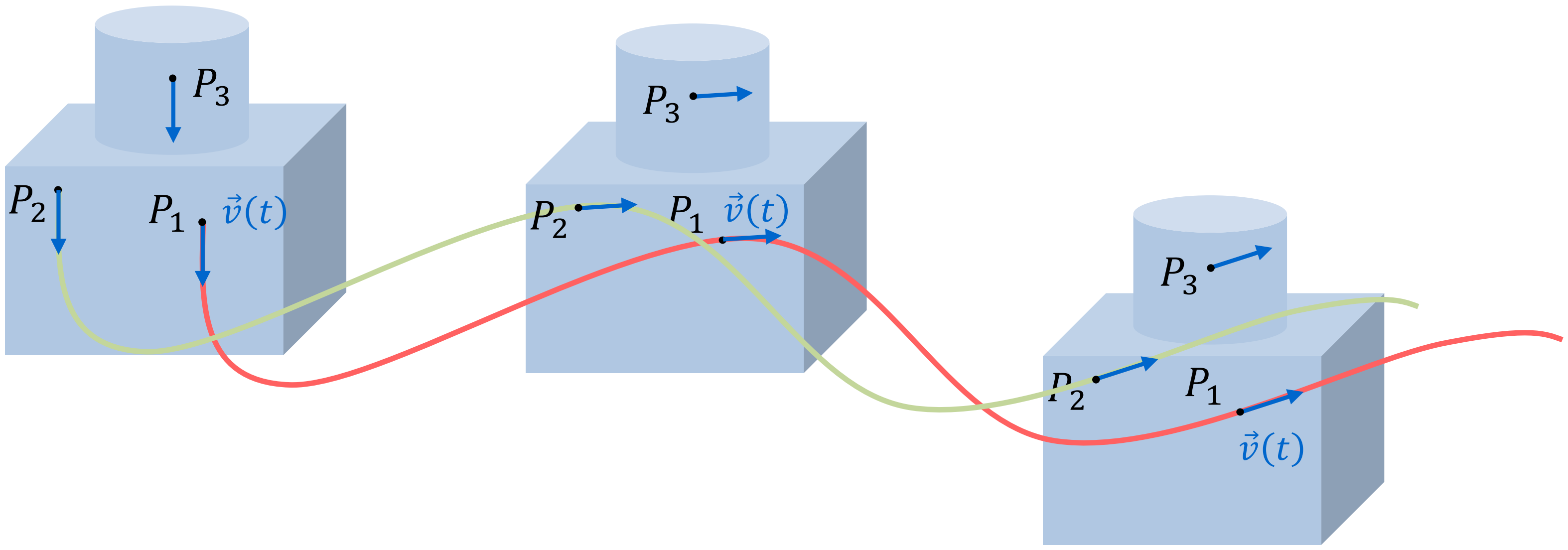
CINEMÁTICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

TEMA 3: MOVIMIENTOS DE LOS SIST. PARTÍCULAS

Movimiento de traslación

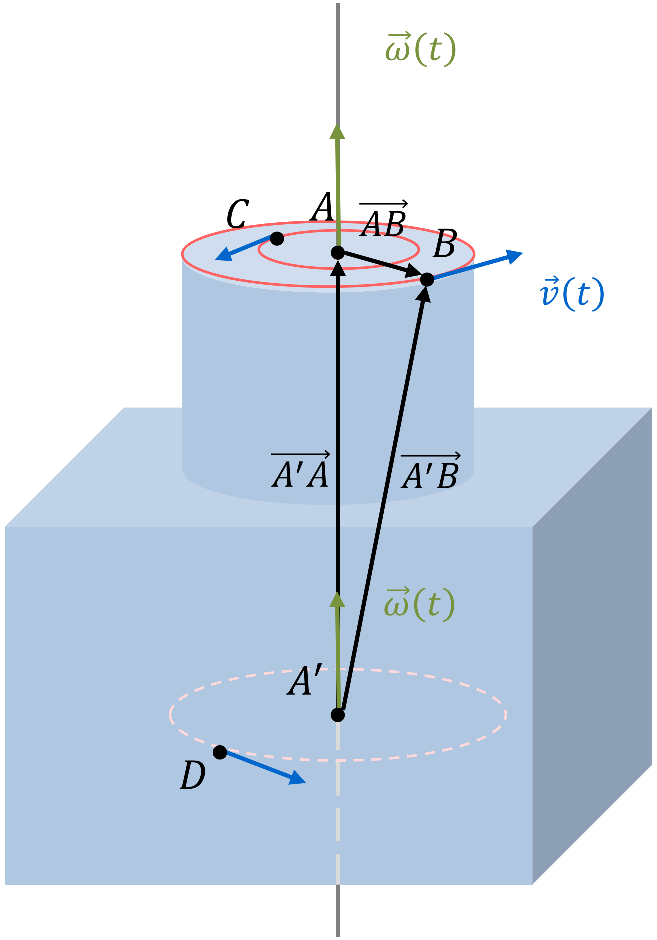
- **MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN** es aquel en el que todos los vectores velocidad de todos los puntos del sistema son equipolentes (igual módulo, dirección y sentido, pero punto de aplicación diferente).



- Es suficiente describir el movimiento de uno de los puntos del sistema, el resto se mueven igual.
- Las trayectorias son superponibles, no iguales.

TEMA 3: MOVIMIENTOS DE LOS SIST. PARTÍCULAS

- **MOVIMIENTO DE ROTACIÓN** es aquel en el algunos puntos del sistema, que están alineados en un eje, permanecen en reposo, mientras que el resto describe trayectorias circulares en torno a ese eje.



$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \overrightarrow{A'D}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = \vec{\omega} \times \left(\overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'A}\right) =$$

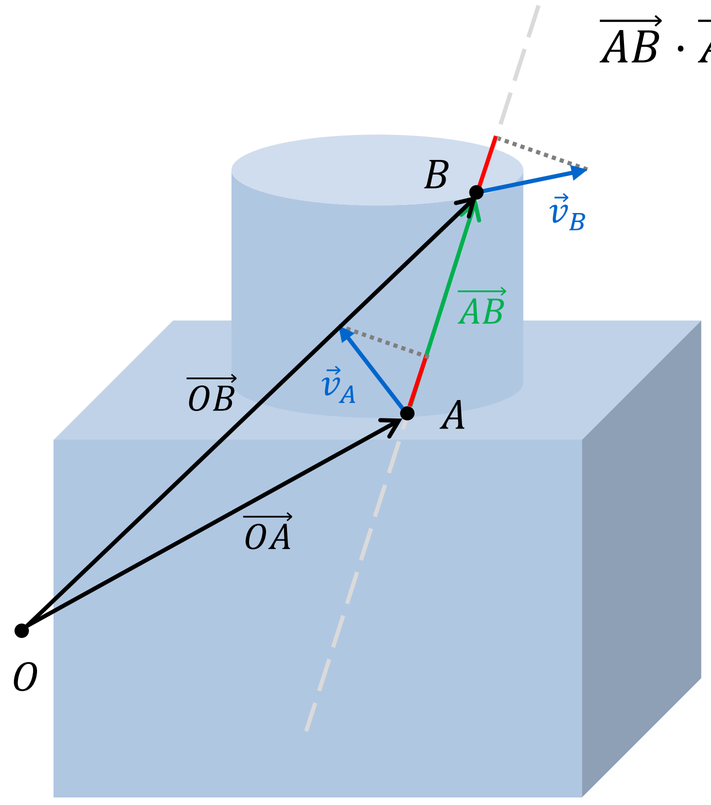
$$= \vec{\omega} \times \overrightarrow{A'B} - \underbrace{\vec{\omega} \times \overrightarrow{A'A}}_{=0} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{A'B}$$

$\vec{\omega}$ y $\overrightarrow{A'A}$ son paralelos

- $\vec{\omega}$ es un vector deslizante ⇒ su efecto es el mismo en cualquier punto de la recta soporte

TEMA 3: MOVIMIENTOS DE LOS SIST. PARTÍCULAS

❖ **SÓLIDO RÍGIDO O INDEFORMABLE** es aquel en el la distancia entre sus puntos se mantiene constante.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \underbrace{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}_{=\,cte.} \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{d}{dt}\underbrace{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}_{=\,cte.} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 2\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \end{cases}$$

Podemos escribir: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_B - \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_A = 0$$

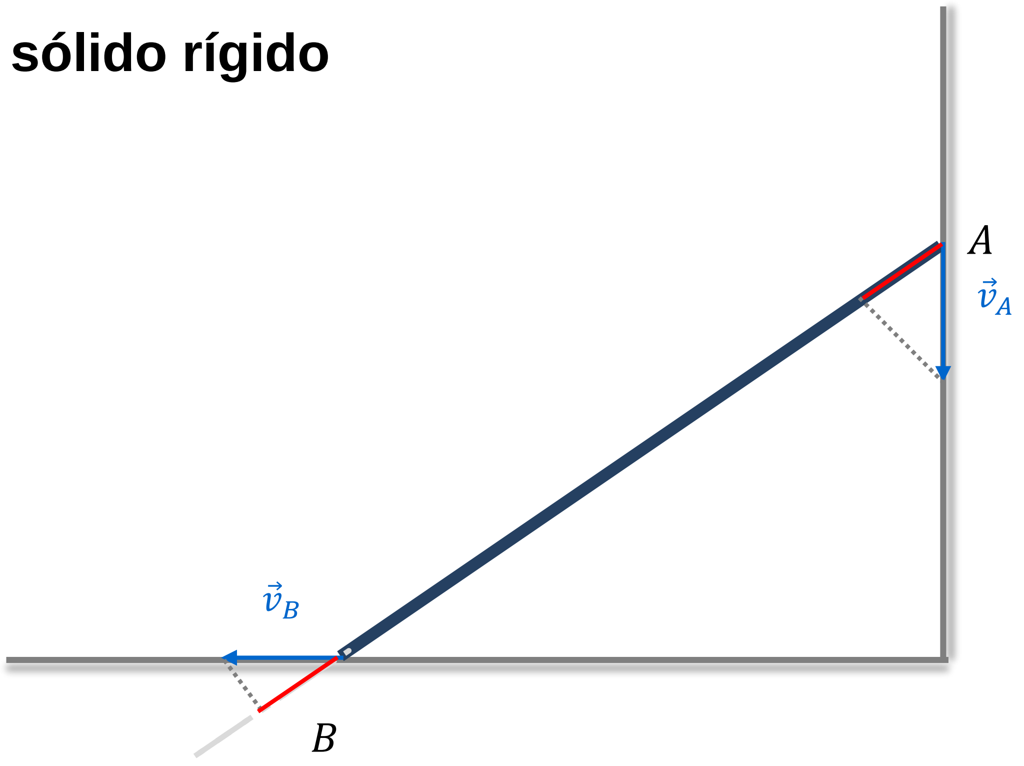
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_A = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_B}$$

Ecuación del sólido rígido

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_A = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_B}$$

Ecuación del sólido rígido

- El **campo de velocidades** de un sólido rígido es **equiproyectivo**.

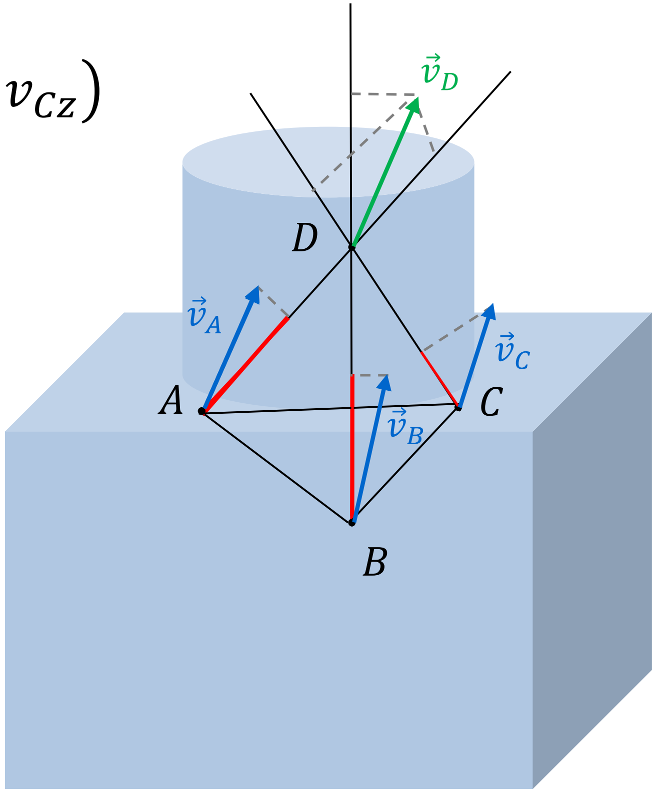


En este caso conocida $\vec{v}_A$ ya podemos conocer $\vec{v}_B$, aplicando la condición de equiproyectividad. En general necesitaremos conocer la velocidad de tres puntos no alineados para determinar la velocidad de cualquier otro punto.

Movimiento instantáneo de un sólido rígido

Conocidas: $\vec{v}_A(v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az})$ $\vec{v}_B(v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz})$ $\vec{v}_C(v_{Cx}, v_{Cy}, v_{Cz})$

Tenemos 9 valores



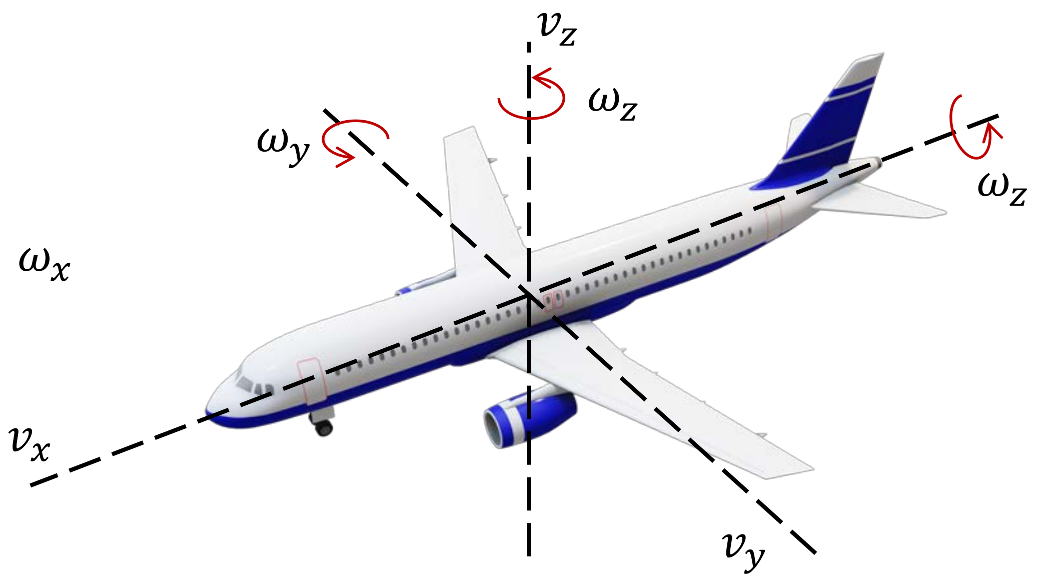
$$\left.\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_A &= \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_B \\
\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_A &= \overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_C \\
\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v}_B &= \overrightarrow{BC} \cdot \vec{v}_C
\end{aligned}\right\}$$ Relacionados mediante 3 ecuaciones

Tenemos 6 grados de libertad, esto equivale a dos vectores.

Pero esta forma de trabajar no es cómoda.

El movimiento de un sólido rígido tienen 6 grados de libertad, esto equivale a dos vectores.

- Vamos a utilizar los dos movimientos que hemos visto: **traslación** y **rotación**.



$\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

El movimiento instantáneo de un sólido rígido podrá expresarse como suma de una rotación y una traslación.

Tomamos el punto A situado sobre el eje de rotación, su velocidad de traslación será $\vec{v}_A(v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az})$ y por estar sobre el eje su velocidad angular será $\vec{\omega} = 0$

Si tomo otro punto B, su velocidad de traslación será $\vec{v}_A$ y su velocidad de rotación vendrá dada por $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

Lo mismo para C

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}$$

Movimiento instantáneo de un sólido rígido

Partiendo de las expresiones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC} \end{array}\right\}$$

Restamos la primera a la segunda

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_C - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BC}$$

Representa un nuevo modelo en el que eje de rotación está en B, y la velocidad de traslación del sólido es $\vec{v}_B$.

Si no conocemos $\vec{\omega}$, pero conocemos $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ podremos obtenerla con la ecuaciones anteriores.

TEMA 3: MOVIMIENTOS DE LOS SIST. PARTÍCULAS

Invariante vectorial

- Se denomina a la velocidad angular $\vec{\omega}$ **INVARIANTE VECTORIAL**, dado que siempre es la misma independientemente de donde situemos el eje.

Podemos modelizar en el punto que queramos, $\vec{\omega}$ no cambia, lo que cambia es la velocidad de traslación.

Partimos de la ecuación del campo de velocidades:

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}}$$

Multiplicamos escalarmente por $\overrightarrow{AB}$

$$\vec{v}_B \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB}}_{=0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_A = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_B}$$

Producto mixto con dos términos iguales

El campo de velocidades cumple la condición de rigidez

TEMA 3: MOVIMIENTOS DE LOS SIST. PARTÍCULAS

Aceleración

- Partimos de la ecuación del campo de velocidades:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$

Derivamos

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}\right) = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right) = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}\right)$$

$$\vec{v}_P - \vec{v}_A$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}\right)}$$

Acel. traslación

Termino tangencial de la Acel. rotación

Termino normal de la Acel. rotación

TEMA 3: MOVIMIENTOS DE LOS SIST. PARTÍCULAS

Invariante escalar

- Partimos de la ecuación del campo de velocidades:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

Multiplicamos escalarmente por $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_B = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right)}_{=0} \Rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{v}_B = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_C = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_P = \cdots = I$$

Producto mixto con dos términos iguales

Lo mismo para cualquier otro punto

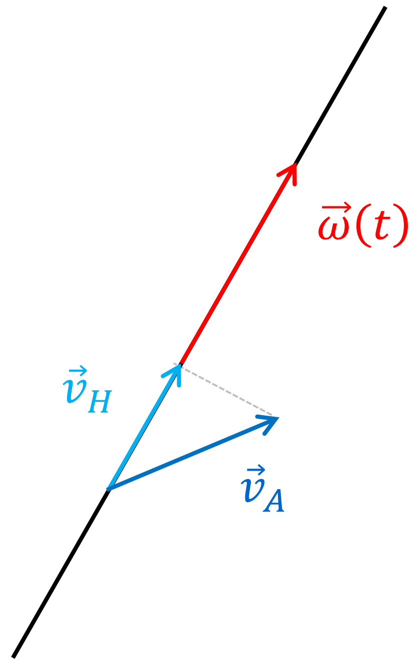
❖ **INVARIANTE ESCALAR I:** representa el producto de $|\vec{\omega}|$ por la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{\omega}$, es constante en todos los puntos del sólido rígido.

TEMA 3: MOVIMIENTOS DE LOS SIST. PARTÍCULAS

- **DESCRIPCIÓN HELICOIDAL** es la modelización instantánea más sencilla que podemos hacer, se caracteriza porque la velocidad de rotación y la velocidad de traslación son paralelas.

$\vec{\omega}$ y $\vec{v}_H$ son paralelos

Denominamos H a todos los puntos que cumplen esto.



$\vec{v}_H$ será la velocidad de menor módulo, por tanto la velocidad de traslación mínima.

$$I = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_H = \cdots$$

Para $\vec{v}_H$ se cumplirá

$$I = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_H = \omega \cdot v_H \Rightarrow v_H = \frac{I}{\omega}$$

Descripción helicoidal

- **EJE INSTANTÁNEO DE DESLIZAMIENTO Y ROTACIÓN** es el lugar geométrico de los puntos H.
  - Por tanto con cualquiera de los puntos del eje podemos realizar la descripción helicoidal

$\vec{v}_H$ se denomina **velocidad de deslizamiento**

CASOS PARTICULARES

- CASO I: $\vec{v} = 0$ ⟹ $I = 0$ No existe traslación ROTACIÓN PURA
- CASO II: $\vec{\omega} = 0$ ⟹ $I = 0$ No existe rotación TRASLACIÓN PURA
- CASO III: $\vec{\omega}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares ⟹ $I = 0$ MOVIMIENTO PLANO $\vec{\omega}$ es perpendicular en todo momento al plano del movimiento y las velocidades de todos los puntos están contenidas en dicho plano.