TRABAJO Y ENEGÍA CINÉTICA

TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

Concepto de campo

❖ **CAMPO** – en una región del espacio existe un campo cuando a cada punto de la misma se le puede asociar un valor y sólo uno de una magnitud física.

Esta magnitud puede ser:

- Escalar ⇒ Campo escalar $U = U(x, y, z)$
- Vectorial ⇒ Campo vectorial $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$

En el caso de ser una fuerza se denomina Campo de fuerzas

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{\imath} + F_y(x, y, z)\vec{\jmath} + F_z(x, y, z)\vec{k}$$

Un ejemplo:

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

Circulación elemental. Trabajo

- **CIRCULACIÓN ELEMENTAL DE UN VECTOR** – es el producto de dicho vector por el desplazamiento elemental.

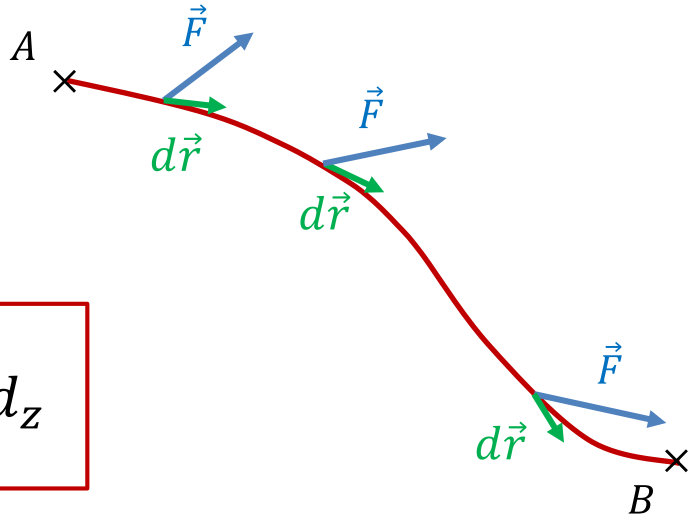
$$dW = \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

- **CIRCULACIÓN DE UN VECTOR ENTRE DOS PUNTOS:**

$$\int_A^B dW = W_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

  - Si se trata de una fuerza $\vec{F}$ la circulación recibe el nombre de **TRABAJO**

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$$
$$d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$



$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z}$$

Circulación elemental. Trabajo

❖ TIPOS DE TRABAJO

- $\boldsymbol{W > 0}$ Trabajo positivo o trabajo motor
- $\boldsymbol{W < 0}$ Trabajo negativo o trabajo resistente
- $\boldsymbol{W = 0}$ Trabajo nulo ⇒ $\begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{F} \perp d\vec{r} \end{cases}$

❖ DIMENSIONES Y UNIDADES

Ecuación de dimensiones $[W] = ML^2T^{-2}$

Unidad en el Sistema Internacional J Julio

$$\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

Circulación elemental. Trabajo

❖ Características del trabajo

➢ **Principio de la independencia** – el trabajo elemental sobre la partícula será la suma de los trabajos elementales. Al igual que la fuerza el trabajo es aditivo.

$$\left.\begin{aligned} dW_1 &= \vec{F}_1 d\vec{r} \\ dW_2 &= \vec{F}_2 d\vec{r} \\ &\dots \\ dW_n &= \vec{F}_n d\vec{r} \end{aligned}\right\} dW = dW_1 + dW_2 + \cdots + dW_n = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \cdots + \vec{F}_n d\vec{r} = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n\right) d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r}$$

Fuerza resultante

Trabajo resultante $$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Fuerza resultante

❖ CARACTERÍSTICAS DEL TRABAJO (CONT.)

- $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\Rightarrow$ $W_{AB} = -W_{BA}$

- $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\Rightarrow$ $W_{AB} = W_{AC} + W_{CB}$

- $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ $\Rightarrow$ $W_{AB} = \sum_{i=1}^{N} W_{AB}^i$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \right) = \sum_{i=1}^{N} \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} W_{AB}^i$$

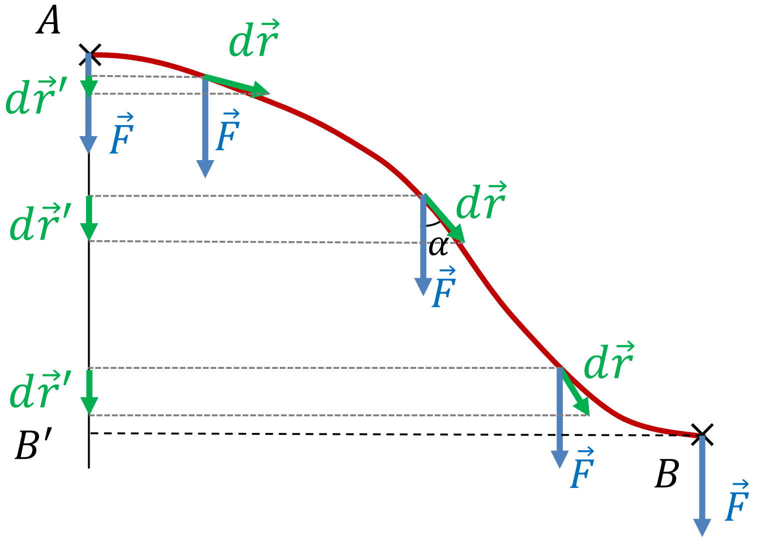
TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

- Sea $\vec{F}$ una fuerza constante

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{AB} = \int_A^B \underset{\text{Cte.}}{F}\ \underbrace{|d\vec{r}|\ cos\alpha}_{\text{Proyección de } d\vec{r} \text{ sobre } \vec{F}} =$$

$$= F\left|\overrightarrow{AB'}\right| = F\left|\overrightarrow{AB}\right| cos\alpha = \vec{F}\,\overrightarrow{AB}$$

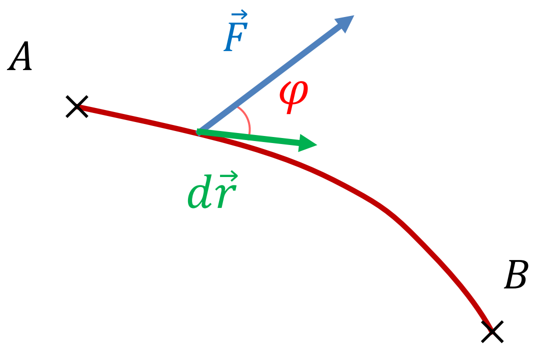
$\left|\overrightarrow{AB}\right| cos\alpha = \left|\overrightarrow{AB'}\right|$



El trabajo realizado por una fuerza constante no depende de camino recorrido, sólo de los puntos inicial y final.

TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

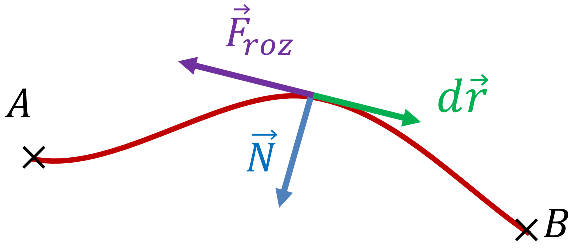
Trabajo en función de la proyección de la fuerza sobre la trayectoria



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B |\vec{F}|\ |d\vec{r}|\ cos\varphi = \int_A^B \underbrace{F\ cos\varphi}_{F_T}\ ds = \int_A^B F_T\ ds$$

TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

Trabajo de la normal y del rozamiento



❖ TRABAJO DE LA NORMAL $\vec{N}$

$$W_{AB}^{N} = \int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\vec{N} \perp d\vec{r}$

❖ CIRCULACIÓN DEL ROZAMIENTO $\vec{F}_{roz}$

$$W_{AB}^{F_{roz}} = \int_A^B \vec{F}_{roz} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left|\vec{F}_{roz}\right| \left|d\vec{r}\right| \underbrace{cos\varphi}_{=-1} = -\int_A^B F_{roz}\, ds$$

TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

❖ TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

$$\left.\begin{aligned} dW &= \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ \vec{F} &= m\vec{a} \end{aligned}\right\} \quad dW = m\,\vec{a}\,d\vec{r} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,d\vec{r} = m\,d\vec{v}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = m\,d\vec{v}\,\vec{v} = m\,\vec{v}d\vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$$

Diferenciamos

$$d\vec{v}\,\vec{v} + \vec{v}\,d\vec{v} = 2\vec{v}\,d\vec{v} = 2v\,dv$$

$$\vec{v}d\vec{v} = v\,dv\,\underbrace{\cos\alpha}_{=1} = v\,dv$$

Entonces: $dW = m\,\vec{v}d\vec{v} = mv\,dv$

Energía cinética

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B mv\,dv = m\int_A^B v\,dv = m\left.\frac{v^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_c^B - E_c^A = \Delta E_c$$

$$\boxed{W_{AB} = E_c^B - E_c^A = \Delta E_c}$$

Teorema de la Energía cinética

TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

Potencia

❖ Potencia instantánea P

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Entonces:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

❖ Potencia media P_m

$$\boxed{P_m = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\int_0^t P\,dt}{\Delta t}}$$

❖ DIMENSIONES Y UNIDADES

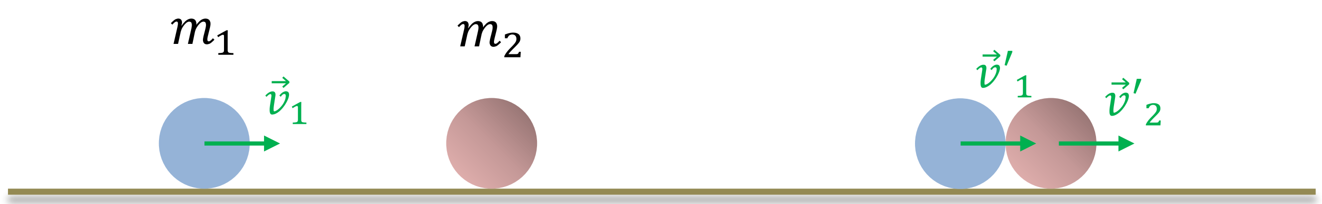
Ecuación de dimensiones $[P] = ML^2T^{-3}$

Unidad en el Sistema Internacional W Vatio

$$\mathrm{W} = \frac{J}{s} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

TEMA 8: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

- **CHOQUE ELÁSTICO –** Se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética.



$$\vec{p} = cte. \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

$$E_c = cte. \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v'_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v'_2}^2 \quad (2)$$

$$m_2 v'_2 = m_1 (v_1 - v'_1) \quad (1)$$

$$m_2 {v'_2}^2 = m_1 \left({v_1}^2 - {v'_1}^2\right) \quad (2)$$

$$= (v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1)$$

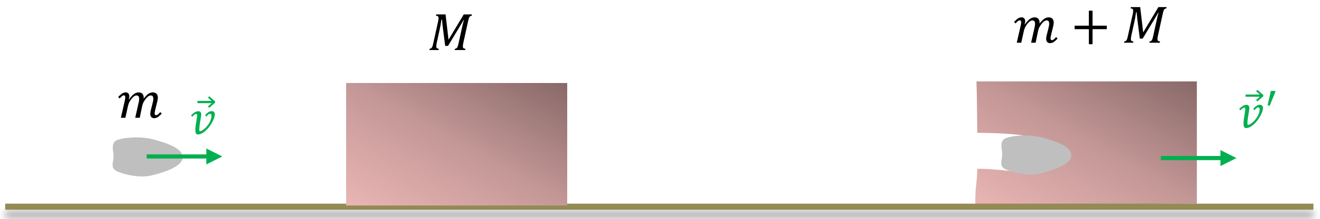
$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{m_2 {v'_2}^2}{m_2 v'_2} = \frac{m_1 (v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1)}{m_1 (v_1 - v'_1)} \Rightarrow v'_2 = (v_1 + v'_1)$$

En (1) $$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_{2_1}} v_1$$

En (2) $$v'_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_{2_1}} v_1$$

Choques

❖ **CHOQUE INELÁSTICO –** Se conserva la cantidad de movimiento pero no la energía cinética



$$\vec{p} = cte. \quad \Rightarrow \quad m\,v = (m+M)v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{m}{m+M}\,v$$

$$E_c \neq cte. \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$E'_c = \frac{1}{2}(m+M)\ v'^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}\ v\right)^2 = \frac{m^2}{2(m+M)}v^2 = E_c\frac{m}{m+M}$$