

# CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

# TEMA 5: MOVIMIENTOS RELATIVO

**5.1** Sistemas de referencia móviles

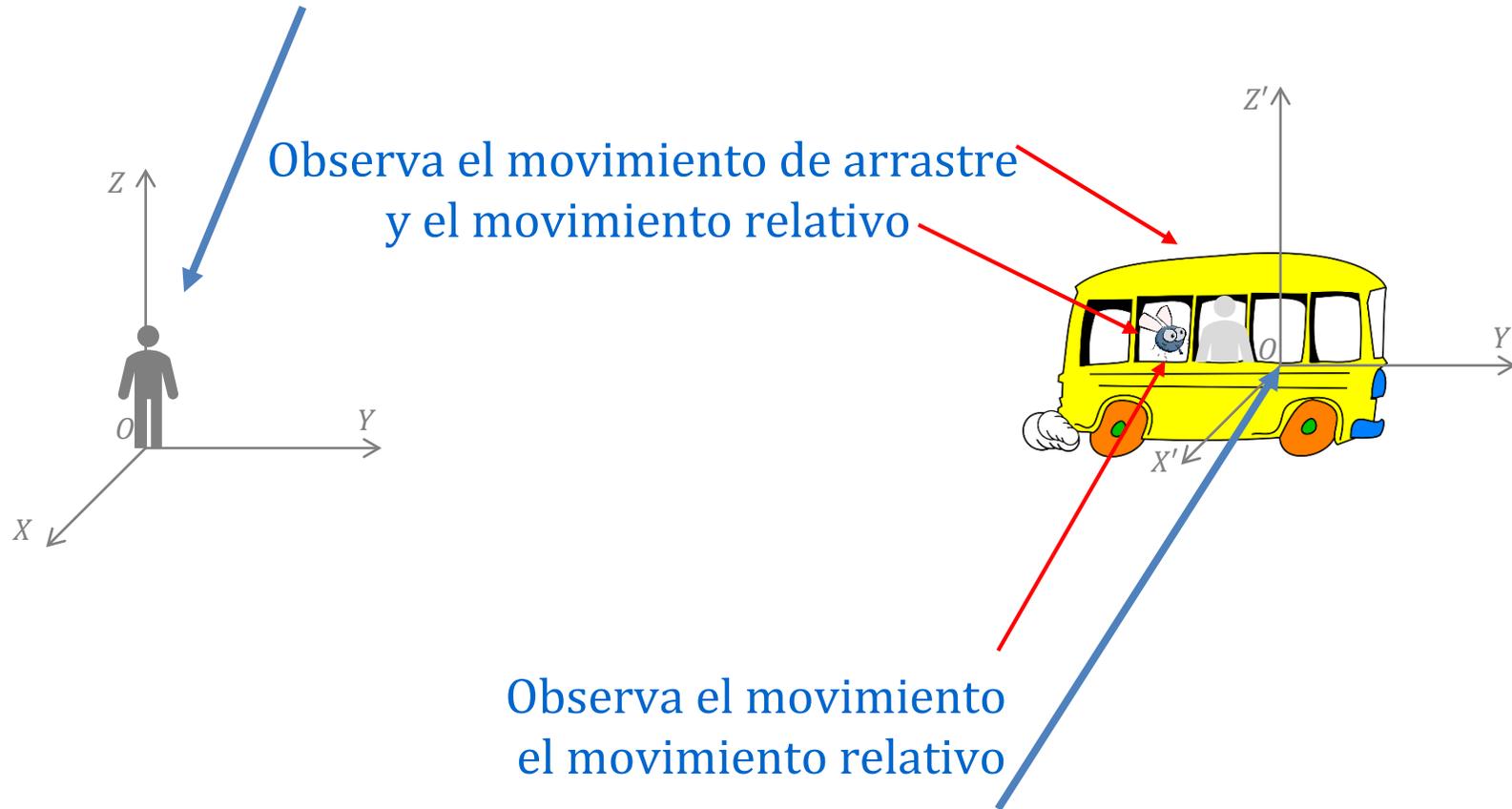
**5.2** Relatividad de Galileo

**5.3** Ecuaciones generales del movimiento relativo

**5.4** Teorema de Coriolis

# Sistemas de referencia móviles

- ❖ Sistema de referencia fijo – Observador externo



- ❖ Sistema de referencia móvil – Observador interno

# TEMA 5: MOVIMIENTOS RELATIVO

**5.1**

Sistemas de referencia móviles

**5.2**

Relatividad de Galileo

**5.3**

Ecuaciones generales del movimiento relativo

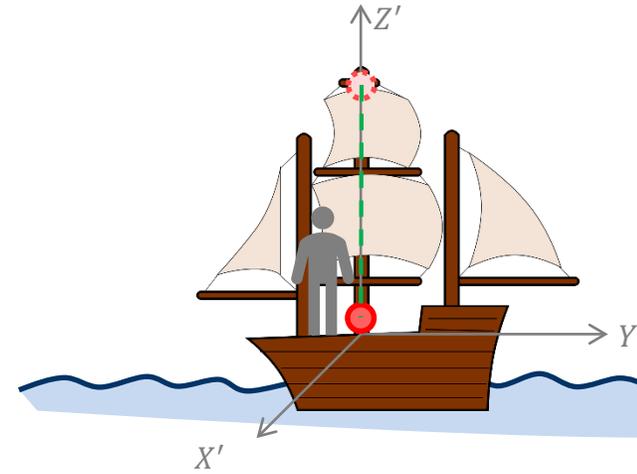
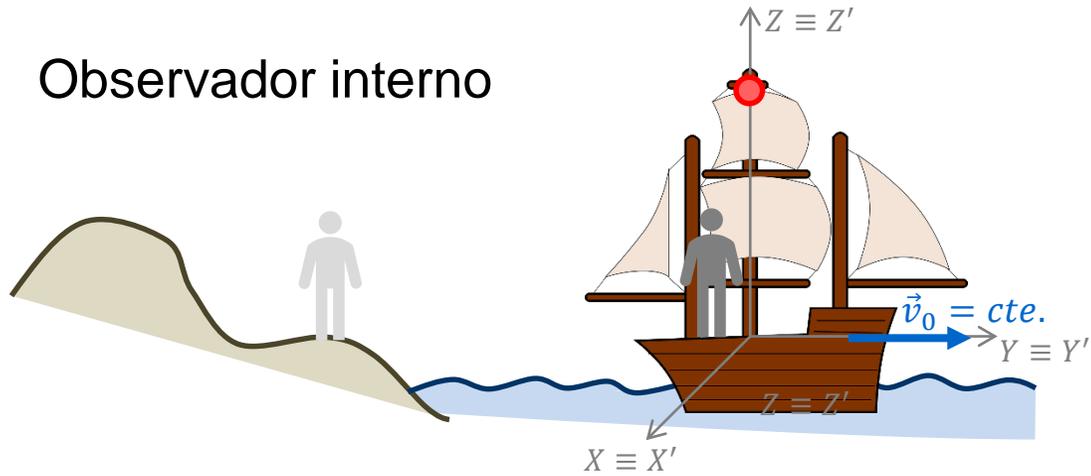
**5.4**

Teorema de Coriolis

# Relatividad de Galileo

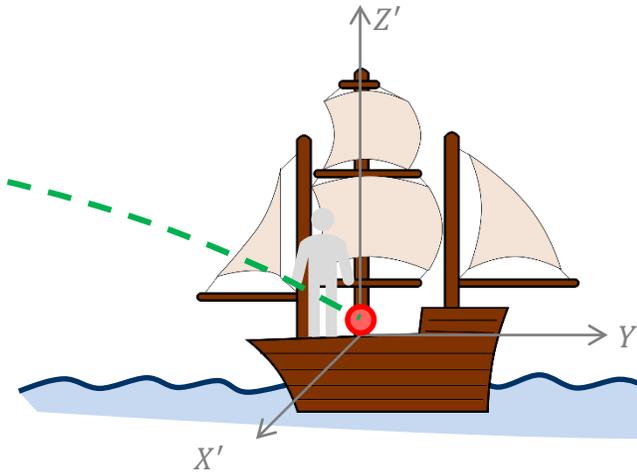
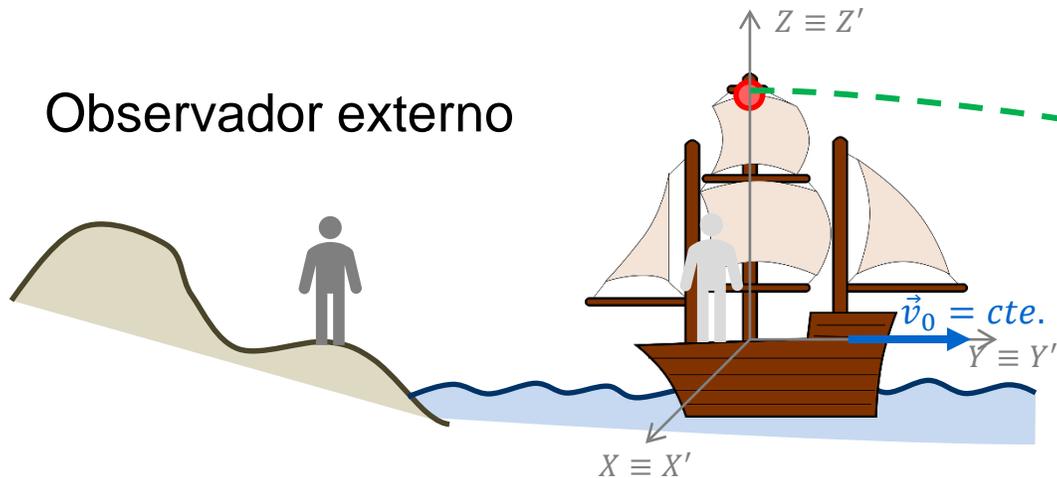
❖ ¿Un mismo movimiento se puede observar de forma diferente?

Observador interno



Ve la caída del objeto

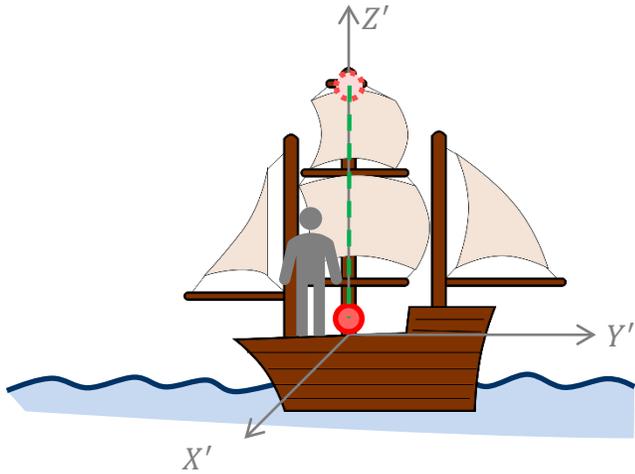
Observador externo



Ve la caída del objeto y el avance del barco

# Relatividad de Galileo

- Observador interno – movimiento de caída libre (M.R.U.A.)



$$\vec{a}' = -g\vec{k}'$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} \longrightarrow \int_{v'_{z0}=0}^{v'_z} dv'_z = \int_0^t a'_z dt = \int_0^t -g dt \longrightarrow \vec{v}' = -gt\vec{k}'$$

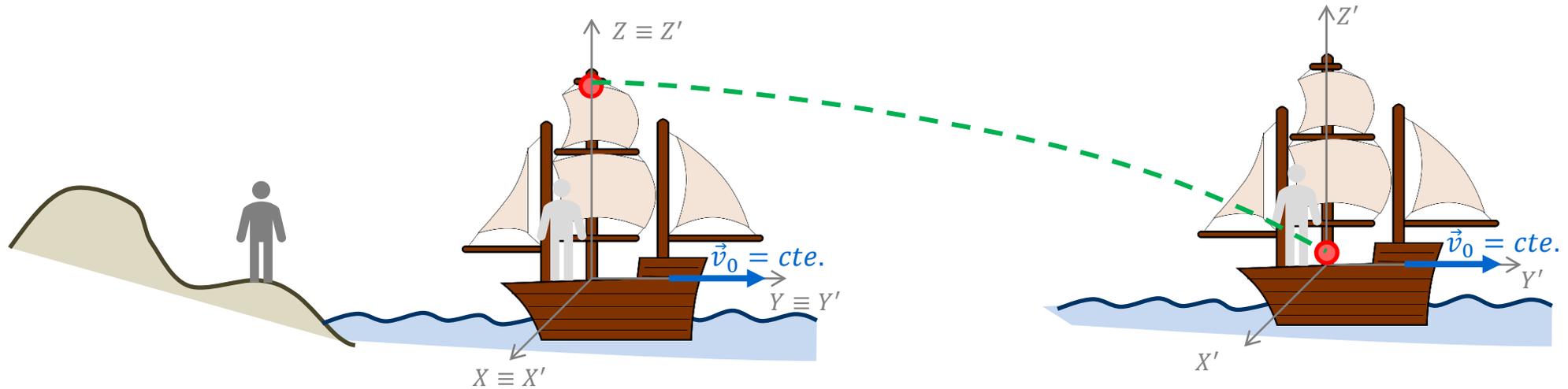
*Los vectores aceleración y velocidad sólo tienen componente en z*

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \longrightarrow \int_{z'_0}^{z'} dz' = \int_0^t v'_z dt = \int_{t_0}^t [-gt] dt \longrightarrow z' = z'_0 - \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow \vec{r}' = \left( z'_0 - \frac{1}{2}gt^2 \right) \vec{k}'$$

*Lo mismo para el vector de posición*

# Relatividad de Galileo

- Observador interno – la única aceleración sigue siendo la gravedad, pero la trayectoria que observa será diferente ➡ es una parábola.



$$\vec{a} = -g\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_0\vec{j} - gt\vec{k}$$

$$\vec{r} = v_0t\vec{j} + \left(z_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{k}$$



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = v_0t \\ z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



$$z = z_0 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} y^2$$

Ecuación de una parábola

# TEMA 5: MOVIMIENTOS RELATIVO

**5.1**

Sistemas de referencia móviles

**5.2**

Relatividad de Galileo

**5.3**

**Ecuaciones generales del movimiento relativo**

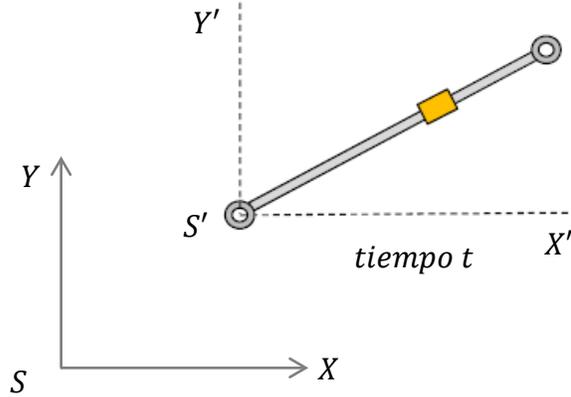
**5.4**

Teorema de Coriolis

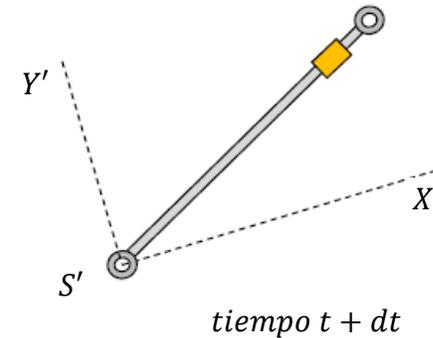
# Ecuaciones generales del movimiento relativo

- ❖ Vamos a utilizar el movimiento de una barra y de un pasador que se desplaza sobre la barra para desarrollar las ecuaciones del movimiento relativo.

Posición inicial

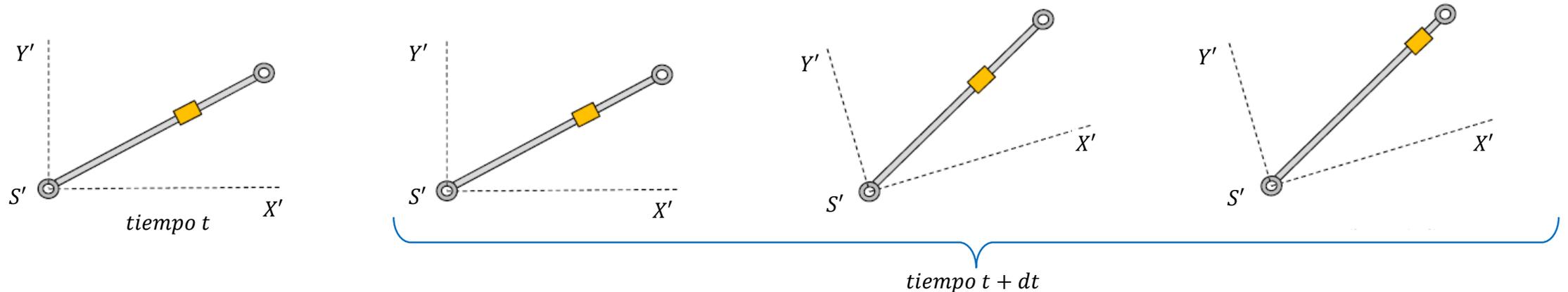


Posición final



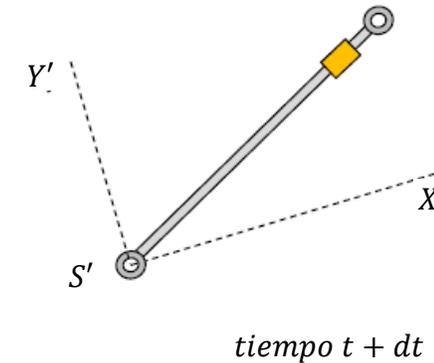
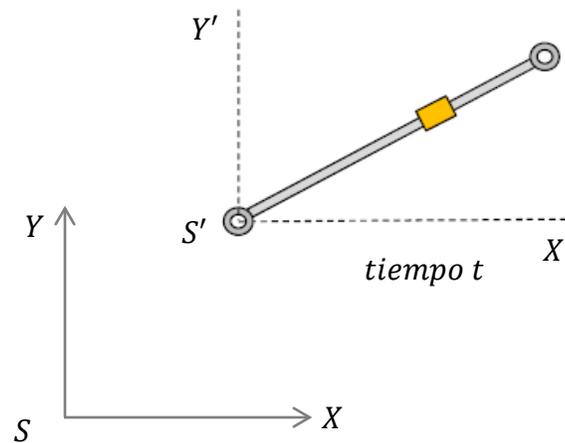
Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

Descomponemos el movimiento



# Ecuaciones generales del movimiento relativo

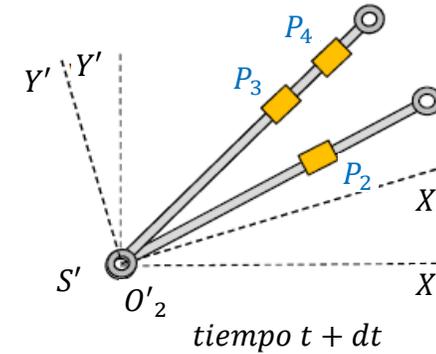
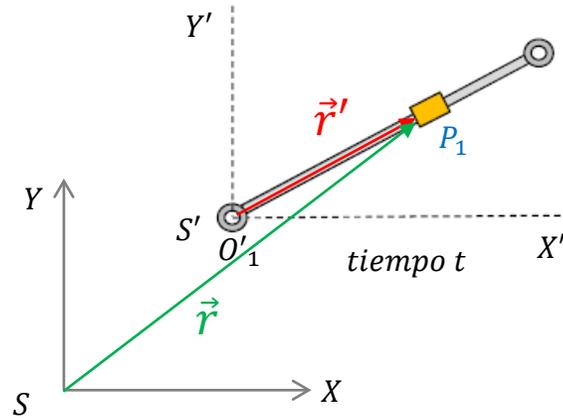
- ❖ Vamos a utilizar el movimiento de una barra y de un pasador que se desplaza sobre la barra para desarrollar las ecuaciones del movimiento relativo.



Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

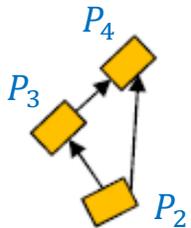
# Ecuaciones generales del movimiento relativo

- **REGLA DE DERIVACIÓN RELATIVA:** Esta regla será aplicable a todos los vectores que pertenecen a  $S'$ .



Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

Empezamos analizando las posiciones  $P_2, P_3,$  y  $P_4$



$$\overrightarrow{P_2P_4} = \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_2P_4} = (d\vec{r}')_S \\ \overrightarrow{P_2P_3} = (\vec{\omega} \times \vec{r}')dt \\ \overrightarrow{P_3P_4} = (d\vec{r}')_{S'} \end{array} \right.$$

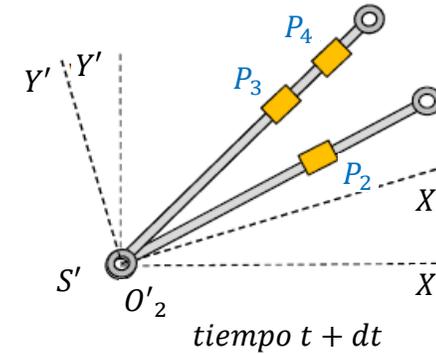
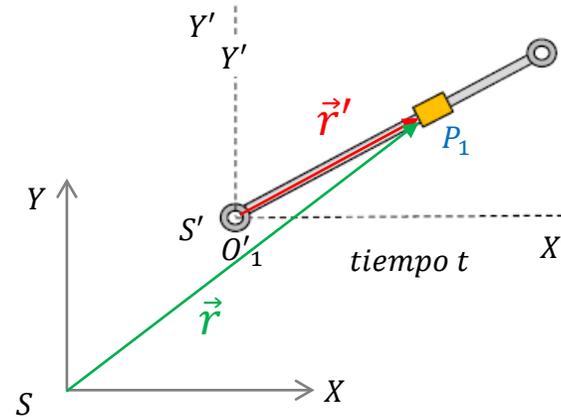
Como ve el observador exterior que cambia  $\vec{r}'$

Mov. rotación que sólo ve el observador externo

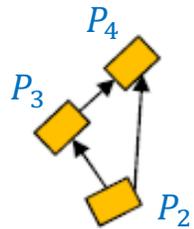
Como ve el observador interior que cambia  $\vec{r}'$

# Ecuaciones generales del movimiento relativo

## ➤ REGLA DE DERIVACIÓN RELATIVA



Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz



$$\overrightarrow{P_2P_4} = \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4}$$



$$(d\vec{r}')_S = (\vec{\omega} \times \vec{r}')dt + (d\vec{r}')_{S'}$$

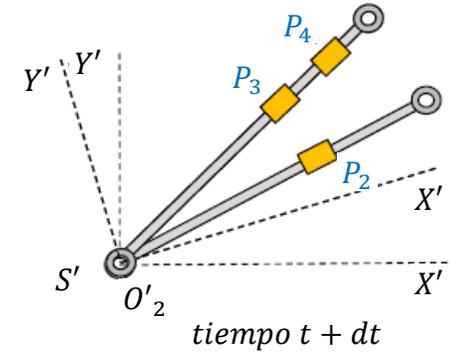
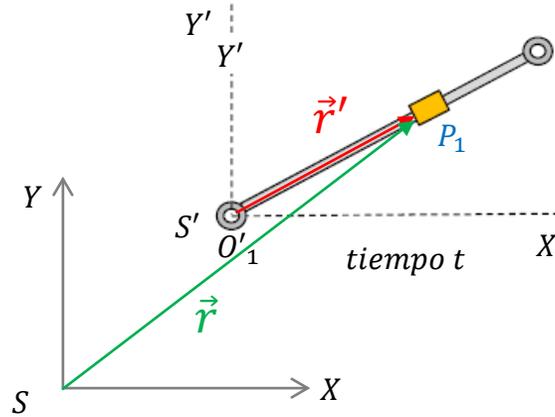


$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S = (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'}$$

**Regla de derivación relativa**

# Ecuaciones generales del movimiento relativo

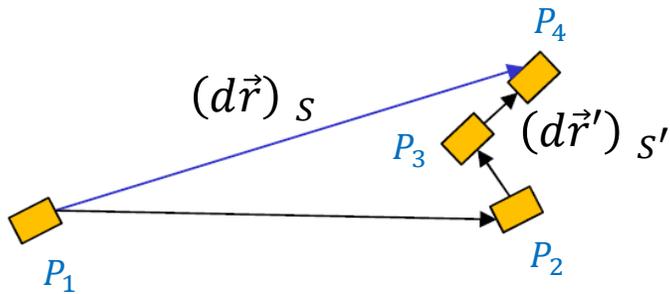
## ➤ ECUACIÓN DE VELOCIDADES



Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

Nos falta analizar el movimiento de traslación que lleva de  $P_1$  a  $P_2$ .

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} \quad \Rightarrow \quad (d\vec{r})_S = \vec{v}_{0'} dt + (\vec{\omega} \times \vec{r}') dt + (d\vec{r}')_{S'} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \vec{v}_{0'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'}$$



**Ecuación de velocidades**

$$\vec{v} = \vec{v}_{0'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}' \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}'$$

Velocidad de traslación de arrastre

Velocidad relativa

Velocidad de rotación de arrastre

# TEMA 5: MOVIMIENTOS RELATIVO

**5.1**

Sistemas de referencia móviles

**5.2**

Relatividad de Galileo

**5.3**

Ecuaciones generales del movimiento relativo

**5.4**

**Teorema de Coriolis**

# Teorema de Coriolis

## ❖ ECUACIÓN DE ACELERACIONES

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{v}_{0'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'] = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} =$$

$$= \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \underbrace{\left( \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)}_{\substack{\frac{d\vec{r}'}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{S'} = (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}' \\ \frac{d\vec{v}'}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} = (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'}}$$

Aplicamos al regla de derivación relativa

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times [(\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'] + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}' = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

**Ecuación de  
aceleraciones**

# Teorema de Coriolis

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

Aceleración de traslación de arrastre

Término normal de la aceleración de rotación de arrastre

Aceleración relativa

Término tangencial de la aceleración de rotación de arrastre

Encontramos un término que no esperábamos, se denomina **Aceleración de Coriolis**

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

La ecuación de aceleraciones se puede escribir como:

$$\vec{a} = \vec{a}_a + \vec{a}' + \vec{a}_C$$

¿Cuándo no hay  $\vec{a}_C$ ?

- Cuando el movimiento de arrastre es sólo de traslación,  $\vec{\omega}$  de arrastre es cero.
- Cuando no hay movimiento relativo, i.e.  $\vec{v}' = 0$
- Cuando  $\vec{\omega}$  y  $\vec{v}'$  son paralelas