

# TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

**8.1** Concepto de campo.

**8.2** Circulación elemental. Trabajo.

**8.3** Trabajo de una fuerza constante.

**8.4** Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria

**8.5** Trabajo de la normal y del rozamiento.

**8.6** Teorema de la energía cinética.

**8.7** Potencia.

**8.8** Choques.

# Concepto de campo

- ❖ **CAMPO** – en una región del espacio existe un campo cuando a cada punto de la misma se le puede asociar un valor y sólo uno de una magnitud física.

Esta magnitud puede ser:

➤ Escalar  Campo escalar  $U = U(x, y, z)$

➤ Vectorial  Campo vectorial  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$

En el caso de ser una fuerza se denomina Campo de fuerzas

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$$

Un ejemplo:

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

**8.1**

Concepto de campo.

**8.2**

**Circulación elemental. Trabajo.**

**8.3**

Trabajo de una fuerza constante.

**8.4**

Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria

**8.5**

Trabajo de la normal y del rozamiento.

**8.6**

Teorema de la energía cinética.

**8.7**

Potencia.

**8.8**

Choques.

# Circulación elemental. Trabajo

- ❖ **CIRCULACIÓN ELEMENTAL DE UN VECTOR** – es el producto de dicho vector por el desplazamiento elemental.

$$dW = \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

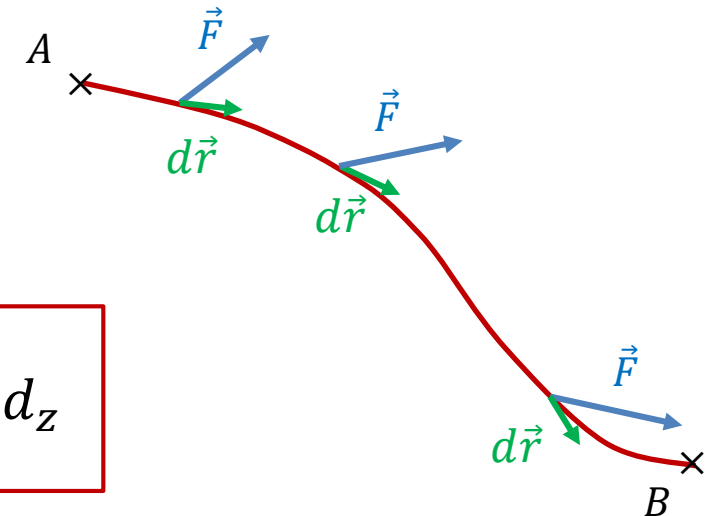
- ❖ **CIRCULACIÓN DE UN VECTOR ENTRE DOS PUNTOS:**

$$\int_A^B dW = W_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{r}$$


- Si se trata de una fuerza  $\vec{F}$  la circulación recibe el nombre de **TRABAJO**

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$
$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



## ❖ TIPOS DE TRABAJO

- $W > 0$  Trabajo positivo o trabajo motor
- $W < 0$  Trabajo negativo o trabajo resistente
- $W = 0$  Trabajo nulo   $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = 0 \\ \vec{F} \perp d\vec{r} \end{array} \right.$

## ❖ DIMENSIONES Y UNIDADES

Ecuación de dimensiones  $[W] = ML^2T^{-2}$

Unidad en el Sistema Internacional      J Julio

$$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

# Circulación elemental. Trabajo

## ❖ CARACTERÍSTICAS DEL TRABAJO

- **PRINCIPIO DE LA INDEPENDENCIA** – el trabajo elemental sobre la partícula será la suma de los trabajos elementales. Al igual que la fuerza el trabajo es aditivo.

$$\left. \begin{array}{l} dW_1 = \vec{F}_1 d\vec{r} \\ dW_2 = \vec{F}_2 d\vec{r} \\ \dots \\ dW_n = \vec{F}_n d\vec{r} \end{array} \right\} dW = dW_1 + dW_2 + \dots + dW_n = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r}$$

Fuerza resultante

Trabajo resultante

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

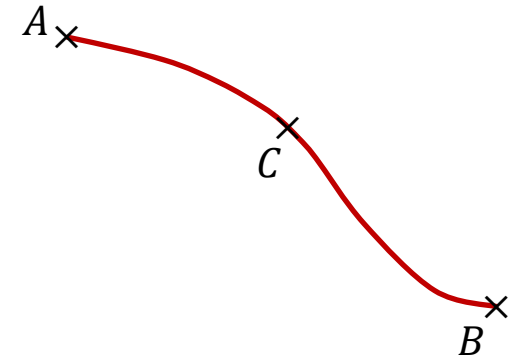
Fuerza resultante

## ❖ CARACTERÍSTICAS DEL TRABAJO (CONT.)

$$\text{➤ } \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{➡} \quad W_{AB} = -W_{BA}$$

$$\text{➤ } \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{➡} \quad W_{AB} = W_{AC} + W_{CB}$$

$$\text{➤ } \vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad \text{➡} \quad W_{AB} = \sum_{i=1}^N W_{AB}^i$$



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \right) = \sum_{i=1}^N \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N W_{AB}^i$$



# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

8.1

Concepto de campo.

8.2

Circulación elemental. Trabajo.

8.3

**Trabajo de una fuerza constante.**

8.4

Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria

8.5

Trabajo de la normal y del rozamiento.

8.6

Teorema de la energía cinética.

8.7

Potencia.

8.8

Choques.

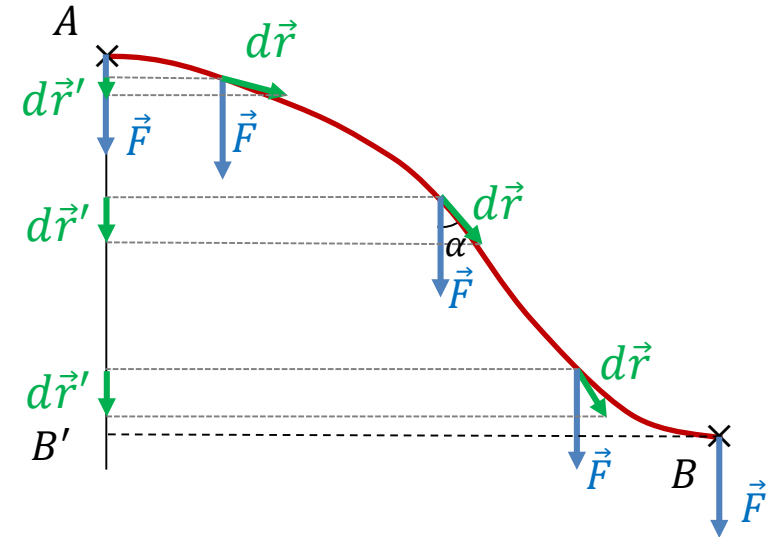
# Trabajo de una fuerza constante

❖ Sea  $\vec{F}$  una fuerza constante

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{AB} = \int_A^B \underbrace{F}_{\text{Cte.}} \underbrace{|d\vec{r}| \cos\alpha}_{\text{Proyección de } d\vec{r} \text{ sobre } \vec{F}} =$$

$$= F |\overrightarrow{AB'}| = F |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$|\overrightarrow{AB}| \cos\alpha = |\overrightarrow{AB'}|$$



El trabajo realizado por una fuerza constante no depende de camino recorrido, sólo de los puntos inicial y final.

# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

8.1

Concepto de campo.

8.2

Circulación elemental. Trabajo.

8.3

Trabajo de una fuerza constante.

8.4

**Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria**

8.5

Trabajo de la normal y del rozamiento.

8.6

Teorema de la energía cinética.

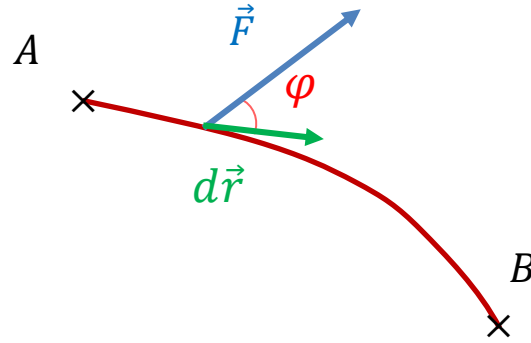
8.7

Potencia.

8.8

Choques.

# Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos\varphi = \int_A^B F \cos\varphi ds = \int_A^B F_T ds$$

$F_T$

# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

8.1

Concepto de campo.

8.2

Circulación elemental. Trabajo.

8.3

Trabajo de una fuerza constante.

8.4

Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria

8.5

**Trabajo de la normal y del rozamiento.**

8.6

Teorema de la energía cinética.

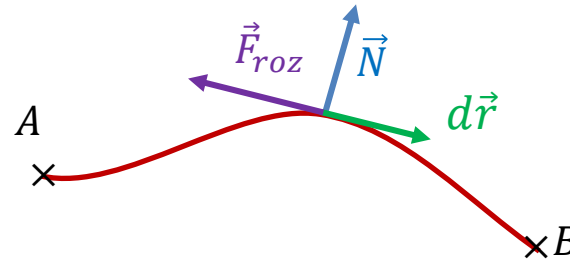
8.7

Potencia.

8.8

Choques.

# Trabajo de la normal y del rozamiento



## ❖ TRABAJO DE LA NORMAL $\vec{N}$

$$W_{AB}^N = \int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\vec{N} \perp d\vec{r}$

## ❖ CIRCULACIÓN DEL ROZAMIENTO $\vec{F}_{roz}$

$$W_{AB}^{F_{roz}} = \int_A^B \vec{F}_{roz} \cdot d\vec{r} = \int_A^B |\vec{F}_{roz}| |d\vec{r}| \cos\varphi = - \int_A^B F_{roz} ds$$

# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

8.1

Concepto de campo.

8.2

Circulación elemental. Trabajo.

8.3

Trabajo de una fuerza constante.

8.4

Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria

8.5

Trabajo de la normal y del rozamiento.

8.6

**Teorema de la energía cinética.**

8.7

Potencia.

8.8

Choques.

# Teorema de la energía cinética

## ❖ TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

$$\left. \begin{array}{l} dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \vec{F} = m\vec{a} \end{array} \right\} dW = m \vec{a} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = m d\vec{v} \vec{v} = m \vec{v} d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$$

Diferenciamos

$$d\vec{v} \vec{v} + \vec{v} d\vec{v} = 2\vec{v} d\vec{v} \quad \parallel \quad 2v dv$$

$$\vec{v} d\vec{v} = v dv \cos\alpha = v dv \quad \parallel \quad = 1$$

Entonces:  $dW = m \vec{v} d\vec{v} = mv dv$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B mv dv = m \int_A^B v dv = m \left[ \frac{v^2}{2} \right]_A^B = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = E_C^B - E_C^A = \Delta E_C$$

**Energía cinética**

$$W_{AB} = E_C^B - E_C^A = \Delta E_C$$

**Teorema de la Energía cinética**



# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

8.1

Concepto de campo.

8.2

Circulación elemental. Trabajo.

8.3

Trabajo de una fuerza constante.

8.4

Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria

8.5

Trabajo de la normal y del rozamiento.

8.6

Teorema de la energía cinética.

8.7

**Potencia.**

8.8

Choques.

# Potencia

## ❖ POTENCIA INSTANTÁNEA $P$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Entonces:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## ❖ POTENCIA MEDIA $P_m$

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\int_0^t P dt}{\Delta t}$$

## ❖ DIMENSIONES Y UNIDADES

Ecuación de dimensiones  $[P] = ML^2T^{-3}$

Unidad en el Sistema Internacional W Vatio

$$W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

# TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

8.1

Concepto de campo.

8.2

Circulación elemental. Trabajo.

8.3

Trabajo de una fuerza constante.

8.4

Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria

8.5

Trabajo de la normal y del rozamiento.

8.6

Teorema de la energía cinética.

8.7

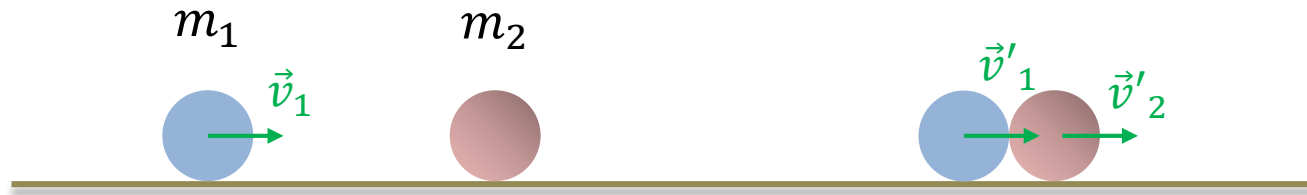
Potencia.

8.8

**Choques.**

# Choques

- ❖ **CHOQUE ELÁSTICO** – Se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética.



$$\begin{aligned}
 \vec{p} = cte. & \quad \longrightarrow \quad m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 & (1) \\
 E_c = cte. & \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 & (2)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{p} = cte. \\ E_c = cte. \end{aligned}} \right\}
 \begin{aligned}
 m_2 v'_2 &= m_1 (v_1 - v'_1) & (1) \\
 m_2 v'^2_2 &= m_1 (v_1^2 - v'^2_1) & (2) \\
 &= (v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1)
 \end{aligned}$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{m_2 v'^2_2}{m_2 v'_2} = \frac{m_1 (v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1)}{m_1 (v_1 - v'_1)} \quad \longrightarrow \quad v'_2 = (v_1 + v'_1)$$

$$\text{En (1)} \quad v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{En (2)} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

# Choques

- ❖ **CHOQUE INELÁSTICO** – Se conserva la cantidad de movimiento pero no la energía cinética



$$\vec{p} = cte. \quad \longrightarrow \quad m v = (m + M)v' \quad \longrightarrow \quad v' = \frac{m}{m + M} v$$

$$E_c \neq cte. \quad \longrightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$
$$E'_c = \frac{1}{2} (m + M) v'^2 = \frac{1}{2} (m + M) \left( \frac{m}{m + M} v \right)^2 = \frac{m^2}{2(m + M)} v^2 = E_c \frac{m}{m + M}$$