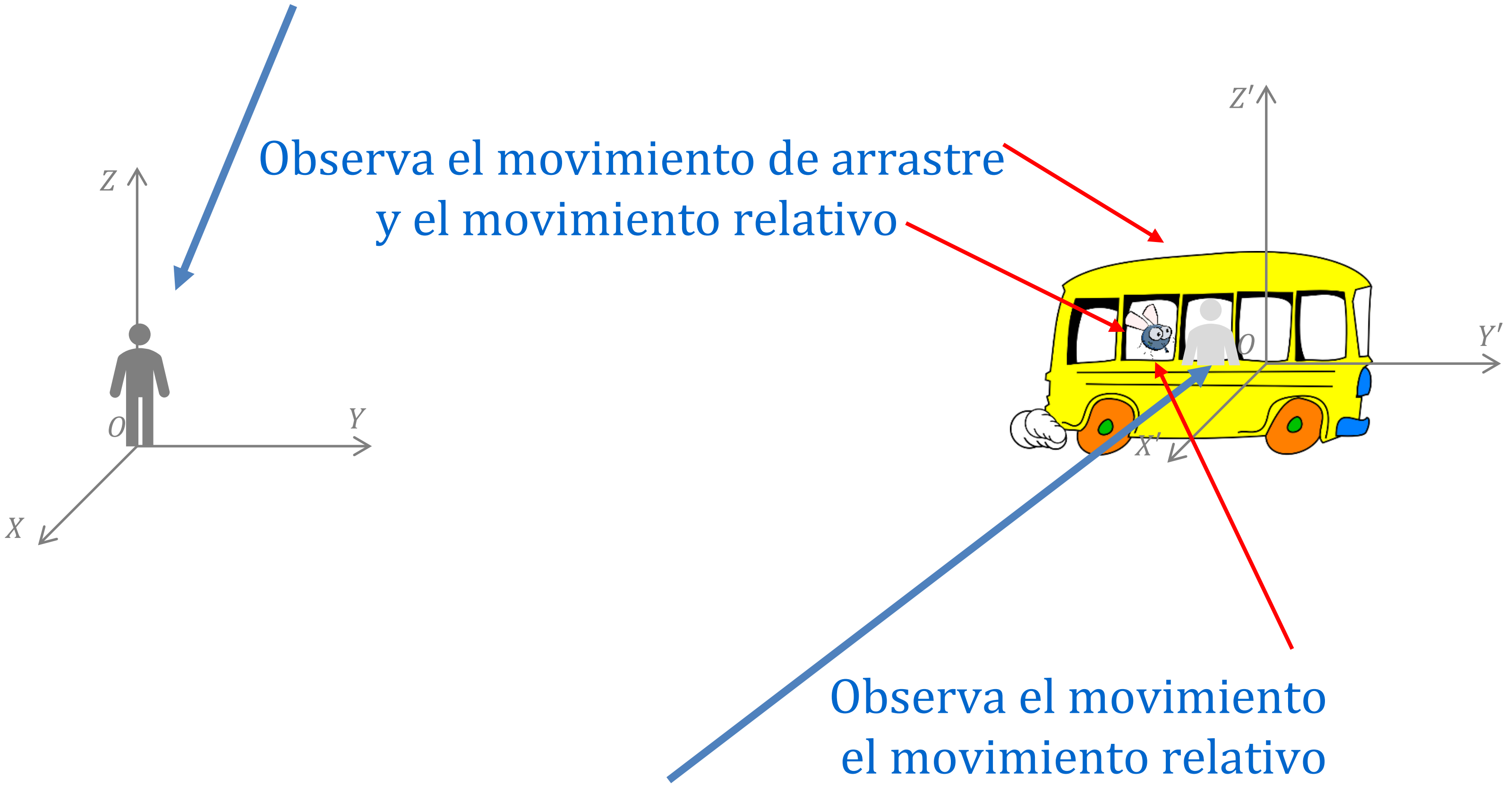
CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

TEMA 5: MOVIMIENTOS PARTICULARES

- Sistema de referencia fijo – Observador externo

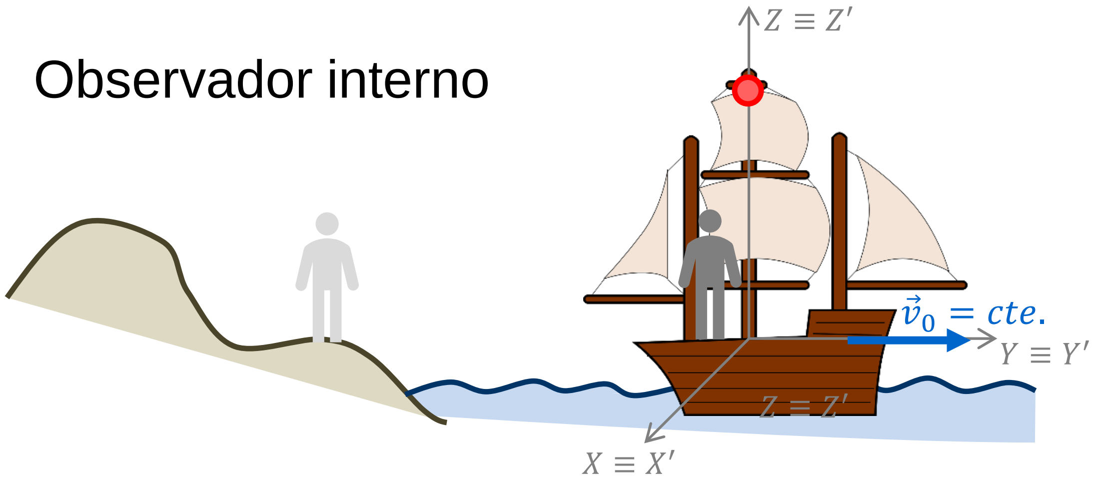


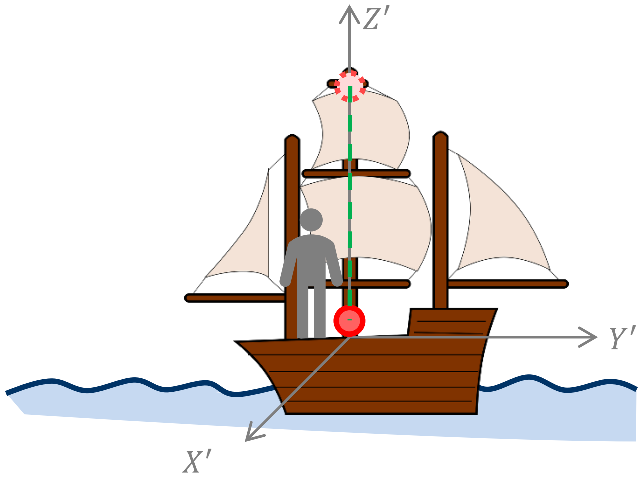
- Sistema de referencia móvil – Observador interno

TEMA 5: MOVIMIENTOS PARTICULARES

- ¿Un mismo movimiento se puede observar de forma diferente?

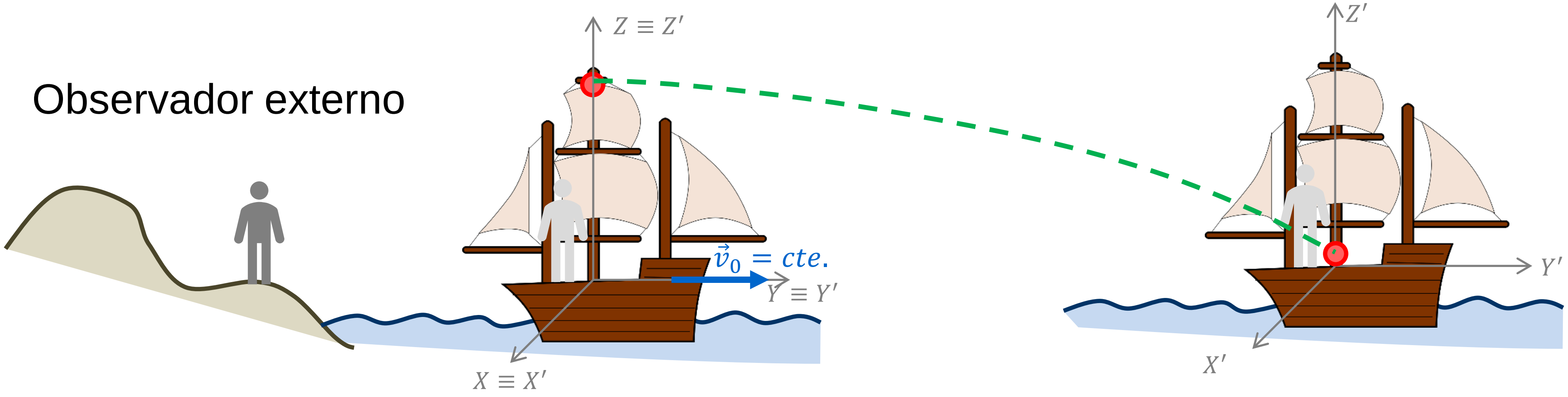
Observador interno





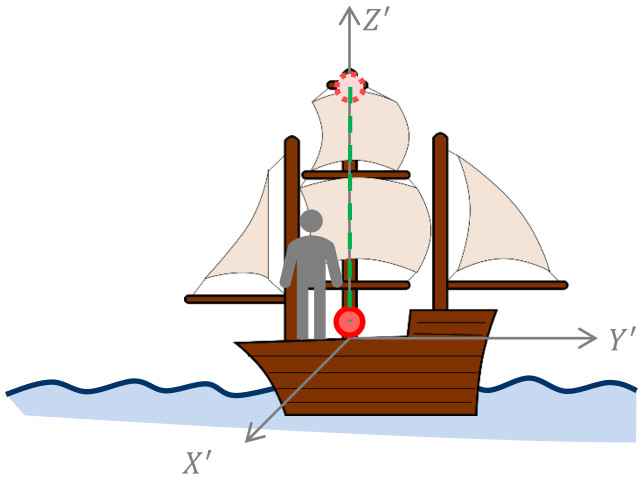
Ve la caída del objeto

Observador externo



Ve la caída del objeto y el avance del barco

➢ Observador interno – movimiento de caída libre (M.R.U.A.)



$$\overrightarrow{a'} = -g\overrightarrow{k'}$$

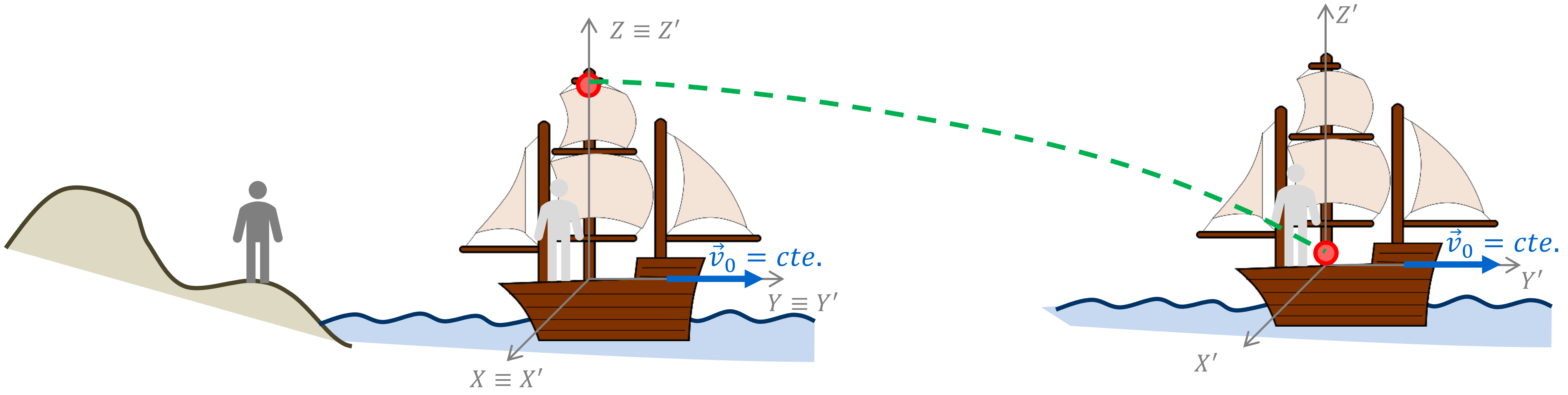
$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} \Rightarrow \int_{\underbrace{v'_{z0}}_{=0}}^{v'_z} dv'_z = \int_0^t a'_z dt = \int_0^t -g dt \Rightarrow \vec{v}' = -gt\vec{k}'$$

Los vectores aceleración y velocidad sólo tienen componente en z

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \Rightarrow \int_{z'_0}^{z'} dz' = \int_0^t v'_z dt = \int_{t_0}^t [-gt] dt \Rightarrow z' = z'_0 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \vec{r}' = \left(z'_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{k}'$$

Lo mismo para el vector de posición

- Observador interno – la única aceleración sigue siendo la gravedad, pero la trayectoria que observa será diferente ➡ es una parábola.



$$\vec{a} = -g\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_0\vec{j} - gt\vec{k}$$

$$\vec{r} = v_0t\vec{j} + \left(z_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = v_0t \\ z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = z_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}y^2}$$

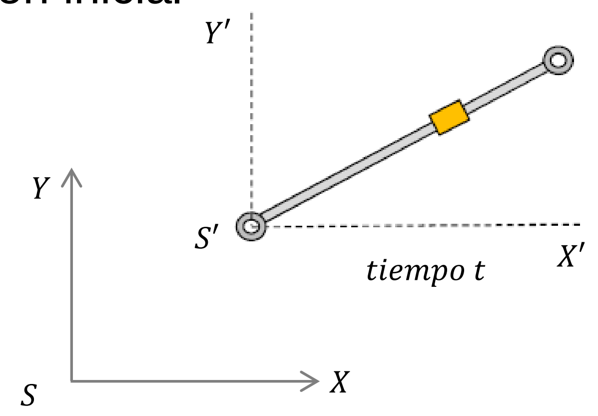
Ecuación de una parábola

TEMA 5: MOVIMIENTOS PARTICULARES

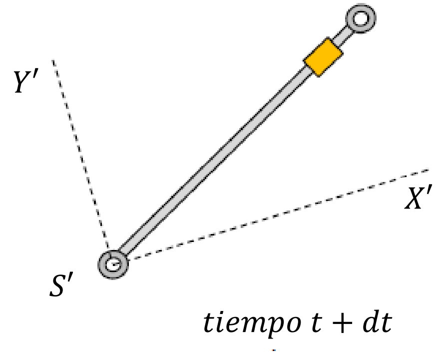
Ecuaciones generales del movimiento relativo

- Vamos a utilizar el movimiento de una barra y de una pieza que se desplaza sobra la barra para desarrollar las ecuaciones del movimiento relativo.

Posición inicial

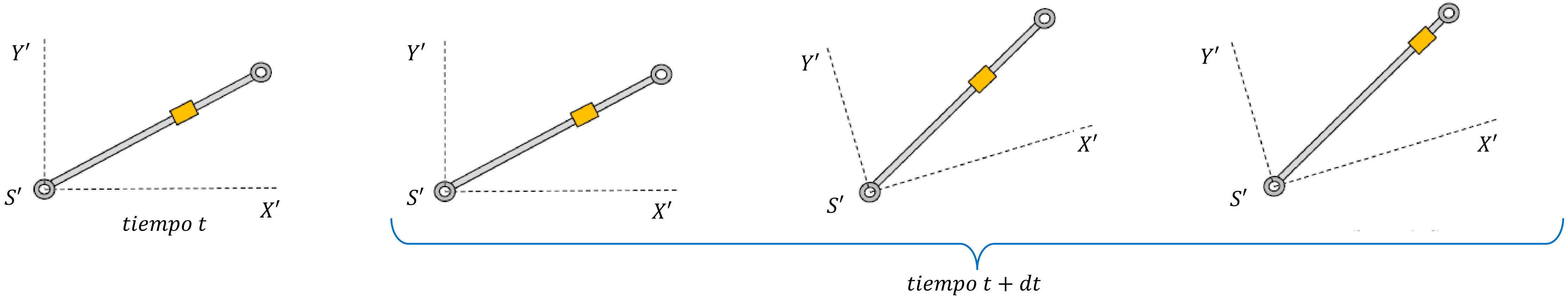


Posición final



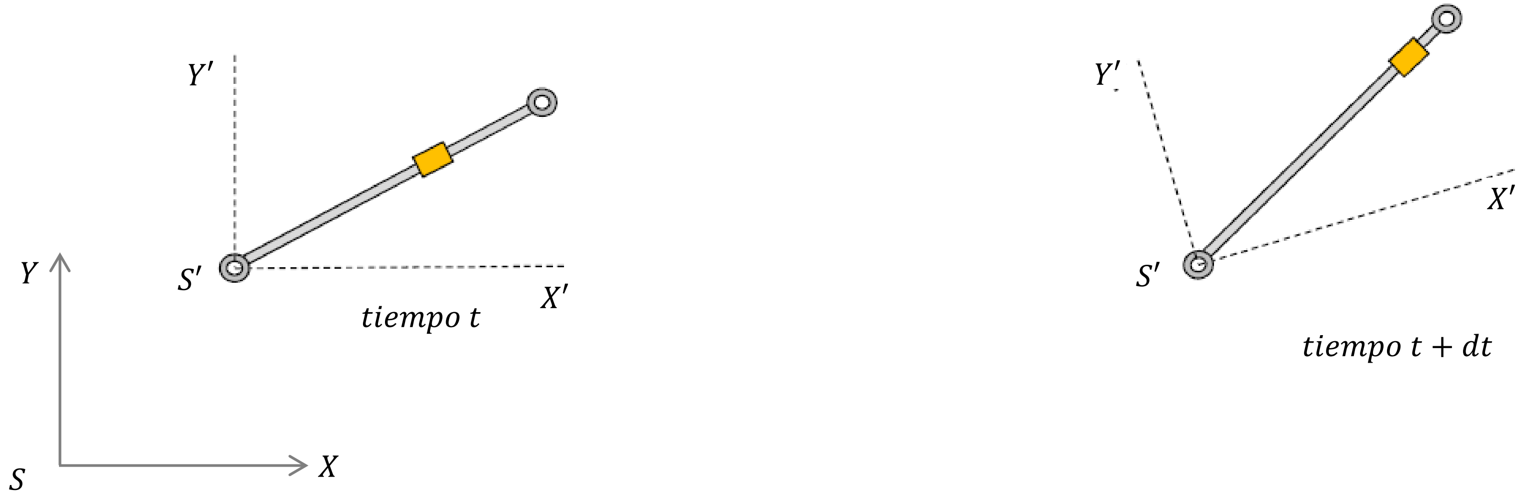
Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

Descomponemos el movimiento



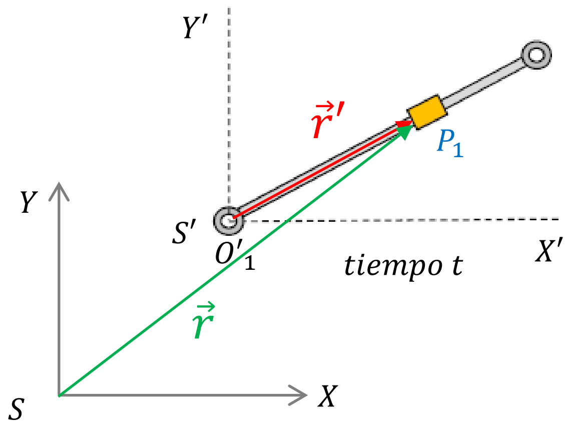
Ecuaciones generales del movimiento relativo

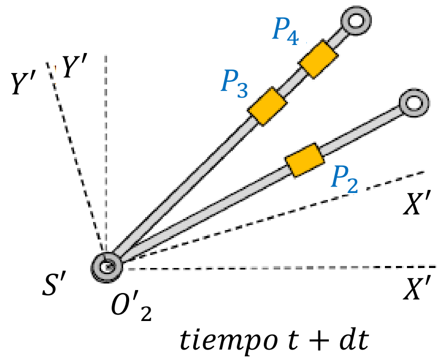
- Vamos a utilizar el movimiento de una barra y de una pieza que se desplaza sobra la barra para desarrollar las ecuaciones del movimiento relativo.



Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

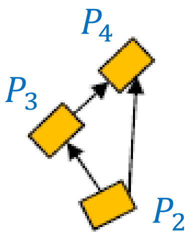
- **REGLA DE DERIVACIÓN RELATIVA:** Esta regla será aplicable a todos los vectores que pertenecen a S'.





Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

Empezamos analizando las posiciones $P_2, P_3,$ y P_4



$$\overrightarrow{P_2P_4} = \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4}$$

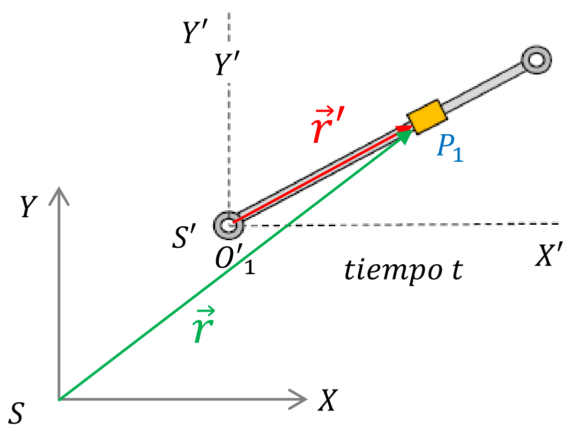
$$\overrightarrow{P_2P_4} = (d\vec{r}')_S$$ Como ve el observador exterior que cambia $\vec{r}'$

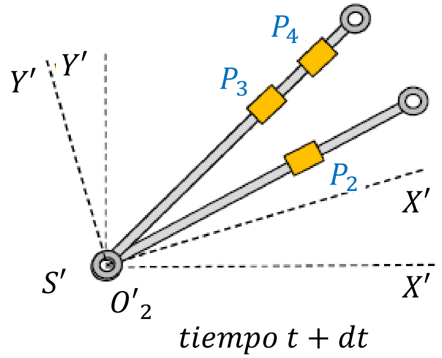
$$\overrightarrow{P_2P_3} = (\vec{\omega} \times \vec{r}')dt$$ Mov. rotación que sólo ve el observador externo

$$\overrightarrow{P_3P_4} = (d\vec{r}')_{S'}$$ Como ve el observador interior que cambia $\vec{r}'$

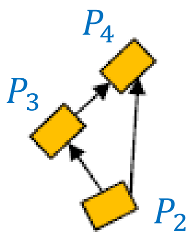
Ecuaciones generales del movimiento relativo

➢ REGLA DE DERIVACIÓN RELATIVA





Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz



$$\overrightarrow{P_2P_4} = \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4}$$

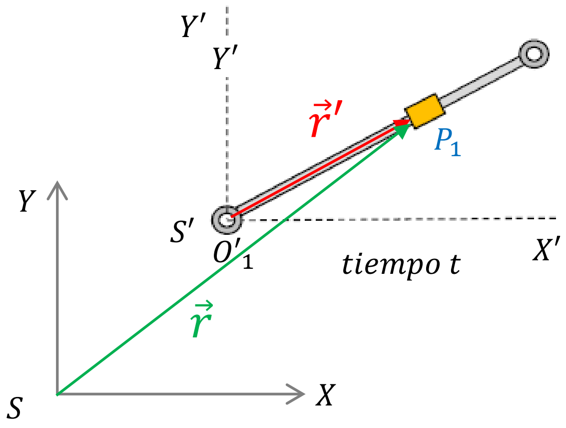
$$(d\vec{r}')_S = (\vec{\omega} \times \vec{r}')dt + (d\vec{r}')_{S'}$$

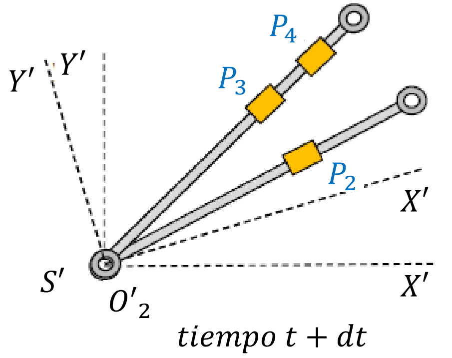
$$\boxed{\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S = (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'}}$$

Regla de derivación relativa

Ecuaciones generales del movimiento relativo

➢ ECUACIÓN DE VELOCIDADES

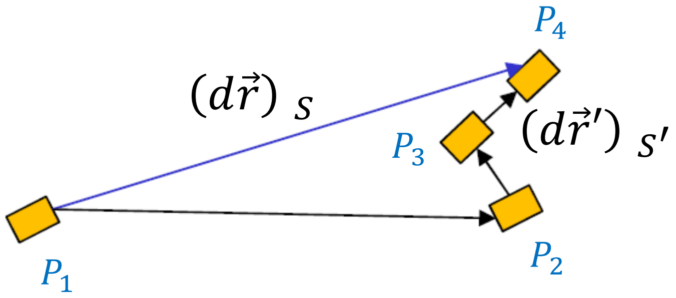




Imágenes aportadas por el profesor J.I. Díaz

Nos falta analizar el movimiento de traslación que lleva de P_1 a P_2.

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} \Rightarrow (d\vec{r})_S = \vec{v}_{0'}dt + (\vec{\omega} \times \vec{r}')dt + (d\vec{r}')_{S'} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \vec{v}_{0'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'}$$



Ecuación de velocidades

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{0'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}'}$$

Velocidad de traslación de arrastre

Velocidad relativa

Velocidad de rotación de arrastre

TEMA 5: MOVIMIENTOS PARTICULARES

5.1 Sistemas de referencia móviles

5.2 Relatividad de Galileo

5.3 Ecuaciones generales del movimiento relativo

5.4 **Teorema de Coriolis**

❖ Ecuación de aceleraciones

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{v}_{0'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'] = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} =$$

$$= \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} = (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} = (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

Aplicamos al regla de derivación relativa

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times [(\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'] + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}' = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'}$$

Ecuación de aceleraciones

Teorema de Coriolis

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

Aceleración de traslación de arrastre

Término tangencial de la aceleración de rotación de arrastre

Término normal de la aceleración de rotación de arrastre

Aceleración relativa

Encontramos un término que no esperábamos, se denomina **Aceleración de Coriolis**

$$\boxed{\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')}$$

La ecuación de aceleraciones se puede escribir como:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_a + \vec{a}' + \vec{a}_C}$$

¿Cuándo no hay $\vec{a}_C$?

- Cuando el movimiento de arrastre es sólo de traslación, $\vec{\omega}$ de arrastre es cero.
- Cuando no hay movimiento relativo, i.e. $\vec{v}' = 0$
- Cuando $\vec{\omega}$ y $\vec{v}'$ son paralelas