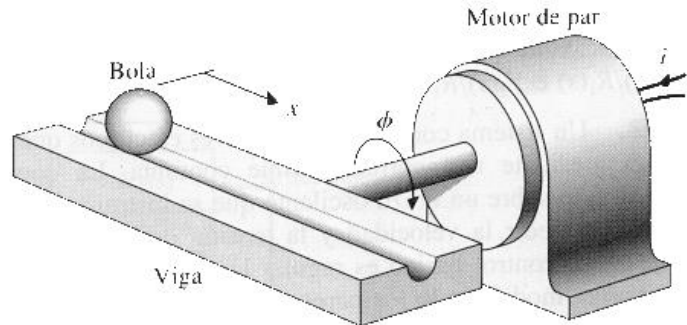
$$|A_{do}(\omega_g)H(\omega_g)| = 1 \Rightarrow 10^8 = (1 + (0.05 \omega_g)^2)(1 + (0.2 \cdot 10^{-6} \omega_g)^2) \Rightarrow \omega_g = 199840 \text{ [rad / s]}$$

Aplicación de la ecuación de margen de fase para sistemas de fase mínima:

$$\gamma = 180 - \left( \arctg(0.05 \omega_g) + \arctg(0.2 \cdot 10^{-6} \omega_g) \right) = 87.71^\circ$$

## Problema 2

El esquema de la figura muestra el sistema de control bola-viga. Se pide:



1. Si el rozamiento es despreciable, demostrar que la FDT linealizada entre la posición de la bola,  $x(s)$ , y el ángulo de la barra,  $\phi(s)$ , para el punto de reposo  $\phi_0=0 \text{ rad}$ , es igual a:

$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta \phi(s)} = \frac{9.8}{s^2}$$

2. Considerando el motor y el sensor de posición de la bola con FDT unitarias, se desea diseñar un compensador que mejore la respuesta del sistema de control realimentado. Representar en diagrama de Bode la respuesta frecuencial de  $\frac{\Delta x(s)}{\Delta \phi(s)}$ . Calcular frecuencia de cruce de ganancia y el margen de fase.

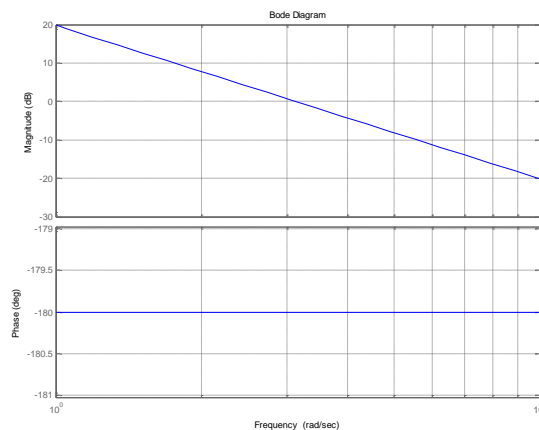
1. La ecuación diferencial que rige un desplazamiento en plano inclinado, sin rozamiento, es:

$$mg \cdot \sin \phi = m \cdot \ddot{x}$$

Las variaciones alrededor del punto de reposo estarán definidas por:

$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta \phi(s)} = \frac{[g \cos \phi]_0}{s^2}$$

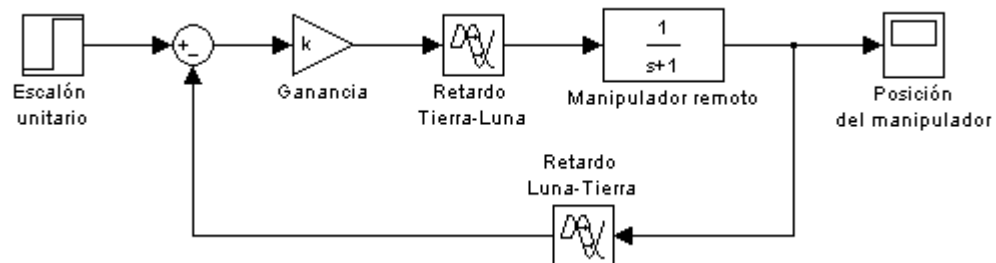
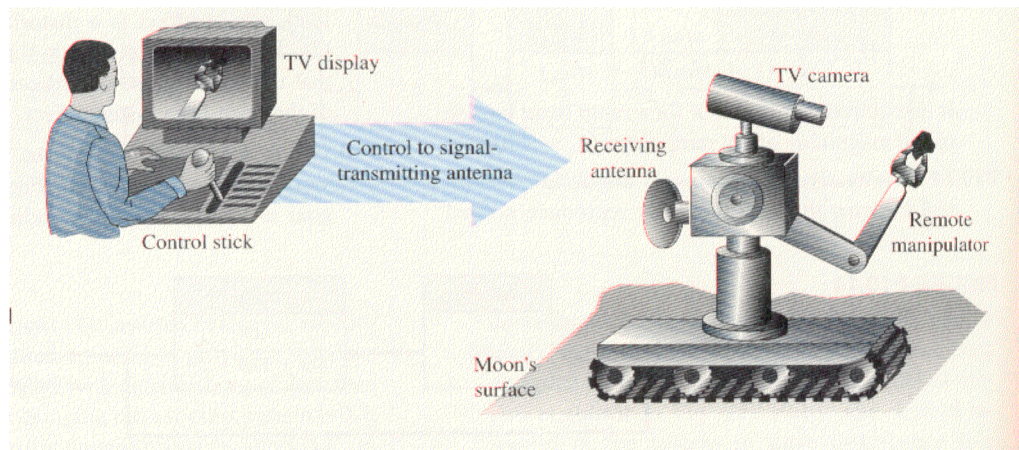
2. La frecuencia de cruce de ganancia será  $\sqrt{9.8} \text{ [rad/s]}$  y el margen de fase será nulo.



**Problema 3**

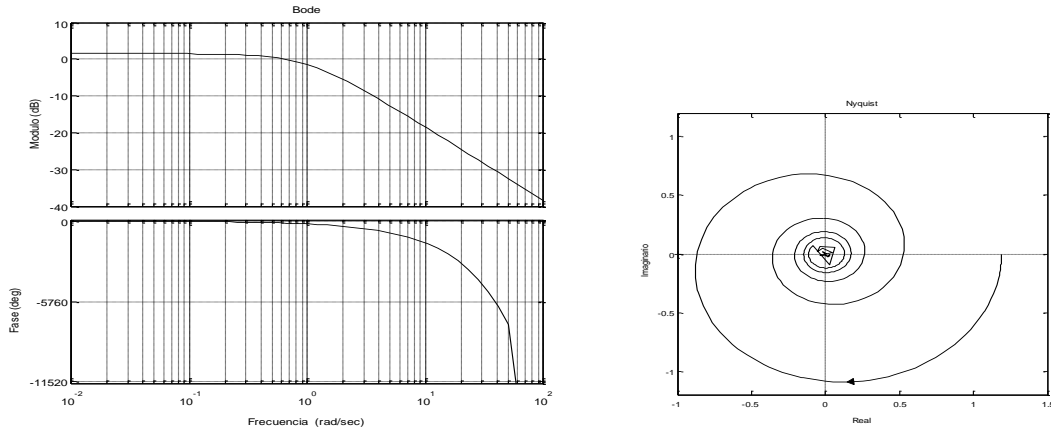
Para la colonización de la luna, la Agencia Europea del Espacio (ESA), trabaja en la teleoperación de robots. Suponiendo que el tiempo de retraso en la transmisión de una señal de comunicación, entre la Tierra y la Luna, es de 1.28 seg. Se pide:

1. Diagrama de Bode y curva polar de la cadena abierta para un valor de  $k$  igual a 1.2.
2. Determinar la ganancia  $k$  de forma que el sistema tenga un margen de fase de aproximadamente de  $50^\circ$ .



1. La FDT de la cadena abierta es:

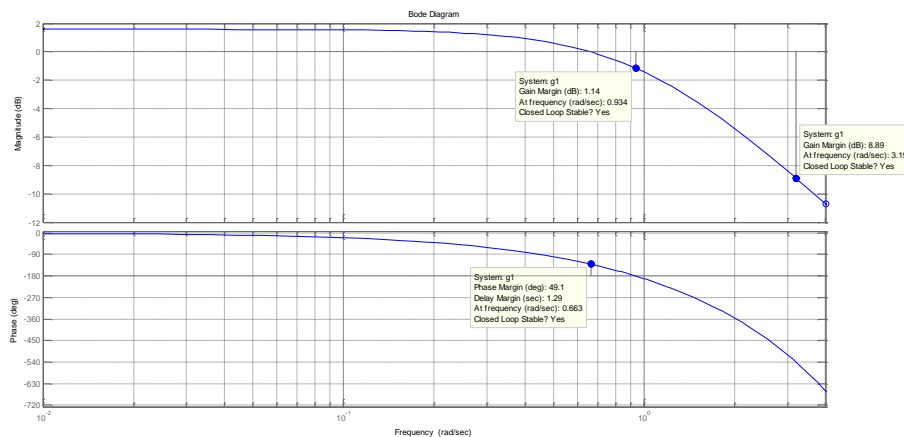
$$G(s)H(s) = 1.2 e^{-2.56 s} \frac{1}{s+1}$$



2. Cuando el ángulo es pequeño el arco tangente y la tangente se aproximan. Esta aproximación se puede considerar, en este apartado, por que la frecuencia de cruce de ganancia es más pequeña que la frecuencia del polo de primer orden:

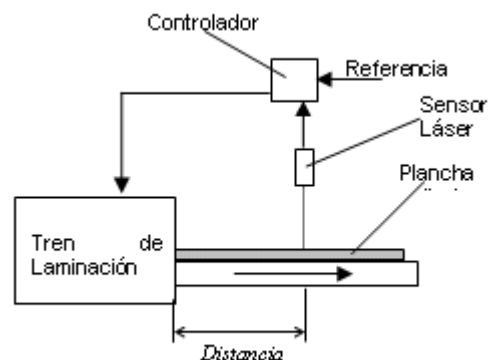
$$\gamma = 50 = 180 - \left( \arctg(\omega_g) + 2T_d \omega_g \right) \frac{180}{\pi} \Rightarrow \omega_g + 2T_d \omega_g \approx \frac{130}{180} \pi \Rightarrow \omega_g \approx 0.63 [\text{rad} / \text{s}]$$

$$\frac{k}{\sqrt{1 + 0.63^2}} = 1 \Rightarrow k = 1.18$$



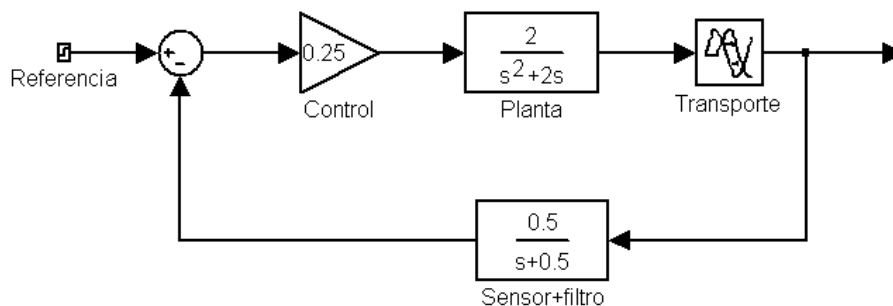
### Problema 4

Se desea analizar el sistema de control de espesor de un tren de laminación. La acción de control se realiza por medio de la regulación de la fuerza que ejercen los rodillos sobre la plancha de acero saliente, de forma que la acción de control regule el espesor del



acero. Para poder realimentar el espesor logrado se dispone de un sensor laser que aguas abajo obtiene una señal proporcional al grosor. El valor medido es necesario filtrarlo para eliminar la componente de alta frecuencia debido a las imperfecciones superficiales de la lámina saliente. Finalmente, la señal obtenida se compara con una referencia y el error se utiliza para actuar según una acción proporcional ( $K=0.25$ ) sobre el tren de laminado. En las figuras siguientes se muestran el esquema del sistema y el diagrama de bloques correspondiente.

Puesto que el sensor está situado a cierta distancia  $d$  respecto de la salida del tren de laminación, existe un retardo debido al transporte que dependerá de la distancia, puesto que la velocidad de salida de la plancha se considerará constante e igual a **1 metro por segundo** en las condiciones nominales.

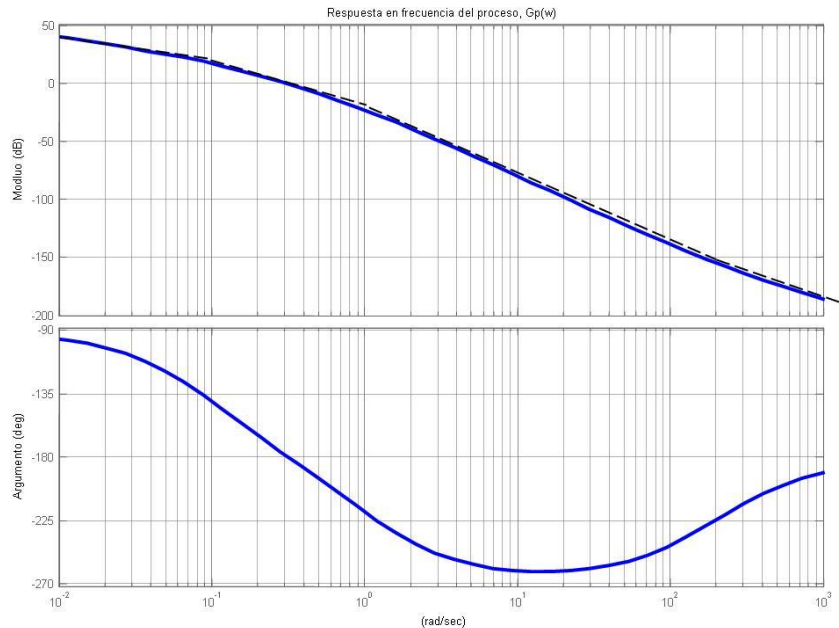


### Se pide:

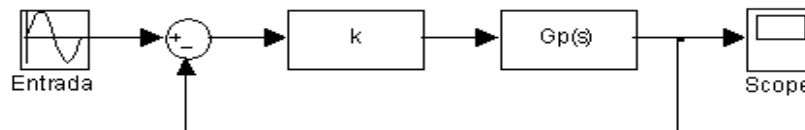
- 1.- Calcular los errores de posición, velocidad y aceleración del sistema.
- 2.- Pintar la respuesta en frecuencia del sistema en cadena abierta considerando la distancia de medida nula y por tanto que no hay retardo en la medida. Trazar el diagrama de bode asintótico y el diagrama polar.
- 3.- Obtener el Margen de fase y el Margen de ganancia para las condiciones anteriores. Demostrar que la frecuencia de cruce de ganancia es de **0.035 Hz** y que la frecuencia de cruce de fase es de **0.16 Hz**.
- 4.- Para evitar oscilaciones excesivas se quiere asegurar que el margen de fase no supere los 50°. ¿Cuál es la distancia máxima admisible a la que puede situarse el sensor?. ¿A qué distancia se vuelve inestable el sistema?.

**Problema 5**

Sobre la estructura mecánica de un puente se ha realizado experimentalmente un ensayo de respuesta en frecuencia, cuyos resultados aparecen en la figura adjunta,  $G_p(\omega)$ . Para mejorar la dinámica del puente se realizar un control de realimentación unitaria con ganancia variable. Determinar:



1. Función de transferencia del sistema,  $G_P(s)$ .
2. Para  $k=1$ , determinar el error del régimen permanente del sistema ante una entrada en escalón, rampa y parábola unitaria.
3. Con el valor de ganancia del apartado anterior determinar gráficamente y analíticamente el margen de fase y de ganancia.
4. Determinar el valor de ganancia a emplear,  $k$ , para que el margen de fase sea de  $45^\circ$ . ¿Cuánto vale la frecuencia de cruce de ganancia?



1. La observación del Bode indica que el sistema está constituido por un polo en el origen, dos polos de primer orden y un cero de primer orden:

$$G_p(\omega) = 1 \cdot \frac{\left(1 + j\omega \frac{1}{2 \cdot 10^2}\right)}{j\omega \left(1 + j\omega \frac{1}{10^{-1}}\right) \left(1 + j\omega \frac{1}{10^0}\right)} \Rightarrow G_p(s) = \frac{0.5 \cdot 10^{-3} (s + 200)}{s(s + 0.1)(s + 1)}$$

2. El sistema es de tipo 1, por tanto, el error al escalón será nulo y para la parábola es infinito. Para la rampa es:

$$e_v = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot k \cdot G_p(s)} = 1$$



3. Según el Bode, las frecuencias de cruce de ganancia y de frecuencia coinciden en 0.3 [rad/s], luego el margen de fase es de nulo,  $0^\circ$ , y el margen de ganancia es prácticamente 0 dB. Analíticamente será:

$$\begin{aligned} \left| k \cdot G_p(\omega_g) \right| &= 1 & \omega_g &= 0.301 \text{ [rad / s]} \Rightarrow \gamma = 1.67^\circ \\ \arg(k \cdot G_p(\omega_f)) &= 180^\circ & \omega_f &= 0.317 \text{ [rad / s]} \Rightarrow k_g = 0.87 \text{ dB} \end{aligned}$$

4. Si se desea  $45^\circ$  de margen de fase y al variar sólo la ganancia estática, habrá que observar a qué frecuencia el desfase introducido por la cadena abierta es de  $-135^\circ$ . Según la gráfica de argumento sucede aproximadamente a 0.08[rad/s]. Para que esta frecuencia sea de cruce de ganancia, se tendrá que compensarla, de forma que si la ganancia a esta frecuencia es de aproximadamente 20dB, esto es, una amplificación de 10; el valor de k deberá de ser de 0.1.

### Problema 6

El esquema de la figura muestra el sistema elevación de un avión. Bajo ciertas simplificaciones, la FDT entre el timón de cola y la elevación de la aeronave es:

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{1.151s + 0.1775}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s}$$

Se pide:

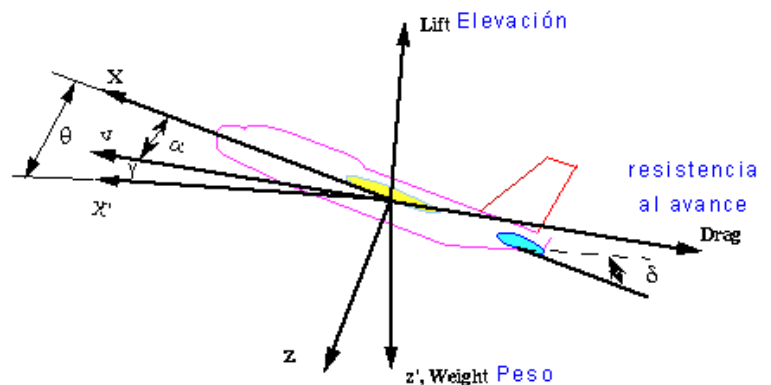
1. Dibujar el diagrama de bode.
2. Representar la curva polar.

3. Si se realimenta unitariamente, calcular las frecuencias de cruce de ganancia y fase, junto a los márgenes de fase y ganancia.

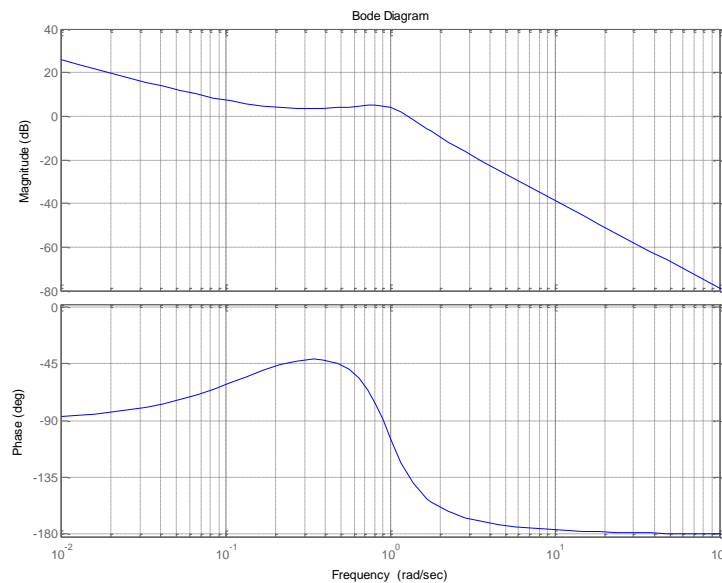
1. Se procede, en primer lugar, a expresar la FDT en términos normalizados de respuesta en frecuencia:

$$\frac{\theta(\omega)}{\delta(\omega)} = \frac{1.151\omega + 0.1775}{\omega^3 + 0.739\omega^2 + 0.921\omega} = \frac{0.1775(1 + j\omega \cdot 6.4845)}{j\omega \cdot 0.921 \left[ \left( \frac{j\omega}{0.9597} \right)^2 + 2 \cdot 0.385 \left( \frac{j\omega}{0.9597} \right) + 1 \right]}$$

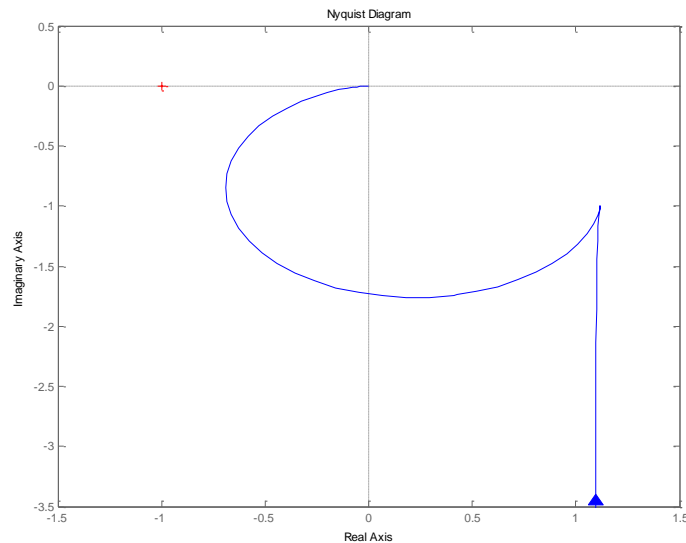
El sistema está definido por una ganancia estática, un polo en el origen, un cero de primer orden y un polo de segundo orden. La frecuencia del cero está a 0.154 [rad/s]



y la frecuencia natural del polo está a 0.96 [rad/s]. Se puede considerar sus trazados de manera independiente por estar separados casi una década. Se empieza a una frecuencia de  $10^{-2}$  [rad/sg], una frecuencia a una década del cero, la contribución del cero y del polo de segundo orden son despreciables; a esta frecuencia el módulo es de 25.7 dB y el argumento prácticamente  $-90^\circ$ . Por este punto, se trazará, en el módulo, una recta de pendiente de  $-20$  dB/década. Con la entrada de cero, el trazado asintótico del módulo pasa a una pendiente nula hasta alcanzar la frecuencia natural del polo que pasará a una pendiente de  $-40$  dB/década. En cuanto al argumento, pasará de  $-90^\circ$  a  $0^\circ$  con el cero y a  $-180^\circ$  con el polo de segundo orden.



2. Para el trazado de la curva polar se observa, desde el diagrama de Bode, que la curva pasará por el cuarto y tercer cuadrante. A bajas frecuencias viene desde  $-j\infty$  y acaba en las altas frecuencias en  $-0+j0$ . También se observa que corta con el eje imaginario con un módulo mayor a la unidad.



3. Del diagrama de Bode se observa que la frecuencia de cruce de fase tiende a infinito y por tanto el margen de ganancia también tiende a infinito. En cuanto a la frecuencia de cruce de ganancia está alrededor de 1.5 [rad/s] y el margen de fase alrededor de 45°. La determinación analítica de la frecuencia de cruce de ganancia será:

$$\frac{0.1775 \sqrt{1 + (\omega_g \cdot 6.4845)^2}}{\omega_g \cdot 0.921 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_g}{0.9597}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot 0.385 \left(\frac{\omega_g}{0.9597}\right)\right)^2}} = 1 \rightarrow \omega_g = 1.27 [\text{rad} / \text{s}]$$

Y el margen de fase será:

$$\gamma = 180 + \arg(G(\omega_g)) = 180 - 90 + \arctg(6.48 \cdot \omega_g) - \arctg\left(\frac{0.8 \cdot \omega_g}{1 - 1.08 \cdot \omega_g^2}\right) = 46.9^\circ$$

Derecho de Autor © 2014 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU". La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](#) para [contenidos abiertos](#). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>