CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

CINEMÁTICA

Parte de la mecánica que trata del movimiento en sus condiciones de espacio y tiempo, sin tener en cuenta las causas que lo producen.

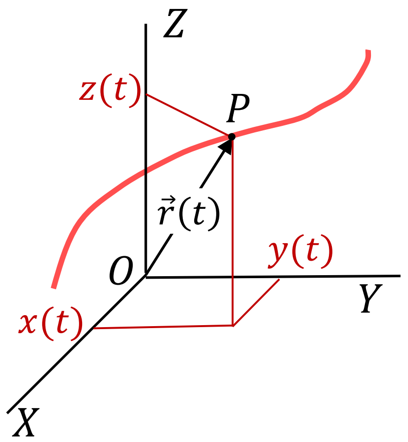
TEMA 1: CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

DESCRIPCIÓN EXTERNA O CARTESIANA

- La posición de la partícula P la damos mediante su **vector de posición** $\vec{r}$:

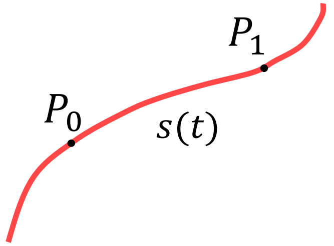
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Ecuaciones paramétricas u horarias $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



DESCRIPCIÓN INTERNA

- La posición de la partícula P la damos mediante:
  - La trayectoria $f(x, y, z)$
  - Función de arco $s(t)$
  - Origen de arcos P_0
  - Sentido de avance



CONVERSIÓN ENTRE AMBAS DESCRIPCIONES

- Pasar de una descripción a otra siempre es posible, lo que no implica que siempre sea sencillo.

Ejemplo:

$$\vec{r}(t) = (3t+1)\,\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 5\vec{k}$$

Ecuaciones paramétricas u horarias

$$\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t^2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{de la 1ª } \; t = \frac{x-1}{3} \quad \rightarrow \quad \text{en la 2ª } \; y = 2\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f(x,y,z) = \begin{cases} 2x^2 - 9y - 4x + 2 = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

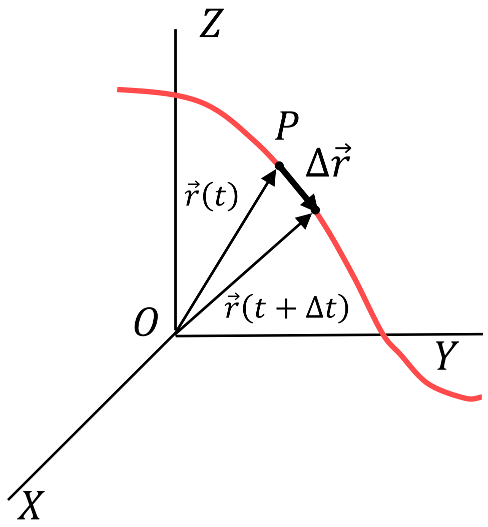
TEMA 1: CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

VELOCIDAD

- Es la derivada del vector de posición, también será un vector:

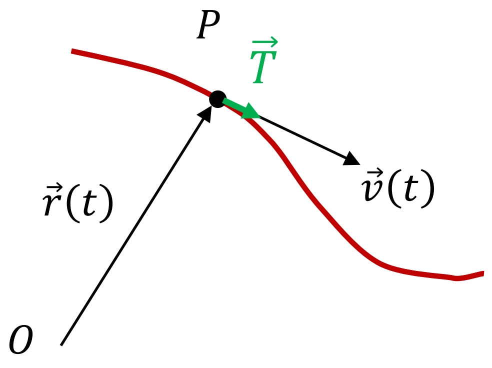
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r'}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$



$\boldsymbol{\vec{v}(t)}$ {
- Dirección – tangente a la trayectoria
- Sentido – el de avance en el intervalo de tiempo
- Módulo – derivada del arco de trayectoria respecto del tiempo $\frac{ds}{dt}$
- Aplicado en la partícula

- Definición del **vector unitario tangente** – vector de módulo 1, con dirección y sentido el del vector velocidad.



$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T}}$$

módulo

dirección y sentido

Expresión intrínseca de la velocidad

Velocidad

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r'}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x\,(t)}{\Delta t}\vec{\imath} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y\,(t)}{\Delta t}\vec{\jmath} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z\,(t)}{\Delta t}\vec{k} =$$

$$= \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k}}$$

Expresión cartesiana de la velocidad

Velocidad

Velocidad media – es el arco recorrido partido por el tiempo utilizado en recorrerlo, cuando este **no tiende a cero**.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

DIMENSIONES Y UNIDADES

Ecuación de dimensiones $[v] = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$

Unidades en el Sistema Internacional $\frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$

TEMA 1: CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

ACELERACIÓN

- Es la derivada del vector velocidad, también será un vector:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = x''(t)\vec{\imath} + y''(t)\vec{\jmath} + z''(t)\vec{k}}$$

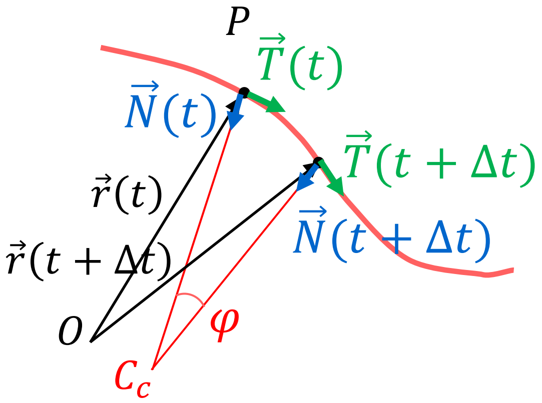
Expresión cartesiana de la aceleración

DIMENSIONES Y UNIDADES

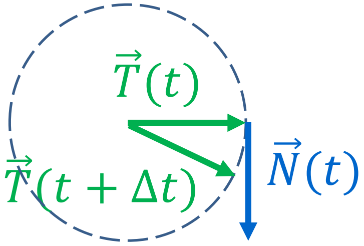
Ecuación de dimensiones $[a] = \frac{L}{T^2} = L \cdot T^{-2}$

Unidades en el Sistema Internacional $\frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$

- Definición del **vector unitario normal** – vector de módulo 1, perpendicular al vector unitario tangente en todo momento, contenido en el plano osculador (aquel formado por dos posiciones consecutivas de $\vec{T}$) y sentido hacía el centro de curvatura.



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \vec{T}\right) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{N} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$$



$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds_T}{dt} \cdot \vec{N}$$

$$S = \varphi \cdot R \Longrightarrow dS_T = d\varphi \cdot R = d\varphi \cdot 1 = d\varphi$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{N}$$

$$ds = d\varphi \cdot R \;\; \rightarrow d\varphi = \frac{ds}{R}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{R}\right) = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot v$$

Aceleración

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N}}$$

Expresión intrínseca de la aceleración

- Aceleración tangencial: $\boxed{\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T}}$ $\boxed{a_T = \frac{dv}{dt}}$

Representa la variación del módulo de la velocidad

- Aceleración normal: $\boxed{\overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}}$ $\boxed{a_N = \frac{v^2}{R}}$

Representa la variación de la dirección de la velocidad

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{a_T} = a_T \cdot \vec{T} = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\overrightarrow{a_N} = \vec{a} - \overrightarrow{a_T} \quad \rightarrow \quad {a_N}^2 = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}$$

- Casos particulares

  - Cuando la trayectoria rectilínea: $R \to \infty$

$$\overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = 0$$

  - Cuando el módulo de la velocidad es constante: $v = cte.$

$$\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} = 0$$

TEMA 1: CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

- Resolvemos el *problema directo* cuando conocido:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \xrightarrow[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}]{} \vec{v}(t), \vec{a}(t)$$

- Resolvemos el *problema inverso* cuando conocido:

$$\vec{v}(t), \vec{a}(t) \longrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\int_{v_{i_0}}^{v_i} dv_i = \int_{t_0}^{t} a_i dt \quad con\ i = x, y, z$$

$$\int_{i_0}^{i} di = \int_{t_0}^{t} v_i dt \quad con\ i = x, y, z$$