

# MOMENTO CINÉTICO DE UN SISTEMA ROTACIÓN DEL SISTEMA

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

**12.1** Momento cinético. Momento de inercia

12.2 Cálculo del momento de inercia

12.3 Teorema de Steiner

12.4 Momentos de inercia de sólidos habituales

12.5 Teorema del momento cinético

12.6 Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

12.7 Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

12.8 Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

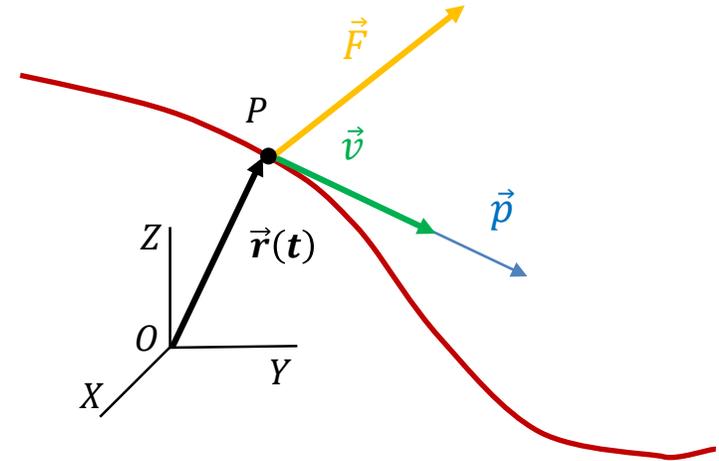
# Momento cinético. Momento de inercia.

## Recordatorio

- ❖ **MOMENTO CINÉTICO DE UNA PARTÍCULA** – se define como el momento central respecto de un punto del vector cantidad de movimiento.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}||\vec{v}|m \cdot \text{sen}\alpha$$



## ➤ TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

La variación del momento cinético para móviles de masa constante es debido al momento de las fuerzas exteriores

# Momento cinético. Momento de inercia.

- ❖ **MOMENTO CINÉTICO DE UN SISTEMA** – si consideramos que nuestro sistema tiene una rotación pura (no hay traslación).

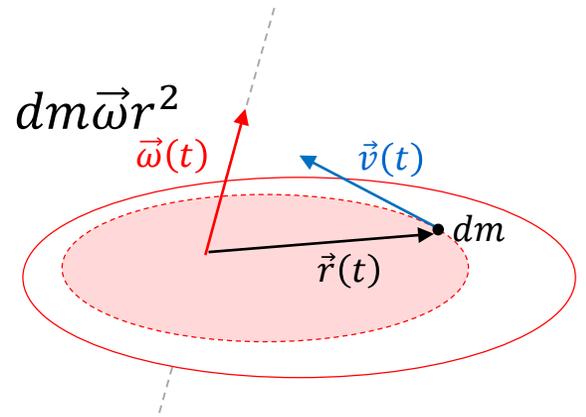
$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm\vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm(\vec{\omega} \times \vec{r}) = dm[\vec{\omega} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\omega})] = dm\vec{\omega}r^2$$

$$\vec{v} \perp m\vec{v} = 0$$



Extendemos esta expresión a todo el sistema

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{\omega}r^2 dm = \vec{\omega} \int r^2 dm = \vec{\omega}I$$

Es igual para todos los  $dm$

$$\vec{L} = \vec{\omega}I$$

**Momento cinético del sistema**

$$I = \int r^2 dm$$

**Momento de Inercia**

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

12.1 Momento cinético. Momento de inercia

12.2 **Cálculo del momento de inercia**

12.3 Teorema de Steiner

12.4 Momentos de inercia de sólidos habituales

12.5 Teorema del momento cinético

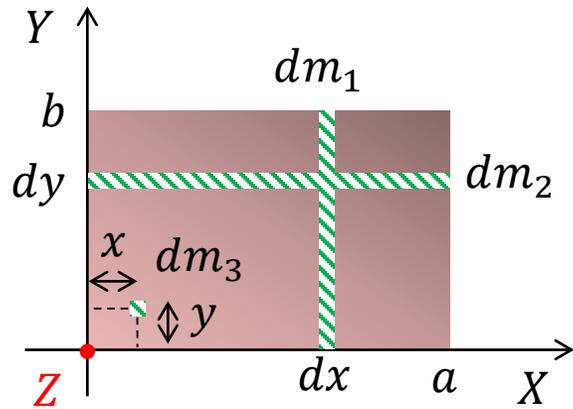
12.6 Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

12.7 Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

12.8 Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*



# Cálculo del momento de inercia



3. Tomando un diferencial de masa  $dm_3$  que se sitúa a una distancia  $y$  del eje X,  $x$  del eje Y

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_x + I_y$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$a > b$$

$$I_z = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$$

$$I_x = \frac{1}{3} mb^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} ma^2$$



$$I_z > I_y > I_x$$

La placa de nuestro ejemplo tiene tantos momentos de inercia como posibles ejes

El momento de inercia  $I$  representa una oposición a la rotación, que cambia en función de donde situemos el eje

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

12.1

Momento cinético. Momento de inercia.

12.2

Cálculo del momento de inercia

12.3

**Teorema de Steiner**

12.4

Momentos de inercia de sólidos habituales

12.5

Teorema del momento cinético

12.6

Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

12.7

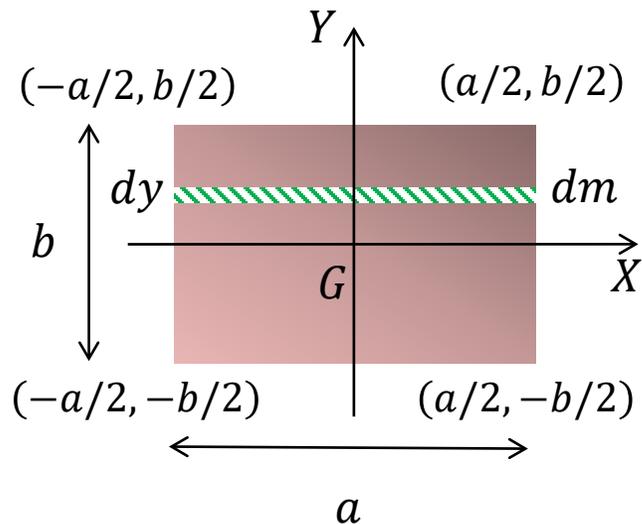
Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

12.8

Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

# Teorema de Steiner

❖ Vamos a considerar una familia de ejes que va a tener unas características especiales. ¿Qué pasa si el eje de rotación pasa por el *c. d. m.* ( $G$ )?



$$I_{xG} = \int r^2 dm = \int y^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \sigma a dy = \sigma a \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12} mb^2$$

$dm = \sigma a dy$                        $m = \sigma ab$

$$I_{xG} < I_x$$

Los ejes que pasan por el *c. d. m.* siempre son los de menor momento de inercia  $I$

Si hacemos la diferencia entre ambos:

$$I_x - I_{xG} = \frac{1}{3} mb^2 - \frac{1}{12} mb^2 = \frac{3}{12} mb^2 = m \left( \frac{b}{2} \right)^2$$

$\frac{b}{2}$  es la distancia que hemos desplazado el eje  $X$  al llevarlo al *c. d. m.*

$$I_x = I_{xG} + m \left( \frac{b}{2} \right)^2$$

# Teorema de Steiner

❖ **TEOREMA DE STEINER** – El momento de inercia de un sistema material respecto a un eje es igual al momento de inercia respecto al *c. d. m.* más el producto de la masa del sistema por la distancia al cuadrado entre ambos ejes.

$$I = I_G + mD^2$$

Dado que los menores momentos de inercia son que se toman respecto a ejes que pasan por el *c. d. m.*, cuando desplazamos el eje del *c. d. m.* el momento de inercia aumenta.

Una vez conocido  $I_G$  podemos obtener cualquier otro  $I$  de forma sencilla.

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

12.1

Momento cinético. Momento de inercia.

12.2

Cálculo del momento de inercia

12.3

Teorema de Steiner

12.4

**Momentos de inercia de sólidos habituales**

12.5

Teorema del momento cinético

12.6

Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

12.7

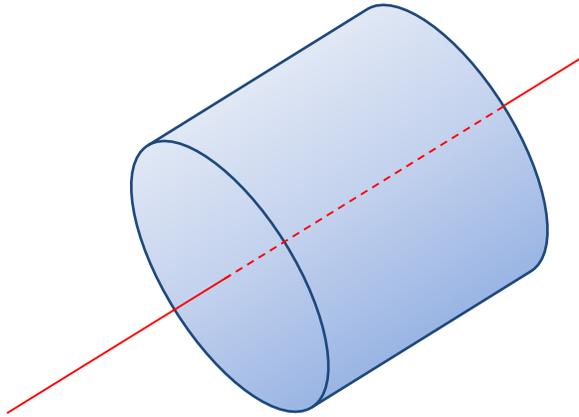
Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

12.8

Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

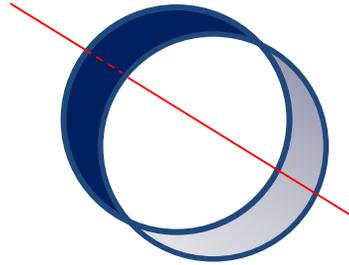
# Momentos de inercia de sólidos habituales

❖ Los momentos de inercia que nos debemos saber son los siguientes:



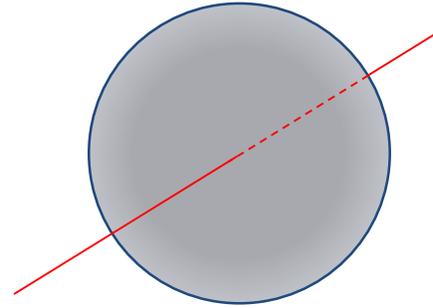
Cilindro sólido o disco,  
eje simétrico

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



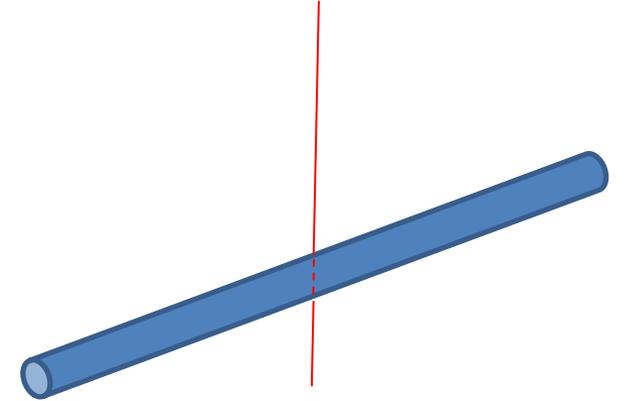
Anillo sobre un eje  
simétrico

$$I = mR^2$$



Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$



Varilla con eje sobre el  
centro

$$I = \frac{1}{12} mL^2$$

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

12.1

Momento cinético. Momento de inercia.

12.2

Cálculo del momento de inercia

12.3

Teorema de Steiner

12.4

Momentos de inercia de sólidos habituales

12.5

**Teorema del momento cinético**

12.6

Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

12.7

Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

12.8

Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

# Teorema del momento cinético

## ❖ TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

➤ Momento cinético de una partícula  $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} dm$

➤ Momento cinético de un sistema  $\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$

Derivamos respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int \vec{r} \times \vec{v} dm \right) = \int \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} dm + \int \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} dm = \int \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} dm + \int \vec{r} \times \vec{a} dm = \int \vec{r} \times \vec{F}$$

*m no cambia con t*

El conjunto de fuerzas con el que vamos a trabajar es un conjunto discreto, la expresión anterior se convierte en:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

**La variación del momento cinético es la suma de los momentos centrales de las fuerzas exteriores**

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

12.1

Momento cinético. Momento de inercia.

12.2

Cálculo del momento de inercia

12.3

Teorema de Steiner

12.4

Momentos de inercia de sólidos habituales

12.5

Teorema del momento cinético

12.6

**Variación del momento cinético respecto al eje de rotación**

12.7

Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

12.8

Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

# Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

## ❖ EL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN $E$

$$\vec{L}_E = I_E \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_E}{dt} = \frac{d}{dt} (I_E \vec{\omega}) = I_E \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_E \vec{\alpha}$$

$I$  no cambia con  $t$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{L}_E}{dt} &= \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \\ \frac{d\vec{L}_E}{dt} &= I_E \vec{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = I_E \vec{\alpha}}$$

El momento de las fuerzas exteriores respecto al eje de rotación es igual al producto de la aceleración angular por el momento de inercia respecto a es eje.

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

12.1

Momento cinético. Momento de inercia.

12.2

Cálculo del momento de inercia

12.3

Teorema de Steiner

12.4

Momentos de inercia de sólidos habituales

12.5

Teorema del momento cinético

12.6

Variación del momento cinético respecto al eje de rotación

12.7

**Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro**

12.8

Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

# Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro

$$\diamond \text{ Si: } \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad I\vec{\omega} = cte.$$

Si no hay momento de las fuerzas exteriores el momento cinético se conserva.

Por tanto el producto  $I\vec{\omega} = cte$ .

Dado que  $I$  es una característica constructiva en principio no cambia, entonces  $\vec{\omega} = cte$

**Un sistema que esta rotando en ausencia de fuerzas exteriores, sigue rotando con el mismo vector velocidad angular  $\vec{\omega}$ , en la misma dirección, mismo sentido y mismo módulo.**

# TEMA 12: MOMENTO CINÉTICO Y ROTACIÓN DEL SISTEMA

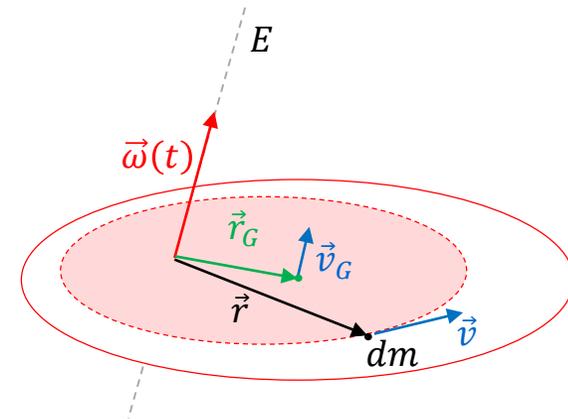
- 12.1 Momento cinético. Momento de inercia.
- 12.2 Cálculo del momento de inercia
- 12.3 Teorema de Steiner
- 12.4 Momentos de inercia de sólidos habituales
- 12.5 Teorema del momento cinético
- 12.6 Variación del momento cinético respecto al eje de rotación
- 12.7 Conservación del momento cinético respecto a su eje de giro
- 12.8 Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.***

# Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

## ❖ TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO AL *c. d. m.*

Partimos del momento de inercia respecto a el eje  $E$  y aplicamos el Teorema de Steiner:

$$\left. \begin{aligned} \vec{L} &= \vec{\omega} I \\ I &= I_G + m|\vec{r}_G|^2 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \vec{L} = \vec{\omega} I_G + \vec{\omega} m|\vec{r}_G|^2$$



Hacemos:

$$\vec{r}_G \times \vec{v}_G = \vec{r}_G \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_G \cdot \vec{r}_G) - \vec{r}_G (\vec{r}_G \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} |\vec{r}_G|^2$$

$\vec{r}_G \perp \vec{\omega} = 0$

Sustituyendo

$$\vec{L} = \vec{\omega} I_G + m(\vec{r}_G \times \vec{v}_G) = \vec{\omega} I_G + \vec{r}_G \times m\vec{v}_G$$

# Teorema del momento cinético respecto al *c. d. m.*

## ❖ TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO AL *c. d. m.* (cont.)

Reformulamos la expresión del momento de las fuerzas

$$\left. \begin{aligned} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) &= I\vec{\alpha} \\ I &= I_G + m|\vec{r}_G|^2 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = I_G\vec{\alpha} + m|\vec{r}_G|^2\vec{\alpha}$$

Hacemos:

$$\vec{r}_G \times \vec{a}_G = \vec{r}_G \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_G) = \vec{\alpha} \cdot (\vec{r}_G \cdot \vec{r}_G) - \vec{r}_G (\vec{r}_G \cdot \vec{\alpha}) = \vec{\alpha}|\vec{r}_G|^2$$

$\vec{r}_G \perp \vec{\alpha} \stackrel{!}{=} 0$

Sustituyendo

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = I_G\vec{\alpha} + \vec{r}_G \times m\vec{a}_G$$

**1<sup>er</sup> Teorema de Köning**

**1<sup>er</sup> Teorema del *c. d. m.***