5 Análisis en el dominio temporal

En los anteriores capítulos se afirmaba que el primer paso del análisis o del diseño de un sistema de control era deducir un modelo matemático. Una vez obtenido éste, se va a iniciar el estudio en la predicción dinámica de la salida de un sistema ante una entrada determinada. En este marco temporal, hay que saber diferenciar en la respuesta temporal dos partes: una respuesta transitoria y otra en el régimen permanente. Cada una de ellas están asociadas a características del sistema tales como la rapidez, la estabilidad o la propia precisión del sistema.

La respuesta ante una excitación cualquiera debe ser estudiada para analizar la gobernabilidad del equipo. Pero en la práctica no es conocido a priori el tipo de entrada que va a recibir el sistema de control. Sin embargo, al analizar y diseñar estos sistemas se necesita de una base para comparar el comportamiento de los sistemas. A tal propósito se presentan las señales de test más utilizadas, haciendo especial hincapié en las entradas en escalón, rampa y parábola.

Por último, si se considera que el sistema es lineal e invariante, se comprobará que los polos de la función de transferencia definen la naturaleza de la respuesta del régimen transitorio.

Son tres aspectos los que se abordarán en esta lección: la distinción entre la respuesta transitoria y la permanente, las señales de prueba y la influencia de la ubicación de los polos del polinomio característico con la respuesta del régimen transitorio.

5.1 Respuesta temporal de un sistema: respuesta transitoria y en régimen permanente

En la mayoría de los sistemas de control, sus respuestas se evalúan en el dominio temporal. Podría citarse, por ejemplo, el tiempo que tarda un motor en alcanzar su velocidad nominal o el tiempo que tarda una antena en colocarse en una posición determinada.

La respuesta en el tiempo se divide normalmente en dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en el estado estable:

$$y(t) = y_{rt}(t) + y_{rp}(t) \tag{5. 1}$$

La respuesta del régimen transitorio cesa cuando el tiempo se hace suficientemente grande respecto a los parámetros temporales del sistema:

$$\lim_{t\to\infty} y_{rt}(t) = 0 \tag{5. 2}$$

La respuesta del régimen permanente permanece después de que la transitoria ha desaparecido:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_{rp}(t) = y_{ss}(t) \tag{5. 3}$$

Si el modelo dinámico del sistema es una ecuación diferencial, la solución de la homogénea corresponde con la respuesta transitoria y la solución particular con el régimen permanente.

Todos los sistemas de control reales presentan una respuesta transitoria antes de alcanzar la respuesta del estado estable. La masa, la inercia, las bobinas, los condensadores, etc., no pueden seguir los cambios súbitos en la entrada de forma instantánea. En general, aquellos elementos que almacenan algún tipo de energía no pueden transferirla instantáneamente, requieren de un tiempo. Esta idea intuitiva de la Física, hace entender que al estimular a los sistemas de control, éstos necesitarán un tiempo en alcanzar los valores deseados.

La respuesta del régimen transitoria define la rapidez del sistema, su estabilidad y las oscilaciones alrededor del estado permanente. Por contra, la respuesta del régimen permanente determina el estado estable del sistema, su valor nominal de funcionamiento y el error cometido. Al recordar que los sistemas de control deben de seguir a la señal de mando, la diferencia entre la señal de referencia y la de salida cuantificará la precisión del equipo.

5.2 Señales de prueba

A veces las entradas a las que van a ser sometidos los sistemas de control no se conoce con anticipación. A priori no hay forma de saber cómo se va a dirigir el timón de un barco, qué señales eléctricas llegarán a la entrada de un amplificador o cuál será la variación del acelerador de un vehículo. En cambio, hay casos donde si se sabe que tipo de excitación van a recibir. Por ejemplo, la señales de referencia de una fuente conmutada o la temperatura de un termo; éstas más o menos están bien definidas en el tiempo y se suelen corresponder con señales de tipo escalón.

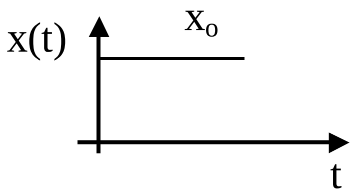
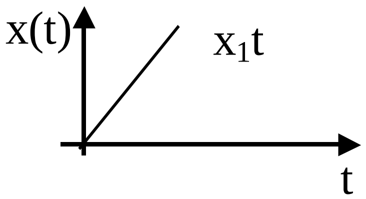
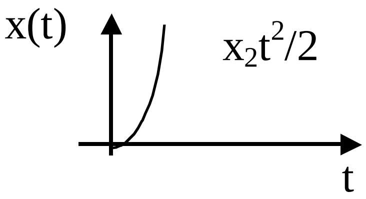
La falta de conocimiento a priori, en la mayoría de los casos, sobre la evolución temporal de la señal de entrada, provoca dificultades tanto para el análisis como para el diseño de los sistemas de control.

Para señales de entrada que no presenten excesivas variaciones en el tiempo, éstas pueden ser representadas mediante el truncamiento de la serie de Taylor para los términos superiores a segundo grado:

$$x(t) \cong x_0 + x_1 t + x_2 \frac{t^2}{2} \tag{5. 4}$$

siendo x_0, x_1 y x_2 los coeficientes constantes asociados a los tres tipos de señales básicas. Se plantea que la señal de entrada puede ser modelada como una combinación lineal de señales de prueba deterministas: escalón, rampa y parábola. De forma que para evaluar el comportamiento del sistema de control se emplean estas tres señales de prueba o de test. En el cuadro 5.1 se hace un sumario de estas tres señales, indicando su expresión en el tiempo y su transformada de Laplace.

Cuando el sistema es LTI y por aplicación del teorema de superposición, la respuesta ante una entrada compleja puede ser descompuesta en aquellas debidas a las señales de pruebas simples.

Gráfica	modelo temporal	Transformada de Laplace
	$x(t)=\begin{cases} x_0 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$	$x(s)=\dfrac{x_0}{s}$
	$x(t)=\begin{cases} x_1 t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$	$x(s)=\dfrac{x_1}{s^2}$
	$x(t)=\begin{cases} x_2\dfrac{t^2}{2} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$	$x(s)=\dfrac{x_2}{s^3}$

Cuadro 5. 1. Señales de prueba

5.3 Polinomio característico. Influencia de la respuesta transitoria

Para los equipos de control, cuya FDT sea del tipo LTI, ésta se definirá, como ya se vio en el capítulo 3, como un cociente entre los polinomios de numerado y del denominador, donde los coeficientes son constantes:

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+...+b_ms^m}{a_0+a_1s+...+a_ns^n} \qquad n\geq m \tag{5. 5}$$

Al denominador de la FDT global del sistema se le denomina polinomio característico. Las raíces del polinomio característico van a definir el comportamiento de la respuesta transitoria. Con el objeto de comprobarlo, supóngase un sistema LTI cualquiera ante una entrada en escalón unitario. Por aplicación del teorema de la convolución, la transformada de Laplace de la señal de salida será:

$$Y(s)=X(s)G(s)=\frac{1}{s}\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{s\prod_{i}(s+p_i)\prod_{j}\left(s^2+2\xi_j s+\omega_{n,j}{}^2\right)} \tag{5. 6}$$

A G(s) se le ha aplicado, en el denominador, una descomposición en polos de primer y segundo orden. La antitransformada se conseguirá a partir del cálculo de los residuos de las fracciones simples obtenidas:

$$Y(s)=\frac{k_1}{s}+\sum_i\frac{k_i}{s+p_i}+\sum_j\frac{k_j s+L_j}{s^2+2\alpha_j s+\omega_{n,j}{}^2} \tag{5. 7}$$

La salida corresponderá con un sumatorio de salidas parciales. Los polos de primer orden se corresponden con exponenciales en el tiempo deducidos a partir del teorema de traslación compleja. En cambio, los sistemas de segundo orden siguen a una combinación entre una exponencial y una oscilación:

$$y(t)=k_1+\sum_i k_i e^{-p_i t}+\sum_j L_j M_j e^{-\alpha_j t} sen\left(\sqrt{\omega_{n,j}{}^2-\alpha_j}\cdot t+\vartheta_j\right), \tag{5. 8}$$

donde los coeficientes M_j, y ϑ_j de los polos de segundo orden son:

$$M_j=\sqrt{\frac{1-2a\alpha_i+a^2\omega_{n,j}{}^2}{\omega_{n,j}{}^2-\alpha_j^2}} \qquad \alpha_j=\frac{k_j}{L_j} \tag{5. 9}$$

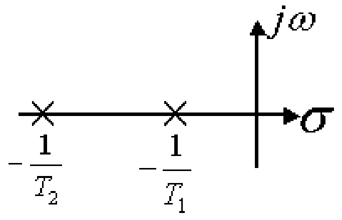
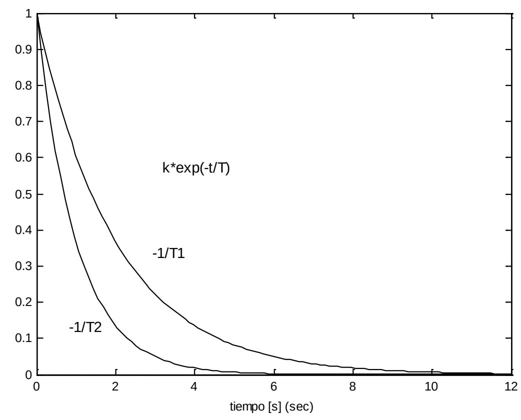
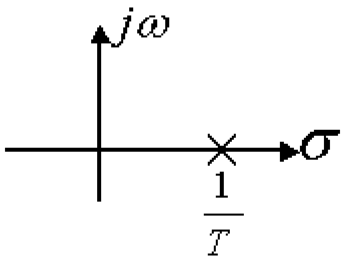
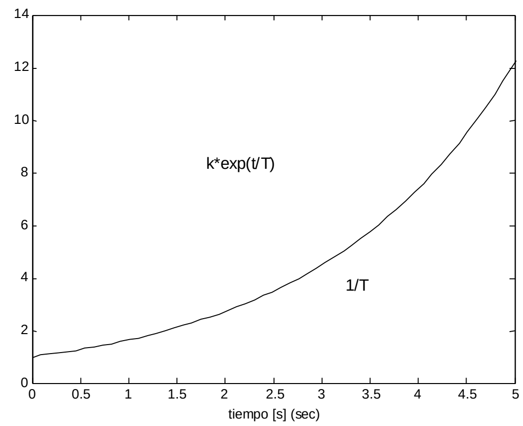
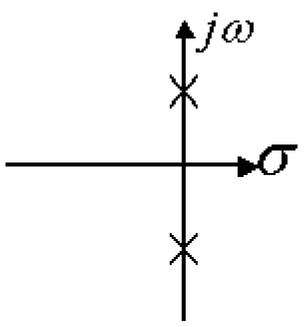
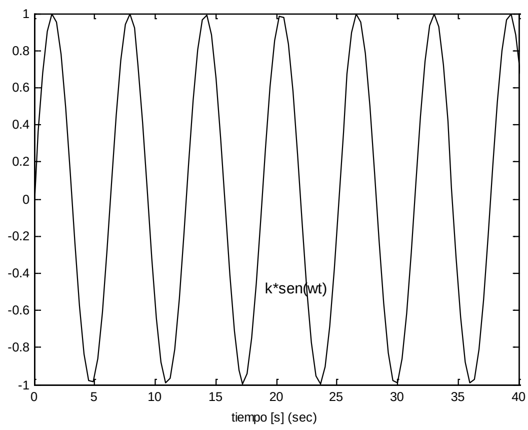
$$\vartheta_j=arctg\left(\frac{a\sqrt{\omega_{n,j}{}^2-\alpha_j{}^2}}{1-a\alpha_j}\right) \tag{5. 10}$$

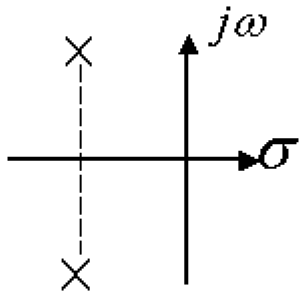
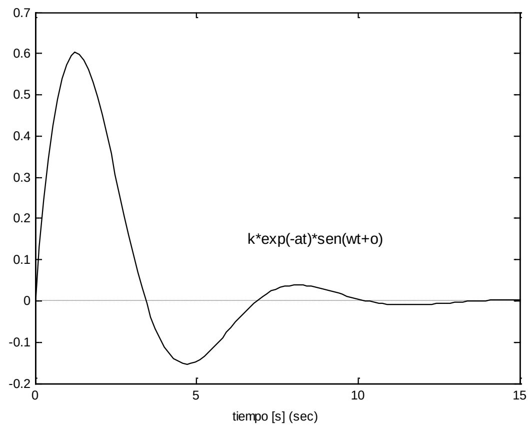
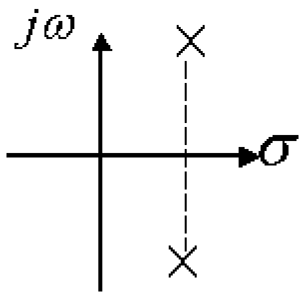
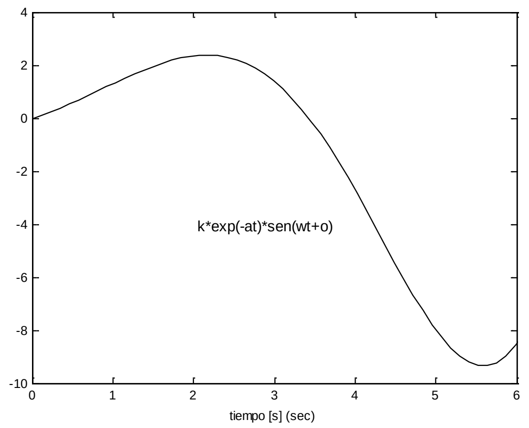
Para que la señal de salida esté acotada ante una entrada acotada, i. e. para que el sistema sea estable, se exige que todos sus polos de *G(s)* deban de estar en el dominio complejo negativo. Las partes reales de las raíces del polinomio característico deben ser negativas, de forma que las exponenciales sean monótonamente decrecientes en el tiempo. En caso contrario, serían crecientes con el tiempo y la salida no estaría acotada. Cuando al menos hay un polo en el semiplano positivo, el sistema será inestable o de salida no acotada.

El sistema oscilaría constantemente si los polos son raíces imaginarias y conjugadas. La señal de salida ante una entrada en escalón sería un armónico, cuyo valor medio sería el nivel del escalón. A esta situación se le llama críticamente estable.

La respuesta del sistema se atenuará más rápidamente con el tiempo, cuanto más alejados se encuentren los polos, con la parte real negativa, del eje imaginario. Por último, la frecuencia de oscilación alrededor de valor final, aumentará cuando los polos complejos y conjugados se encuentren a mayor distancia del eje real.

En el cuadro 5.2 se sintetiza la respuesta impulsional debido a la ubicación de los polos del sistema.

<table>
<tr><th>Situación del polo</th><th>Respuesta al impulso</th><th>Sistema</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>ESTABLE</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>INESTABLE</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>CRÍTICAMENTE ESTABLE</td></tr>
</table>

		ESTABLE
		INESTABLE

Cuadro 5. 2. Respuesta impulsional de los polos según su ubicación en el dominio complejo *s*