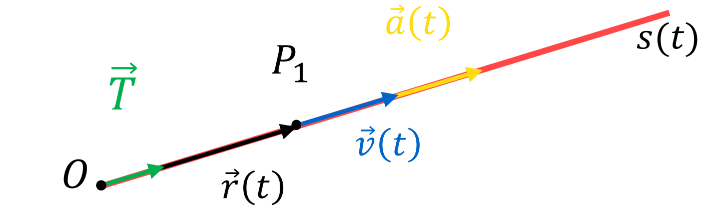
CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

MOVIMIENTOS PARTICULARES

TEMA 2: MOVIMIENTOS PARTICULARES

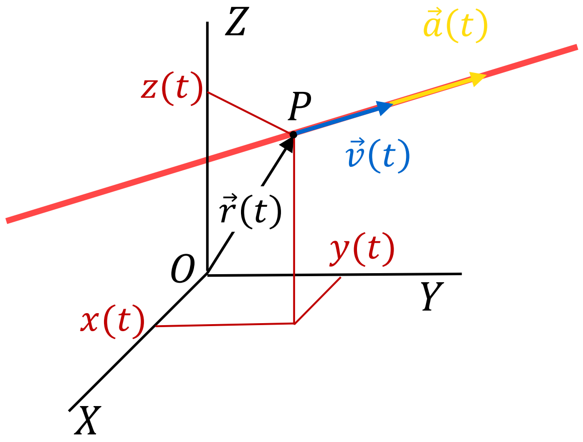
- **MOVIMIENTO RECTILÍNEO** es aquel que la trayectoria es una recta.



$$\vec{T} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$R \to \infty$$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = s(t) \cdot \vec{T} \\ \vec{v}(t) = \dfrac{ds(t)}{dt} \cdot \vec{T} \\ \vec{a}(t) = \overrightarrow{a_T} = \dfrac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{T} = \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2} \cdot \vec{T} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \\ \vec{v}(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k} \\ \vec{a}(t) = x''(t)\vec{\imath} + y''(t)\vec{\jmath} + z''(t)\vec{k} \end{cases}$$

CASOS PARTICULARES

- CASO I: Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) $\rightarrow \quad a = cte.$

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt \quad \Rightarrow \quad v - v_0 = a \cdot (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_0 + a \cdot (t - t_0)}$$

Cuando $t_0 = 0 \rightarrow \boxed{v = v_0 + a \cdot t}$

$$v = \frac{ds(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v dt = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a \cdot (t - t_0)] dt \quad \Rightarrow \quad s - s_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = s_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2}$$

Cuando $t_0 = 0 \rightarrow \boxed{s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2}$

$$t_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad v = v_0 + a \cdot (t) \\ &(2)\quad s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)\quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$(2) \qquad s = s_0 + v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \Rightarrow \boxed{v^2 = {v_0}^2 + 2a(s - s_0)}$$

$$\boxed{v = \sqrt{{v_0}^2 + 2a(s - s_0)}}$$

- Caso II: Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) $\rightarrow \quad v = cte.$

$$a(t) = a_T = \frac{dv(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v = v_0}$$

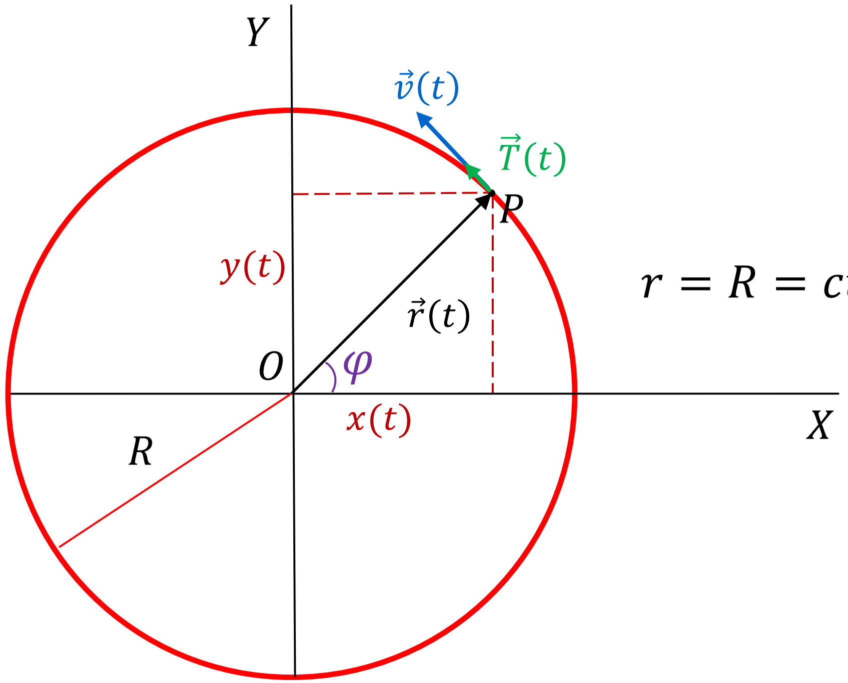
$$\boxed{s = s_0 + v_0 \cdot (t - t_0)}$$

Cuando $t_0 = 0 \quad \rightarrow \boxed{s = s_0 + v_0 \cdot t}$

TEMA 2: MOVIMIENTOS PARTICULARES

Movimiento circular

❖ **MOVIMIENTO CIRCULAR** es aquel que la trayectoria es una circunferencia.



$r = R = cte.$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} x(t) = R \cdot cos\varphi \\ y(t) = R \cdot sen\varphi \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cdot cos\varphi) = R \cdot (-sen\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cdot sen\varphi) = R \cdot cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = -R \cdot sen\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\vec{\imath} + R \cdot cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\vec{\jmath}$$

- Definición de la **velocidad angular ω**:

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

$$\vec{v}(t) = -R \cdot sen\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\vec{\imath} + R \cdot cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\vec{\jmath} = -R \cdot \omega \cdot sen\varphi\vec{\imath} + R \cdot \omega \cdot cos\varphi \cdot \vec{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = R\omega(-sen\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath}) = R\omega\vec{T}$$

$\vec{T}$ vector unitario tangente

$$\boxed{\vec{v}(t) = R\omega\vec{T}}$$

$$\boxed{v = R\omega}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\omega\vec{T}\right) = R\frac{d\omega}{dt}\vec{T} + R\omega\frac{d\vec{T}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{T} + R\omega\frac{v}{R}\vec{N} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{T} + R\omega^2\vec{N}$$

$v = R\omega$

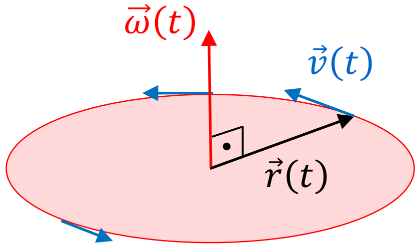
- Definición de la **aceleración angular α**:

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = R\alpha\vec{T} + R\omega^2\vec{N} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$

- Definición del **vector velocidad angular $\vec{\omega}$**:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{t}) \begin{cases} \text{Módulo} - \frac{d\varphi}{dt} \\ \text{Dirección} - \textbf{perpendicular al plano del movimiento} \\ \text{Sentido} - \text{aplicamos la regla de la mano derecha} \end{cases}$$



DIMENSIONES Y UNIDADES

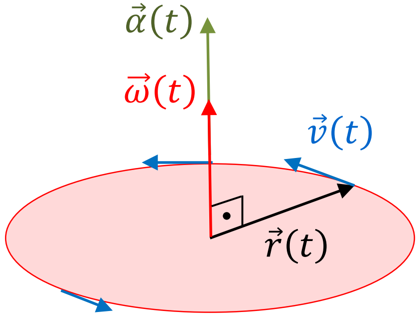
Ecuación de dimensiones $[\omega] = T^{-1}$

Unidades en el Sistema Internacional $\frac{rad}{s}$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ *** **Expresión intrínseca de la velocidad**

- Definición del **vector aceleración angular $\vec{\alpha}$**:

$\boldsymbol{\vec{\alpha}(t)}$ $\begin{cases} \text{Módulo} – \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \text{Dirección – } \textbf{perpendicular al plano del movimiento} \\ \text{Sentido – aplicamos la regla de la mano derecha} \end{cases}$



DIMENSIONES Y UNIDADES

Ecuación de dimensiones $[\alpha] = T^{-2}$

Unidades en el Sistema Internacional $\dfrac{rad}{s^2}$

$$\boxed{\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$

Movimiento circular

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$

$***$ **Expresión intrínseca de la aceleración**

CASOS PARTICULARES

- CASO I: Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA) $\rightarrow$ $\alpha = cte.$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 + 2\alpha(s - s_0)}}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

- CASO II: Movimiento circular uniforme (MCU) $\rightarrow$ $\omega = cte.$

$$\alpha(t) = a_T = \frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0)}$$

Cuando $t_0 = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t}$

TEMA 2: MOVIMIENTOS PARTICULARES

- Concepto de **movimiento periódico** – es aquel en el que al cabo de un cierto tiempo, denominado *periodo* T, la partícula vuelve a la misma posición y con la mismas condiciones cinemáticas.

$$\begin{cases} s(t) = s(t+T) \\ v(t) = v(t+T) \\ a(t) = a(t+T) \end{cases}$$

- **Ecuación armónica** – es aquella que cumple: $p'' = -K^2 \cdot p$

  p representa una magnitud física

  K es un constante

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

$$\boxed{s(t)'' = -\omega^2 \cdot s(t)}$$ Ecuación diferencial

Solución de esta ecuación:

$$s(t) = Asen(\omega t + \varphi_0)$$

Donde:

$$\begin{cases} A \text{ Semiamplitud (en este caso MAS } cte.\text{)} \\ \omega \text{ Pulsación (} cte.\text{)} \\ s \text{ Elongación} \\ \varphi_0 \text{ Ángulo de desfase inicial} \end{cases}$$

NOTA: cuando la semiamplitud A NO es constante se trata de un Movimiento Armónico Libre o Amortiguado

- Comprobamos que es periódico.

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= Asen(\omega t + \varphi_0) \\ s(t+T) &= Asen(\omega t + \omega T + \varphi_0) \end{aligned}\right\} \quad s(t) = s(t+T)$$

Se cumple cuando $\omega T = 2\pi$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$ Periodo

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$ Frecuencia

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

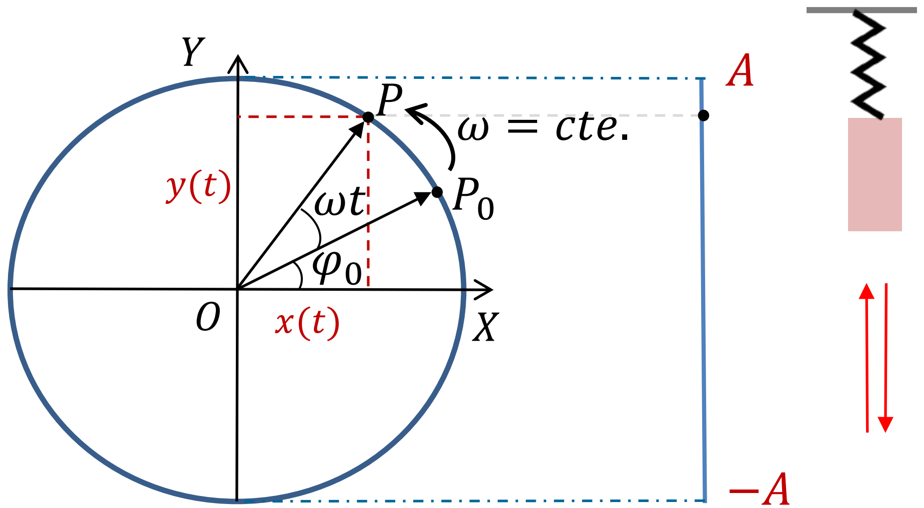
❖ Movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme

Si consideramos la proyección del movimiento circular uniforme sobre el eje Y

$$y(t) = Rsen(\omega t + \varphi_0)$$

$$R \equiv A$$

$$pulsación\ \omega \equiv velocidad\ angular\ \omega$$

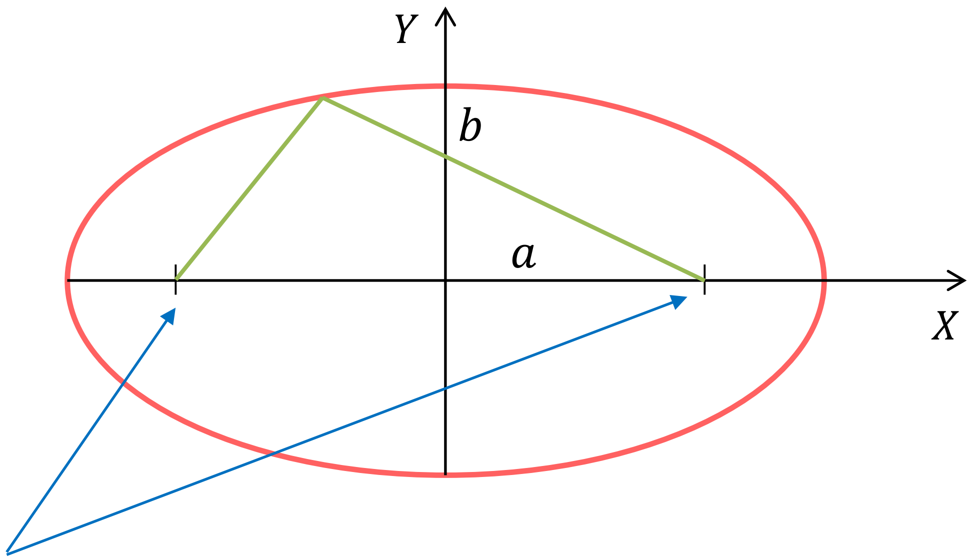


Si se proyecta sobre el eje X

$$x(t) = Rcos(\omega t + \varphi_0) = Rsen\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = Rsen(\omega t + {\varphi_0}')$$

TEMA 2: MOVIMIENTOS PARTICULARES

- **MOVIMIENTO ELÍPTICO** es aquel que la trayectoria es una elipse.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Ecuación de la elipse

a Semieje mayor

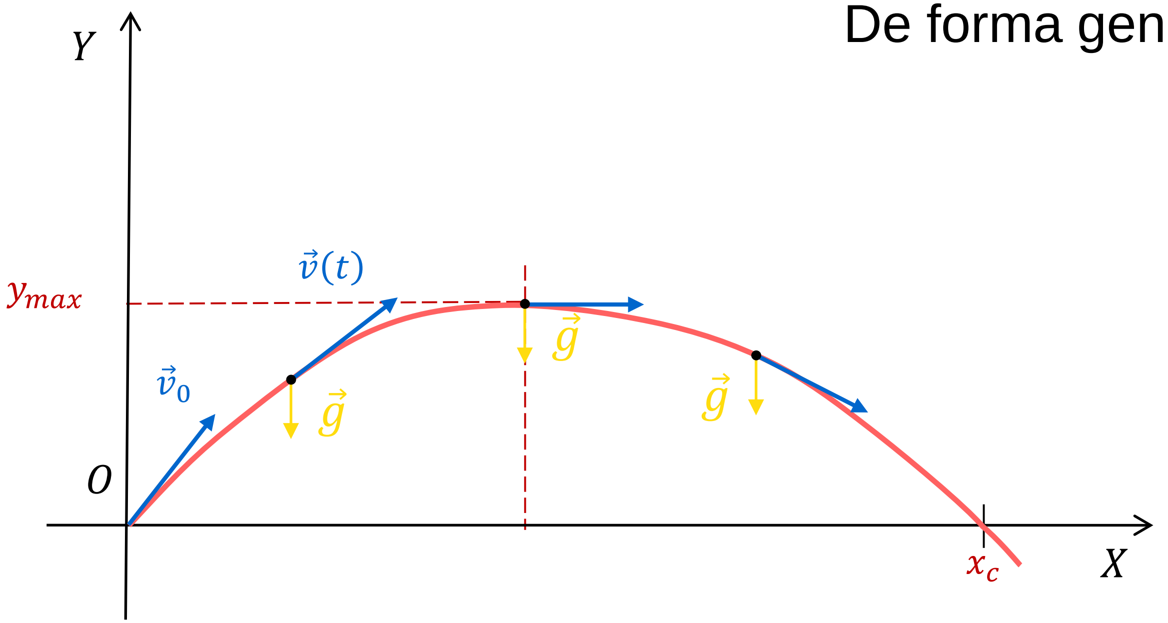
b Semieje menor

Focos – Puntos cuya suma de distancias a cualquier punto de la elipse es constante

TEMA 2: MOVIMIENTOS PARTICULARES

- **TIRO PARABÓLICO** es un movimiento en el que la única aceleración que actúa es la de la gravedad (caso particular de un movimiento parabólico, aquel en el que la trayectoria es una parábola).

$t_0 = 0$



De forma general: $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$

$$\vec{v}_0(t) = v_{0x}\vec{\imath} + v_{0y}(t)\vec{j}$$

$$\vec{r}_0(t) = x_0\vec{\imath} + y_0(t)\vec{j}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$