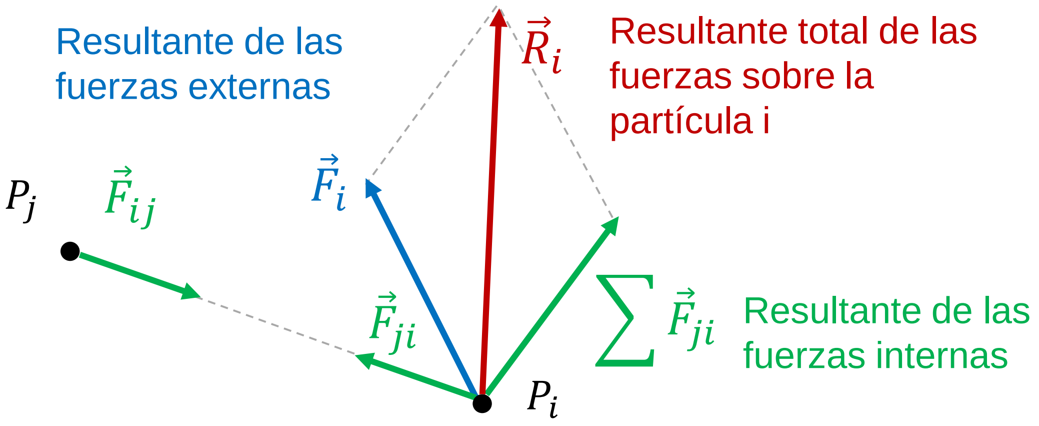
ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

TEMA 13: ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Recordatorio

- **FUERZA RESULTANTE** – para cada una de las partículas que constituyen el sistema será:

$$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}$$



- **TRABAJO ELEMENTAL** – producto escalar de la fuerza por el desplazamiento elemental:

$$dW_i = \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}\right) d\vec{r}_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i$$

Trabajo elemental de una partícula del sistema

Para todo el sistema

$$dW = \sum_i dW_i = \sum_i \left(\vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i\right) = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i}_{=0}$$

Aplicando el 3^{er} axioma

Trabajo de las fuerzas interiores y exteriores

$$W_{int} = \int dW_{int} = \sum_i \sum_j \int \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i = 0$$

En un sólido rígido el trabajo de las fuerzas interiores será nulo, y por tanto el trabajo elemental será:

$$dW = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

❖ TRABAJO DEL SISTEMA

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

El trabajo del sólido entre dos puntos A y B será realizado por las fuerzas exteriores.

TEMA 13: ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

- Para cada partícula del sólido:

$$dW_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i = m\frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i = m\, d\vec{v}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m\, d\vec{v}_i \vec{v}_i = m\, dv_i v_i = d\left(\frac{1}{2} m v_i^2\right) dE_{c_i}$$

Esta igualdad la vimos en el tema 8

Si lo extendemos a todo el sólido

$$dW = \sum_i dW_i = \sum_i d\left(\frac{1}{2} m v_i^2\right) = \sum_i dE_{c_i} = dE_c$$

El trabajo resultante entre dos puntos A y B

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B dE_c = E_{c_B} - E_{c_A} = \sum_i \frac{1}{2} m v_{i_B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m v_{i_A}^2$$

$$W_{AB} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

$$\boxed{W_{AB} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i d\vec{r}_i = E_{c_B} - E_{c_A}}$$

Teorema de la Energía cinética

TEMA 13: ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Energía cinética del sistema para su descripción helicoidal

- El movimiento general de un sistema se puede descomponer en cada instante en una traslación más una rotación. De todas las descripciones posibles la más sencilla es la **DESCRIPCIÓN HELICOIDAL** (la velocidad de traslación denominada en este caso velocidad de deslizamiento v_H, es paralela a ω). $\vec{\boldsymbol{\omega}} \parallel \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{H}}$

$$E_c = \sum_i E_{c_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_H + \vec{v}_{i_{Rot}}\right)\left(\vec{v}_H + \vec{v}_{i_{Rot}}\right) =$$

Toda la velocidad

$\vec{v}_i = \vec{v}_H + \vec{v}_{i_{Rot}}$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_H \vec{v}_H + 2\vec{v}_H \vec{v}_{i_{Rot}} + \vec{v}_{i_{Rot}} \vec{v}_{i_{Rot}}\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_H^2 + v_{i_{Rot}}^2\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_H^2 + \omega^2 r_i^2\right) =$$

$= 0$

$\vec{v}_H \perp \vec{v}_{i_{Rot}}$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_H^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} m v_H^2 + \frac{1}{2} \omega^2 I_H$$

I_H

Energía cinética del sistema para su descripción helicoidal

$$E_c = \frac{1}{2}mv_H^2 + \frac{1}{2}\omega^2 I_H = E_{c_{Trasl}} + E_{c_{Rot}}$$

$$\boxed{E_{c_{Trasl}} = \frac{1}{2}mv_H^2}$$

$$\boxed{E_{c_{Rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 I_H}$$

La energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética de traslación y la energía cinética de rotación

- En un movimiento plano:
  - Traslación pura $(\omega = 0)$ – $E_{c_{Trasl}} = \frac{1}{2}mv_{Trasl}^2$
  - Rotación pura $(v_H = 0)$ – $E_{c_{Rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 I_H$

TEMA 13: ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Energía cinética para el $c.d.m.$

- Si consideramos la descripción del movimiento del sistema mediante una traslación más una rotación en torno al $c.d.m.$

$$E_c = \frac{1}{2}\omega^2 I_H$$

Energía cinética del sistema para un eje que pasa por el CIR

$$I_H = I_G + mr_G^2$$

Teorema de Steiner

$$E_c = \frac{1}{2}\omega^2(I_G + mr_G^2) = \frac{1}{2}\omega^2 I_G + \frac{1}{2}\omega^2 m r_G^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I_G + \frac{1}{2}m\underbrace{\omega^2 r_G^2}_{v_G^2} = \frac{1}{2}\omega^2 I_G + \frac{1}{2}mv_G^2$$

$$E_{c_{Trasl}} = \frac{1}{2}mv_G^2$$

$$E_{c_{Rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 I_G$$

$$\boxed{\Delta E_c = \Delta E_{c_{Trasl}} + \Delta E_{c_{Rot}}}$$

2º Teorema de Köning

2º Teorema del $c.d.m.$

TEMA 13: ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Teorema de la energía mecánica para un sistema

- Reformulemos este teorema que ya vimos para la partícula, para aplicarlo al sistema, por tanto tenemos que incluir la energía cinética de la rotación.

$$W_{AB}^{NC} = \Delta E_P + \Delta E_C = \left(E_{P_B} + \frac{1}{2} m v_{G_B}^2 + \frac{1}{2} \omega_B^2 I_G\right) - \left(E_{P_A} + \frac{1}{2} m v_{G_A}^2 + \frac{1}{2} \omega_A^2 I_G\right) = \Delta E_M$$

ENERGÍA MECÁNICA

Si tenemos un movimiento plano podemos reducir el movimiento a una rotación pura en torno al CIR:

$$W_{AB}^{NC} = \Delta E_P + \Delta E_C = \left(E_{P_B} + \frac{1}{2} \omega_B^2 I_G\right) - \left(E_{P_A} + \frac{1}{2} \omega_A^2 I_G\right) = \Delta E_M$$

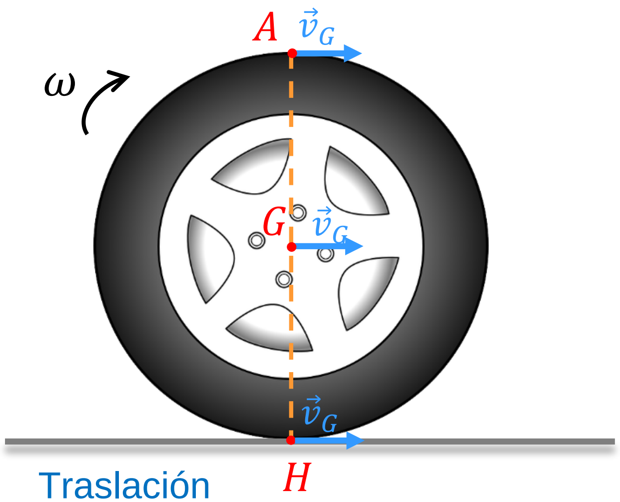
Si e trata de una traslación pura la expresión es análoga a la que vimos para la partícula:

$$W_{AB}^{NC} = \Delta E_P + \Delta E_C = \left(E_{P_B} + \frac{1}{2} m v_{G_B}^2\right) - \left(E_{P_A} + \frac{1}{2} m v_{G_A}^2\right) = \Delta E_M$$

TEMA 13: ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

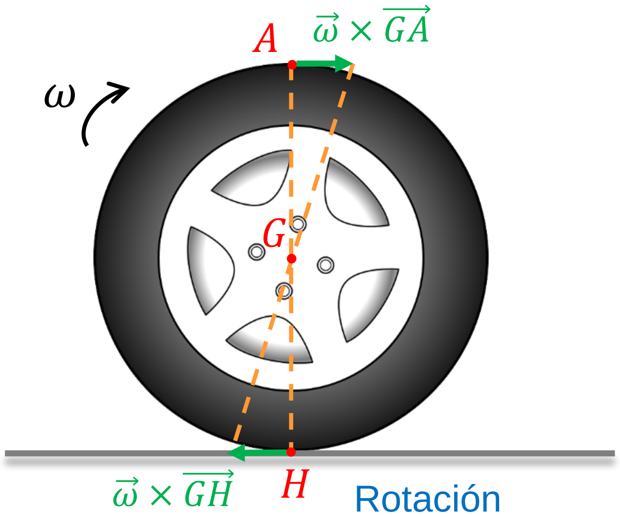
❖ RODADURA SIN DESLIZAMIENTO

➢ Modelizamos en el $c.d.m.$



Traslación

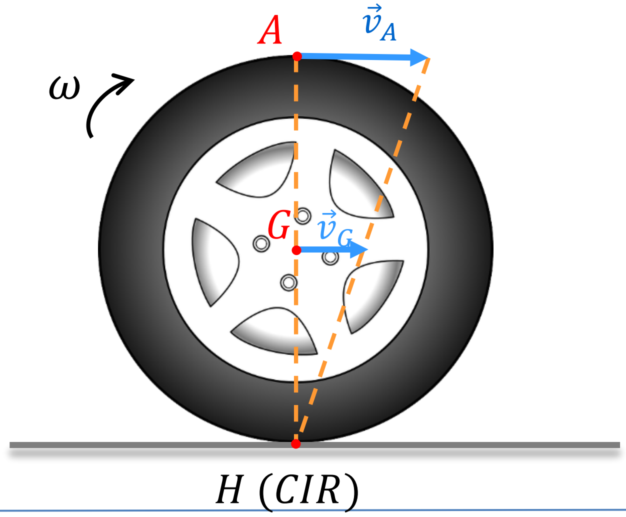
$+$



Rotación

$$E_c = \frac{1}{2}\omega^2 I_G + \frac{1}{2} m v_G^2$$

➢ Modelizamos en H



Rotación instantánea

$$\left.\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}\omega^2 I_H \\ \\ I_H = I_G + mR^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}\omega^2 (I_G + mR^2) = \\ \\ = \frac{1}{2}\omega^2 I_G + \frac{1}{2} m v_G^2 \end{array}$$