MOMENTO CINÉTICO DE UN SISTEMA
ROTACIÓN DEL SISTEMA

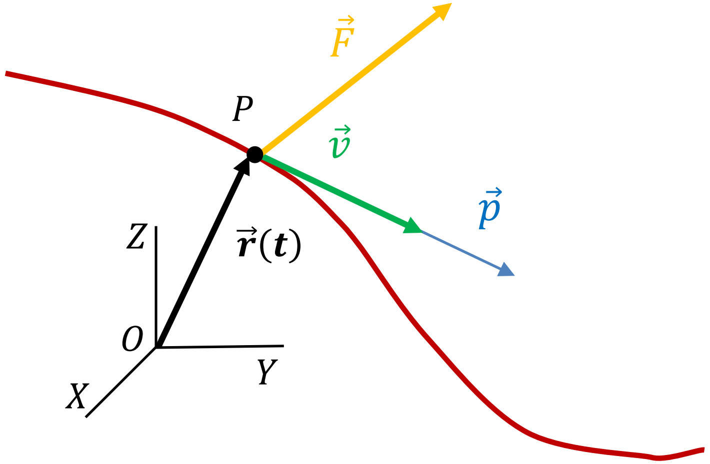
TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

Recordatorio

- **MOMENTO CINÉTICO DE UNA PARTÍCULA** – se define como el momento central respecto de un punto del vector cantidad de movimiento.

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}||\vec{v}|m \cdot sen\alpha$$



- **TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{v} \parallel m\vec{v}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

La variación del momento cinético para móviles de masa constante es debido al momento de las fuerzas exteriores

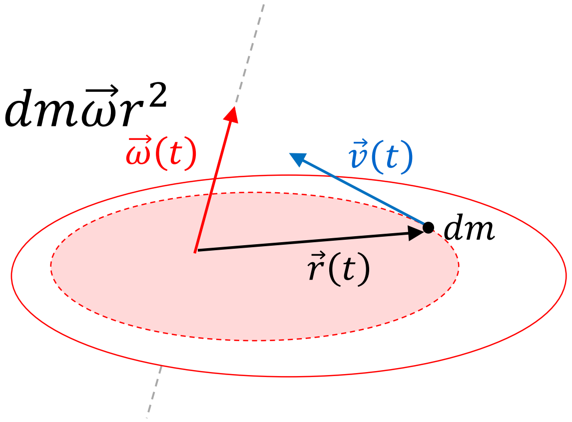
- **MOMENTO CINÉTICO DE UN SISTEMA** – si consideramos que nuestro sistema tiene una rotación pura (no hay traslación).

$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm\vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm(\vec{\omega} \times \vec{r}) = dm[\vec{\omega} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}_{=0}] = dm\vec{\omega}r^2$$

$\vec{r} \perp \vec{\omega}$



Extendemos esta expresión a todo el sistema

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{\omega}r^2dm = \vec{\omega}\int r^2dm = \vec{\omega}I$$

Es igual para todos los dm

$$\boxed{\vec{L} = \vec{\omega}I}$$

Momento cinético del sistema

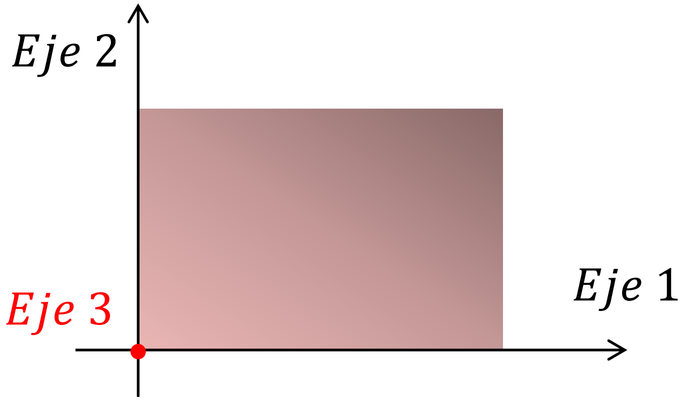
$$\boxed{I = \int r^2dm}$$

Momento de Inercia

Cálculo del momento de inercia

❖ El momento de inercia es una característica constructiva del sistema, ya que depende de su masa y sus dimensiones.

$$I = \int r^2 dm$$

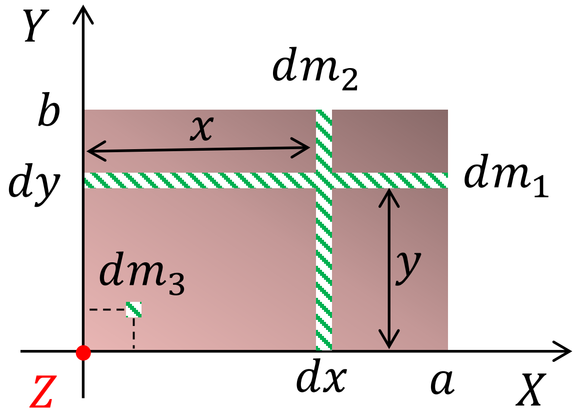


r representa la distancia de la masa al eje

1. Tomando un diferencial de masa dm_1 que se sitúa a una distancia y del eje X

$$I_x = \int r^2 dm = \int y^2 dm = \int_0^b y^2 \sigma a dy = \sigma a \left.\frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{1}{3} m b^2$$

$dm_1 = \sigma a dy$ $\qquad$ $m = \sigma a b$

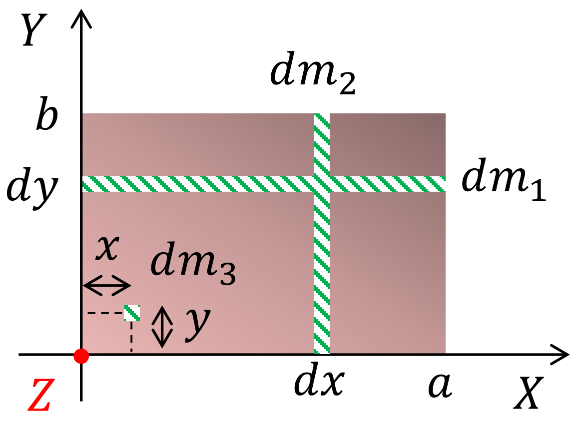


2. Tomando un diferencial de masa dm_2 que se sitúa a una distancia x del eje Y

$$I_y = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int_0^a x^2 \sigma a dy = \sigma b \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3} m a^2$$

$dm_2 = \sigma b dy$ $\qquad$ $m = \sigma a b$

Cálculo del momento de inercia



3. Tomando un diferencial de masa dm_3 que se sitúa a una distancia y del eje X, x del eje Y

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_x + I_y$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$a > b$

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \frac{1}{3} m(a^2 + b^2) \\ I_x &= \frac{1}{3} m b^2 \\ I_y &= \frac{1}{3} m a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_z > I_y > I_x$$

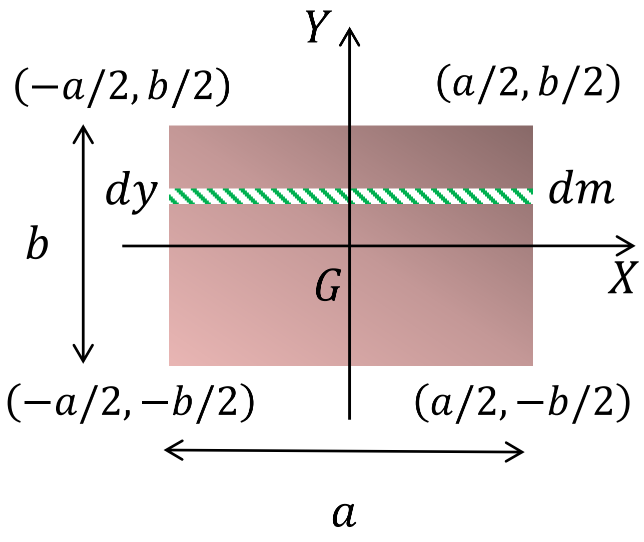
La placa de nuestro ejemplo tiene tantos momentos de inercia como posibles ejes

El momento de inercia I representa una oposición a la rotación, que cambia en función de donde situemos el eje

TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

Teorema de Steiner

❖ Vamos a considerar una familia de ejes que va a tener unas características especiales. ¿Qué pasa si el eje de rotación pasa por el $c.d.m.$ (G)?



$$I_{xG} = \int r^2 dm = \int y^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \sigma a dy = \sigma a \frac{y^3}{3}\Bigg]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12} mb^2$$

$dm = \sigma a dy$ $\qquad$ $m = \sigma a b$

$$I_{xG} < I_x$$

Los ejes que pasan por el $c.d.m.$ siempre son los de menor momento de inercia I

Si hacemos la diferencia entre ambos:

$$I_x - I_{xG} = \frac{1}{3} mb^2 - \frac{1}{12} mb^2 = \frac{3}{12} mb^2 = m\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$\frac{b}{2}$ es la distancia que hemos desplazado el eje X al llevarlo al $c.d.m.$

$$I_x = I_{xG} + m\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

❖ **Teorema de Steiner** – El momento de inercia de un sistema material respecto a un eje es igual al momento de inercia respecto al $c.d.m.$ más el producto de la masa del sistema por la distancia al cuadrado entre ambos ejes.

$$\boxed{I = I_G + mD^2}$$

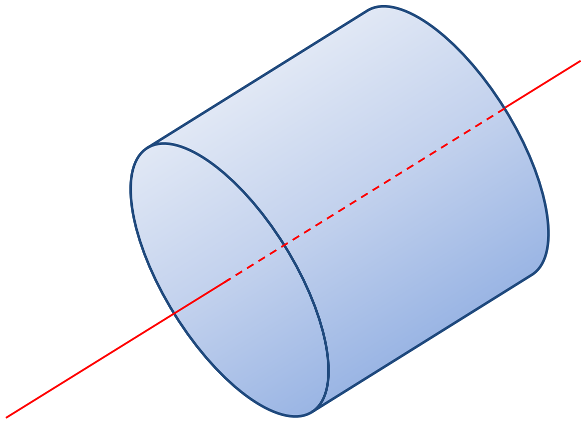
Dado que los menores momentos de inercia son que se toman respecto a ejes que pasan por el $c.d.m.$, cuando desplazamos el eje del $c.d.m.$ el momento de inercia aumenta.

Una vez conocido I_G podemos obtener cualquier otro I de forma sencilla.

TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

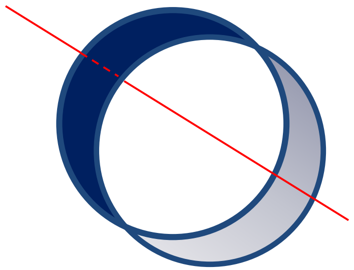
Momentos de inercia de sólidos habituales

- Los momentos de inercia que nos debemos saber son los siguientes:



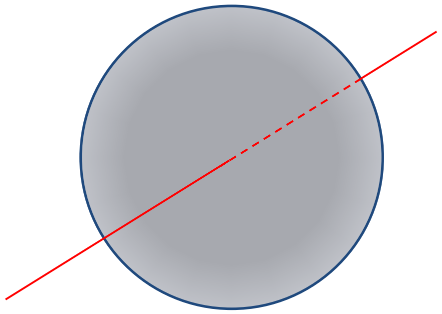
Cilindro sólido o disco, eje simétrico

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$



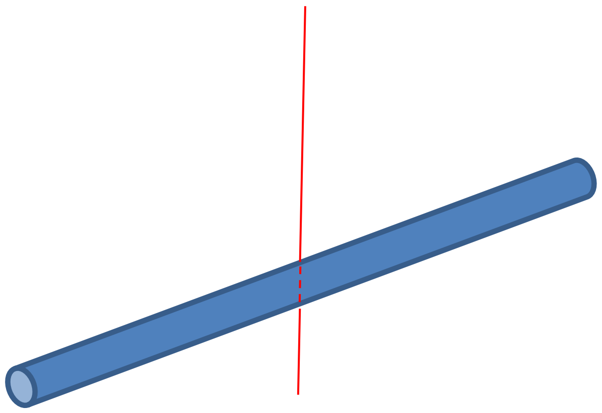
Anillo sobre un eje simétrico

$$I = m R^2$$



Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$



Varilla con eje sobre el centro

$$I = \frac{1}{12} m L^2$$

TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

Teorema del momento cinético

❖ Teorema del momento cinético

- Momento cinético de una partícula $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}dm$

- Momento cinético de un sistema $\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}dm$

Derivamos respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int \vec{r} \times \vec{v}dm\right) = \int \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}dm + \int \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}dm = \int \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0}dm + \int \vec{r} \times \vec{a}dm = \int \vec{r} \times \vec{F}$$

m no cambia con t

El conjunto de fuerzas con el que vamos a trabajar es un conjunto discreto, la expresión anterior se convierte en:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)}$$

La variación del momento cinético es la suma de los momentos centrales de las fuerzas exteriores

TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

❖ El momento cinético respecto al eje de rotación E

$$\vec{L}_E = I_E \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_E}{dt} = \frac{d}{dt}(I_E \vec{\omega}) = I_E \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_E \vec{\alpha}$$

I no cambia con t

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_E}{dt} &= \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \\ \frac{d\vec{L}_E}{dt} &= I_E \vec{\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = I_E \vec{\alpha}}$$

El momento de las fuerzas exteriores respecto al eje de rotación es igual al producto de la aceleración angular por el momento de inercia respecto a ese eje.

TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

- Si: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; I\vec{\omega} = cte.$

Si no hay momento de las fuerzas exteriores el momento cinético se conserva.

Por tanto el producto $I\vec{\omega} = cte$.

Dado que I es una característica constructiva en principio no cambia, entonces $\vec{\omega} = cte$

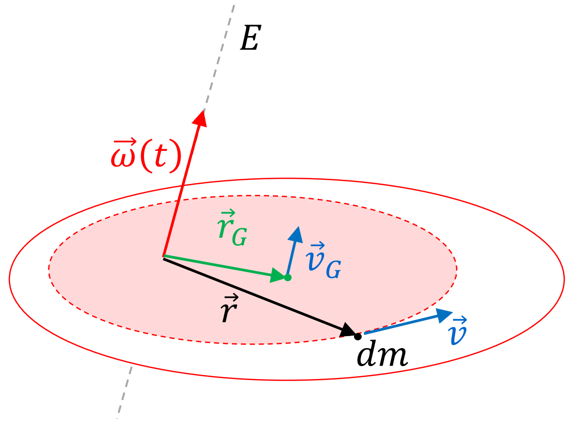
Un sistema que esta rotando en ausencia de fuerzas exteriores, sigue rotando con el mismo vector velocidad angular $\vec{\omega}$, en la misma dirección, mismo sentido y mismo módulo.

TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

❖ TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO AL $c.d.m.$

Partimos del momento de inercia respecto a el eje *E* y aplicamos el Teorema de Steiner:

$$\left.\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{\omega} I \\ I &= I_G + m|\vec{r}_G|^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{\omega} I_G + \vec{\omega} m |\vec{r}_G|^2$$



Hacemos:

$$\vec{r}_G \times \vec{v}_G = \vec{r}_G \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_G \cdot \vec{r}_G) - \vec{r}_G \underbrace{(\vec{r}_G \cdot \vec{\omega})}_{=0} = \vec{\omega} |\vec{r}_G|^2$$

$\vec{r}_G \perp \vec{\omega}$

Sustituyendo

$$\vec{L} = \vec{\omega} I_G + m(\vec{r}_G \times \vec{v}_G) = \vec{\omega} I_G + \vec{r}_G \times m \vec{v}_G$$

Teorema del momento cinético respecto al $c.d.m.$

❖ Teorema del momento cinético respecto al $c.d.m.$ (cont.)

Reformulamos la expresión del momento de las fuerzas

$$\left.\begin{aligned}\sum_i (\vec r_i \times \vec F_i) &= I\vec\alpha \\ I &= I_G + m|\vec r_G|^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_i (\vec r_i \times \vec F_i) = I_G\vec\alpha + m|\vec r_G|^2\vec\alpha$$

Hacemos:

$$\vec r_G \times \vec a_G = \vec r_G \times (\vec\alpha \times \vec r_G) = \vec\alpha\cdot(\vec r_G \cdot \vec r_G) - \vec r_G\underbrace{(\vec r_G\cdot\vec\alpha)}_{=0} = \vec\alpha|\vec r_G|^2$$

$$\vec r_G \perp \vec\alpha$$

Sustituyendo

$$\boxed{\sum_i (\vec r_i \times \vec F_i) = I_G\vec\alpha + \vec r_G \times m\vec a_G}$$

1er Teorema de Köning